ВАРІАНТ №12

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1	X			
1.2		X		
1.3			X	
1.4		X		
1.5			X	
1.6	X			
1.7				X
1.8			X	
1.9			X	
1.10		X		
1.11		X		
1.12	X			

1.1. 50 км = 5 000 000 см. Отже, масштаб карти становить 1 : 5 000 000.

1.2. $x + 5\frac{2}{5} = 10; x = 10 - 5\frac{2}{5}; x = 4\frac{3}{5}$.

1.5. $12x^{12} \cdot \frac{y^3}{8x^4} = \frac{12x^{12}}{1} \cdot \frac{y^3}{8x^4} = \frac{3}{2}x^8y^3$ — *відповідь не точна, бо вираз* $\frac{3}{2}x^8y^3$ *не є дробом.*

1.6. $\frac{a^2-5}{a-\sqrt{5}} = \frac{(a-\sqrt{5})(a+\sqrt{5})}{a-\sqrt{5}} = a+\sqrt{5}$.

1.7. $x_в = \frac{6}{2\cdot 3} = 1$.

1.8. Серед 35 натуральних чисел від 1 до 35 із цифрою 3 є такі числа: 3, 13, 23, 30, 31, 32, 33, 34, 35 — усього 9 чисел. Отже, шукана ймовірність дорівнює $\frac{9}{35}$.

1.9. Нехай $\angle BOC = \angle AOD = x$, тоді $\angle AOB = 5x$. Рівняння: $x + 5x = 180$; $6x = 180$; $x = 30$. Отже, $\angle BOC = 30°$.

1.10. Третя частина кола містить дугу у 360° : 3 = 120°. Тоді вписаний кут, який спирається на цю дугу, дорівнює: 120° : 2 = 60°.

1.11. Друга сторона прямокутника дорівнює: $\sqrt{13^2-12^2} = \sqrt{25} = 5$ (см). Тоді площа прямокутника дорівнює: $12 \cdot 5 = 60$ (см^2).

Частина 2

2.1.	−3; 6	2.3.	16
2.2.	$y = -1{,}5x$	2.4.	60°; 120°

2.1. $\frac{x-7}{x-2}+\frac{x+4}{x+2}=1$; $\frac{x-7}{x-2}+\frac{x+2+2}{x+2}=1$; $\frac{x-7}{x-2}+1+\frac{2}{x+2}=1$; $\frac{x-7}{x-2}+\frac{2}{x+2}=0$;

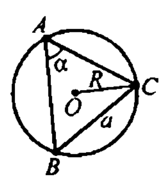
$\frac{x-7}{x-2} = \frac{-2}{x+2}$; $\begin{cases}(x-7)(x+2)=-2(x-2),\\(x-2)(x+2)\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-3x-18=0,\\(x+2)(x-2)\neq 0;\end{cases}$ $x_1=-3; x_2=6$.

2.2. Координати точки $A(-2; 3)$ задовольняють рівняння прямої $y = kx$. Отже, $3 = -2k$; $k = -1{,}5$. Рівняння прямої: $y = -1{,}5x$.

2.3. $q = b_4 : b_3 = -3 : 6 = -0{,}5$. $b_1 = \frac{b_3}{q^2} = \frac{6}{(-0{,}5)^2} = 24$. $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{24}{1+0{,}5} = 16$.

2.4. $BC = a = 12$ см, $OC = R = 4\sqrt{3}$ см. За наслідком теореми синусів $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, звідки $\sin\alpha = \frac{a}{2R} = \frac{12}{2\cdot 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 120°$.



Частина 3

3.1. Нехай перша труба може наповнити басейн за x год, тоді за 1 год вона наповнить $\frac{1}{x}$ частину басейну. Друга труба за 1 год наповнить $\frac{1}{x+8}$, а третя — $\frac{1}{x+2}$ частини басейну. Рівняння: $\frac{1}{x} = \frac{1}{x+8}+\frac{1}{x+2}$;

$\frac{x(x+2)+x(x+8)-(x+2)(x+8)}{x(x+2)(x+8)} = 0$; $\frac{x^2-16}{x(x+2)(x+8)} = 0$; $x_1 = -4$ — не задовольняє умову задачі, $x_2 = 4$ (год). Отже, перша труба може наповнити басейн за 4 год, друга — за 4 + 8 = 12 (год), третя — за 4 + 2 = 6 (год).

