ВАРІАНТ №38

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2		X		
1.3	X			
1.4				X

	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6				X
1.7			X	
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10			X	
1.11	X			
1.12				X

1.1. $84 - 3x = 12; -3x = 12 - 84; -3x = -72; x = 24.$

1.2. $\frac{4}{7}:\frac{1}{14} = \frac{4}{7}\cdot\frac{14}{1} = \frac{4\cdot 14}{7\cdot 1} = \frac{4\cdot 2}{1\cdot 1} = 8.$

1.4. $xy(2x - 3y) - 3y(x^2 - xy) = 2x^2y - 3xy^2 - 3x^2y + 3xy^2 = -x^2y.$

1.6. $\frac{2x-8}{x+2}\cdot\frac{3x+6}{x^2-16} = \frac{2(x-4)}{x+2}\cdot\frac{3(x+2)}{(x-4)(x+4)} = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{x+4} = \frac{6}{x+4}.$

1.10. Трикутники AOC і BOD подібні. Отже, $\angle CAO = \angle DBO = 45°$.

1.11. $n = 360° : 30° = 12$ (сторін).

1.12. Нехай бічна сторона дорівнює x см. Отримаємо:

$S = \frac{1}{2}x^2\sin\varphi;\ 24 = \frac{1}{2}x^2\sin 30°; 24 = \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{2};\ x^2 = 96; x = \sqrt{96}; x = 4\sqrt{6}$ (см).

Частина 2

2.1.	2006		2.3.	(2; 1), (–2; 1)
2.2.	$q = -40; x_2 = -8$		2.4.	110°

2.1. $\frac{9b^2+a^2}{a-3b} + \frac{6ab}{3b-a} = \frac{9b^2+a^2}{a-3b} - \frac{6ab}{a-3b} = \frac{a^2-6ab+9b^2}{a-3b} = \frac{(a-3b)^2}{a-3b} = a - 3b.$

Якщо $a = 2013$, $b = 2\frac{1}{3}$, то: $a - 3b = 2013 - 3\cdot 2\frac{1}{3} = 2013 - 3\cdot\frac{7}{3} =$

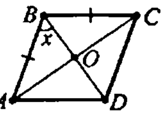
$= 2013 - 7 = 2006.$

2.2. $5 + x_2 = -3; x_2 = -8$. Тоді: $q = 5\cdot(-8) = -40.$

2.3. $\begin{cases}2x^2 + y = 9,\\ 3x^2 - 2y = 10;\end{cases} \begin{cases}2x^2 + y = 9,\\ 3x^2 - 2y = 10;\end{cases}\begin{vmatrix}\cdot 3\\ \cdot(-2)\end{vmatrix} \begin{cases}2x^2 + y = 9,\\ 7y = 7;\end{cases} \begin{cases}2x^2 = 8,\\ y = 1;\end{cases} \begin{cases}x = \pm 2,\\ y = 1;\end{cases}$

(2; 1), (–2; 1).

2.4. Нехай $\angle ABD = x$, тоді $\angle BAC = x - 20°$. З ΔABO ($\angle O = 90°$) одержимо: $x + x - 20° = 90°; 2x = 110°; x = 55°$. $\angle B = 2x = 2\cdot 55° = 110°$.



Частина 3

3.1. Нехай на склад завезли x кг бананів, тоді апельсинів завезли $(x + 100)$ кг. Після продажу на складі залишилось $0{,}2(x + 100)$ кг апельсинів і $0{,}7x$ кг бананів, що на 105 кг більше, ніж апельсинів: $0{,}7x - 0{,}2(x + 100) = 105; 0{,}5x = 125; x = 250$. Апельсинів завезли $250 + 100 = 350$ (кг).

Відповідь: 350 кг апельсинів, 250 кг бананів.

3.2. $(2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 100^2) - (1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 99^2) = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) +$

$+ (6^2 - 5^2) + \ldots + (100^2 - 99^2) = (2-1)(2+1) + (4-3)(4+3) + (6-5)(6+5) +$

$+ \ldots + (100-99)\cdot(100+99) = 1\cdot 3 + 1\cdot 7 + 1\cdot 11 + \ldots + 1\cdot 199 = 3 + 7 + 11 + \ldots + 199.$

Це сума n членів арифметичної прогресії (a_n), у якої:

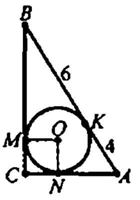
$a_1 = 3; a_n = 199; d = 7 - 3 = 4; 199 = a_1 + (n-1)d; 199 = 3 + 4(n-1); 4n = 200; n = 50.$

Маємо: $S_{50} = \frac{3+199}{2}\cdot 50 = 5050.$

Відповідь: 5050.

