Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

И. П. НАТАНСОН

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1952

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 2

И. П. НАТАНСОН

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

ИЗДАНИЕ
ВТОРОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1952 ЛЕНИНГРАД

11-3-1

Редактор *Г. П. Акилов* Техн. редактор *К. М. Волчок*

Подписано к печати 12/I 1952 г. Бумага 84×108/32. 0,5 бум. л. 1,64 печ. л. 1,52 уч.-изд. л. 37 000 тип. зн. в печ. л. Т 00203. Тираж 25 000 экз.

Цена книги 50 к. Заказ № 3073.

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книжке излагаются некоторые элементарные (т. е. не требующие знания дифференциального исчисления) способы решения задач на максимум и минимум.

Книжка рассчитана на учеников старших классов средней школы, желающих получить хотя бы некоторое представление о характере задач, рассматриваемых в высшей математике. Излагаемый материал может быть использован и в работе школьного математического кружка.

Однако я думаю, что и студенту втуза, педагогического института или университета, даже и «посвящённому» в тайны математического анализа, будет полезно прочесть такую книжку. Дело в том, что мощный аппарат дифференциального исчисления даёт общие и однотипные приёмы, позволяющие решать задачи самого разнообразного характера, лишь бы в них требовалось найти экстремум конечной комбинации элементарных функций. Используя эти приёмы, вовсе нет надобности обращать внимание на индивидуальное своеобразие той или иной задачи. А использование этого своеобразия часто как раз и позволяет решить задачу проще, быстрее и красивее, чем с помощью общих приёмов. Положение дел здесь таково же, как и с арифметическими задачами: применение мощного аппарата алгебраических уравнений позволяет игнорировать индивидуальные особенности таких задач, но чисто арифметическое решение часто бывает проще, быстрее и красивее алгебраического.

Ассортимент алгебраических средств, применяемых в этой книжке, очень ограничен: использованы лишь простейшие свойства квадратного трёхчлена и неравенство, относящееся к арифметическому и геометрическому средним. Это сделано в интересах наибольшей простоты изложения. Читателю, желающему ознакомиться с более сильными, но всё ещё элементарными приёмами решения задач на максимум и минимум, можно рекомендовать книги: И. Б. Абельсон, Максимум и минимум, ОНТИ, 1935 и С. И. Зетель, Задачи на максимум и минимум, Гостехиздат, 1948.

И. Натансон

17/XII 1949 г.

ВВЕДЕНИЕ

В технике и естествознании, на производстве и в быту встречается особый тип математических задач. Это — так называемые «задачи на максимум и минимум». Вот примеры таких задач:

1) Из круглого бревна выпилить прямоугольную балку так, чтобы получилось наименьшее количество отходов.

2) Из имеющихся досок можно построить забор длиной в 200 метров. Требуется огородить им прямоугольный участок земли, имеющий наибольшую площадь.

3) На стене висит картина. На каком расстоянии от стены она видна под наибольшим углом?

4) На какой высоте надо повесить лампу, чтобы получить наибольшую освещённость?

Во всех этих задачах, несмотря на их различие, мы находим общие черты: всюду речь идёт о том, как при разнообразных возможностях использования наличных средств добиться наилучшего эффекта. Нет надобности говорить о том, насколько важно умение решать такие вопросы. В математике созданы очень сильные и общие способы для решения подобных задач; изучаются они в дифференциальном исчислении.

Однако во многих случаях удаётся решить такого рода задачу и без привлечения сложного аппарата дифференциального исчисления, а пользуясь лишь простыми средствами элементарной алгебры. В этой книжке как раз и излагается несколько способов решения задач на максимум и минимум без помощи высшей математики*). Конечно, такие способы применимы лишь в отдельных случаях, но их полезно знать даже и тем, кто знаком и с дифференциальным исчислением.

---

*) В частности, решаются и вышеприведённые четыре задачи.

I. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О КВАДРАТНЫХ ТРЁХЧЛЕНАХ

§ 1. Рассмотрим две величины x и y, связанные равенством

$$y = 2x^2 + 7. \qquad (*)$$

Если мы положим, что $x = 3$, то увидим, что $y = 25$. Если мы дадим x значение $x = 10$, то получим $y = 207$. Вообще мы можем дать величине x любое значение, какое только нам захочется, но когда x уже примет это выбранное нами значение, то y примет своё значение, так сказать, «автоматически», ибо оно будет определяться равенством (*) и уже не будет зависеть от нашего произвола. Такое положение вещей математики характеризуют, говоря, что y является *функцией* от x. Сама величина x называется при этом *независимой переменной*.

Поставим вопрос о том, есть ли среди значений, которые принимает функция y [определяемая равенством (*)], *самое большое*? Легко видеть, что такого самого большого из значений *y не существует*. В самом деле, если независимая переменная x будет принимать значения

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 10, \quad x_3 = 100, \quad x_4 = 1000, \ \ldots,$$

то соответствующие значения функции y будут

$$y_1 = 9, \quad y_2 = 207, \quad y_3 = 20\,007, \quad y_4 = 2\,000\,007, \ \ldots,$$

откуда видно, что наибольшего значения у *y нет*.

Совсем другой ответ мы получим, если спросим себя, имеется ли среди значений функции *y самое меньшее*.

В самом деле, как показывает равенство (*), функция y является суммой двух слагаемых: $2x^2$ и 7. Второе из них, т. е. 7, есть некоторое постоянное число, не зависящее от значения x. Что же касается первого слагаемого $2x^2$, то оно, очевидно, ни при каком значении x не может оказаться отрицательным,*) т. е. *меньшим* нуля. Однако *равным* нулю это первое слагаемое $2x^2$ может быть сделано, а именно при $x=0$. Таким образом, первое слагемое $2x^2$, а с ним и вся сумма $2x^2+7$, принимает своё самое меньшее значение при $x_0=0$. Это наименьшее, или, как говорят, минимальное, значение, очевидно, есть 7, что записывают так:

$$y_{\text{мин}}=7.$$

С помощью таких же соображений легко показать, что каждая из функций

$$y=5x^2+3,\quad y=9x^2+4,\quad y=2x^2-5,\quad y=3x^2-11$$

обладает сходными свойствами: наибольшего значения она не имеет, а наименьшее имеет, причём для всех четырёх функций это наименьшее значение достигается при $x_0=0$ и равно соответственно

$$y_{\text{мин}}=3,\quad y_{\text{мин}}=4,\quad y_{\text{мин}}=-5,\quad y_{\text{мин}}=-11.$$

§ 2. Рассмотренные только что примеры очень просты. Источником этой простоты служит то обстоятельство, что функция y представлялась в форме суммы двух слагаемых, из которых одно было *постоянным*, а другое, будучи *квадратом* (с некоторым положительным коэффициентом), не могло оказаться отрицательным.

