ВАРІАНТ №5

Частина 1

	А	Б	В	Г
1.1			X	
1.2				X
1.3			X	
1.4	X			

	А	Б	В	Г
1.5			X	
1.6				X
1.7		X		
1.8				X

	А	Б	В	Г
1.9		X		
1.10		X		
1.11			X	
1.12				X

1.1. $(64{,}8 + 76{,}2) : 2 = 141 : 2 = 70{,}5$ (км/год).
1.4. $4 - 2m = 7$; $-2m = 3$; $m = -1{,}5$.
1.5. $x^2 + 9x = 0$; $x(x + 9) = 0$; $x = -9$ або $x = 0$.
1.6. ОДЗ: $3x + 6 \neq 0$; $3x \neq -6$; $x \neq -2$.
1.8. $\frac{2-x}{5} < -2 \,\big|\cdot 5$; $2 - x < -10$; $-x < -12$; $x > 12$; $x \in (12; +\infty)$.
1.9. $O_1A = 16 - 5 = 11$ (см).
1.10. З ΔBCM ($\angle M = 90°$): $BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ (см).
$AC = 4 + 8 = 12$ (см). $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36$ (см^2).
1.11. $\vec{a} = -\frac{1}{2}\overline{(4;-6)} = \overline{(-4:2;6:2)} = \overline{(-2;3)}$.
1.12. $\cos(90° - \alpha) + \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha + \sin\alpha = 2\sin\alpha$.

Частина 2

2.1.	$\frac{1}{9}$
2.2.	$\sqrt{3}$

2.3.	$\left(\frac{1}{3};\ \frac{8}{3}\right)$
2.4.	$y = 3x + 7$

2.1. $3^{-3} \cdot 9^8 : 27^5 = 3^{-3} \cdot (3^2)^8 : (3^3)^5 = 3^{-3} \cdot 3^{16} : 3^{15} = 3^{-3+16-15} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$.

2.2. $\frac{6-\sqrt{12}}{\sqrt{12}-2} = \frac{6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2} = \frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(\sqrt{3}-1\right)} = \sqrt{3}$.

2.3. $-3x^2 + 9x - 2 > \frac{2}{3}$; $9x^2 - 27x + 6 < -2$; $9x^2 - 27x + 8 < 0$; $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{8}{3}$;
$x \in \left(\frac{1}{3};\ \frac{8}{3}\right)$.

2.4. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = 3$ має вигляд $y = 3x + b$. Координати точки $A(-2; 1)$ задовольняють рівняння цієї прямої, тому $1 = 3 \cdot (-2) + b$; $b = 7$. Отже, шукане рівняння прямої — $y = 3x + 7$.

Частина 3

3.1. Нехай початкова ціна футбольного м'яча x грн, а волейбольного y грн, тоді за умовою $4x + 3y = 320$. Після зміни цін футбольний м'яч став коштувати $0{,}8x$ грн, а волейбольний — $1{,}05y$ грн, тому $2 \cdot 0{,}8x + 1{,}05y = 122$. Система:
$\begin{cases} 4x+3y=320, \\ 2\cdot 0{,}8x + 1{,}05y = 122; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x+3y=320, \\ 1{,}6x + 1{,}05y = 122; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{320-3y}{4}, \\ 1{,}6\cdot\frac{320-3y}{4} + 1{,}05y = 122; \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{320-3y}{4}, \\ 128 - 1{,}2y + 1{,}05y = 122; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{320-3y}{4}, \\ 0{,}15y = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 50, \\ y = 40. \end{cases}$

Відповідь: 50 грн і 40 грн.