3.3. Нехай коло O радіуса x дотикається до катетів трикутника в точках M і N. Оскільки $OMCN$ — квадрат, то $CM = CN = x$ см. За властивістю дотичних, проведених з однієї точки, одержимо: $AN = AK = 4$ см, $BM = BK = 6$ см. Розглянемо прямокутний трикутник ABC. У ньому: $AB = 4 + 6 = 10$ (см), $AC = (4 + x)$ см, $BC = (6 + x)$ см. За теоремою Піфагора маємо: $AC^2 + BC^2 = AB^2$; $(4 + x)^2 + (6 + x)^2 = 10^2$; $2x^2 + 20x + 52 = 100$; $x^2 + 10x - 24 = 0$; $x_1 = -12$ — не підходить; $x_2 = 2$. Тоді: $AC = 4 + 2 = 6$ (см), $BC = 6 + 2 = 8$ (см). $P_{ABC} = 10 + 6 + 8 = 24$ (см).

Відповідь: 24 см.

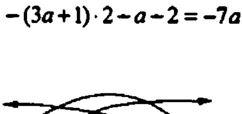


Частина 4

4.1. У квадратному рівнянні $4x^2 - (3a + 1)x - a - 2 = 0$ дискримінант $D = 9a^2 + 22a + 33$ додатний для усіх a. Розглянемо функцію $f(x) = 4x^2 - (3a+1)x - a - 2$. Її графіком є парабола вітками вгору. Для того щоб корені рівняння $4x^2 - (3a+1)x - a - 2 = 0$ належали проміжку $[-1; 2)$, потрібно, щоб: 1) абсциса вершини параболи належала проміжку $[-1; 2)$; 2) значення функції в точці –1 було невід'ємне; 3) значення функції в точці 2 було додатне. Звідси:

$$\begin{cases}-1 \le -\frac{b}{2a} = \frac{3a+1}{2\cdot 4} < 2,\\ f(-1) = 4\cdot(-1)^2 - (3a+1)\cdot(-1) - a - 2 = 2a + 3 \ge 0,\\ f(2) = 4\cdot 2^2 - (3a+1)\cdot 2 - a - 2 = -7a + 12 > 0;\end{cases} \quad \begin{cases}-8 \le 3a + 1 < 16,\\ 2a \ge -3,\\ 7a < 12;\end{cases}$$

$$\begin{cases}-3 \le a < 5,\\ a \ge -1{,}5,\\ a < \frac{12}{7};\end{cases}$$

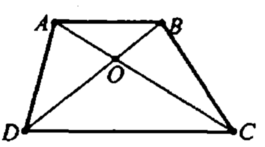


$a \in \left[-1{,}5;\ 1\frac{5}{7}\right).$

Відповідь: $a \in \left[-1{,}5;\ 1\frac{5}{7}\right)$.

4.2. Нехай $ABCD$ — задана трапеція, AC і DB — її діагоналі, $S_{\Delta AOB} = n^2$, $S_{\Delta DOC} = k^2$. $\Delta AOB \sim \Delta COD$;

$\left(\frac{OA}{OC}\right)^2 = \frac{n^2}{k^2};\ \frac{OA}{OC} = \frac{n}{k}$. Аналогічно $\frac{OB}{OD} = \frac{n}{k}$.



ΔAOD і ΔDOC мають однакову висоту, опущену з точки D, тому їх площі відносяться як основи OA і OC відповідно, тобто $\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta DOC}} = \frac{OA}{OC} = \frac{n}{k}$;

$S_{\Delta AOD} = \frac{n}{k}\cdot S_{\Delta DOC} = \frac{n}{k}\cdot k^2 = nk.$

Аналогічно $S_{\Delta BOC} = \frac{n}{k}\cdot S_{\Delta DOC} = \frac{n}{k}\cdot k^2 = nk.$

Отже, $S_{тр.} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta DOC} + S_{\Delta AOD} = n^2 + nk + k^2 + nk = (n + k)^2.$