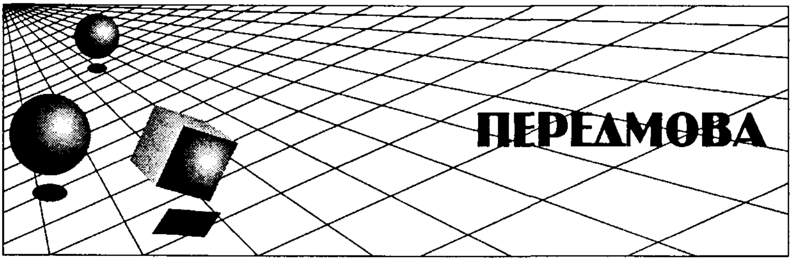
МАТЕМАТИКА

Конет І.М., Паньков В.Г.,
Радченко В.М., Теплінський Ю.В.

ОБЛАСНІ МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ



Досягнення сучасної науки і техніки неможливі без застосування і подальшого розвитку математики. Сьогодні математичні теорії та методи є визначальними майже у всіх сферах людської діяльності, тому підвищення рівня математичної освіти в Україні – одне з найважливіших завдань як вищої, так і середньої школи. Однак математична освіта в загальноосвітній школі спрямована в основному на засвоєння учнями алґоритмів розв'язування стандартних задач, а цього недостатньо для потреб практики і розвитку здібностей до самостійного математичного мислення.

Розв'язуванню нестандартних математичних задач учні навчаються на факультативних заняттях, в математичних гуртках та шляхом наполегливої самостійної роботи, а перевіряються їх знання і вміння на математичних олімпіадах різних рівнів. Математичні олімпіади є також одним із ефективних засобів формування в учнів навичок самостійного творчого мислення.

Математичні олімпіади в Україні проводяться в декілька етапів: шкільні, районні (міські), обласні та заключні, в яких беруть участь переможці обласних олімпіад. Кращі юні математики України стають учасниками міжнародної олімпіади.

Задачі, що пропонуються учасникам олімпіад, відрізняються від звичайних шкільних задач рівнем складності і нестандартністю. Як правило, розв'язання олімпіадної задачі грунтується на одній несподіваній ідеї. Чим оригінальніша ця ідея, тим краща задача з точки зору журі, яке складає завдання для олімпіади. Але абсолютно оригінальних задач з'являється небагато. Деякі прийоми і методи використовуються одразу в розв'язанні багатьох задач, звичайно, з певними змінами у різних ситуаціях.

І не завжди легко здогадатися, який саме метод може допомогти в кожному конкретному випадку. Тому знайомство з найбільш поширеними методами бажане для кожного учасника олімпіади. В той же час у шкільному курсі математики учень не має змоги застосовувати принцип Діріхле, поняття інваріанта, розфарбування та інші поширені олімпіадні ідеї. Мета авторів цієї книжки – описати найбільш важливі та цікаві методи розв'язування нестандартних математичних задач, зібравши їх разом. Зазначимо, що окремі статті і повідомлення про ці методи публікувалися на сторінках журналів "Квант", "Математика в школі", "Математика в школах України", "У світі математики".

Пропонована книга складається з трьох розділів.

У першому розділі розглядаються деякі спеціальні методи розв'язування олімпіадних задач. Пояснення всіх методів супроводжується розв'язуванням типових прикладів. Уміння застосовувати на практиці кожний метод читач може перевірити, розв'язуючи запропоновані вправи. Підібрані вправи та задачі приблизно відповідають рівню складності обласних та заключних олімпіад. Параграфи цього розділу майже не пов'язані між собою і їх можна читати окремо. Практично весь матеріал цього розділу доступний учням 9–х класів. Проте оволодіння запропонованими методами та розв'язування вправ вимагають серйозної розумової праці.

У другому розділі пропонуються задачі обласних олімпіад з математики (Вінницьких, Кіровоградських, Миколаївських, Хмельницьких) за останні двадцять два роки, систематизовані по класах. Розподіл задач по класах носить умовний характер у тому розумінні, що деякі задачі для учнів старших класів можуть пропонуватися і учням молодших класів. Нумерація задач для кожного класу своя.

У третьому розділі наведено повні розв'язки задач другого розділу або вказівки до їх розв'язання.

Задачі не обов'язково розв'язувати підряд – вибирайте спочатку ті, які вам більше сподобалися. Не засмучуйтеся, якщо якусь задачу довго не вдається розв'язати, відкладіть її і поверніться до неї через день, через тиждень... І не поспішайте заглядати у відповідь – набагато приємніше розв'язати задачу самому, ніж прочитати вказівку або розв'язання.

Зичимо успіхів!

Автори

ДЕЯКІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ

§1. МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

При розв'язуванні олімпіадних задач інколи виникає потреба обгрунтувати, що певна властивість виконується для довільного натурального числа.

Перевірити задану властивість для кожного натурального числа ми не можемо – їх кількість нескінченна. Доводиться міркувати так: 1) я можу перевірити, що ця властивість виконується при $n=1$; 2) я можу показати, що для кожного наступного значення n вона теж виконується, отже, властивість буде виконуватись для кожного наступного числа, починаючи з одиниці, тобто для всіх натуральних чисел.

Задача 1.1. Довести, що 10^n-9n-1 ділиться на 81 при будь-якому натуральному n.

Розв'язання. При $n=1$ заданий вираз дорівнює 0, тобто ділиться на 81. Отже, задана властивість виконується при $n=1$.

Перехід до наступного значення n необхідно організувати в самому загальному випадку. (Наприклад, організуємо перехід від n-го до $(n+1)$-го значення даного виразу). Якщо 10^n-9n-1 вже ділиться на 81, то наступне $10^{n+1}-9(n+1)-1$. Перетворимо цей вираз так, щоб було видно, що він ділиться на 81: $10^{n+1}-9(n+1)-1=10^n\cdot 10-9n-10=10(10^n-9n-1)+81n$.

Але вираз в дужках – це попереднє значення даного виразу, яке вже ділилося на 81. Отже, кожний доданок останньої суми ділиться на 81, тоді і вся сума, тобто $(n+1)$ – ше значення даного виразу ділиться на 81. Таким чином, ми маємо право переходити до наступного значення n, а це означає, що вираз ділиться на 81 при будь-якому натуральному n.

Описаний метод міркувань – це так званий **метод математичної індукції**. Він є одним з універсальних методів доведення математичних тверджень, в яких містяться слова "для довільного натурального n" (можливо, не сформульовані явно). Доведення за допомогою цього методу завжди складається з двох етапів:

1) ***початок індукції:*** перевіряється, чи розглядуване твердження виконується при $n=1$;

2) ***індуктивний перехід:*** доводиться, що коли задане твердження виконується для n, то воно виконується і для $n+1$.

Таким чином, почавши з $n=1$, ми на основі доведеного індуктивного переходу одержуємо справедливість сформульованого твердження для $n = 2, 3, \ldots$, тобто для будь-якого натурального n.

Вправа 1.1. Довести, що для кожного натурального n вираз $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ ділиться на 19.

Вправа 1.2. Довести рівність $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, де n – будь-яке натуральне число.

Задача 1.2. Довести, що для всіх натуральних n виконується нерівність $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot(2n)} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Розв'язання. 1) Початок індукції. При $n=1$ одержуємо вірну нерівність $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 2) Індуктивний перехід. Нехай $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot(2n)} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Нам потрібно довести, що $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot(2n+2)} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}$. Враховуючи припущення індукції, для цього нам досить довести нерівність $\dfrac{2n+1}{2n+2} < \dfrac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+3}}$. Враховуючи, що $n \geqslant 1$, нам досить довести, що $\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3} < 2n+2$. Підносячи цю нерівність з додатними членами до квадрату і спрощуючи її, одержуємо, що ця нерівність еквівалентна нерівності $3<4$.

Зауваження. На основі результату задачі 1.2 ми легко можемо довести нерівність $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 100}<\frac{1}{10}$.

Тому при доведенні конкретної числової нерівності з великим числом елементів, що входять до неї, часто доцільно знайти загальну оцінку для довільного n, довести одержану нерівність за допомогою методу математичної індукції, а потім використати цей результат для конкретного n.

