ВАРІАНТ №8

Частина 1

	А	Б	В	Г		А	Б	В	Г		А	Б	В	Г
1.1			X		1.5		X			1.9	X			
1.2			X		1.6		X			1.10				X
1.3		X			1.7			X		1.11		X		
1.4				X	1.8		X			1.12			X	

1.1. $0,5x - 4 = 0;\ 0,5x = 4;\ x = 8.$

1.4. $x(3x-8) - (3x^2 - 4x + 5) = 3x^2 - 8x - 3x^2 + 4x - 5 = -4x - 5.$

1.5. $12 \cdot 3^{-2} = \frac{12}{3^2} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$

1.6. $\frac{x^2-xy}{x^2} : \frac{x^2-2xy+y^2}{xy} = \frac{x^2-xy}{x^2} \cdot \frac{xy}{x^2-2xy+y^2} = \frac{x(x-y)}{x^2} \cdot \frac{xy}{(x-y)^2} = \frac{y}{x-y}.$

1.11. Довжина кола дорівнює: $2\pi \cdot 9 = 18\pi$ (см). Довжина дуги кола дорівнює: $18\pi : 360 \cdot 120 = 6\pi$ (см).

1.12. За формулою площі паралелограма отримаємо: $a \cdot 6 = 12 \cdot 4$; $6a = 48$; $a = 8$ (см).

Частина 2

2.1.	-45		**2.3.**	$(0,25; -1); (2; 6)$
2.2.	$x^2 - 4x - 2 = 0$		**2.4.**	$96°$

2.1. $\frac{6x^2-2xy}{3y^2-9xy} = \frac{2x(3x-y)}{-3y(3x-y)} = -\frac{2x}{3y}.$

Якщо $x = 2,5;\ y = \frac{1}{27}$, то $-\frac{2x}{3y} = -\frac{2 \cdot 2,5}{3 \cdot \frac{1}{27}} = -5 \cdot 9 = -45.$

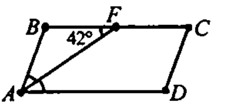
2.2. $y = x^2 + bx + c$. З теореми Вієта маємо: $b = -(x_1 + x_2) = -\left(2-\sqrt{6}+2+\sqrt{6}\right) = -4.$

$c = x_1x_2 = \left(2-\sqrt{6}\right)\left(2+\sqrt{6}\right) = 4 - 6 = -2.$ Отже, шукане рівняння $x^2 - 4x - 2 = 0.$

2.3. $\begin{cases} 4x - y = 2, \\ \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 1; \end{cases} \begin{cases} y = 4x-2, \\ \frac{y+3x}{xy} = 1; \end{cases} \begin{cases} y = 4x-2, \\ y + 3x = xy, \\ x \neq 0,\ y \neq 0; \end{cases} \begin{cases} y = 4x-2, \\ 4x-2+3x = x(4x-2), \\ x \neq 0,\ y \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4x-2, \\ 4x^2 - 9x + 2 = 0, \\ x \neq 0,\ y \neq 0; \end{cases} \begin{cases} y = 4x-2, \\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = 2, \\ x \neq 0,\ y \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}, \\ y_1 = -1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 6. \end{cases}$

2.4. $\angle AFB = 42°$. Тоді $\angle DAF = \angle AFB = 42°$ ($AD \| BC$, AF — січна). $\angle DAF = \angle FAB = 42°$ (AF — бісектриса). Тому $\angle A = 42° + 42° = 84°$, $\angle B = 180° - \angle A = 180° - 84° = 96°$.



Частина 3

3.1. Нехай швидкість течії x км/год, тоді рибалка проплив 3 км проти течії за $\frac{3}{2,7-x}$ год, а назад течія віднесла його за $\frac{3}{x}$ год. Рівняння: $\frac{3}{2,7-x} + \frac{3}{x} = 4\frac{1}{2}$;

$\frac{3 \cdot 2x + 3 \cdot 2(2,7-x) - 9(2,7-x)x}{2x(2,7-x)} = 0;\ \frac{2x + 2(2,7-x) - 3x(2,7-x)}{2x(2,7-x)} = 0;$

$\frac{2 \cdot 2,7 - 3x \cdot 2,7 + 3x^2}{2x(2,7-x)} = 0; \frac{x^2 - 2,7x + 1,8}{2x(2,7-x)} = 0;\ x_1 = 1,2, x_2 = 1,5.$

Відповідь: 1,2 км/год або 1,5 км/год.

