ВАРІАНТ №42

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1		X		
1.2				X
1.3	X			
1.4		X		

	А	Б	В	Г
1.5				X
1.6		X		
1.7			X	
1.8		X		

	А	Б	В	Г
1.9				X
1.10		X		
1.11	X			
1.12			X	

1.1. 16 год 26 хв – 9 год 52 хв = 15 год 86 хв – 9 год 52 хв = 6 год 34 хв.

1.2. $\frac{3^{\backslash 3}}{4}+\frac{1^{\backslash 2}}{6}=\frac{9+2}{12}=\frac{11}{12}$.

1.6. $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{4\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{4\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$.

1.8. Серед шести послідовних натуральних чисел від 1 до 6 є 3 парних числа.
Шукана ймовірність дорівнює: $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

1.9. Нехай менший із суміжних кутів дорівнює x, тоді більший дорівнює $4x$.
Рівняння: $x + 4x = 180°$; $5x = 180°$; $x = 36°$.

1.10. $l = (4 + 10) : 2 = 7$ (см).

1.12. Знайдемо півпериметр трикутника: $p = (13 + 14 + 15) : 2 = 21$ (см).
За формулою Герона отримаємо:
$S=\sqrt{21\cdot(21-13)\cdot(21-14)\cdot(21-15)}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=7\cdot 4\cdot 3=84$ (дм^2).

Частина 2

2.1.	–2; –1; 1	2.3.	$\frac{127}{64}$
2.2.	(2; 4)	2.4.	21 см

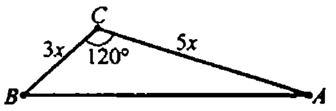
2.1. $x^3+2x^2-x-2=0$; $x^2(x+2)-(x+2)=0$; $(x+2)(x^2-1)=0$;
$(x+2)(x-1)(x+1)=0$; $x_1=-2$, $x_2=-1$; $x_3=1$.

2.2. Така точка має координати $(x; 2x)$. $10-3x=2x$; $x=2$. $y(2)=10-3\cdot 2=4$. (2; 4).

2.3. Нехай q — знаменник прогресії. Отримаємо: $q=b_3:b_2=\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=0{,}5$;

$b_1=b_2:q=\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=1$. $S_7=\frac{b_1(1-q^7)}{1-q}=\frac{1\cdot\left(1-(0{,}5)^7\right)}{1-0{,}5}=\frac{127}{64}$.

2.4. $AB^2=9x^2+25x^2-2\cdot 3x\cdot 5x\cdot\cos 120°$;
$AB^2=49x^2$; $AB=7x$. $P=3x+5x+7x=15x$;
$15x=45$; $x=3$ (см). $AB=3\cdot 7=21$ (см).

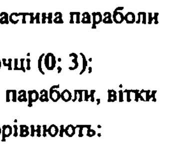


Частина 3

3.1. Нехай перша труба може наповнити басейн за x год, наповнюючи за 1 год $\frac{1}{x}$ частину басейну. Тоді друга зможе спорожнити басейн за $(x+3)$ год, спорожняючи за 1 год $\frac{1}{x+3}$ частину басейну. Якщо відкрити 2 труби, то за 1 год буде наповнюватись $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)$ частина басейну, що становить $\frac{1}{36}$ басейну. Рівняння: $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{36}$; $\frac{36(x+3)-36x-x(x+3)}{x(x+3)}=0$;

$\frac{x^2+3x-108}{x(x+3)}=0$; $x_1=-12$ — не задовольняє умову задачі, $x_2=9$ (год). Отже, перша труба може наповнити басейн за 9 год, а друга спорожнити за $9 + 3 = 12$ (год).

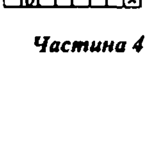
Відповідь: 9 год, 12 год.



3.2. $y=x^2-4|x|+3$. Врахувавши означення модуля, отримаємо: 1) Якщо $x\ge 0$, то $y=x^2-4x+3$ і графіком функції є частина параболи, вітки якої напрямлені вгору $(a=1>0)$.