Сложнее обстоит дело в примере

$$y=2x^2-12x+93.$$

Чтобы иметь возможность применить ту же идею, что и раньше, перепишем y в другой форме:

$$y=2(x^2-6x)+93.$$

Теперь добавим в скобки такое число, чтобы в скобках оказался полный квадрат:

$$y=2(x^2-6x+9)+93-18$$

или

$$y=2(x-3)^2+75.$$

Теперь мы можем применить те же соображения, что и выше. В самом деле, функция y представлена в форме суммы двух

*) Мы не рассматриваем мнимых чисел.

слагаемых, из которых одно, а именно 75, не зависит вовсе от x, а другое, $2(x-3)^2$, никогда не делается отрицательным, но становится равным нулю, когда $x=3$. Поэтому наша функция имеет наименьшее значение $y_{\text{мин}}=75$, достигаемое ею при $x=3$.

Что касается наибольшего значения нашей функции, то его не существует, в чём легко убедиться, полагая, например,

$$x_1=13, \quad x_2=103, \quad x_3=1003, \ \ldots$$

Соответствующие значения функции y будут

$$y_1=275, \quad y_2=20\,075, \quad y_3=2\,000\,075, \ \ldots$$

Аналогично решается пример

$$y=3x^2+24x+50.$$

Опуская пояснения, которые понятны сами собой, имеем:

$$y=3(x^2+8x)+50,$$
$$y=3(x^2+8x+16)+50-48,$$
$$y=3(x+4)^2+2.$$

Стало быть, функция y принимает наименьшее значение при $x_0=-4$, причём это наименьшее значение есть

$$y_{\text{мин}}=2.$$

Вот ещё один пример:

$$y=5x^2-50x+39.$$

Здесь

$$x_0=5, \quad y_{\text{мин}}=-86$$

(через x_0 мы постоянно будем обозначать то значение независимой переменной, которому отвечает наименьшее значение функции).

§ 3. Не следует думать, что всякий квадратный трёхчлен (так называется рассматриваемый вид функции) имеет наименьшее и не имеет наибольшего значения.

Например, у функции

$$y=-3x^2+8$$

очевидным образом имеется именно наибольшее, или, как говорят, максимальное, значение

$$y_{\text{макс}}=8,$$

принимаемое ею при $x_0=0$. Напротив, наименьшего значения у неё нет.

Точно так же у функции

$$y = -4x^2 + 40x - 73$$

нет наименьшего, но есть наибольшее значение, в чём мы убеждаемся с помощью следующих преобразований:

$$y = -4(x^2 - 10x) - 73,$$
$$y = -4(x^2 - 10x + 25) - 73 + 100,$$
$$y = -4(x-5)^2 + 27,$$

откуда при $x_0 = 5$ получается

$$y_{\text{макс}} = 27.$$

§ 4. Итак, некоторые квадратные трёхчлены имеют наименьшее, но не имеют наибольшего значения, другие же, наоборот, имеют наибольшее и не имеют наименьшего значения. Внимательный читатель, вероятно, уже заметил, что характер трёхчлена определяется *знаком* его старшего коэффициента. Чтобы установить это с полной строгостью, рассмотрим вопрос в общем виде.

Пусть имеем квадратный трёхчлен

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Здесь коэффициенты могут быть любыми вещественными числами: положительными и отрицательными и даже обращаться в нуль. Однако *старший* коэффициент a во всяком случае должен быть отличен от нуля, ибо иначе y не содержал бы вовсе члена с x^2 и не был бы *квадратным* трёхчленом.

Преобразуем y следующим образом:

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x\right) + c,$$
$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Полагая для краткости

$$c - \frac{b^2}{4a} = M,$$

получим окончательно:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + M.$$

Важно заметить, что M есть некоторое постоянное число, полностью определяемое коэффициентами a, b и c и совершенно не зависящее от значений независимой переменной x.

Различим два случая.

1) Если $a>0$, то первое слагаемое $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ никогда не делается отрицательным, но при

$$x_0=-\frac{b}{2a}$$

обращается в нуль. Поэтому функция y имеет наименьшее значение, равное M:

$$y_{\text{мин}}=M,$$

и не имеет значения наибольшего.

2) Если $a<0$, то по тем же соображениям оказывается, что

$$y_{\text{макс}}=M,$$

причём это значение достигается при

$$x_0=-\frac{b}{2a},$$

а $y_{\text{мин}}$ не существует.

Заметим, что как наименьшее, так и наибольшее значение функции называется её *экстремальным* («крайним») значением. Поэтому всё сказанное можно резюмировать в виде следующей теоремы, являющейся для нас основной.

Теорема. *Квадратный трёхчлен*

$$y=ax^2+bx+c$$

имеет экстремальное значение, принимаемое им при

$$\boxed{x_0=-\frac{b}{2a}}.$$

Это значение оказывается наименьшим, если $a>0$, и наибольшим, если $a<0$. Если существует $y_{\text{макс}}$, то $y_{\text{мин}}$ не существует, и наоборот.

Заметим ещё, что, как мы видели выше, это экстремальное значение всегда равно

$$y_{\text{экстр}}=M,$$

или, подробнее,

$$y_{\text{экстр}}=c-\frac{b^2}{4a}.$$

Однако этого последнего равенства запоминать *не нужно*, потому что ведь это есть значение нашего трёхчлена при

$$x = x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Значит, достаточно подставить в трёхчлен вместо x число

$$x_0 = -\frac{b}{2a},$$

чтобы получить величину $y_{\text{экстр}}$.

Примеры.

$$y = 3x^2 - 12x + 8, \quad x_0 = 2, \quad y_{\text{мин}} = -4;$$
$$y = -2x^2 + 8x - 3, \quad x_0 = 2, \quad y_{\text{макс}} = 5;$$
$$y = 2x^2 + 20x + 17, \quad x_0 = -5, \quad y_{\text{мин}} = -33.$$

II. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

§ 5. Покажем, что доказанная в § 4 теорема позволяет решить большое число самых разнообразных конкретных задач.

