ВАРІАНТ №21

Частина 1

	А	Б	В	Г		А	Б	В	Г		А	Б	В	Г
1.1			X		1.5		X			1.9			X	
1.2	X				1.6				X	1.10				X
1.3		X			1.7		X			1.11				X
1.4				X	1.8				X	1.12			X	

1.1. $56 + 42 : 14 - 7 = 56 + 3 - 7 = 52.$

1.5. $\frac{7y^{\backslash y}}{x}-\frac{5x^{\backslash x}}{y}=\frac{7y^2-5x^2}{xy}.$

1.8. $S=\frac{a_1}{1-q}$. $a_1=-6;\ q=1:(-6)=-\frac{1}{6}$. $S=\frac{-6}{1+\frac{1}{6}}=\frac{-36}{7}=-5\frac{1}{7}.$

1.11. Найбільшою стороною трикутника є сторона AB, бо вона лежить навпроти найбільшого кута $\angle C = 100°$.

1.12. Ненульові вектори будуть перпендикулярними лише тоді, коли їх скалярний добуток дорівнюватиме нулю: $\vec{c}\,(3; 9)\cdot\vec{d}\,(3; x) = 3\cdot 3 + 9\cdot x = 0;$ $9 + 9x = 0;\ 9x = -9;\ x = -1.$

Частина 2

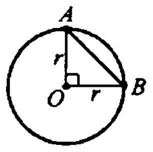
2.1.	17		2.3.	29 років
2.2.	(1; –1); (–5; 5)		2.4.	16π см

2.1. $\left(\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{240}=5-4\sqrt{15}+12+\sqrt{16\cdot 15}=17-4\sqrt{15}+4\sqrt{15}=17.$

2.2. $x^2+3x-5=-x;\ x^2+4x-5=0;\ x_1=1;\ x_2=-5.\ y_1=y(1)=1^2+3\cdot 1-5=-1;$ $y_2=y(-5)=(-5)^2+3\cdot(-5)-5=5.\ (1;-1);\ (-5;5).$

2.3. Нехай новому робітнику x років. Тоді вік шести членів бригади становить $5\cdot 35+x$ років, а їх середній вік $\frac{5\cdot 35+x}{6}=34;\ x+175=204;\ x=29$. Отже, робітнику 29 років.

2.4. $r^2+r^2=\left(8\sqrt{2}\right)^2;\ 2r^2=128;\ r^2=64;\ r=8$ (см). $l=2\pi r=$ $=2\pi\cdot 8=16\pi$ (см).



Частина 3

3.1. Нехай власна швидкість катера становить x км/год. Тоді $(x + 2)$ км/год — швидкість катера за течією річки, $(x - 2)$ км/год — швидкість катера проти течії річки. За течією він плив $\frac{40}{x+2}$ год, а проти течії — $\frac{16}{x-2}$ год, затративши на весь шлях 3 год. Рівняння:

$$\frac{40}{x+2}+\frac{16}{x-2}=3;\ \frac{40x-80+16x+32-3\left(x^2-4\right)}{(x+2)(x-2)}=0;\ \frac{3x^2-56x+36}{(x+2)(x-2)}=0;$$

$\begin{cases}x_1=\frac{2}{3},\ x_2=18,\\ x\neq -2,\ x\neq 2;\end{cases}$ $x=\frac{2}{3}$ — не задовольняє умову задачі, бо швидкість течії буде більшою, ніж швидкість катера. Власна швидкість катера становить 18 км/год.

Відповідь: 18 км/год.

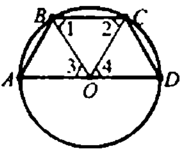
3.2. Оскільки $S_n=2n^2+n$, то $a_1=S_1=2\cdot 1^2+1=3;\ a_1+a_2=S_2=2\cdot 2^2+2=10;$ $a_2=S_2-a_1=10-3=7;\ d=a_2-a_1=7-3=4.$

Відповідь: 3 і 4.

3.3. Нехай $ABCD$ — трапеція ($AD\|BC$), вписана у коло з центром O, AD — діаметр кола. За умовою, $BC=\frac{AD}{2}$. Нехай R — радіус описаного кола.

Тоді $OA = OB = OC = OD = BC = R.$ Отже, трикутник BCO рівносторонній і $\angle 1=\angle 2=60°$. Оскільки $\angle 1=\angle 3=\angle 2=\angle 4=60°$, то трикутники AOB і OCD — рівносторонні. Тому $\angle A=\angle D=60°$.

Маємо: $\angle B=\angle C=60°+60°=120°.$



Відповідь: 60°, 120°, 60°, 120°.

Частина 4

4.1. $\left(a^2+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}\right)\geq 4\sqrt{\frac{a}{b}}.$

Розглянемо різницю лівої та правої частин нерівності:

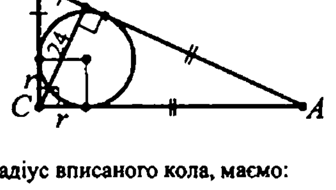
$$\left(a^2+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}\right)-4\sqrt{\frac{a}{b}}=a+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b}{a}+\frac{1}{b}-4\sqrt{\frac{a}{b}}=$$

$$=\left(\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{\frac{a}{b}}+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}-2\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{b}{a}\right)=\left(\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{\frac{a}{b}}+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2\right)+$$

$$+\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2-2\sqrt{\frac{a}{b}}+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right)=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{a}{b}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\geq 0$$ при всіх допустимих значеннях a та b.

4.2. Нехай ABC — заданий прямокутний трикутник, периметр якого дорівнює 120 см², CD — його висота, проведена до гіпотенузи, $CD = 24$ см. Нехай $AB = x$ см,

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}x\cdot 24=12x$ (см²). Крім



того, $S_{\Delta ABC}=pr$, де $p=\frac{120}{2}=60$ (см), а r — радіус вписаного кола, маємо:

$12x = 60r;\ r = 0{,}2x$ (см). $P_{\Delta ABC}=2AB+2r;\ 2(AB+r)=120;\ x+0{,}2x=60;$ $1{,}2x=60;\ x=50$ (см). Урахувавши, що $P = AB + AC + BC = 120$ (см) і $AB = x = 50$ см, то $BC + AC = 120 - 50 = 70$ (см). Але $S_{\Delta ABC}=12x=12\cdot 50=600$ (см²). Нехай $BC = y$ см, тоді $AC = 70 - y$ (см). Отже, $\frac{1}{2}y\cdot(70-y)=600;\ y^2-70y+1200=0;\ y_1=30,\ y_2=40.$ Якщо $BC = y_1 = 30$ (см), то $AC = 70 - 30 = 40$ (см). Якщо $BC = y_2 = 40$ (см), то $AC = 70 - 40 = 30$ (см). Отже, катети трикутника дорівнюють 30 см і 40 см, а гіпотенуза — 50 см.

Відповідь: 30 см, 40 см, 50 см.