Вправа 1.3. Довести, що для всіх натуральних n виконується нерівність $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\geq\frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Інколи доводиться використовувати більш складні модифікації методу математичної індукції. Наприклад, вибирати як початкове число не 1, а більше значення. Інколи на початку індукції доводиться перевіряти не одне, а декілька початкових значень. Якщо, наприклад, при обгрунтуванні індуктивного переходу про значення $(n+1)$-го елементу ми в припущенні індукції посилаємося на k значень елементів з номерами n, $n-1$, ..., $n-k+1$, то перевіряти треба k початкових значень. Адже для цих перших k елементів індуктивний перехід до них виконати не можна.

Задача 1.3. Послідовність $\{X_n\}$ задана так: $X_1=3$, $X_2=5$, $X_{n+1}=3X_n-2X_{n-1}$, $n\geqslant 2$. Довести, що для будь-якого натурального n $X_n=2^n+1$.

Розв'язання. 1) Початок індукції. При $n=1$ і при $n=2$ вказана формула справедлива. 2) Індуктивний перехід. Візьмемо за припущення індукції, що формула справедлива для $n-1$ та n.

Тоді $X_{n+1}=3X_n-2X_{n-1}=3(2^n+1)-2(2^{n-1}+1)=6\cdot 2^{n-1}+3-2\cdot 2^{n-1}-2=$ $=4\cdot 2^{n-1}+1=2^{n+1}+1$, що відповідає потрібному нам співвідношенню для $n+1$. Формула $X_n=2^n+1$ справедлива для будь-якого натурального n.

Вправа 1.4. Послідовність $\{X_n\}$ задана так: $X_1=1$, $X_2=2$, $X_{n+1}=X_n-X_{n-1}$, $n\geqslant 2$. Довести, що для будь-якого натурального n $X_{n+6}=X_n$.

Інколи доцільно у вигляді припущення індукції вважати, що задане твердження виконується для всіх k, $1\leqslant k\leqslant n$, і з цього виводити справедливість твердження для $n+1$.

Задача 1.4. Числа 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., кожне з яких, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх, називаються числами Фібоначчі. Довести, що кожне натуральне число дорівнює сумі кількох (можливо, одного) різних чисел Фібоначчі.

Розв'язання. Для $n=1$ твердження вірне, оскільки 1 є числом Фібоначчі.

Доведемо, що воно виконується і для числа n. Якщо n – число з послідовності Фібоначчі, то твердження справедливе.

Якщо n не є числом Фібоначчі, то позначимо найбільше з чисел Фібоначчі, яке не перевищує n, через f_i. Розглянемо різницю $n-f_i$. Оскільки $f_i<n<f_{i+1}=f_{i-1}+f_i$, $1\leqslant n-f_i\leqslant f_{i-1}$, то за припущенням індукції $n-f_i$ можна записати у вигляді суми членів послідовності Фібоначчі, менших f_{i-1}. Тобто, $n-f_i=f_{i_1}+f_{i_2}+...+f_{i_k}$, $f_{i_j}<f_i$, f_{i_j} – різні числа Фібоначчі. Але тоді $n=f_{i_1}+f_{i_2}+...+f_{i_k}+f_i$. Отже, і в цьому випадку n можна записати як суму декількох різних чисел Фібоначчі.

Вправа 1.5. Довести, що будь-яке натуральне число можна подати як суму кількох (можливо, одного) різних степенів двійки (можливо, включаючи й нульовий).

ВПРАВИ

1.6. Довести, що $1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+n\cdot n!=(n+1)!-1$ (тут використано позначення $k!=1\cdot 2\cdot ...\cdot(k-1)\cdot k$).

1.7. Довести, що при $n\geqslant 4$ $2^n\geqslant n^2$.

1.8. Число a є таким, що $a+\frac{1}{a}$ ціле. Довести, що для всіх натуральних n $a^n+\frac{1}{a^n}$ – ціле число.

1.9. У квадратній таблиці розмірами $n\times n$ клітинок відмічена $n-1$ клітинка, $n\geqslant 2$. Довести, що перестановками рядків між собою та стовпчиків між собою можна досягти того, що всі відмічені клітинки будуть лежати нижче діагоналі таблиці, що йде з лівого верхнього кута в правий нижній.

Розв'язки та вказівки

1.1. Позначимо $X_n=5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}$, $n\geqslant 1$. $X_1=125\cdot 8+27\cdot 8=19\cdot 8\cdot 8$ ділиться на 19, це є початком індукції. Нехай X_n ділиться на 19. $X_{n+1}=5^{2n+3}\cdot 2^{n+3}+$ $+3^{n+3}\cdot 2^{2n+3}=50\cdot 5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}+12\cdot 3^{n+2}\cdot 2^{2n+1}$, $X_{n+1}-12X_n=$ $=38\cdot 5^{2n+1}\cdot 2^{n+2}$. Остання різниця на 19, очевидно, ділиться, тому така подільність є і у X_{n+1}. Обгрунтовано індуктивний перехід.

1.2. При $n=1$ рівність вірна, це є початком індукції. При обгрунтуванні індуктивного переходу від n до $n+1$ ліва частина змінюється на $(n+1)^2$, права – на $\frac{1}{6}((n+1)(n+2)(2n+3)-n(n+1)(2n+1))$. Елементарними перетвореннями показуємо рівність цих значень.

1.3. При $n=1$ маємо рівність, це є початком індукції. Для обгрунтування індуктивного переходу від n до $n+1$, $n\geqslant 1$, доводимо нерівність $\frac{2n+1}{2n+2}\geq\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ $\Leftrightarrow$ $2n+1\geq 2\sqrt{n(n+1)}$.

1.4. Підраховуємо члени послідовності до восьмого включно. Бачимо, що $X_7=X_1$, $X_8=X_2$, вказане твердження при $n=1$ та при $n=2$ справедливе і це є початком індукції. Вважаючи твердження справедливим для $n-1$ та n, маємо: $X_{n+7}=X_{n+6}-X_{n+5}=X_n-X_{n-1}=X_{n+1}$. Так обгрунтовується індуктивний перехід до $n+1$.

1.5. Фактично тут ми доводимо твердження про можливість подання будь-якого натурального числа у двійковій системі числення.

Для $n=1$ твердження справедливе, це буде початком індукції. Нехай відомо, що у вигляді суми степенів двійки можна подати числа 1, 2, ..., $n-1$, доведемо можливість такого подання для n. Якщо n є степенем двійки, для нього твердження виконується. Нехай n не є таким числом, беремо i, для якого $2^i<n<2^{i+1}$. Тоді $1\leqslant n-2^i\leqslant n-1$, за припущенням індукції $n-2^i$ може бути подане потрібним чином. Оскільки $n-2^i<2^i$, всі доданки в поданні менші за 2^i. Додавши 2^i, ми отримаємо подання n як суми різних степенів двійки.

1.6. Початком індукції є справедливість формули при $n=1$. При індуктивному переході від $n-1$ до n ми обгрунтовуємо рівність $n\cdot n!=(n+1)!-n!$

1.7. Початком індукції є справедливість формули при $n=4$. Нехай для $n-1$ нерівність справедлива, доведемо її для n, $n\geqslant 3$. Треба довести, що $2^n\geqslant n^2$. З урахуванням припущення індукції маємо: $2^n=2\cdot 2^{n-1}\geqslant 2(n-1)^2$. Залишається довести, що $2(n-1)^2\geqslant n^2$ при $n\geqslant 4$, що зводиться до розв'язання квадратної нерівності.

1.8. $a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-2$, це число є цілим. Маємо справедливість твердження задачі для $n=1$ та $n=2$. Нехай твердження вірне для $n-2$ та для $n-1$, $n\geqslant 3$. Тоді з рівності $a^n+\dfrac{1}{a^n}=\left(a^{n-1}+\dfrac{1}{a^{n-1}}\right)\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-\left(a^{n-2}+\dfrac{1}{a^{n-2}}\right)$ випливає його справедливість для n.

1.9. Доведемо дещо інше твердження, з якого буде випливати факт задачі. Будемо доводити твердження задачі для таблиці розмірами $n\times n$, $n\geqslant 2$, в якій не більше $n-1$ відмічених клітинок. Для нульової кількості таких клітинок, звичайно, факт є справедливим.

