ВАРІАНТ №29

Частина 1

	А	Б	В	Г		А	Б	В	Г		А	Б	В	Г
1.1				X	1.5	X				1.9			X	
1.2				X	1.6				X	1.10				X
1.3		X			1.7				X	1.11		X		
1.4			X		1.8			X		1.12			X	

1.2. $\begin{matrix} 12 - 1,8 \\ 18 - x \end{matrix}$ $x = \dfrac{18 \cdot 1,8}{12} = 2,7$ (кг).

1.3. $-5 + 4x = 3$; $4x = 8$; $x = 2$.

1.4. $(3a - b)(3a + b) + b^2 = 9a^2 - b^2 + b^2 = 9a^2$.

1.7. Із 20 чисел від 1 до 20 є 3 числа, кратних шести — 6, 12, 18. Отже, шукана ймовірність дорівнює $\dfrac{3}{20}$.

1.8. $x^2 - 25 > 0$; $(x + 5)(x - 5) > 0$; $x \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

1.9. Якщо $\Delta BAC = \Delta MNK$, то $\angle M = \angle A = 46°$. Тоді: $\angle N = 180° - \angle M - \angle K = 180° - 46° - 54° = 80°$.

1.10. Якщо $\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $\angle A = 60°$. Тоді $\angle B = 90° - 60° = 30°$.

1.11. $AB = \sqrt{(2-6)^2 + (-1-(-3))^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

1.12. $S_{\text{кр.}} = \pi r^2$; $\pi r^2 = 4\pi$; $r^2 = 4$; $r = 2$ (см). $a = 2r = 4$ (см).

Частина 2

2.1.	$\dfrac{2}{y}$	2.3.	$[-2; +\infty)$
2.2.	2	2.4.	60°

2.1. $\left(\dfrac{x-2y}{x^2+2xy} - \dfrac{x+2y}{x^2-2xy}\right) : \dfrac{4y^2}{4y^2-x^2} = \left(\dfrac{x-2y}{x(x+2y)} - \dfrac{x+2y}{x(x-2y)}\right) \cdot \dfrac{4y^2-x^2}{4y^2} =$

$= -\dfrac{(x-2y)^2-(x+2y)^2}{x(x+2y)(x-2y)} \cdot \dfrac{x^2-4y^2}{4y^2} = -\dfrac{(x-2y-x-2y)\cdot(x-2y+x+2y)}{x(x+2y)(x-2y)} \cdot \dfrac{x^2-4y^2}{4y^2} =$

$= -\dfrac{-8xy}{x(x+2y)(x-2y)} \cdot \dfrac{(x+2y)(x-2y)}{4y^2} = \dfrac{2}{y}$.

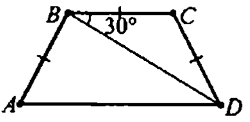
2.2. $\dfrac{16-3x}{3} - \dfrac{3x+7}{4} > 0 \,|\cdot 12$; $4(16-3x) - 3(3x+7) > 0$; $64 - 12x - 9x - 21 > 0$;

$-21x > -43$; $x < \dfrac{43}{21}$; $x < 2\dfrac{1}{21}$. Найбільшим цілим значенням x є число 2.

2.3. $y = 3x^2 - 6x + 1$. Графіком функції є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Координати її вершини: $x = -\dfrac{-6}{6} = 1$; $y = y(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = -2$.

Область значень функції $[-2; +\infty)$.

2.4. $AB = CD = BC$. ΔBCD — рівнобедрений, тому $\angle BDC = \angle DBC = 30°$. З ΔBCD: $\angle BDA = \angle DBC = 30°$ (як кути при паралельних прямих AD і BC та січній BD). $\angle D = 30° + 30° = 60°$.



Частина 3

3.1. Послідовні непарні натуральні числа мають вигляд: $2k+1$, $2k+3$, $2k+5$, $2k+7$, $k \geq 0$. Рівняння: $(2k+3)(2k+5) - 3(2k+1+2k+7) = 111$;

$4k^2 + 10k + 6k + 15 - 12k - 24 = 111$; $4k^2 + 4k - 120 = 0$; $k^2 + k - 30 = 0$;

$k_1 = -6$, $k_2 = 5$. Оскільки $k \geq 0$, то $k = 5$. Шукані числа 11, 13, 15, 17.

