ВАРІАНТ №13

Частина 1

	А	Б	В	Г		А	Б	В	Г		А	Б	В	Г
1.1				X	1.5			X		1.9				X
1.2		X			1.6		X			1.10	X			
1.3			X		1.7			X		1.11		X		
1.4	?	?	?	?	1.8	X				1.12			X	

1.3. $a^3 - 64 = a^3 - 4^3 = (a-4)(a^2 + 4a + 16)$.

1.4. $-7ab + (5a+b)(2b-3a) = -7ab + 10ab - 15a^2 + 2b^2 - 3ab = -15a^2 + 2b^2$ — *серед запропонованих правильної відповіді немає.*

1.5. $\left(\dfrac{a^{12}}{a^3 \cdot a^4}\right)^{-2} = \left(a^5\right)^{-2} = a^{-10}$.

1.6. $\dfrac{2c-10}{4c^2+4c+1} \cdot \dfrac{2c+1}{c-5} = \dfrac{2(c-5)}{(2c+1)^2} \cdot \dfrac{2c+1}{c-5} = \dfrac{2}{2c+1}$.

1.10. Нехай шукана проекція дорівнює x см. Отримаємо: $6^2 = 9 \cdot x$; $9x = 36$; $x = 4$ (см).

1.11. $R = a_6 = 48 : 6 = 8$ (см).

1.12. $\dfrac{1}{2} \cdot 40 \cdot d_2 = 200$; $20d_2 = 200$; $d_2 = 10$ (см).

Частина 2

2.1.	$\dfrac{x}{x+3}$
2.2.	$\dfrac{x+3}{2(x+1)}$
2.3.	(–2; –2), (4; 1)
2.4.	16 см

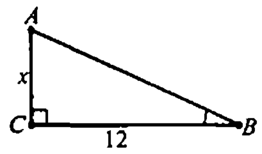
2.1. $4 - x + \dfrac{x^2-12}{x+3} = \dfrac{(4-x)(x+3)+x^2-12}{x+3} = \dfrac{4x+12-x^2-3x+x^2-12}{x+3} = \dfrac{x}{x+3}$.

2.2. $\dfrac{x^2-9}{2x^2-4x-6} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{2\left(x^2-2x-3\right)} = \dfrac{(x-3)(x+3)}{2(x+1)(x-3)} = \dfrac{x+3}{2(x+1)}$.

2.3. $\begin{cases} x - 2y = 2, \\ y = \dfrac{4}{x}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2(y+1), \\ y = \dfrac{4}{2(y+1)}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2(y+1), \\ y = \dfrac{2}{y+1}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2(y+1), \\ y^2 + y - 2 = 0, \\ y \neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2(y+1), \\ y_1 = -2,\ y_2 = 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = -2; \end{cases}$ або $\begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 1. \end{cases}$ (–2; –2), (4; 1).

2.4. $x = AB \cdot \sin B = AB \cdot \dfrac{4}{5}$; $AB = \dfrac{5x}{4}$. $AB^2 = AC^2 + CB^2$;



$\left(\dfrac{5x}{4}\right)^2 = x^2 + 144$; $\dfrac{25x^2}{16} = x^2 + 144$; $25x^2 - 16x^2 =$
$= 144 \cdot 16$; $x^2 = 16 \cdot 16$; $x = 16$; $AC = x = 16$ (см).

Частина 3

3.1. Нехай в першому ящику було x кульок, а в другому y кульок. Система:
$\begin{cases} x + 10 = y - 10, \\ 4(x-20) = y + 20; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x + 20, \\ 4x - 80 = x + 20 + 20; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x + 20, \\ 3x = 120; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 60, \\ x = 40. \end{cases}$

Відповідь: 40 кульок, 60 кульок.

3.2. $\dfrac{(x+a)(x-2a-3)}{x-7} = 0$. Рівняння матиме один корінь, коли множники чисельника будуть рівні і не перетворюватимуться в 0 при $x = 7$ або коли множники чисельника будуть не рівні, але один з них дорівнюватиме $x - 7$.