Задача 1. *Разложить данное положительное число A на два слагаемых так, чтобы их произведение оказалось наибольшим.*

Решение. Обозначим одно из искомых слагаемых через x. Тогда второе слагаемое будет равно $A - x$, а их произведение

$$y = x(A - x),$$

или

$$y = -x^2 + Ax.$$

Таким образом, вопрос привёлся к нахождению такого значения x, при котором этот квадратный трёхчлен получит наибольшее значение. По теореме § 4 такое значение заведомо существует (ибо здесь старший коэффициент равен -1, т. е. отрицателен) и равно

$$x_0 = \frac{A}{2}.$$

В таком случае

$$A - x_0 = \frac{A}{2}$$

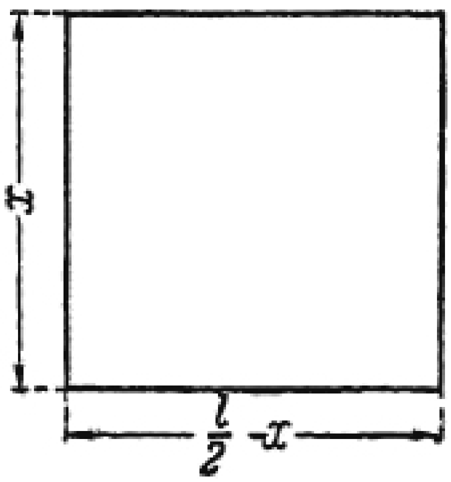
и, стало быть, оба слагаемых должны быть равны друг другу.

Например, число 30 допускает такие разложения:

$$\begin{aligned} 30 &= 5+25, & 5\cdot 25 &= 125,\\ 30 &= 7+23, & 7\cdot 23 &= 161,\\ 30 &= 13+17, & 13\cdot 17 &= 221,\\ 30 &= 20+10, & 20\cdot 10 &= 200,\\ 30 &= 29+1, & 29\cdot 1 &= 29,\\ 30 &= 30+0, & 30\cdot 0 &= 0. \end{aligned}$$

Все полученные произведения меньше, чем $15\cdot 15=225$.

§ 6. Задача 2. *Имеется проволока длины l. Требуется согнуть её так, чтобы получился прямоугольник, ограничивающий по возможности наибольшую площадь.*



Черт. 1.

Решение. Обозначим (черт. 1) одну из сторон прямоугольника через x. Тогда, очевидно, другая его сторона будет $\frac{l}{2}-x$, а площадь

$$S=x\left(\frac{l}{2}-x\right),$$

или

$$S=-x^2+\frac{l}{2}x.$$

Эта функция принимает своё наибольшее значение при

$$x_0=\frac{l}{4},$$

что и будет искомым значением одной из сторон прямоугольника. Тогда другая его сторона будет

$$\frac{l}{2}-x_0=\frac{l}{4},$$

т. е. наш прямоугольник оказывается *квадратом*. Полученное решение задачи можно резюмировать в форме следующей теоремы.

Теорема. *Из всех прямоугольников, имеющих один и тот же периметр, наибольшую площадь имеет квадрат.*

Замечание. Нашу задачу легко решить также с помощью результата, полученного при решении задачи 1. В самом деле, мы видим, что площадь интересующего нас прямоугольника есть

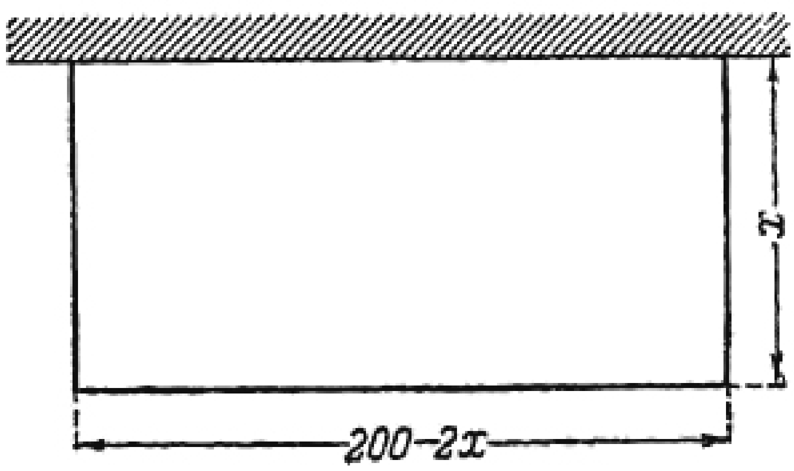
$$S=x\left(\frac{l}{2}-x\right).$$

Иначе говоря, S есть произведение двух сомножителей x и $\frac{l}{2}-x$. Но *сумма* этих сомножителей есть

$$x+\left(\frac{l}{2}-x\right)=\frac{l}{2},$$

т. е. число, не зависящее от выбора x. Значит, дело сводится к разложению числа $\frac{l}{2}$ на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим. Как мы знаем, это произведение будет наибольшим, когда слагаемые равны, т. е. при $x=\frac{l}{4}$.

§ 7. Задача 3. *Из имеющихся досок можно построить забор длиною в 200 м. Требуется огородить этим забором прямоугольный двор наибольшей площади, используя для одной стороны двора заводскую стену.*



Черт. 2.

Решение. Обозначим (черт. 2) одну из сторон двора через x. Тогда другая его сторона будет равна $200-2x$, а его площадь будет

$$S=x(200-2x),$$

или

$$S=-2x^2+200x.$$

Согласно теореме § 4 наибольшее значение этой функции достигается ею при

$$x_0=50.$$

Итак, сторона двора, перпендикулярная к заводской стене, должна равняться 50 *м*, откуда для стороны, параллельной стене, получается значение 100 *м*, т. е. двор должен иметь форму половины квадрата.

Замечание. Если бы мы и здесь захотели использовать результат решения задачи 1, то непосредственно это нам бы не удалось, ибо

$$S = x(200 - 2x)$$

есть произведение двух сомножителей, сумма которых равна $200 - x$, т. е. *зависит от* x. Иначе говоря, мы не находимся в условиях задачи 1. Однако с помощью небольшого ухищрения можно всё же свести дело к задаче 1. В самом деле, рассмотрим вместо S величину $z = 2S$. Так как

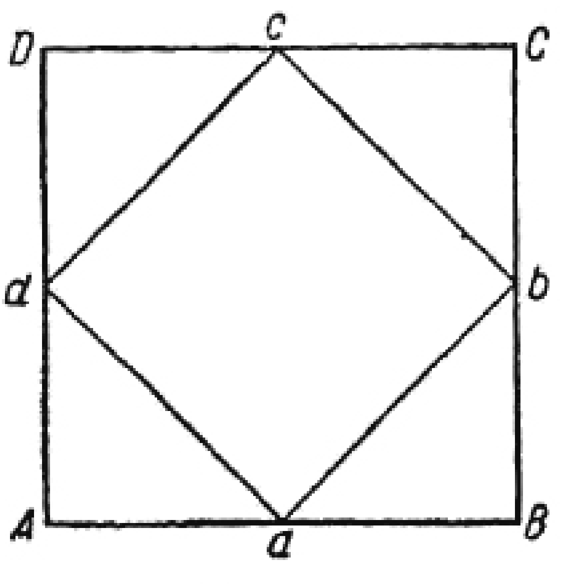
$$z = 2x(200 - 2x),$$

то *эта* функция есть произведение двух сомножителей, сумма которых уже не зависит от x и, стало быть, $z_{\text{макс}}$ достигается при

$$2x = 200 - 2x,$$

откуда $x = 50$. Остаётся заметить, что функции S и $z = 2S$ достигают своих наибольших значений при одном и том же значении x.