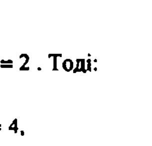
Відповідь: 11, 13, 15, 17.

3.2. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2,5, \\ x + y = 6. \end{cases}$ ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$ Введемо заміну $t = \dfrac{x}{y}$, $t \neq 0$. З першого рівняння системи отримаємо $t + \dfrac{1}{t} = 2,5$; $t^2 - 2,5t + 1 = 0$; $t_1 = 0,5$; $t_2 = 2$. Тоді:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 0,5, \\ x + y = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0,5y, \\ 0,5y + y = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2, \\ y = 4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2, \\ x + y = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y, \\ 2y + y = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4, \\ y = 2. \end{cases}$

Відповідь: $(2; 4)$; $(4; 2)$.

3.3. Знайдемо координати середин діагоналей AC і BD чотирикутника $ABCD$. Для діагоналі AC маємо: $x_{\text{ср.}} = \dfrac{3+(-2)}{2} = \dfrac{1}{2}$;



$y_{\text{ср.}} = \dfrac{-1+2}{2} = \dfrac{1}{2}$; $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$. Для діагоналі BD: $x_{\text{ср.}} = \dfrac{2+(-1)}{2} = \dfrac{1}{2}$;

$y_{\text{ср.}} = \dfrac{3+(-2)}{2} = \dfrac{1}{2}$; $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$. Середини обох діагоналей збігаються. Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Знайдемо довжини цих діагоналей:

$AC = \sqrt{(3+2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{34}$; $BD = \sqrt{(2+1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{34}$. Отже, $AC = BD$. Паралелограм з рівними діагоналями є прямокутником. Тоді $ABCD$ — прямокутник.

Частина 4

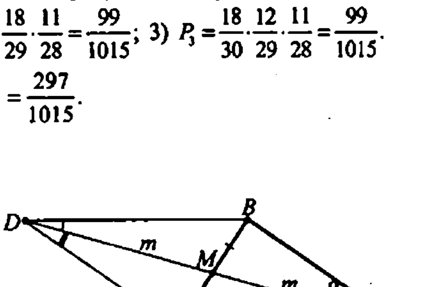
4.1. Дана подія може відбутись трьома способами: 1) біла, біла, чорна; 2) біла, чорна, біла; 3) чорна, біла, біла. Порахуємо ймовірності цих подій:

1) $P_1 = \dfrac{12}{30} \cdot \dfrac{11}{29} \cdot \dfrac{18}{28} = \dfrac{99}{1015}$; 2) $P_2 = \dfrac{12}{30} \cdot \dfrac{18}{29} \cdot \dfrac{11}{28} = \dfrac{99}{1015}$; 3) $P_3 = \dfrac{18}{30} \cdot \dfrac{12}{29} \cdot \dfrac{11}{28} = \dfrac{99}{1015}$.

Шукана ймовірність $P = P_1 + P_2 + P_3 = \dfrac{297}{1015}$.

Відповідь: $\dfrac{297}{1015}$.

4.2. Нехай ABC — заданий трикутник, у якому CM — медіана, $CM = m$, $\angle ACM = \alpha$, $\angle MCB = \beta$. Продовжимо медіану CM так, що $CD = 2CM = 2m$. $ABCD$ — паралелограм, бо $MC = MD$, $AM = MB$.



Розглянемо ΔCBD. $\angle DBC = 180° - (\alpha + \beta)$. За теоремою синусів

$\dfrac{DC}{\sin\angle DBC} = \dfrac{BC}{\sin\alpha} = \dfrac{DB}{\sin\beta}$, звідки: $BC = \dfrac{DC\sin\alpha}{\sin\angle DBC} = \dfrac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$;

$AC = DB = \dfrac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Відповідь: $CA = \dfrac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $CB = \dfrac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.