ВАРІАНТ №18

Частина 1

	А	Б	В	Г		А	Б	В	Г		А	Б	В	Г
1.1		X			1.5		X			1.9			X	
1.2			X		1.6				X	1.10		X		
1.3	X				1.7			X		1.11				X
1.4		X			1.8		X			1.12		X		

1.1. Нехай задумане число x. Рівняння: $2x + 12 = 46$; $2x = 34$; $x = 17$.

1.2. $1\frac{3}{4}; y = \frac{7}{8}; y = 1\frac{3}{4} : \frac{7}{8}; y = \frac{7}{4} \cdot \frac{8}{7}; y = 2.$

1.3. $75^2 - 25^2 = (75 - 25) \cdot (75 + 25) = 50 \cdot 100 = 5\,000.$

1.6. $\frac{4x^2 - x}{x^2 - 9} \cdot \frac{x+3}{4x-1} = \frac{x(4x-1)}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x+3}{4x-1} = \frac{x}{x-3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{x}{x-3}.$

1.10. $AB : 20 = 12 : 48$; $AB = 12 : 48 \cdot 20 = 5$ (см).

1.11. Нехай сторона квадрата дорівнює x см. Рівняння: $x^2 + x^2 = (2 \cdot 5)^2$; $2x^2 = 100$; $x^2 = 50$; $x = \sqrt{50}$; $x = 5\sqrt{2}$ (см).

$\overline{MN} = \overline{(-1-3; -3-(-2))} = \overline{(-4; -1)}; \left|\overline{MN}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}.$

1.12. Рівнобедрений трикутник з кутом 45° при основі є прямокутним, а висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині. Тоді: $c = 2 \cdot 8 = 16$ (см); $S = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 8 = 64$ (см^2).

Частина 2

2.1.	$\frac{b-3}{7}$	2.3.	(2,8; 0,1), (−1; 2)
2.2.	−37	2.4.	????

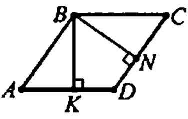
2.1. $\frac{ab + 2b - 3a - 6}{7a + 14} = \frac{b(a+2) - 3(a+2)}{7(a+2)} = \frac{(a+2)(b-3)}{7(a+2)} = \frac{b-3}{7}.$

2.2. За теоремою Вієта: $5x_1x_2 - x_1 - x_2 = 5x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 5 \cdot (-7) - 2 = -37.$

2.3. $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ x^2 - 3xy = 7. \end{cases} \begin{cases} x = 3 - 2y, \\ (3-2y)^2 - 3y(3-2y) - 7 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 3 - 2y, \\ 9 - 12y + 4y^2 - 9y + 6y^2 - 7 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3 - 2y, \\ 10y^2 - 21y + 2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 3 - 2y, \\ y_1 = 0{,}1,\ y_2 = 2; \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2{,}8, \\ y_1 = 0{,}1. \end{cases}$ або $\begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 2. \end{cases}$ (2,8; 0,1), (−1; 2).

2.4. Нехай $ABCD$ — ромб, $\angle B$ — тупий, $BK \perp AD$, $BN \perp CD$. У чотирикутнику $BKDN$ $\angle K = \angle N = 90°$, тоді $\angle KBN + \angle D = 180°$. Оскільки $\angle D > 90°$, то $\angle KBN < 90°$ і $\angle KBN \neq 140°$. Отже, задача не має розв'язку.



Частина 3

3.1. Нехай перший оператор може набрати рукопис за x год. Тоді за 1 год він набирає $\frac{1}{x}$ частину рукопису. Другий оператор весь рукопис набере за $(x + 3)$ год, а за 1 год набиратиме $\frac{1}{x+3}$ частину рукопису. Оскільки за 1 годину роботи першого оператора та 2 години спільної роботи операторів було набрано половина рукопису, то отримуємо рівняння:

$\frac{1}{x} + 2\left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}; \frac{3}{x} + \frac{2}{x+3} = \frac{1}{2}; \frac{3 \cdot 2(x+3) + 2 \cdot 2x - x(x+3)}{2x(x+3)} = 0;$

$\frac{-x^2 + 7x + 18}{2x(x+3)} = 0; \frac{x^2 - 7x - 18}{2x(x+3)} = 0;$ $x_1 = -2$ — не задовольняє умову задачі, $x_2 = 9$ (год). Отже, перший оператор може набрати рукопис самостійно за 9 год, а другий за $9 + 3 = 12$ (год).