Для $n=2$ справедливість твердження встановлюємо перебором чотирьох можливих варіантів розташування відміченої клітинки (якщо вона є). Нехай твердження вірне для $n-1$. Розглянемо таблицю розмірами $n\times n$, $n\geqslant 3$, будемо нумерувати числами від 1 до n її рядки, починаючи з верхнього, та її стовпчики, починаючи з лівого. Кількість відмічених клітинок не більша за $n-1$, є хоча б один стовпчик без них, цей стовпчик ми поставимо n-им. На n-те місце переставимо рядок, де є хоча б одна відмічена клітинка (якщо таких рядків немає, твердження виконується). Таблиця, що складається з рядків 1, 2, ..., $n-1$ та стовпчиків 1, 2, ..., $n-1$ містить не більше $n-2$ відмічених клітинок, її ми можемо облаштувати потрібним чином за припущенням індукції. Оскільки рядок та стовпчик з номерами n не використовувались, клітинки з n-го рядка в цьому рядку і залишаться, і навіть не зможуть потрапити на діагональну клітинку. Таким чином, після вказаних перестановок $n-1$ рядка та $n-1$ стовпчика ми отримаємо потрібну таблицю.

§ 2. ПРИНЦИП ДІРІХЛЕ

Якщо в п'яти клітках розміщено шість кролів, то принаймні в одній клітці сидить не менше двох кролів. В цьому трохи жартівливому твердженні сформульований математичний метод, який допомагає отримувати зовсім неочевидні результати в досить складних задачах. Сам Діріхле, який багато використовував цей підхід, так формулював принцип: "Якщо в n шухлядах міститься не менше, ніж $n+1$ річ, то, висуваючи ці шухляди, ми принаймні в одній виявимо не менше двох речей".

Часто застосовують трохи більш загальне твердження – якщо множина з $nk+1$ елементів розбита на n підмножин, то принаймні одна підмножина містить не менше, ніж $k+1$ елемент (узагальнений принцип Діріхле).

Сам принцип Діріхле цілком очевидний. Головна складність його застосування – вдало вирішити, що будемо вважати кролями і що клітками. Перейдемо до прикладів.

Задача 2.1. У шаховому турнірі кожен шахіст зіграв з кожним по одній партії. Всі отримали принаймні по одній перемозі. Довести, що якісь двоє шахістів у підсумку мають однакову кількість перемог.

Розв'язання. Якщо в турнірі грало N шахістів, то кожний міг виграти не більше за $N-1$ партію і виграв не менше однієї. Вважаючи N шахістів "кролями", а можливі кількості виграних партій $(1, 2, \ldots, N-1)$ "клітками", з принципу Діріхле отримаємо твердження задачі.

Вправа 2.1. У футбольній першості будь-які дві команди повинні зіграти між собою один матч. Довести, що в будь-який момент змагання знайдуться дві команди, що зіграли на той час однакову кількість матчів.

Розглянемо приклад, де вибір "кролів" не такий очевидний, як у попередній задачі.

Задача 2.2. Довести, що з будь-яких 100 цілих чисел можна вибрати кілька (можливо, одне), сума яких ділиться на 100.

Розв'язання. Нехий x_1, ..., x_{100}–дані числа. Розглянемо суми $S_1=x_1$; $S_2=x_1+x_2$; ...; $S_{100}=x_1+x_2+\ldots+x_{100}$. Якщо хоча б одна з цих сум ділиться на 100, задача розв'язана. Якщо ні, то ці 100 сум при діленні на 100 можуть давати лишки 1, 2, ..., 99. За принципом Діріхле якісь дві суми S_i та S_j будуть давати однакові лишки. Припустимо, що $i>j$, і тоді $S_i-S_j=x_{j+1}+$ $+x_{j+2}+\ldots+x_i$ ділиться на 100. Сума $x_{j+1}+x_{j+2}+\ldots+x_i$–шукана.

Вправа 2.2. Довести, що з будь-яких 52 цілих чисел можна вибрати два числа, сума або різниця яких ділиться на 100.

Тепер для читача має бути зрозумілим такий факт – в будь-якій обмеженій нескінченній послідовності натуральних чисел знайдеться два однакових числа. Це допомагає довести періодичність деяких послідовностей. Наприклад, для будь-якого натурального a послідовність останніх цифр чисел a, a^2, ..., a^n, ... буде періодичною (див. також §3 цього розділу).

Вправа 2.3. Довести, що останні цифри членів послідовності Фібоначчі, починаючи з деякого місця, періодично повторюються. (Нагадаємо, що послідовністю Фібоначчі називається послідовність натуральних чисел (u_n) така, що, $u_1=u_2=1$, а для будь-якого $n>2$ $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$).

Задача 2.3. Довести, що в послідовності Фібоначчі є число, яке ділиться на 1991.

Розв'язання. Позначимо через a_n лишок від ділення u_n на 1991. Розглянемо послідовність пар остач (a_1, a_2), (a_3, a_4), ..., (a_{2k-1}, a_{2k})... Існує лише скінченна кількість різних таких пар (а саме 1991^2), тому в цій послідовності знайдуться дві однакові пари. Тобто, для деяких k, p $(k<p)$ будуть мати місце рівності $a_k=a_p$, $a_{k+1}=a_{p+1}$. Оскільки $u_{n-1}=u_{n+1}-u_n$, то число a_{n-1} однозначно визначається числами a_n та a_{n+1}. Тому $a_{k-1}=a_{p-1}$, $a_{k-2}=a_{p-2}$, ..., $a_2=a_{p-k+2}$, $a_1=a_{p-k+1}$. Оскільки $a_2=a_1=1$, числа u_{p-k+2} та u_{p-k+1} при діленні на 1991 дають однакові остачі. Тому число $u_{p-k}=u_{p-k+2}-u_{p-k+1}$ ділиться на 1991.

Розглянемо приклад, де ми кілька разів використаємо узагальнений принцип Діріхле.

Задача 2.4. На площині 17 точок сполучено відрізками (кожна з кожною). Кожний відрізок пофарбо–

ваний у жовтий, синій або червоний колір. Довести, що існує трикутник з вершинами в даних точках і з сторонами однакового кольору.

Розв'язання. З даної точки A_1 виходить 16 відрізків 3 кольорів, серед них знайдуться 6 відрізків одного кольору. Нехай ці відрізки сполучають A_1 з точками A_2, A_3, ..., A_7 і пофарбовані у жовтий колір. Припустимо, що з проведених відрізків не можна вибрати однокольоровий трикутник. Тоді точки A_2, A_3, ..., A_7 сполучені між собою синіми та червоними відрізками. З A_2 до точок A_3, ..., A_7 виходять 5 відрізків, серед них існує 3 однакового кольору. Припустимо, це сині відрізки A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5. Відрізки, що сполучають між собою A_3, A_4 та A_5 не можуть бути ні жовтими, ні синіми. Тому вони утворюють червоний трикутник.

Вправа 2.4. У 9–кутній піраміді всі бічні ребра та діагоналі основи пофарбовано у синій або червоній колір. Довести, що якісь пофарбовані відрізки утворюють трикутник з сторонами однакового кольору.

Наступні приклади показують, що інколи "кролі" та "клітки" обираються досить неочевидним чином.

Задача 2.5. На шаховій дошці 8×8 відмічені центри всіх полів. Чи можна тринадцятьма прямими розбити дошку на частини так, щоб в кожній частині (всередині або на межі) лежало не більше однієї точки.

Розв'язання. Ні, не можна. Розглянемо 28 відрізків, що сполучають центри сусідніх крайніх полів на дошці. Кожна пряма може перетинати всередині не більше двох таких відрізків. Тому існує відрізок, що не перетинається жодною прямою. Його кінці будуть належати одній частині.

Задача 2.6. На координатній площині заданий опуклий n–кутник, вершини якого мають цілі координати. Довести, що при $n>4$ всередині або на межі n–кутника буде принаймні одна точка з цілими координатами.

Розв'язання. Для парності координат вершин є чотири можливості – коли обидві координати парні, коли обидві непарні, коли перша парна та друга непарна і навпаки. Оскільки $n>4$, в нас знайдуться дві вершини $A(x_1, y_1)$ та

$B(x_2, y_2)$, в яких і перші, і другі координати мають однакові парності. Тоді точка $C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ буде мати цілі координати. Оскільки многокутник опуклий, вона буде йому належати і не буде вершиною.

Вправа 2.5. У просторі відмічено 37 різних точок з цілими координатами. Ніякі три точки не належать одній прямій. Довести, що з них можна вибрати три точки так, що координати точки перетину медіан утвореного ними трикутника будуть цілими числами.