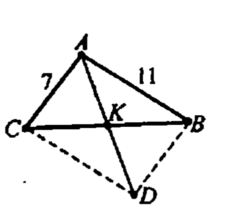
3.2. $\frac{1}{2x^2+6} + \frac{1}{3x-12} = \frac{1}{12-3x+4x^2-x^3}$; $\frac{1}{2\left(x^2+3\right)} + \frac{1}{3(x-4)} = \frac{1}{4\left(3+x^2\right) - x\left(3+x^2\right)}$;

$\frac{1}{2\left(x^2+3\right)} + \frac{1}{3(x-4)} - \frac{1}{\left(x^2+3\right)(4-x)} = 0$; $\frac{3(x-4)+2\left(x^2+3\right)+6}{6\left(x^2+3\right)(x-4)} = 0$;

$\frac{3x-12+2x^2+6+6}{6\left(x^2+3\right)(x-4)} = 0$; $\frac{2x^2+3x}{6\left(x^2+3\right)(x-4)} = 0$; $x_1 = 0, x_2 = -\frac{3}{2}$.

Відповідь: 0; $-\frac{3}{2}$.

3.3. Нехай ABC — заданий трикутник, $AC = 7$ см, $AB = 11$ см, AK — медіана. Нехай $BC = x$ см, тоді $AK = (x - 8)$ см. Проведемо $BD \| AC$ і $CD \| AB$. $ABCD$ — паралелограм, AD і CB — його діагоналі, $AD = 2AK = 2(x - 8)$ (см). За властивістю діагоналей паралелограма: $AD^2 + CB^2 = 2AC^2 + 2AB^2$; $(2(x - 8))^2 + x^2 = 2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 11^2$; $4(x^2 - 16x + 64) + x^2 = 98 + 242$; $5x^2 - 64x - 84 = 0$; $x_1 = 14$, $x_2 = -1{,}2$ — не підходить. Отже, довжина невідомої сторони трикутника дорівнює 14 см.

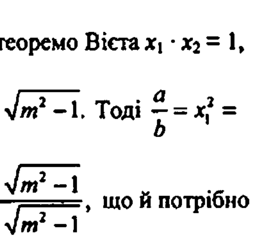


Відповідь: 14 см.

Частина 4

4.1. За умовою $\frac{a+b}{2} = m\sqrt{ab}$, тоді $a + b = 2m\sqrt{ab}$; $\frac{a}{b} - 2m\sqrt{\frac{a}{b}} + 1 = 0$. Позначимо $x = \sqrt{\frac{a}{b}} > 1$. Тоді $x^2 - 2mx + 1 = 0$. Оскільки за теоремо Вієта $x_1 \cdot x_2 = 1$, то знайдемо x_1 — більший корінь рівняння. $x_1 = m + \sqrt{m^2-1}$. Тоді $\frac{a}{b} = x_1^2 =$
$= \left(m+\sqrt{m^2-1}\right)^2 = \frac{\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)^2\left(m-\sqrt{m^2-1}\right)}{m-\sqrt{m^2-1}} = \frac{m+\sqrt{m^2-1}}{m-\sqrt{m^2-1}}$, що й потрібно було довести.

4.2. Нехай $ABCD$ — задана трапеція ($BC \| AD$), у якої $AD = a$, $BC = b$, $A_1D_1 \| AD$, $S_{AA_1D_1D} = S_{A_1BCD_1}$. Проведемо $BK \| CD$. Нехай $BH = h$, $A_1D_1 = x$. $\Delta ABK \sim \Delta A_1BK_1$ (за двома кутами), звідки $\frac{BL}{h} = \frac{x-b}{a-b}$; $BL = \frac{x-b}{a-b} \cdot h$. $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$. Оскільки $S_{AA_1D_1D} = S_{A_1BCD_1}$, то $S_{A_1BCD_1} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h$. У той же час



$S_{A_1BCD_1} = \frac{BC + A_1D_1}{2} \cdot BL = \frac{b+x}{2} \cdot \frac{x-b}{a-b} \cdot h$. Отже, $\frac{b+x}{2} \cdot \frac{x-b}{a-b} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h$;
$2(x^2 - b^2) = a^2 - b^2$; $2x^2 = a^2 + b^2$; $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Відповідь: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.