1) $x + a = x - 2a - 3; 3a = -3; a = -1$. Рівняння: $\dfrac{(x-1)(x-2\cdot(-1)-3)}{x-7} = 0; \dfrac{(x-1)^2}{x-7} = 0$, яке має один корінь. Якщо $a = -1$, то рівняння має один корінь;

2) а) $x + a = x - 7; a = -7$. Рівняння: $\dfrac{(x-7)(x-2\cdot(-7)-3)}{x-7} = 0; \dfrac{(x-7)(x+11)}{x-7} = 0$, яке має один корінь. Якщо $a = -7$, то рівняння має один корінь;

б) $x - 2a - 3 = x - 7; 2a = 4; a = 2$. Рівняння: $\dfrac{(x+2)(x-2\cdot2-3)}{x-7} = 0; \dfrac{(x+2)(x-7)}{x-7} = 0$, яке має один корінь. Якщо $a = 2$, то рівняння має один корінь.

Відповідь: –7; –1; 2.

3.3. Нехай r — радіус вписаного кола, R — радіус описаного кола, a — сторона многокутника. Тоді: $r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}} = 4\sqrt{3}$; $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}} = 8$, звідки:

$a = 16\sin\dfrac{180^\circ}{n}$ і $a = 8\sqrt{3}\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$. $16\sin\dfrac{180^\circ}{n} = 8\sqrt{3}\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$;

$2\sin\dfrac{180^\circ}{n} = \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sin\dfrac{180^\circ}{n}}{\cos\dfrac{180^\circ}{n}}$; $2\cos\dfrac{180^\circ}{n} = \sqrt{3}$; $\cos\dfrac{180^\circ}{n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{180^\circ}{n} = 30^\circ$; $n = 6$.

Тоді $a = 16\sin\dfrac{180^\circ}{n} = 16\sin 30^\circ = 8$ (см).

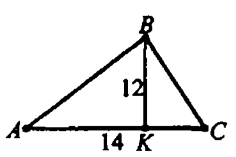
Відповідь: $n = 6$, $a = 8$ см.

Частина 4

4.1. $\left(1+\dfrac{y}{x}\right)\left(1+\dfrac{z}{y}\right)\left(1+\dfrac{x}{z}\right) = \left(1+\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}\right)\left(1+\dfrac{x}{z}\right) = 1+\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}+1 =$

$= \left(\dfrac{x}{z}-2+\dfrac{z}{x}\right)+\left(\dfrac{z}{y}-2+\dfrac{y}{z}\right)+\left(\dfrac{x}{y}-2+\dfrac{y}{x}\right)+8 = \left(\sqrt{\dfrac{x}{z}}-\sqrt{\dfrac{z}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\dfrac{z}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{z}}\right)^2+\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^2 +$
$+ 8 \geq 8$, що й потрібно було довести.

4.2. Нехай ABC — заданий трикутник, у якому $AC = 14$ см, BK — висота, $BK = 12$ см, $P = 42$ см. Нехай $BC = a$, $AB = c$. Тоді $P = a + 14 + c = 42$ (см), звідки $a + c = 28$ (см); $c = 28 - a$. Площа трикутника ABC:



$S = \dfrac{1}{2}AC \cdot BK = \dfrac{1}{2} \cdot 14 \cdot 12 = 84$ (см²). За формулою Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = 42 : 2 = 21$ (см). Тоді
$S = \sqrt{21(21-a)(21-14)(21-c)}$; $S = 7\sqrt{3}\sqrt{(21-a)(21-28+a)} = 84$;
$\sqrt{3}\sqrt{(21-a)(a-7)} = 12$; $(21-a)(a-7) = 48$; $a^2 - 28a + 195 = 0$, звідки $a_1 = 15$, $a_2 = 13$. Таким чином, $c_1 = 28 - a = 13$ (см), $c_2 = 15$ см. Отже, довжини інших сторін трикутника 15 см і 13 см.

Відповідь: 15 см, 13 см.