Вправи

2.6. У змаганнях з бігу беруть участь 100 спортсменів. Відомо, що серед будь-яких 12 з них знайдуться двоє знайомих між собою. Довести, що як би не роздавали учасникам стартові номери (не обов'язково від 1 до 100), знайдуться два знайомі спортсмени, чиї номери починаються з однакової цифри.

2.7. У пустелі, що має форму півплощини та розбита на клітини 1×1, в 11-тій від краю клітині знаходиться робот із запасом енергії 41. "Активність" кожної клітини не більша за 5, а сума "активностей" в будь-якому квадраті 5×5 дорівнює 87. Робот може переходити до однієї з чотирьох сусідніх клітин, при цьому його енергія зменшується на "активність" цієї сусідньої клітини. Робот зупиняється, якщо його запас енергії вичерпано. Чи може робот вийти з пустелі? (Клітини називаються сусідніми, якщо вони мають спільну сторону).

2.8. Кожна з дев'яти прямих розбиває квадрат на два чотирикутники, площі яких відносяться як 2:3. Довести, що хоча б три з цих прямих проходять через одну точку.

2.9. На числовій прямій взято інтервал довжиною, меншою за $\frac{1}{n}$ (n – натуральне число). Довести, що в цьому інтервалі міститься не більше $\frac{n+1}{2}$ нескоротних дробів вигляду $\frac{p}{q}$, де p та q – цілі числа, $1 \leqslant q \leqslant n$.

2.10. З натуральним числом k проводиться така операція: спочатку воно розкладається на прості множники $k=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ (не обов'язково всі різні), а потім знаходиться сума $p_1+p_2+\ldots+p_n+1$. З отриманим числом проводиться та ж сама операція, і т. д. Довести, що отримана числова послідовність з деякого моменту буде періодичною.

2.11. Є нескінченний аркуш паперу в клітинку. Довести, що як би не розфарбовувати його клітинки в N кольорів, знайдеться: *а)* прямокутник, вершини якого лежать в клітинках однакового кольору, а сторони паралельні сторонам клітинок; *б)* l горизонтальних та m вертикальних прямих, що перетинаються в lm клітинках однакового кольору; *в)* для $N=2$ рівнобедрений прямокутний трикутник, вершини якого лежать на клітинках однакового кольору, а катети паралельні сторонам клітинок; *г)* те ж саме для $N=3$.

2.12. В країні "Мара" розташовано кілька замків. З кожного замку ведуть три дороги до інших замків. З деякого замку виїхав лицар. Мандруючи дорогами, з кожного замку на своєму шляху він звертає направо чи наліво відносно дороги, по якій проїхав. Лицар ніколи не звертає в той бік, в який звернув у попередньому замку. Довести, що колись він повернеться до початкового замку.

2.13. Міжнародне товариство складається з представників шести країн. У списку членів товариства 1991 прізвище, які занумеровані числами 1, 2, ..., 1991. Довести, що знайдеться член товариства, номер якого дорівнює сумі номерів двох членів з його країни або подвоєнному номеру якогось члена з його країни.

Розв'язки та вказівки

2.1. Якщо в нас N команд, то кожна може мати 0, 1, ..., $N-1$ зіграних матчів. Якщо всі команди зіграли різну кількість ігор, то кожній кількості буде відповідати рівно одна команда. Але якщо якась команда зіграла $N-1$ матч (тобто з усіма суперниками), то не буде команди з нулем зіграних матчів.

2.2. Розглянемо лишки від ділення наших чисел на 100. Їх 52 і двоє з них разом попадуть до однієї із 51 групи чисел $\{0\}$, $\{1; 99\}$, $\{2; 98\}$, ..., $\{49; 51\}$, $\{50\}$. Якщо в цих двох чисел однакові лишки, то їх різниця ділиться на 100, а якщо різні, – то сума.

2.3. Позначимо через a_n останню цифру числа u_n і розглянемо послідовність пар $(a_1; a_2)$, $(a_3; a_4)$, ..., $(a_{2k-1,} a_{2k})$, ... Оскільки число різних таких пар скінченне, знайдуться k і p такі, що $a_k = a_p$, $a_{k+1} = a_{p+1}$, $k<p$. Оскільки значення a_{k+2} повністю визначається значеннями a_k та a_{k+1}, для будь-якого $i \geqslant k$ будемо мати $a_i = a_{i+p-k}$.

2.4. З вершини піраміди до деяких п'яти вершин основи будуть виходити ребра однакового кольору (наприклад, синього). Серед цих п'яти вершин обов'язково знайдуться три попарно несуміжні, які з'єднуються діагоналями. Якщо одна з цих діагоналей синя, отримаємо синій трикутник з вершиною піраміди. В протилежному випадку отримаємо червоний трикутник.

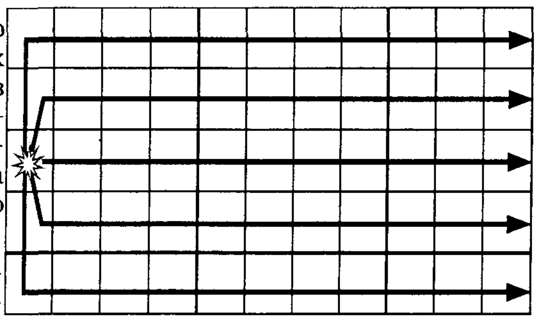
2.5. Необхідно довести існування таких трьох точок (x_i, y_i, z_i), $1 \leqslant i \leqslant 3$, що

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad \text{та} \quad \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

будуть цілими числами. Знайдеться 13 точок, в яких перші координати будуть мати однакові лишки при діленні на 3. З них, у свою чергу, виділимо п'ять точок з однаковими лишками других координат. Серед лишків третіх координат або зустрінуться 0, 1 та 2, або будуть три однакових числа – це буде шукана трійка.

2.6. Оскільки номер спортсмена починається однією з дев'яти цифр 1, 2, ..., 9, то знайдеться цифра, з якої починається номер не менше, ніж дванадцяти бігунів. Серед них будуть двоє знайомих.

2.7. Так, може. Розглянемо п'ять різних маршрутів робота (на малюнку положення робота позначено знаком ✵). Сума «активностей» клітин на всіх



мал. 1

цих маршрутах не перевищує $2\cdot 87+2\cdot 5+\ \ +2\cdot 10=204$. Тому знайдеться маршрут, сума «активностей» клітин якого менша 41.

2.8. Кожна така пряма перетинає дві протилежні сторони квадрата і ділить квадрат на дві трапеції. Висоти цих трапецій рівні, тому їх середні лінії відносяться як 2:3. Таким чином, відрізок, що з'єднує середини двох інших протилежних сторін квадрата, ділиться прямою у відношенні 2:3. Існує чотири точки, що ділять середні лінії квадрата в такому відношенні. Через одну з таких точок буде проходити не менше трьох прямих.

2.9. Припустимо, що існує більше, ніж $\frac{n+1}{2}$ таких дробів. Знаменник кожного подамо у вигляді $q=2^r\cdot S$, де S – непарне. Оскільки серед чисел 1, 2, ..., n буде $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ непарних, множники S у якихось двох знаменників співпадуть. Один з цих знаменників буде ділитися на другий. Маємо різні дроби $\frac{p}{q}$ та $\frac{l}{kq}$ такі, що

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{l}{kq}\right|<\frac{1}{n}.$$

Звідси маємо

$$\frac{|pk-l|}{kq}<\frac{1}{n}.$$

Оскільки $kq\leqslant n$, то $|pk-l|=0$. Це означає, що $\frac{p}{q}=\frac{l}{kq}$.

Отримали протиріччя.

2.10. Позначимо через $f(k)$ результат операції з k. Оскільки $ab\geqslant a+b$ при $a\geqslant 2$, $b\geqslant 2$, маємо $f(k)\leqslant k+1$. При парному k, $k>7$ маємо, що

$$f(k)=2+p_2+\ldots+p_n+1\leqslant 3+p_2\cdot\ldots\cdot p_n=3+\frac{k}{2}<k.$$

Тому всі отримані числа будуть належати відрізку

$[1;\ k+1]$, або відрізку $[1;\ 6]$. Кількість можливих значень скінченна, якесь число зустрінеться другий раз і послідовність буде періодичною.

2.11. У горизонтальній смузі шириною lN знайдеться m ідентично розфарбованих стовпчиків. Виберемо колір, який зустрічається в стовпчику не менше l разів, і через ці клітинки проведемо горизонтальні прямі.