3.2. Нехай $x^2 + x - 3 = t$, тоді $x^2 + x - 1 = t + 2$. Отримаємо:

$t(t+2) = 3;\ t^2 + 2t - 3 = 0;\ t_1 = 1;\ t_2 = -3.$ Повернемося до заміни.

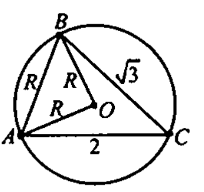
1) $x^2 + x - 3 = 1; x^2 + x - 4 = 0; x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2};$

2) $x^2 + x - 3 = -3; x^2 + x = 0; x_3 = -1; x_4 = 0.$

Відповідь: $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; -1; 0; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}.$

3.3. Нехай ΔABC — заданий трикутник, $AC = 2$ см, $CB = \sqrt{3}$ см, $AB = R$, де R — радіус описаного навколо трикутника ABC кола. З теореми косинусів:

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C}$. Трикутник AOB — рівносторонній, тому $\angle AOB = 60°$. Кут ACB спирається на дугу $60°$ або на дугу $360° - 60° = 300°$.

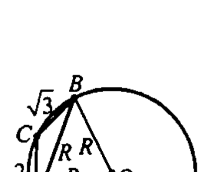


Тоді: 1. $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$ і: $AB = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cos 30°} =$

$\sqrt{4 + 3 - 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{7-6} = 1$ (см).

2. $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 300° = 150°.$

$AB = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \sqrt{4+3+6} = \sqrt{13}$ (см).



Відповідь: 1 см або $\sqrt{13}$ см.

ВАРІАНТ №8

Частина 4

4.1. Розглянемо різницю лівої та правої частин нерівності.

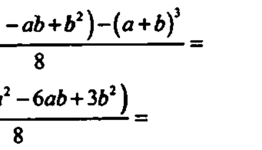
$\frac{a^3+b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 = \frac{4\left(a^3+b^3\right) - (a+b)^3}{8} = \frac{4(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) - (a+b)^3}{8} =$

$= \frac{(a+b)\left(4a^2 - 4ab + 4b^2 - a^2 - 2ab - b^2\right)}{8} = \frac{(a+b)\left(3a^2 - 6ab + 3b^2\right)}{8} =$

$= \frac{3(a+b)\left(a^2 - 2ab + b^2\right)}{8} = \frac{3(a+b)(a-b)^2}{8} > 0$ при $a > 0$ і $b > 0$.

Нерівність доведена.

4.2. Нехай $ABCD$ — паралелограм, $\angle A = 60°$, $BE = \sqrt{3}$ см, $CE = \sqrt{7}$ см. Проведемо $EF \| DC$. У паралелограма $ABFE$ діагоналі $BE = \sqrt{3}$ см і $FA = CE = \sqrt{7}$ см. Нехай $AB = x$. Тоді $2AB^2 + 2AE^2 = BE^2 + FA^2$;



$2x^2 + 2AE^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2$, звідки $AE = \sqrt{5-x^2}$. Проведемо $BK \perp AE$. З ΔAKB

($\angle K = 90°$): $BK = AB\sin\angle A = x\sin 60° = \frac{x\sqrt{3}}{2}$; $AK = AB\cos\angle A = x\cos 60° = \frac{x}{2}$.

$KE = AE - AK = \sqrt{5-x^2} - \frac{x}{2}$. За теоремою Піфагора з ΔBKE ($\angle K = 90°$):

$KE^2 + BK^2 = BE^2;\ \left(\sqrt{5-x^2} - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2;$

$5 - x^2 - x\sqrt{5-x^2} + \frac{x^2}{4} + \frac{3x^2}{4} = 3;\ x\sqrt{5-x^2} = 2;\ x^2(5-x^2) = 4; x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$ За теоремою Вієта $x^2 = 1$, $x^2 = 4$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Таким чином, $AB = 1$ см, тоді $AD = 2AE = 2\sqrt{5-1} = 4$ (см) або $AB = 2$ см, тоді $AD = 2AE = 2\sqrt{5-4} = 2$ (см).

Відповідь: 1 см і 4 см або 2 см і 2 см.