ВАРІАНТ №16

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1		X		
1.2			X	
1.3		X		
1.4				X

	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6		X		
1.7				X
1.8				X

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10				X
1.11		X		
1.12			X	

1.1. $999 + 1\,000 = 1\,999$.

1.3. Якщо $a = -0{,}2$, то $5a - 2{,}5 = 5 \cdot (-0{,}2) - 2{,}5 = -1 - 2{,}5 = -3{,}5$.

1.5. $\frac{3^{\backslash 3y}}{4x} - \frac{5^{\backslash 2x}}{6y} = \frac{9y-10x}{12xy}$.

1.8. $q = 1 : (-0{,}5) = -2$; $b_4 = -2 \cdot (-2) = 4$; $S = -0{,}5 + 1 + (-2) + 4 = 2{,}5$.

1.9. $\angle BOM = 180° - 162° = 18°$; $\angle KOM = 135° - 18° = 117°$.

1.11. За теоремою косинусів отримаємо: $NK^2 = 5^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 -$

$- 2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{3}\cos 30° = 25 + 27 - 30 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 52 - 45 = 7$; $MN = \sqrt{7}$ (см).

1.12. $\cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{0 \cdot 4 + (-3) \cdot (-3)}{\sqrt{0^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{9}{3 \cdot 5} = \frac{3}{5}$.

Частина 2

2.1.	$19 + 3\sqrt{2}$
2.2.	$(-1; -3), (1; -1)$

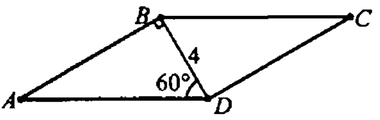
2.3.	$\frac{1}{9}$
2.4.	$16\sqrt{3}$ см^2

2.1. $\left(5\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{8} + 1\right) = 5\sqrt{16} + 5\sqrt{2} - \sqrt{8} - 1 = 20 + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 1 = 19 + 3\sqrt{2}$.

2.2. Такі точки мають координати $(a + 2; a)$. $a = (a+2)^2 + a + 2 - 3$; $a^2 + 4a + 3 = 0$; $a_1 = -3$; $a_1 + 2 = -3 + 2 = -1$; $a_2 = -1$; $a_2 + 2 = -1 + 2 = 1$. Отже, шукані точки $(-1; -3), (1; -1)$.

2.3. Добуток очок дорівнюватиме 12, якщо випадуть такі пари чисел: (2; 6); (3; 4); (4; 3); (6; 2). Різних пар матимемо усього $6 \cdot 6 = 36$. Тому шукана ймовірність дорівнює $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

2.4. $BD \perp AB$, $\angle BDA = 60°$, $BD = 4$ см. У ΔABD ($\angle B = 90°$): $\angle BAD = 90° - 60° = 30°$. Катет, який лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи. Отже, $AD = 2 \cdot 4 = 8$ (см). $S_{ABCD} = 2S_{ADB} =$



$= 2 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot DB \cdot \sin\angle ADB = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sin 60° = 32 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$ (см^2).

Частина 3

3.1. Нехай перший трактор може зорати поле за x год, орючи за 1 год $\frac{1}{x}$ частину поля. Тоді другий усе поле зоре за $(x+10)$ год, а за 1 год зоре $\frac{1}{x+10}$ частину поля. За умовою задачі, разом трактори зорють поле за 12 год. Рівняння: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12}$; $\frac{12(x+10) + 12x - x(x+10)}{12x(x+10)} = 0$; $\frac{-x^2 + 14x + 120}{x(x+10)} = 0$;

$x_1 = -6$ — не задовольняє умову задачі, $x_2 = 20$ (год). Отже, перший трактор може зорати поле самостійно за 20 год, а другий — за $20 + 10 = 30$ (год).

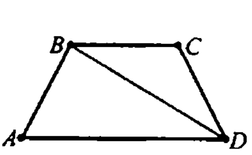
Відповідь: 20 год і 30 год.

3.2. Квадратний тричлен $x^2 - (2m+1)x + m^2 = 0$ набуває лише додатних значень, коли його дискримінант від'ємний. Маємо:

$(2m+1)^2 - 4m^2 < 0$; $4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 < 0$; $4m + 1 < 0$; $m < -0{,}25$.

Відповідь: $m \in (-\infty; -0{,}25)$.

3.3. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція ($AD \| BC$, $AB = CD$), BD — діагональ, ΔBCD і ΔADB — рівнобедрені. У рівнобедреному трикутнику BCD можливий лише випадок, що $BC = CD$, бо кут C — тупий.



У ΔADB $AD \neq AB$ і $AB \neq BD$, оскільки AD — більша основа трапеції, а $BC = AB$. Отже, $AD = BD$. У ΔCBD $\angle CBD = \angle CDB$. $\angle ADB = \angle CBD$ ($BC \| AD$, BD — січна), тому $\angle CDB = \angle ADB$. У рівнобедреному трикутнику ADB $\angle DAB = \angle ABD$. Оскільки трапеція рівнобічна, то $\angle BAD = \angle CDA = 2\angle ADB$.

Нехай $\angle BAD = x$, тоді $\angle ADB = \frac{x}{2}$. У ΔABD $\angle DAB + \angle ABD + \angle ADB = 180°$;

$x + x + \frac{x}{2} = 180°$; $\frac{5}{2}x = 180°$; $x = 72°$. Отже, $\angle BAD = \angle CDA = 72°$, $\angle CBA = \angle BCD = 180° - 72° = 108°$.

Відповідь: 72°, 72°, 108°, 108°.

Частина 4

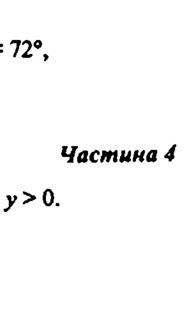
4.1. x і y — числа одного знака, а оскільки $x + y = 20$, то $x > 0$, $y > 0$.

$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{xy} = \frac{80}{\sqrt{xy}}, \\ x + y = 20; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x + xy - 80}{\sqrt{xy}} = 0, \\ y = 20 - x; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x + x(20-x) - 80}{\sqrt{xy}} = 0, \\ y = 20 - x; \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{-x^2 + 21x - 80}{\sqrt{xy}} = 0, \\ y = 20 - x; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 16, \\ y_1 = 4 \end{cases}$ або $\begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = 15. \end{cases}$

Відповідь: (16; 4), (5; 15).

4.2. Нехай ABC — заданий прямокутний трикутник, K — точка дотику вписаного кола, до того ж $AK = a$, $KB = b$. Нехай $OK = x$. M і N — точки дотику кола до катетів, тому $OMCN$ — квадрат і $CN = CM = x$. За властивістю дотичних, проведених з однієї точки, маємо: $AN = AK = a$, $BM = BK = b$. У ΔABC ($\angle C = 90°$): $AB = AK + KB = a + b$; $AC = a + x$, $BC = b + x$. За теоремою Піфагора маємо: $(a + x)^2 + (b + x)^2 = (a + b)^2$, звідки $2x^2 + 2ax + 2bx + a^2 + b^2 =$



$= a^2 + 2ab + b^2$; $x^2 + (a + b)x = ab$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC =$

$= \frac{1}{2}(a + x)(b + x) = \frac{1}{2}(x^2 + (a + b)x + ab) = \frac{1}{2}(ab + ab) = ab$.

Відповідь: ab.