Розглянемо нескінченну послідовність квадратів 3×3, що не перетинаються і розташовані по діагоналі. Візьмемо з них два ідентично розфарбованих. З трьох діагональних клітин такого квадрату дві мають однаковий колір. Розглядаємо всі можливі рівнобедрені прямокутні трикутники, вершини гіпотенузи яких лежать у діагональних клітинах обраного кольору в різних наших квадратах. Або ми знайдемо потрібний нам трикутник, або серед можливих третіх вершин ми зможемо підібрати трикутник іншого кольору.

Розглядаємо такі розташовані по діагоналі однакові великі квадрати, що не перетинаються і в яких по діагоналі вміщується квадратів 4×4 більше, ніж кількість різних розфарбувань квадрату 4×4 в три кольори. Розглядаємо два ідентично розфарбованих великих квадрати, в кожному з яких беремо по 2 квадрати 4×4 з однаковим розфарбуванням.

2.12. Наступить момент, коли лицар якоюсь дорогою проїде п'ять разів. Отже, він тричі їхав нею в одну сторону і двічі повертав в якийсь один бік. Тому перед першим і перед другим з цих поворотів він ішов одним шляхом з однаковими поворотами. Отже, перед другим поворотом він ще раз побував у початковому замку.

2.13. Припустимо, що в списку такої людини немає. Знайдеться 327 членів товариства з однієї країни з деякими номерами $a_1>a_2>\ldots>a_{327}$. Тоді числа a_1-a_{327}, a_2-a_{327}, $\ldots$, $a_{326}-a_{327}$ та їх попарні різниці будуть номерами членів з п'яти інших країн. Серед цих 326 номерів буде 65 номерів з однієї країни $b_1>b_2>\ldots>b_{66}$. Розглядаємо номери b_1-b_{66}, b_2-b_{66}, $\ldots$, $b_{65}-b_{66}$ і так далі.

§3. ЗАДАЧІ ПРО ЦІЛІ ТА ІРРАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА

3.1. ЗАДАЧІ З ЦІЛИМИ ЧИСЛАМИ

Відмітимо спочатку, що для будь-яких натуральних чисел a і b у послідовності a, a^2, ..., a^n, ... остачі від ділення цих чисел на b будуть періодично повторюватись, починаючи з деякого місця. Адже за принципом Діріхле в нескінченній послідовності остач, які дають числа a^n при діленні на b, обов'язково знайдуться дві однакові остачі. А якщо a^k та a^l дають однакові остачі, то однаковими будуть остачі чисел a^{k+1} та a^{l+1}, a^{k+2} та a^{l+2} і т.д. І якщо ми знайдемо закон періодичності остач в послідовності a, a^2, ..., то легко зможемо вказати остачу для будь-якого числа a^n.

Задача 3.1.1. Довести, що $2222^{5555}+5555^{2222}$ ділиться на 7.

Розв'язання. При діленні на 7 2222 дає остачу 3, а 5555 дає остачу 4. Тому для будь-якого n числа 2222^n та 3^n, 5555^n та 4^n при діленні на 7 дають однакові остачі. Коли ми перевіряємо подільність, то можемо замість самих чисел розглядати тільки остачі. Тому нам досить довести, що $3^{5555}+4^{2222}$ ділиться на 7. При діленні на 7 числа 3^n при $n=1,2,...$ дають остачі 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2,... (повторюються з періодом 6, 3^{5555} дає остачу 5). Числа 4^n при $n=1$, 2, ... дають остачі 4, 2, 1, 4, 2, ... (повторюються з періодом 3, 4^{2222} дає остачу 2). Оскільки $5+2=7$, подільність на 7 має місце.

Вправа 3.1.1. Довести, що $7^{\left(1992^{1991}\right)}-3^{\left(1990^{1989}\right)}$ ділиться на 10.

Вправа 3.1.2. Знайдіть останню цифру числа $\left(\left(7^7\right)^7\right)^{\cdot^{\cdot^{7}}}$ (всього 1991 сімка).

Різні факти про подільність многочленів та розклад їх на множники з цілими коефіцієнтами (див. § 4 цього розділу) можуть допомогти розв'язувати задачі з цілими числами. Досить часто використовується те, що для цілих a і b та натурального n число a^n-b^n ділиться на $a-b$, а число $a^{2n+1}+b^{2n+1}$ ділиться на $a+b$. Наприклад, доведемо, що $2^{1981}+1$ ділиться на 43. Маємо $2^{1981}+1=(2^7)^{283}+1^{283}$, що ділиться на $2^7+1=3\cdot 43$.

Задача 3.1.2. Довести, що число $1\underbrace{00\ldots0}_{1991}1$ складене.

Розв'язання. Дане число дорівнює $10^{1992}+1=10^{3\cdot664}+1$ і ділиться на $10^{664}+1$.

Вправа 3.1.3. Довести, що при $n>1$ число $3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^{n}$ складене.

Наступна задача ілюструє ще один метод доведення подільності.

Задача 3.1.3. Довести, що для будь-якого натурального n число $3^{2n+3}+40n-27$ ділиться на 64.

Розв'язання. Позначимо $f(n)=3^{2n+3}+40n-27$, $f(1)=256$ ділиться на 64. Тепер нам досить довести, що для будь-якого n $g(n)=f(n+1)-f(n)$ ділиться на 64, адже $f(k)=(f(k)-f(k-1))+$ $+(f(k-1)-f(k-2))+\ldots+(f(2)-f(1))+f(1)$.

Маємо $g(n)=8\cdot3^{2n+3}+40$. Щоб довести, що $g(n)$ ділиться на 64, аналогічно перевіряємо, що ділиться $g(1)=1984$, і розглянемо $g(n+1)-g(n)=64\cdot3^{2n+3}$. Очевидно, що всі $g(n+1)-g(n)$ діляться на 64, тому діляться всі $g(n)$, а, отже, і всі $f(n)$.

Вправа 3.1.4. Довести, що для будь-якого натурального n $2^{2n-1}-9n^2+21n-14$ ділиться на 27.

Варто мати на увазі, що квадрати цілих чисел при діленні на 3 або 4 можуть давати остачі лише 0 та 1, куби при діленні на 9 – лише 0, 1 та 8. (Перевірте це самостійно). Подібні факти в поєднанні з вдалим вибором числа, остачі при діленні на яке ми розглядаємо, часто допомагають розв'язуванню. З допомогою такого вдалого вибору можна доводити, що число не є простим, можна розв'язувати рівняння в цілих числах. Розглянемо декілька прикладів.

Задача 3.1.4. Чи існують чотири натуральних числа, що йдуть підряд, кожне з яких можна подати у вигляді суми двох квадратів.

Розв'язання. Ні, не існують. Розглянемо остачі при діленні на 4. Квадрат може дати остачу 0 або 1, сума двох квадратів – 0, 1 або 2. серед чотирьох підряд чисел знайдеться таке, що має остачу 3. Воно у суму двох квадратів не розкладається.

Вправа 3.1.5. Знайти всі такі p, що числа p, $p+10$ та $p+14$ прості.

Задача 3.1.5. Розв'язати в цілих числах рівняння $19x^3-91y^2=1991$.

Розв'язання. Рівняння цілих розв'язків не має. Перепишемо його у вигляді $19(x^3-100)=91(1+y^2)$. Права частина ділиться на 7, тому x^3-100 ділиться на 7. Але куби цілих чисел при діленні на 7 не дають остачу 2.

Вправа 3.1.6. Розв'яжіть в цілих числах рівняння $2^x-1=y^2$.

Щоб довести, що рівняння не має цілих ненульових розв'язків, інколи застосовують метод нескінченного спуску, зміст якого розглянемо на такому прикладі.

Задача 3.1.6. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^2+y^2=3z^2$.

Розв'язання. При діленні на 3 x^2 та y^2 можуть давати остачі 0 та 1. Оскільки x^2+y^2 має ділитися на 3, вони можуть давати тільки нульові остачі. Тому $x=3x_1$, $y=3y_1$, де x_1 та y_1 цілі. З рівняння маємо $3x_1^2+3y_1^2=z^2$, звідки $z=3z_1$. Отримали $x_1^2+y_1^2=3z_1^2$. З тих же самих міркувань маємо: $x_1=3x_2$, $y_1=3y_2$, $z_1=3z_2$, і т.д. до нескінченності. Виходить, x, y та z мають ділитися на 3^n для будь-якого n, що можливо лише для $x=y=z=0$. Це єдиний розв'язок.