§ 8. З а д а ч а 4. *Дан квадрат ABCD* (черт. 3). *От его вершин отложены равные отрезки Aa, Bb, Cc, Dd и точки a, b, c, d соединены прямыми. При каком значении Aa площадь квадрата abcd окажется наименьшей?*



Черт. 3.

Р е ш е н и е. Если положить

$$Aa = x,$$

то, очевидно, окажется

$$aB = l - x,$$

где $l = AB$ и, стало быть, по теореме Пифагора будет

$$\overline{ab}^2 = x^2 + (l - x)^2 = 2x^2 - 2lx + l^2.$$

Но площадь S квадрата $abcd$ как раз и равна $\overline{ab}^2$. Значит,

$$S = 2x^2 - 2lx + l^2.$$

Поэтому наименьшее значение для S получится при

$$x_0 = \frac{l}{2}.$$

Таким образом, точки a, b, c и d нужно поместить в серединах сторон основного квадрата $ABCD$.

§ 9. Задача 5. *Из точек A и B* (черт. 4) *по указанным стрелками направлениям выходят одновременно пароход и яхта. Их скорости соответственно равны*

$$v_{\text{п}} = 40 \text{ км/час}, \; v_{\text{я}} = 16 \text{ км/час}.$$

Через сколько времени расстояние между ними окажется наименьшим, если

$$AB = 145 \text{ км}?$$

Решение. Отметим буквами П и Я положение парохода и яхты через t часов после выхода из точек A и B. Тогда

$$A\text{П} = 40t \text{ км}, \; B\text{Я} = 16t \text{ км}$$

и поэтому на основании теоремы Пифагора

$$\text{ПЯ} = \sqrt{B\text{П}^2 + B\text{Я}^2} = \sqrt{(145 - 40t)^2 + (16t)^2},$$

откуда

$$\text{ПЯ} = \sqrt{1856t^2 - 11\,600t + 21\,025}.$$

Наименьшее своё значение этот корень примет при том же

Черт. 4.

самом t, при котором будет иметь наименьшее значение подкоренное выражение

$$z = 1856t^2 - 11\,600t + 21\,025,$$

т. е. при

$$t = \frac{11\,600}{3712} = 3\frac{1}{8} \text{ часа}.$$

Итак, пароход и яхта окажутся на кратчайшем расстоянии друг от друга через 3 часа 7 минут 30 секунд после выхода из точек A и B.

§ 10. Задача 6. *В данный круг вписать прямоугольник наибольшей площади.*

Решение. Обозначим через R радиус круга, а через x сторону AB искомого прямоугольника (черт. 5). По теореме Пифагора окажется

$$BC = \sqrt{4R^2 - x^2},$$

откуда для интересующей нас площади S получается выражение

$$S = x\sqrt{4R^2 - x^2}.$$

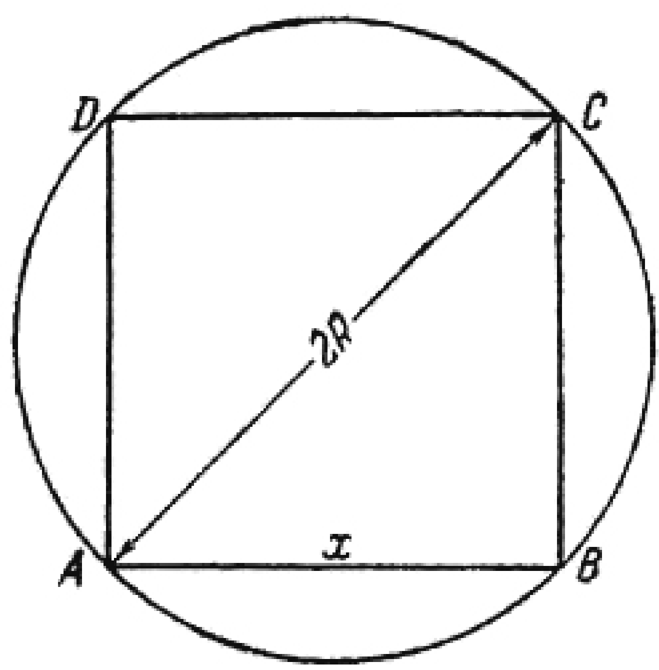
Эта функция достигает своего наибольшего значения при том же самом x, что и функция $y = S^2$. Но

$$y = x^2(4R^2 - x^2).$$

Полагая $x^2 = z$, получим:

$$y = z(4R^2 - z) = -z^2 + 4R^2 z.$$

Значит, $y_{макс}$ достигается при $z = 2R^2$, т. е. при $x = R\sqrt{2}$. Это значение x можно было бы найти и не вводя величины z,



Черт. 5.

а опираясь на то, что y есть произведение двух сомножителей с постоянной суммой $4R^2$, откуда в силу результата, полученного при решении задачи 1,

$$x^2 = 2R^2 \text{ и } x = R\sqrt{2}.$$

Замечая, что при $AB = x = R\sqrt{2}$ будет

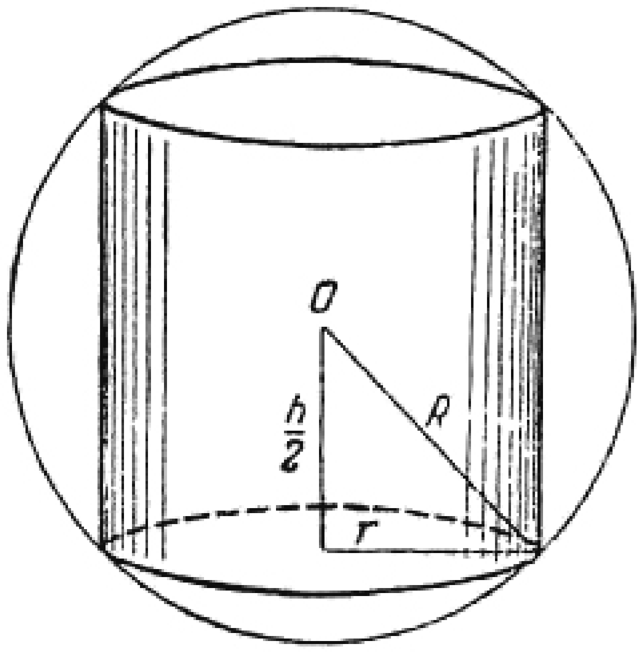
$$BC = R\sqrt{2},$$

мы видим, что искомый прямоугольник должен быть квадратом. Таким образом, нами доказана следующая теорема:

Теорема. *Из всех прямоугольников, вписанных в один и тот же круг, наибольшую площадь имеет квадрат.*

§ 11. Задача 7. *В данный шар вписать цилиндр с наибольшей боковой поверхностью.*

Решение. Обозначим через R радиус шара, а через r и h соответственно радиус и высоту искомого цилиндра



Черт. 6.