Координати вершини дорівнюють: $x_в=\frac{-b}{2a}=2$; $y_в=y(2)=-1$. Частина параболи перетинає вісь x у точках з абсцисами 1 і 3, вісь ординат у точці (0; 3);
2) якщо $x<0$, то $y=x^2+4x+3$ і графіком функції є частина параболи, вітки якої напрямлені вгору $(a=1>0)$. Координати її вершини дорівнюють:

$x_в=-\frac{b}{2a}=-2$; $y_в=y(-2)=-1$. Частина параболи перетинає вісь x у точках з абсцисами –3 і –1. Найменше значення функції –1.



3.3. $AB=\sqrt{(5-0)^2+(7-6)^2}=\sqrt{26}$, $BC=\sqrt{(4-5)^2+(2-7)^2}=\sqrt{26}$,
$CD=\sqrt{(-1-4)^2+(1-2)^2}=\sqrt{26}$, $DA=\sqrt{(0+1)^2+(6-1)^2}=\sqrt{26}$.
Чотирикутник $ABCD$, у якого всі сторони рівні, — ромб.

Частина 4

4.1. $\begin{cases}x^3+y^3=19,\\(xy+8)(x+y)=2;\end{cases}$ $\begin{cases}(x+y)(x^2-xy+y^2)=19,\\3(xy+8)(x+y)=6.\end{cases}$

Додамо рівняння системи:

$\begin{cases}(x+y)(x^2-xy+y^2+3xy+24)=25,\\3(x+y)(xy+8)=6;\end{cases}$ $\begin{cases}(x+y)((x+y)^2+24)=25,\\(x+y)(xy+8)=2;\end{cases}$

$\begin{cases}(x+y)^3+24(x+y)-25=0,\\(x+y)(xy+8)=2;\end{cases}$ $\begin{cases}(x+y)^3-1+24(x+y)-24=0,\\(x+y)(xy+8)=2;\end{cases}$

$\begin{cases}(x+y-1)((x+y)^2+(x+y)+1)+24(x+y-1)=0,\\(x+y)(xy+8)=2;\end{cases}$ $\begin{cases}(x+y-1)((x+y)^2+(x+y)+25)=0,\\(x+y)(xy+8)=2.\end{cases}$

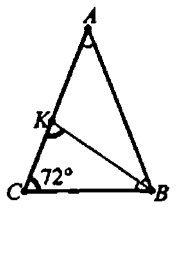
У першому рівнянні системи другий множник завжди більший за нуль, тому:

$\begin{cases}x+y-1=0,\\(x+y)(xy+8)=2;\end{cases}$ $\begin{cases}y=1-x,\\1\cdot(x(1-x)+8)=2;\end{cases}$ $\begin{cases}y=1-x,\\x^2-x-6=0;\end{cases}$ $\begin{cases}y=1-x,\\x_1=3; x_2=-2;\end{cases}$

$\begin{cases}x_1=3,\\y_1=-2\end{cases}$ або $\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=3.\end{cases}$

Відповідь: (3; –2), (–2; 3).

4.2. Нехай ABC — заданий рівнобедрений трикутник ($\angle ACB = \angle ABC = 72°$), BK — бісектриса кута B, $BK = l$,
$\angle CBK = \angle KBA = 36°$. $\angle A = 180° - 2\cdot 72° = 36°$.
У ΔBKA $\angle KBA = \angle A = 36°$, тоді $KA = KB = l$.
У ΔKBC $\angle CKB = 180° - (72° + 36°) = 72°$.
Отже, ΔKBC — рівнобедрений $CB = KB = l$ і $\Delta ABC \sim \Delta BKC$.
Нехай $AB = x$ см. $KC = CA - KA = x - l$. Тоді $\frac{AB}{BK}=\frac{BC}{CK}$;



$\frac{x}{l}=\frac{l}{x-l}$; $x(x-l)=l^2$; $x^2-xl-l^2=0$; $x_1=l\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ — не підходить,

$x_2=l\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Отже, $BC=l$, $AC=AB=l\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Відповідь: l, $l\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $l\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.