Вправа 3.1.7. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^2+y^2+z^2=x^2y^2$.

Щоб довести, що ціле число не є квадратом або кубом, інколи доводять, що це число ділиться на просте p, але не ділиться на p^2 або p^3.

Вправа 3.1.8. Довести, що шестизначне число вигляду $\overline{abcabc}$ не може бути квадратом цілого числа.

Може допомогти таке міркування – число не є квадратом, якщо для деякого цілого n воно більше n^2 і менше $(n+1)^2$. Наприклад, не може бути квадратом число вигляду $4\underbrace{0...0}_{k}1\underbrace{0..0}_{k}4$, оскільки воно більше $\left(2\cdot10^k\right)^2$ і менше $(2\cdot10^k+1)^2$.

Задача 3.1.7. Довести, що не існує натурального числа, яке одночасно розкладається в добуток двох послідовних натуральних чисел та в добуток чотирьох послідовних натуральних чисел.

Розв'язання. Якщо $m(m+1)=n(n+1)(n+2)(n+3)$, то m^2+m+ $+1=(n^2+3n+1)^2$. Але m^2+m+1 не може бути квадратом, оскільки $m^2<m^2+m+1<(m+1)^2$.

Вправа 3.1.9. Чи існують натуральні числа x та y, для яких x^2+y та y^2+x – квадрати цілих чисел?

Вправи

3.1.10. Нехай a_1, a_2, ..., a_n – цілі числа, сума яких ділиться на 30. Довести, що $a_1^5+a_2^5+\ldots+a_n^5$ ділиться на 30.

3.1.11. Доведіть, що при будь-якому натуральному n число $1^{1991}+2^{1991}+\ldots+n^{1991}$ не ділиться на $n+2$.

3.1.12. Довести, що для довільного натурального n число $19\cdot 8^n+17$ складене.

3.1.13. Доведіть, що сума цифр числа $1981m$, $m\in N$, не менша 19.

3.1.14. Доведіть, що існує нескінченна кількість натуральних чисел n, які не можна подати у вигляді $n=x+y+xy$; x, $y\in N$.

3.1.15. Назвемо просте число абсолютно простим, якщо при будь-якій перестановці його цифр знову отримуємо просте число. Доведіть, що в запису абсолютно простого числа не більше трьох різних цифр.

3.1.16. Доведіть, що для будь-якого натурального m число 1978^m-1 не ділиться на 1000^m-1.

Розв'язки та вказівки

3.1.1. При діленні на 10 числа вигляду 7^{4m} та 3^{4n} дають остачу 1.

3.1.2. 7^7 закінчується цифрою 3, а $\left(7^7\right)^7$ – знову цифрою 7, оскільки кількість сімок в нас непарна, маємо відповідь – 7.

3.1.3. $3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n=(3^n-2^n)(3^{n+1}+2^{n+1})$. При $n>1$ обидва множники більші 1.

3.1.4. Позначивши даний вираз через $f(n)$, аналогічно задачі 3.11.3 маємо $g(n)=f(n+1)-f(n)=3\cdot 2^{2n-1}-18n+12$, $g(n+1)-g(n)=2\cdot 9\cdot(4^{n-1}-1)$. Останній вираз ділиться на 27, оскільки $4^{n-1}-1$ ділиться на $4-1$.

3.1.5. Єдина відповідь $p=3$. Якщо p не ділиться на 3, то при $p=3k+1$ число $p+14$ ділиться на 3, при $p=3k+2$ число $p+10$ ділиться на 3.

3.1.6. Відповідь: $(0; 0)$, $(1; 1)$ та $(1; -1)$. При $x>1$ розв'язків немає, оскільки y^2 не може дати остачу 3 при діленні на 4.

3.1.7. Треба розглянути остачі від ділення на 4, враховуючи, що для квадратів вони дорівнюють 0 або 1. З рівняння отримаємо $x=2x_1$, $y=2y_1$, $z=2z_1$ і $x_1^2+y_1^2+z_1^2=$ $=4x_1^2y_1^2$. Знову доводимо, що всі остачі дорівнюють 0 і т. д. Отримуємо, що x, y, z мають ділитися на будь-який степінь двійки. Єдина відповідь $x=y=z=0$.

3.1.8. $\overline{abcabc} = 1001\,\overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc}$. Якщо $\overline{abcabc}$ було б повним квадратом, воно ділилося б на $(7 \cdot 11 \cdot 13)^2 > 10^6 > \overline{abcabc}$.

3.1.9. Ні, не існують. Якщо $x \leqslant y$, то $y^2 < y^2+x \leqslant y^2+y < (y+1)^2$.

3.1.10. Доводимо, що $a_i^5-a_i=(a_i-1)a_i(a_i+1)(a_i^2+1)$ ділиться на 30. Серед трьох перших множників буде парне число та число, що ділиться на 3. Якщо a_i-1, a_i та a_i+1 не діляться на 5, то a_i^2+1 ділиться на 5.

3.1.11. $2(1+2^{1991}+\ldots+n^{1991})=(n^{1991}+2^{1991})+((n-1)^{1991}+3^{1991})+$ $+\ldots+(2^{1991}+n^{1991})+2=(n+2)M+2$, де M – ціле число.

3.1.12. При $n=2k$ це число ділиться на 3, $n=4k+1$ – на 13, $n=4k+3$ – на 5.

3.1.13. Число 1981^m закінчується одиницею і дає остачу 1 при діленні на 9. Тому його сума цифр може дорівнювати 10, 19, 28, ... Але 10 виключається, оскільки число 1981^m-1 не може мати суму цифр 9 (це число ділиться на 11, в ньому сума цифр на парних місцях мінус сума цифр на непарних ділиться на 11).

3.1.14. З рівності маємо: $n+1=(x+1)(y+1)$, тому досить взяти $n=p-1$, p – просте. Кількість простих чисел нескінченна (адже якщо p_1, p_2, ..., p_n – прості числа, то будь-який простий дільник числа $p_1 \ldots p_n+1$ буде новим простим числом, відмінним від p_1, p_2, ..., p_n).

3.1.15. Абсолютно просте число не може мати в запису парні цифри та 5. Якщо в нас є цифри 1, 3, 7 та 9, то відмітимо, що для будь-якого M одне з чисел $M+1379$, $M+3179$, $M+9137$, $M+7913$, $M+1397$, $M+3197$, $M+7139$ ділиться на 7.

3.1.16. Якби 1978^m-1 ділилося на $1000^m-1=d$, то $(1978^m-1)-(1000^m-1)=2^m(989^m-500^m)$ також ділилося б на d. Але $989^m-500^m<d$ і d непарне.

3.2. ЗАДАЧІ З ІРРАЦІОНАЛЬНИМИ ЧИСЛАМИ

Спочатку розглянемо один досить ефективний спосіб перевірки ірраціональності числа. Він допомагає при розгляданні чисел, що записуються через радикали, суми та деякі раціональні числа. Для перевірки ми будуємо многочлен з цілими коефіцієнтами, коренем якого є дане число. Потім ми або можемо переконатися, що цей многочлен не має раціональних коренів (алгоритм розглядається в §4 цього розділу), або з якихось міркувань вивести, що дане число не може співпадати з раціональним коренем. Перейдемо до прикладу.

Задача 3.2.1. Довести, що число $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ ірраціональне.

Розв'язання. Позначимо $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$. Після піднесення до кубу рівності $x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{2}$ та перенесення доданків отримаємо $x^3+6x-2=\sqrt{2}(3x^2+2)$. Після піднесення до квадрату прийдемо до $x^6-6x^4-4x^3+12x^2-24x-4=0$. Алгоритм з §4 цього розділу підказує, що раціональними коренями даного многочлена можуть бути лише числа ±1, ±2, ±4. Перевірка дає, що це не корені. Тому многочлен раціональних коренів не має, число $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$, яке задовольняє останній рівності, ірраціональне. Або інакше – оскільки коефіцієнт при x^6 дорівнює 1, раціональними коренями можуть бути лише цілі числа. Оскільки $1{,}2<\sqrt[3]{2}<1{,}3$ і $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$, маємо $2{,}6<\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}<2{,}8$, і число $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ не ціле.

Вправа 3.2.1. Доведіть, що ірраціональними є числа а) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$; в) $\sin 10^\circ$.

В наступній задачі ми доведемо, що серед чисел, кратних даному ірраціональному числу, можна вибрати як завгодно близькі до цілих чисел.