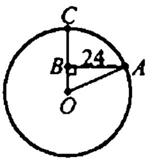
Відповідь: 9 год і 12 год.

3.2. Порахуємо всі варіанти випадання монет (див. таблицю). Усіх рівноможливих подій випадання монет 8, а сприятливих, у яких два герби і одна цифра, — 3. Отже, ймовірність настання вказаної події дорівнює $\frac{3}{8}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1 м	Г	Ц	Г	Г	Ц	Ц	Г	Ц
2 м	Г	Г	Ц	Г	Ц	Г	Ц	Ц
3 м	Г	Г	Г	Ц	Г	Ц	Ц	Ц

Відповідь: $\frac{3}{8}$.

3.3. Нехай $(O; R)$ — задане коло, $AB = 24$ см, $\frac{OB}{BC} = \frac{5}{8}$. Нехай $OB = 5x$ см, тоді $BC = 8x$ см. $R = OC = OB + BC = 5x + 8x = 13x$. З ΔABO ($\angle B = 90°$) за теоремою Піфагора маємо: $AO^2 = BO^2 + AB^2$; $(13x)^2 = (5x)^2 + 24^2$; $169x^2 = 25x^2 + 24^2$; $144x^2 = 576$; $x^2 = 4$; $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ — не підходить. Тоді $R = 13x = 13 \cdot 2 = 26$ (см). Довжина кола: $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 26 = 52\pi$ (см).



Відповідь: 52π см.

Частина 4

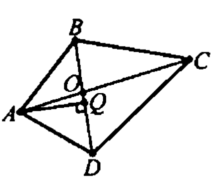
4.1. ОДЗ: $x \neq 0, y \neq 0, x + y \neq 0$.

$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{10}{3}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}; \end{cases} \begin{cases} \frac{x^2 + 2xy + y^2 - 2xy}{x + y} = \frac{10}{3}, \\ \frac{x + y}{xy} = \frac{3}{4}; \end{cases} \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x+y} - \frac{2xy}{x+y} = \frac{10}{3}, \\ \frac{x+y}{xy} = \frac{3}{4}; \end{cases}$

$\begin{cases} x + y - 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{10}{3}, \\ \frac{x+y}{xy} = \frac{3}{4}; \end{cases} \begin{cases} x + y = 6, \\ \frac{6}{xy} = \frac{3}{4}; \end{cases} \begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8; \end{cases} \begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 2 \end{cases}$ або $\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 4. \end{cases}$

Відповідь: (2; 4), (4; 2).

4.2. Нехай $ABCD$ — заданий чотирикутник, у якого AC і BD — діагоналі; $S_1 = 2$ дм^2, $S_2 = 4$ дм^2, $S_3 = 6$ дм^2. Діагоналі AC і BD перетинаються в точці O. Нехай площа трикутника COB — найбільша. Оскільки в ΔAOD і ΔAOB однакова висота AQ, то $S_{AOD} = \frac{1}{2} AQ \cdot OD$;



$S_{AOB} = \frac{1}{2} AQ \cdot OB$. Тому $\frac{S_{AOD}}{S_{AOB}} = \frac{OD}{OB}$. Аналогічно для трикутників DOC і COB $\frac{S_{DOC}}{S_{COB}} = \frac{OD}{OB}$. Отже, $\frac{S_{AOD}}{S_{AOB}} = \frac{S_{DOC}}{S_{COB}}$, звідки $S_{AOD} \cdot S_{COB} = S_{DOC} \cdot S_{AOB}$. Оскільки площа S_{COB} — найбільша, то для виконання останньої рівності необхідно, щоб площа S_{AOD} була найменшою. Тому $S_{AOD} = 2$ дм^2. Тоді $2S_{COB} = 4 \cdot 6$; $S_{COB} = 12$ (дм^2). Таким чином, $S_{ABCD} = 2 + 4 + 6 + 12 = 24$ (дм^2).

Відповідь: 24 дм^2.