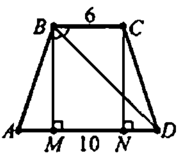
Відповідь: 4 год, 12 год, 6 год.

3.2. $\sqrt{7-\sqrt{|x|-5}} = 2$; $7-\sqrt{|x|-5} = 4$; $\sqrt{|x|-5} = 3$; $|x|-5 = 9$; $|x| = 14$;

$x_1 = 14, x_2 = -14$.

Відповідь: −14; 14.

3.3. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція ($AD \parallel BC$, $AB = CD$), BD — діагональ, BM і CN — висоти, $BC = 6$ см, $AD = 10$ см, $\angle ABD = \angle DBC$. $\angle DBC = \angle BDA$ ($BC \parallel AD$, BD — січна). Отже, $\angle ABD = \angle ADB$ і ΔABD — рівнобедрений, тому $AB = AD = 10$ см. $MN = BC = 6$ см. $AM = ND = (10-6) : 2 = 2$ (см). З ΔABM ($\angle M = 90°$) за теоремою Піфагора: $BM^2 = AB^2 - AM^2 = 10^2 - 2^2 = 96$. $MD = MN + ND = 6 + 2 = 8$ (см).



З ΔBMD ($\angle M = 90°$): $BD = \sqrt{BM^2+MD^2} = \sqrt{96+8^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ (см).

Відповідь: $4\sqrt{10}$ см.

Частина 4

4.1. Нехай a та b $(a > b)$ шукані натуральні числа, тоді $19 = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. Оскільки 19 — просте число, а множники отриманого виразу натуральні числа, то:

1) $\begin{cases}a-b=1,\\a^2+ab+b^2=19;\end{cases}$ $\begin{cases}a=b+1,\\(b+1)^2+(b+1)b+b^2=19;\end{cases}$

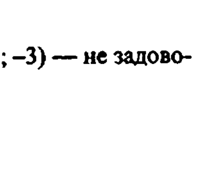
$\begin{cases}a=b+1,\\3b^2+3b-18=0;\end{cases}$ $\begin{cases}a=b+1,\\b^2+b-6=0;\end{cases}$ $\begin{cases}a_1=3,\\b_1=2;\end{cases}$ $\begin{cases}a_2=-2,\\b_2=-3;\end{cases}$ пара (−2; −3) — не задовольняє умову задачі, отже, $a_1 = 2, b_1 = 3$;

2) $\begin{cases}a-b=19,\\a^2+ab+b^2=1;\end{cases}$ $\begin{cases}a=b+19,\\(b+19)^2+(b+19)b+b^2=1;\end{cases}$

$\begin{cases}a=b+19,\\3b^2+57b+360=0;\end{cases}$ $\begin{cases}a=b+19,\\b^2+19b+120=0;\end{cases}$ $\begin{cases}a=b+19,\\b\in\varnothing.\end{cases}$ Єдиний розв'язок вказує на єдиність подання числа 19 у вигляді різниці кубів натуральних чисел.

Відповідь: 2 і 3.

4.2. Нехай ABC — заданий прямокутний трикутник ($\angle C = 90°$), K — центр вписаного півкола, $AK = 15$ см, $KB = 20$ см. Позначимо радіус півкола через r. З ΔKMB ($\angle M = 90°$): $MB = \sqrt{KB^2 - KM^2} = \sqrt{20^2 - r^2} = \sqrt{400 - r^2}$.



Оскільки $\Delta ANK \sim \Delta KMB$ (за двома кутами), то $\frac{AK}{KN} = \frac{KB}{MB}$, тобто $\frac{15}{r} = \frac{20}{\sqrt{400-r^2}}$; $3\sqrt{400-r^2} = 4r$; $9(400-r^2) = 16r^2$;

$25r^2 = 3600$; $r^2 = 144$; $r_1 = 12$, $r_2 = -12$ — не підходить. Оскільки дуга MN відповідає центральному куту $\angle MKN = 90°$, то

$l = \frac{\pi\cdot r\cdot n°}{180°} = \frac{\pi\cdot 12\cdot 90°}{180°} = 6\pi$ (см).

Відповідь: 6π см.