Задача 3.2.2. Довести, що для деякого натурального n в запису числа $n\pi$ перші 1991 цифри після коми – всі нулі або всі дев'ятки.

Розв'язання. Уявимо собі коло довжини 1 з фіксованою нульовою точкою. Від цієї точки відкладемо по колу "відрізок" довжиною π (ми тричі обійдемо коло, і кінець "відрізку" відмітимо на відстані $\pi-3$ від початкової точки). Аналогічно в тому ж напрямку від нульової точки відкладемо "відрізки" довжиною 2π, 3π, ..., $10^{1991}\pi$. Серед $10^{1991}+1$ відмічених точок (враховуючи нульову) знайдемо дві, відстань між якими менша 10^{-1991} – нехай вони відповідають "відрізкам" довжиною $k\pi$ та $l\pi$, $k>l$. Тоді для деякого натурального числа m буде $|k\pi-l\pi-m|<10^{-1991}$. Це означає, що для $n=k-l$ в запису числа πm після коми буде 1991 дев'ятка або 1991 нуль. Більше того, ми довели, що можна обрати $n\leqslant 10^{1991}$.

Вправа 3.2.2. Довести, що для будь-яких дійсних чисел a, b та $\varepsilon>0$ знайдуться цілі числа k, m та натуральне n такі, що одночасно $|na-k|<\varepsilon$ та $|nb-m|<\varepsilon$.

Щоб довести неіснування якогось об'єкту, інколи можна показати, що деяке число, пов'язане з об'єктом, з одного боку, має бути раціональним, а з іншого – ірраціональним. Проілюструємо цей прийом.

Задача 3.2.3. Довести, що на координатній площині не існує правильного трикутника, всі вершини якого мають цілі координати.

Розв'язання. Припустимо, такий трикутник існує, і довжина його сторони дорівнює a. Оскільки сторона з'єднує точки з цілими координатами, a^2 є ціле число. Площа трикутника дорівнює $a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, і тому ірраціональна. З іншого боку, площа трикутника з цілими координатами вершин – раціональне число. Щоб переконатись в цьому, досить опустити перпендикуляр з вершин на вісь Ox (вважаємо, що вісь не перетинає трикутник) і подати площу трикутника як суму та різницю площ відповідно отриманих трапецій, де кожна трапеція має цілі довжини основ та висоту.

Вправа 3.2.3. Доведіть, що на координатній площині не існує опуклого чотирикутника, в якого одна діагональ удвічі довша за другу, кут між діагоналями дорівнює 45°, а координати кожної вершини – цілі числа.

Вправи

3.2.4. Доведіть, що число $lg\,2$ ірраціональне.

3.2.5. Відомо, що a, b та $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ – раціональні числа. Доведіть, що $\sqrt{a}$ та $\sqrt{b}$ також раціональні.

3.2.6. Раціональним чи ірраціональним є число

$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$?

3.2.7. У восьмикутнику всі кути рівні, а довжини сторін – цілі числа. Доведіть, що протилежні сторони восьмикутника рівні між собою.

3.2.8. Доведіть, що в числі $\left(6+\sqrt{35}\right)^{1991}$ перші 1991 цифри після коми – дев'ятки.

3.2.9. Доведіть, що не існує раціональних чисел a, b, c, d таких, що $\left(a+b\sqrt{3}\right)^4+\left(c+d\sqrt{3}\right)^4=1+\sqrt{3}$.

Розв'язки та вказівки

3.2.1. а) Користуючись способом розв'язання задачі 3.2.1, для $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ отримуємо рівняння x^6-6x^4- $-6x^3+12x^2-36x+1=0$, що не має раціональних коренів.
б) Якщо $x-\sqrt{2}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$, то $x^8-40x^6+352x^4-960x^2+576=0$. Враховуємо, що число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ не ціле.

в) $\frac{1}{2}=sin\left(3\cdot 10^\circ\right)=3\,sin\,10^\circ-4\,sin^3\,10^\circ$, а рівняння

$4x^3-3x+\frac{1}{2}=0$ не має раціональних розв'язків.

3.2.2. Через $\{x\}$ позначимо дробову частину числа x (різницю між x та найбільшим цілим числом, що не перевищує x). Візьмемо натуральне N таке, що $\varepsilon>\frac{1}{N}$. Розглянемо на координатній площині квадрат $\{(x;y)\mid\ 0\leqslant x<1,\ 0\leqslant y<1\}$, розбитий на N^2 однакових квадратів зі стороною $\frac{1}{N}$. Серед точок координатної площини $(\{ma\},\{mb\})$, $0\leqslant m\leqslant N^2$, якісь дві попадуть до одного квадрата зі стороною $\frac{1}{N}$. Якщо це буде для $m=k$ та $m=l$, то $n=|k-l|$ шукане.

3.2.3. Якщо d та $2d$ – довжини діагоналей, то площа чотирикутника дорівнює $\frac{1}{2}\cdot d\cdot 2d\cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}d^2}{2}$, тобто ірраціональна. З іншого боку, площа повинна бути раціональна (див. задачу 3.2.3.).

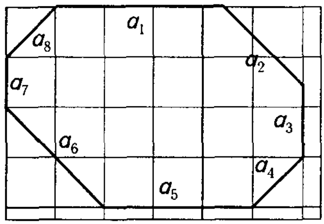
3.2.4. Припустимо, $\lg 2 = \frac{m}{n}$; $m,\ n\in N$. Тоді $10^m=2^n$ – ліва частина ділиться на 5, а права ні.

3.2.5. $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ раціональне. Тому раціональні

$$\sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\right) \text{ та } \sqrt{b} = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{a}.$$

3.2.6. Це число раціональне і дорівнює 1. Воно є коренем многочлена $x^3+3x-4=(x-1)(x^2+x+4)$, який має єдиний дійсний корінь $x=1$.

3.2.7. Подовжимо дві пари протилежних сторін восьмикутника так, щоб отримати прямокутник (мал. 2). З рівності протилежних сторін цього прямокутника отримаємо для довжин сторін восьмикутника рівність $a_5-a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(a_8+a_2-a_6-a_4)$. Оскільки довжини a_i – цілі числа, а $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ірраціональне, маємо $a_5=a_1$. Аналогічно розглядаються інші пари протилежних сторін.



мал. 2

3.2.8. З допомогою формули бінома Ньютона або індукцією за непарними степенями доводимо, що число $\left(6+\sqrt{35}\right)^{1991}+\left(6-\sqrt{35}\right)^{1991}$ – ціле. Оскільки $6-\sqrt{35}<0{,}1$, число $\left(6+\sqrt{35}\right)^{1991}$ відрізняється від найближчого більшого за нього цілого числа менше, ніж на 10^{-1991}.

3.2.9. Якщо має місце запропонована рівність, то $\left(a-b\sqrt{3}\right)^4+\left(c-d\sqrt{3}\right)^4 = 1-\sqrt{3}$, але $1-\sqrt{3}<0$.

§4. МНОГОЧЛЕНИ В ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧАХ

Многочленом n – того степеня ми називаємо функцію виду

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

де a_k – дійсні числа, x – змінна, $a_0\neq 0$.

Многочлени можна ділити один на другий. Якщо ми кажемо, що при діленні $P(x)$ на $Q(x)$ ми отримали неповну частку $P_1(x)$ та остачу $R(x)$, це означає виконання для всіх x рівності $P(x)=P_1(x)Q(x)+R(x)$, де степінь многочлена $R(x)$ менший степеня $Q(x)$. Якщо $R(x)$ тотожньо дорівнює нулю, то кажуть, що $P(x)$ ділиться на $Q(x)$.

Якщо $P(x)$ ділимо на лінійний двочлен $ax+b$, то остачею може бути тільки число. На прикладі $P(x)=x^4+1$ та $Q(x)=x+2$ покажемо, як можна виконувати ділення многочлена на двочлен:

$x^4+1=x^4+2x^3-2x^3-4x^2+4x^2+8x-8x-16+17=x^3(x+2)-$ $-2x^2(x+2)+4x(x+2)-8(x+2)+17=(x^3-2x^2+4x-8x)\times$ $\times(x+2)+17.$

Часто процес такого ділення записують, як і ділення чисел, у стовпчик.

Вправа 4.1. Поділити x^5-1 на $x-1$.

Наступне важливе твердження відоме під назвою теореми Безу.

Теорема 1. При діленні многочлена $P(x)$ на двочлен $x-c$ остачею буде число $P(c)$.