(черт. 6). Тогда боковая поверхность цилиндра будет

$$S = 2\pi rh.$$

С другой стороны, как видно из черт. 6, отрезки R, r и $\frac{1}{2}h$ связаны соотношением

$$\frac{1}{4}h^2 + r^2 = R^2.$$

Отсюда

$$h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

и, стало быть,

$$S = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Полагая, как и в предыдущей задаче, $y = S^2$, получаем

$$y = 16\pi^2 r^2 (R^2 - r^2).$$

Если ввести новую независимую переменную $x = r^2$, то y будет выражаться через неё так:

$$y = 16\pi^2 x (R^2 - x),$$

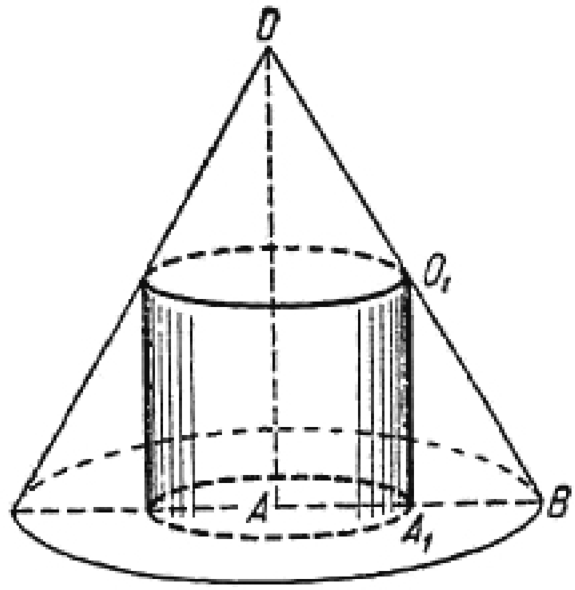
откуда $y_{\text{макс}}$ достигается при $x_0 = \frac{R^2}{2}$, т. е. при

$$r = \frac{R}{\sqrt{2}} = R\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Зная r, легко находим и $h = R\sqrt{2}$. Замечая ещё, что для искомого цилиндра оказывается $h = 2r$, мы видим, что осевое сечение этого цилиндра есть квадрат.

§ 12. Задача 8. *В данный конус вписать цилиндр с наибольшей боковой поверхностью.*

Решение. Обозначим через R и H данные нам радиус основания и высоту конуса, а через r и h радиус и высоту искомого цилиндра. Тогда боковая поверхность цилиндра будет



Черт. 7.

$$S = 2\pi rh.$$

Но из подобия треугольников OAB O_1A_1B (черт. 7) вытекает пропорция

$$\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R},$$

откуда

$$h = \frac{H}{R}(R-r)$$

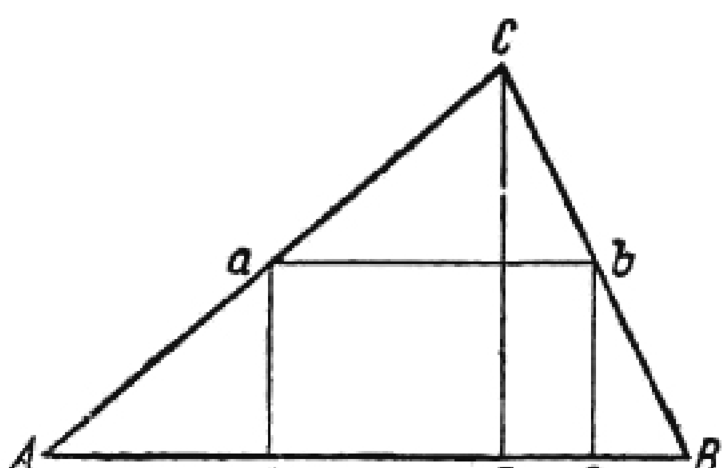
и

$$S = 2\pi \frac{H}{R} r(R-r).$$

Эта функция принимает своё наибольшее значение при $r_0 = \frac{1}{2}R$. Отсюда высота искомого цилиндра

$$h_0 = \frac{H}{R}(R - r_0) = \frac{1}{2}H.$$

§ 13. Задача 9. *В треугольнике ABC* (черт. 8) *провести прямую ab, параллельную основанию AB, так,*



Черт. 8.

чтобы площадь прямоугольника $abcd$ оказалась наибольшей.

Решение. Положим

$$AB = L, \; ab = l, \quad bc = h$$

и обозначим через H высоту CD треугольника ABC, опущенную на сторону AB. Из подобия треугольников ABC и abC вытекает пропорция

$$\frac{l}{L}=\frac{H-h}{H},$$

откуда

$$l=\frac{L}{H}(H-h).$$

Так как площадь интересующего нас прямоугольника $abcd$ есть

$$S=hl,$$

то

$$S=\frac{L}{H}h(H-h),$$

откуда $S_{\text{макс}}$ достигается при $h_0=\frac{1}{2}H$.

III. ДРУГИЕ ТЕОРЕМЫ, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ НАХОДИТЬ НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ

§ 14. Вернёмся к задаче 1, решённой нами в § 5. Полученное там решение этой задачи приводит к следующей теореме:

Теорема. *Среднее геометрическое двух положительных чисел не больше их среднего арифметического*

$$\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}. \qquad (*)$$

В самом деле, пусть x и y — два положительных числа. Обозначим их сумму через A. Числа $\frac{1}{2}A$ и $\frac{1}{2}A$ имеют ту же сумму. Но так как эти последние два числа равны друг другу, то (как было показано в § 5) их произведение больше, чем произведение любых других двух чисел с той же суммой, в частности, чисел x и y, т. е.

$$xy\leqslant\left(\frac{A}{2}\right)^2$$

(знак равенства приходится поставить потому, что ведь не исключено, что $x=y=\frac{1}{2}A$). Вспоминая, что $A=x+y$, видим, что

$$xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

а это равносильно неравенству (*). Проведённое доказательство показывает также, что *знак равенства в соотношении* (*) *стоит тогда и только тогда, когда* $x=y$.

Эту теорему можно доказать ещё по-другому, без ссылки на результат § 5. Действительно, неравенство (*) можно записать в равносильной форме

$$0 \leqslant x - 2\sqrt{xy} + y,$$

а в этой форме оно очевидно, ибо

$$x - 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0.$$

Это доказательство также устанавливает, что в (*) имеет место равенство тогда и только тогда, когда $x=y$.

§ 15. Задача 10. *Данное положительное число P разложить на два положительных сомножителя так, чтобы их сумма оказалась наименьшей.*

Решение. Пусть P каким-нибудь способом представлено в форме произведения двух положительных сомножителей x и y:

$$P = xy \qquad (x > 0,\ y > 0).$$

Тогда в силу неравенства (*) окажется

$$x + y \geqslant 2\sqrt{P}.$$

Итак, при любом выборе сомножителей их сумма не может оказаться *меньшей*, чем $2\sqrt{P}$. Но, выбирая их *равными*, т. е. полагая $x=\sqrt{P}$, $y=\sqrt{P}$, мы очевидным образом приходим к сумме, *равной* $2\sqrt{P}$. Таким образом, $2\sqrt{P}$ есть наименьшее значение интересующей нас суммы, достигающееся ею тогда и только тогда, когда оба сомножителя равны друг другу.

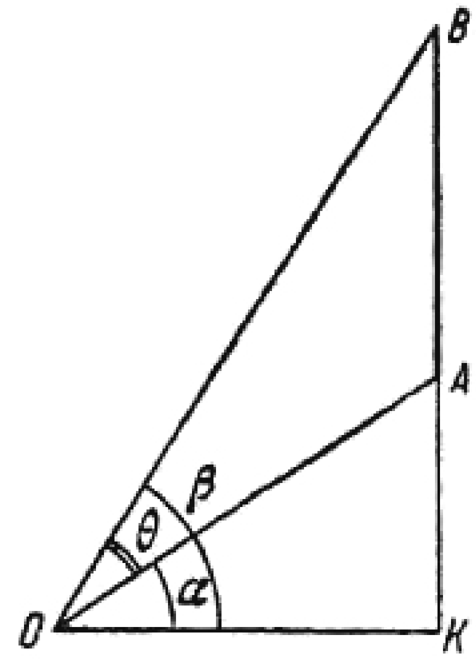
Если обратить внимание на то, что $y=\frac{P}{x}$, то полученное решение задачи можно высказать в форме следующей теоремы:

Теорема. *Функция*

$$z = x + \frac{P}{x} \quad (P > 0)$$

(в которой независимая переменная x принимает только положительные значения) достигает своего наименьшего значения $z_{\text{мин}}$ при $x_0 = \sqrt{P}$ и только при этом значении x.

§ 16. Задача 11. *На вертикальной стене висит плакат AB. На каком расстоянии от стены должен стать наблюдатель, чтобы угол θ, под которым он видит плакат, оказался наибольшим?*



Черт. 9.

Решение. Обозначим через K точку пересечения стены с горизонтальной прямой, проходящей через глаз O наблюдателя (черт. 9). Тогда искомое расстояние есть OK. Обозначим его через x и положим

$$KA = a, \quad KB = b.$$

Если углы KOA и KOB обозначить через α и β, то очевидно, что

$$\theta = \beta - \alpha.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Но

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{x}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{x}.$$

Стало быть,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b - a}{x + \frac{ab}{x}}.$$

Так как наибольшее значение угла θ будет достигаться при наибольшем значении его тангенса, то наша задача сводится к нахождению такого значения x, при котором дробь

$$\frac{b-a}{x+\frac{ab}{x}}$$

будет наибольшей. Но её числитель постоянен. Значит, нужно сделать наименьшим её знаменатель

$$x+\frac{ab}{x}.$$

По теореме предыдущего параграфа искомое значение x есть

$$x_0=\sqrt{ab}.$$

§ 17. Теорема § 14 допускает значительное обобщение, которое представляет большой теоретический интерес. С его помощью нам удастся решить ещё целый ряд задач на максимум и минимум. Это обобщение можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема. *Среднее геометрическое любого количества положительных чисел не больше их среднего арифметического*

$$\boxed{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.}$$

Доказательство. Приведём остроумное, хотя и не очень простое, доказательство этой теоремы, представляющее собою весьма необычный вариант метода математической индукции.

Если $n=2$, то интересующая нас теорема совпадает с уже доказанной теоремой из § 14. Пусть $n=4$. Тогда по доказанному

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}=\sqrt{\sqrt{x_1x_2}\cdot\sqrt{x_3x_4}}\leqslant\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2},$$

т. е.

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}\leqslant\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}.$$

Таким образом, теорема доказана для $n=4$.

Пусть теперь $n=8$. Тогда по доказанному

$$\sqrt[8]{x_1x_2\ldots x_8}=\sqrt{\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}\cdot\sqrt[4]{x_5x_6x_7x_8}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\cdot\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}}$$

и, стало быть,

$$\sqrt[8]{x_1x_2\ldots x_8}\leqslant\frac{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}+\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}}{2},$$

что доказывает теорему для $n=8$.

Аналогично, мы докажем эту теорему для $n=16$, $n=32$, $n=64$ и вообще для $n=2^m$. Это делается обычной индукцией по m.

Допустим теперь, что n не есть число вида 2^m. Тогда мы сами выберем столь большое m, чтобы оказалось

$$2^m>n.$$

Положим

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=A$$

и присоединим к нашим числам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ещё 2^m-n чисел

$$x_{n+1}=A,\ x_{n+2}=A,\ \ldots,\ x_{2^m}=A.$$

Тогда по доказанному

$$\sqrt[2^m]{x_1\ldots x_nx_{n+1}\ldots x_{2^m}}\leqslant\frac{x_1+\ldots+x_n+x_{n+1}+\ldots+x_{2^m}}{2^m}.$$

Отсюда

$$\sqrt[2^m]{x_1\ldots x_nA^{2^m-n}}\leqslant\frac{x_1+\ldots+x_n+(2^m-n)A}{2^m}.$$

Но так как

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=nA,$$

то

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n+(2^m-n)A}{2^m}=\frac{nA+(2^m-n)A}{2^m}=A.$$

Поэтому предыдущее неравенство принимает вид

$$\sqrt[2^m]{x_1x_2\ldots x_nA^{2^m-n}}\leqslant A,$$

откуда после возведения в степень 2^m:

$$x_1x_2\ldots x_nA^{2^m-n}\leqslant A^{2^m},$$

и, стало быть,

$$x_1 x_2 \ldots x_n \leqslant A^n,$$

т. е.

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Теорема доказана.

§ 18. Из доказанной теоремы вытекает возможность решения двух задач, рассматриваемых в настоящем параграфе.

Задача 12. *Данное положительное число A разложить на n положительных слагаемых так, чтобы их произведение оказалось наибольшим.*

Решение. Допустим, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ положительны и

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = A.$$

Тогда по теореме § 17

$$x_1 x_2 \ldots x_n \leqslant \left(\frac{A}{n}\right)^n.$$

Итак, никакой выбор слагаемых не приводит к произведению, *большему* чем $\left(\frac{A}{n}\right)^n$. С другой стороны, при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{A}{n}$, очевидно, получается произведение, *равное* $\left(\frac{A}{n}\right)^n$. Таким образом, все искомые слагаемые должны быть равны друг другу.

Задача 13. *Данное положительное число P разложить на n положительных сомножителей так, чтобы сумма их оказалась наименьшей.*

Решение аналогично решению задачи 12. Именно, если

$$x_1 x_2 \ldots x_n = P,$$

то по теореме из § 17 будет

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n\sqrt[n]{P}.$$

Значит, никакой выбор сомножителей не приводит к сумме, меньшей чем $n\sqrt[n]{P}$, а так как при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \sqrt[n]{P}$$

получается сумма, равная $n\sqrt[n]{P}$, то все искомые сомножители должны быть равны друг другу.

§ 19. Пользуясь результатами § 18, можно решить ещё целый ряд конкретных задач. Приведём несколько примеров.

Задача 14. *В данный шар вписать цилиндр наибольшего объёма.*

Решение. Сохраняя обозначения § 11, имеем выражение интересующего нас объёма в виде

$$V=\pi r^2 h.$$

Но, как мы видели в § 11,

$$h=2\sqrt{R^2-r^2}.$$

Значит,

$$V=2\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}.$$

Полагая $z=\frac{1}{4\pi^2}V^2$, получаем:

$$z=r^4(R^2-r^2),$$

причём z принимает своё наибольшее значение при том же самом r, что и V. Так как

$$\frac{1}{4}z=\frac{r^2}{2}\cdot\frac{r^2}{2}(R^2-r^2),$$

то $\frac{1}{4}z$ есть произведение трёх сомножителей, сумма которых равна R^2. Стало быть, наибольшим будет значение z, отвечающее такому r, что

$$\frac{r^2}{2}=\frac{r^2}{2}=R^2-r^2.$$

Отсюда

$$r=R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

§ 20. Задача 15. *В данный конус вписать цилиндр наибольшего объёма.*

Решение. Сохраняя обозначения § 12, имеем выражение интересующего нас объёма в виде

$$V=\pi r^2 h.$$

Но, как мы видели в § 12,

$$h=\frac{H}{R}(R-r).$$

Значит,

$$V=\pi\frac{H}{R}r^2(R-r).$$

Наибольшее значение V достигается при том же r, что и наибольшее значение функции

$$z = \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} (R - r),$$

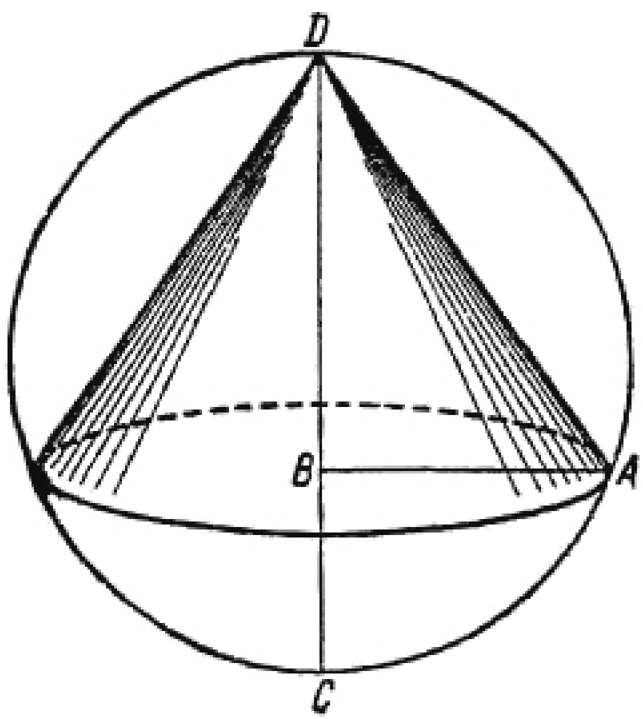
являющейся произведением трёх сомножителей, сумма которых постоянна. Значит, $z_{\text{макс}}$ достигается при

$$\frac{r}{2} = \frac{r}{2} = R - r,$$

т. е. при $r = \frac{2}{3} R$.

§ 21. Задача 16. *В данный шар вписать конус наибольшего объёма.*

Решение. Обозначим через R радиус шара и через r и h соответственно радиус основания и высоту конуса. Из



Черт. 10.

черт. 10 ясно, что $r = AB$ есть средняя пропорциональная между отрезками BD и BC. Но

$$BD = h, \quad BC = 2R - h.$$

Значит,

$$r^2 = h(2R - h).$$

А так как интересующий нас объём есть

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

то

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (2R - h).$$

Вводя вместо V функцию

$$z=\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}(2R-h),$$

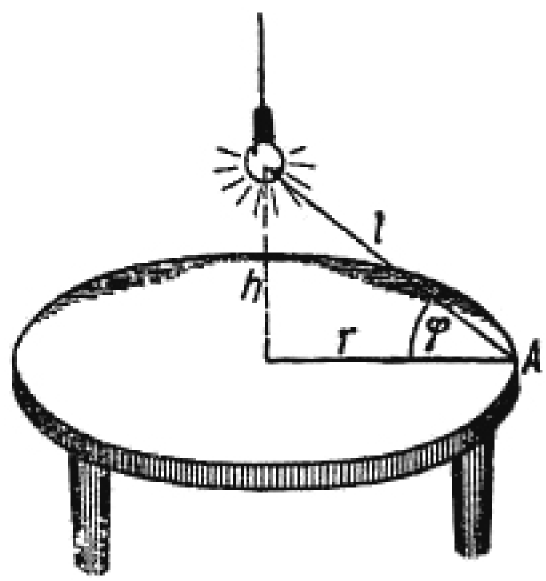
принимающую одновременно с V своё наибольшее значение, видим, что $z_{макс}$ достигается при

$$\frac{h}{2}=\frac{h}{2}=2R-h,$$

т. е. при

$$h=\frac{4}{3}R.$$

§ 22. Задача 17. *Над центром круглого стола на блоке висит лампа. На какой высоте следует поместить эту лампу, чтобы на краях стола получить наибольшую освещённость?*



Черт. 11.

Решение. Введём обозначения черт. 11. Из курса физики известно, что сила света I в точке A выражается формулой

$$I=k\frac{\sin\varphi}{l^2},$$

где k — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности. Замечая, что

$$\cos\varphi=\frac{r}{l},$$

получаем:

$$I=\frac{k}{r^2}\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi.$$

Рассмотрим вместо I величину

$$z=\frac{r^4}{k^2}I^2,$$

Ясно, что $z_{макс}$ и $I_{макс}$ достигаются одновременно. Но

$$z = \sin^2\varphi \cdot \cos^4\varphi,$$

откуда

$$\frac{1}{4}z = (1-\cos^2\varphi)\frac{\cos^2\varphi}{2}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{2}$$

и наибольшее значение z достигается, если

$$1-\cos^2\varphi = \frac{\cos^2\varphi}{2} = \frac{\cos^2\varphi}{2},$$

т. е. при

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

При таком φ будет

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

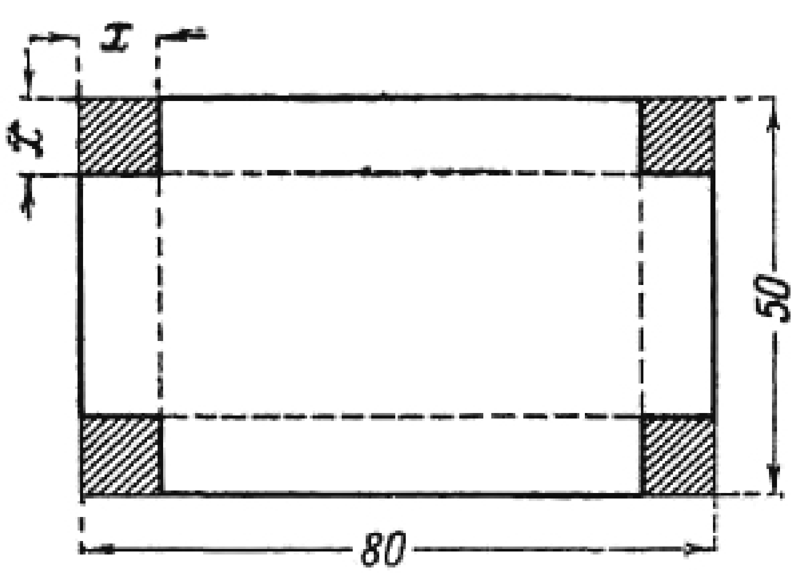
а так как

$$h = r\operatorname{tg}\varphi,$$

то искомая высота есть

$$h_0 = r\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7r.$$

§ 23. Задача 18. *Дан прямоугольный лист жести размерами 80 см $\times$ 50 см. Требуется вырезать около всех его углов одинаковые квадратики так, чтобы после загибания остающихся кромок получилась открытая сверху коробка наибольшей вместимости.*



Черт. 12.

Решение. Обозначим через x сторону вырезаемого квадратика (черт. 12). Нетрудно видеть, что объём V получаемой коробки будет

$$V = x(80-2x)(50-2x).$$

Ясно, что попытка отыскания $V_{\text{макс}}$ заменой V на

$$z = 4x(80 - 2x)(50 - 2x)$$

с последующим приравниванием всех трёх сомножителей друг другу обречена на неудачу, ибо уравнение

$$80 - 2x = 50 - 2x$$

неразрешимо.

Мы поступим иначе, введя в последний сомножитель некоторый постоянный множитель k, выбор которого уточним позже. Таким образом, мы будем вместо V рассматривать величину

$$kV = x(80 - 2x)(50k - 2kx).$$

Здесь сумма сомножителей не будет величиной постоянной, поэтому мы ещё дополнительно умножим первый сомножитель на $2k + 2$. Итак, вместо V мы будем изучать функцию

$$z = [(2k + 2)x][80 - 2x][50k - 2kx].$$

При любом выборе k сумма сомножителей здесь постоянна и равна $80 + 50k$. Значит, наибольшее значение функция z (а с ней и V) примет тогда, когда

$$(2k + 2)x = 80 - 2x = 50k - 2kx.$$

Таким образом, для отыскания x мы имеем два уравнения:

$$(2k + 2)x = 80 - 2x,$$
$$(2k + 2)x = 50k - 2kx.$$

Эти уравнения имеют следующие решения:

$$x = \frac{40}{k+2}, \quad x = \frac{25k}{2k+1}.$$

Для того чтобы задача была разрешима, нужно, чтобы эти значения x совпадали, т. е. чтобы было

$$\frac{40}{k+2} = \frac{25k}{2k+1}. \qquad (*)$$

Здесь и приходит на помощь то обстоятельство, что мы можем распорядиться выбором числа k по своему желанию. Именно, подберём k таким, чтобы выполнялось условие (*), для чего нужно на (*) взглянуть как на уравнение, определяющее k. Решая это уравнение, находим для k два значения:

$$k_1 = 2, \quad k_2 = -\frac{4}{5}.$$

Однако отрицательное значение для k непригодно. Действительно, по смыслу задачи множитель $50-2x$, входящий в состав V, должен быть *положителен*. С другой стороны, чтобы можно было применить для нахождения $z_{\text{макс}}$ «способ приравнивания сомножителей», нужно быть уверенным, что все сомножители положительны. В частности, должен быть положителен сомножитель

$$50k-2kx=k(50-2x).$$

Но выражения

$$k(50-2x) \quad \text{и} \quad (50-2x)$$

могут быть одновременно положительны лишь тогда, когда k положительно.

Итак, для k необходимо выбрать значение

$$k=2.$$

При таком выборе k для x получается значение

$$x=10.$$

Таково решение задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как мы видели выше, можно с помощью элементарных алгебраических средств решить любую задачу, приводящую к отысканию экстремального значения квадратного трёхчлена

$$y = ax^2 + bx + c.$$

В тех же случаях, когда вопрос приводится к нахождению наибольшего или наименьшего значения функции более сложной природы, нам удавалось довести решение до конца лишь с помощью того или иного искусственного приёма, специально выбираемого для каждой отдельной задачи.

Естественно спросить, существуют ли *общие способы* для отыскания экстремальных значений функций любой природы, а не только квадратных трёхчленов. Оказывается, что такие способы есть, но, как уже было сказано во «Введении», для их изучения необходимо привлечь аппарат высшей математики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Введение 5

I. Основная теорема о квадратных трёхчленах 6

II. Некоторые применения основной теоремы 11

III. Другие теоремы, позволяющие находить наибольшие и наименьшие значения функций 19

Заключение 31