Доведення. Якщо при діленні $P(x)$ на $x-c$ ми отримуємо частку $P_1(x)$ та остачу r, то має місце рівність $P(x)=(x-c)P_1(x)+r$. Поклавши тут $x=c$, маємо $P(c)=r$.

Наслідок 1. Якщо c – корінь $P(x)$, то $P(x)$ ділиться на $x-c$.

Наслідок 2. Якщо многочлен n–го степеня має n дійсних коренів c_1, c_2, ..., c_n, то він розкладається в добуток $P(x)=a_0(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)$.

Наслідок 3. Многочлен n–го степеня не може мати більше n коренів.

Задача 4.1. Знайти всі многочлени $P(x)$ такі, що для всіх $x \in R$ $xP(x-1)=(x-2)P(x)$.

Розв'язання. З даної рівності випливає, що $x=0$ та $x=1$ будуть коренями шуканого многочлена. Тому $P(x)$ має вигляд $P(x)=x(x-1)Q(x)$, де $Q(x)$–деякий многочлен. Підставивши це в дану рівність, отримаємо $Q(x-1)=Q(x)$. Звідси маємо $Q(0)=Q(1)=Q(2)=\ldots$, тому $Q(x)$ є просто константа. Перевірка показує, що будь-який многочлен $P(x)=ax(x-1)$, $a \in R$, задовольняє дану рівність.

Вправа 4.2. Знайти всі многочлени $P(x)$ такі, що для всіх $x \in R$ $(x-1)P(x+1)=(x+2)P(x)$.

Многочлен x^n-a^n має корінь $x=a$. Тому x^n-a^n ділиться на $x-a$, і має місце рівність

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots+a^{n-1}) \quad (*)$$

Аналогічно $x^{2n+1}+a^{2n+1}$ ділиться на $x+a$, і ми маємо рівність:

$$x^{2n+1}+a^{2n+1}=(x+a)(x^{n-1}-x^{n-2}a+x^{n-3}a^2-\ldots+(-1)^{n-1}a^{n-1})$$

Задачі про розкладання на множники досить часть пропонуються на олімпіадах, і наслідок з теореми Безу може допомогти при їх розв'язуванні.

Задача 4.2. Розкласти на множники, що не є константами, вираз $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.

Розв'язання. При $a=b$ цей вираз дорівнює нулю. Тому він ділиться на $a-b$. Аналогічно він ділиться на $b-c$ та $c-a$, а, отже, і на $(a-b)(b-c)(c-a)$. Оскільки нам дано многочлен третього степеня (відносно будь-якої із змінних), то він має вигляд $K(a-b)(b-c)(c-a)$, де K–деяке число. Підставивши, наприклад, $a=0$, $b=1$ та $c=2$, отримаємо $K=3$. Тому маємо $3(a-b)(b-c)(c-a)$.

Вправа 4.3. Розкласти на множники:
а) $(a-x)y^3-(a-y)x^3+(x-y)a^3$;
б) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.

Та найчастіше, щоб розкласти вираз на множники, до нього треба щось додати та відняти і скористатись формулами скороченого множення (квадрату суми, різниці квадратів і т.п.). Наведемо приклади.

Задача 4.3. Розкласти на множники: а) x^4+x^2+1;
б) x^5+x+1.

Розв'язання.

а) $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2-x+1)\times$
$\times(x^2+x+1)$.

б) $x^5+x+1=x^5-x^2+x^2+x+1=x^2(x^3-1)+x^2+x+1=$
$=x^2(x-1)(x^2+x+1)\cdot x^2+x+1=(x^3-x^2+1)(x^2+x+1)$.

Вправа 4.4. Розкласти на множники: а) x^8+x^7+1; б) x^8+4x^2+4.

Нехай многочлен n–го степеня має n коренів c_1, c_2, ..., c_n. Тоді, як вже відмічалося, маємо рівність

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=a_0(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n).$$

Розкривши в правій частині дужки та прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо відомі формули Вієта:

$$c_1+c_2+\ldots+c_n=-\frac{a_1}{a_0};$$

$$c_1c_2+c_1c_3+\ldots+c_{n-1}c_n=\frac{a_2}{a_0};$$

$$c_1c_2c_3+c_1c_2c_4+\ldots+c_{n-2}c_{n-1}c_n=-\frac{a_3}{a_0};$$

. . . .

$$c_1c_2\ldots c_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

Тут в лівій частині другої рівності – сума всіх добутків коренів по два, третьої рівності – по три і т. д.

Задача 4.4. Довести, що при $n\geqslant 4$ многочлен n–го степеня з коефіцієнтами $+1$ та -1 не може мати n дійсних коренів.

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $a_0x^n+a_1x^{n-1}+$ $+\ldots+a_n$ має n коренів c_1, ..., c_n. Тоді $c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2=$

$$=(c_1+\ldots+c_n)^2-2(c_1c_2+\ldots+c_{n-1}c_n)=\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)^2-2\left(\frac{a_2}{a_0}\right)=1-2\left(\frac{a_2}{a_0}\right).$$

Оскільки $1-2\left(\frac{a_2}{a_0}\right)\geqslant 0$, маємо $\left(\frac{a_2}{a_0}\right)=-1$. Тоді $c_1^2+\ldots+c_n^2=3$.

З нерівності Коші (див. § 6 цього розділу) маємо

$$\frac{3}{n}=\frac{c_1^2+\ldots+c_n^2}{n}\geq\sqrt[n]{(c_1+\ldots+c_n)^2}=\sqrt[n]{a_n^2}=1.$$ Звідси $n\leqslant 3$.

Вправа 4.5. Многочлен n–го степеня $P(x)$ з невід'ємними коефіцієнтами має n дійсних коренів. Коефіцієнт при x^n та вільний член дорівнюють 1.

Довести, що $P(2) \geqslant \left(2\sqrt{2}\right)^n$.

З рівності $(*)$ випливає, що для цілих чисел a і b a^n-b^n ділиться на $a-b$. Отже, якщо многочлен $P(x)$ має цілі коефіцієнти a_k, то $P(a)-P(b)$ ділиться на $a-b$. Тому, наприклад, не існує многочлена з цілими коефіцієнтами, такого, що $P(1)=1$ і $P(3)=2$ ($2-1$ не ділиться на $3-1$). Такі міркування часто допомагають розв'язувати задачі про многочлен.

Задача 4.5. Про многочлен $P(x)$ відомо, що він має цілі коефіцієнти та для будь-якого натурального r число $P(r)$ просте. Довести, що $P(x)$ є тотожньою константою.

Розв'язання. Візьмемо такий $P(x)$. Нехай $P(1)=n$, де n просте. Оскільки $P(1+kn)-P(1)$ ділиться на kn, то при будь-якому натуральному k $P(1+kn)$ будуть ділитися на n. Всі значення $P(x)$, $x\in N$, прості, тому всі $P(1+kn)=n$. Але будь-який многочлен ненульового степеня будь-яке значення може набувати лише в скінченній кількості точок (це наслідок з теореми Безу).

Вправа 4.6. Дано многочлен $P(x)$ з цілими коефіцієнтами та натуральні числа k і p. Жодне з чисел $P(k)$, $P(k+1)$, ..., $P(k+p)$ не ділиться на $p+1$. Довести, що $P(x)$ не має цілих коренів.

Існує нескладний алгоритм, що дозволяє відшукати всі раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами. Алгоритм базується на тому, що для нескоротного дробу $\dfrac{p}{q}$ $(q\neq 0)$, який є коренем многочлена $a_0x^n+\ldots+a_n$, $a_n\in Z$, обов'язково q є дільником a_0 а p є дільником a_n. Дійсно, з рівності

$$a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right) + a_n = 0$$

отримуємо, домноживши на q^n:

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\ldots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0.$$

Тут кожний додаток, крім першого, має множник q. Вся сума ділиться на q, тому $a_0 p^n$ ділиться на q. Оскільки p та q взаємно прості ($\frac{p}{q}$ нескоротний), a_0 ділиться на q. З аналогічних міркувань p є дільником a_n. Підставивши в многочлен замість x по черзі всі дроби $\pm\frac{p}{q}$, з яких p пробігає множину дільників a_n, q – множину дільників a_0, ми знайдемо всі раціональні корені. Звичайно, многочлен може не мати раціональних коренів. Легко бачити, що при $a_0=1$ раціональний корінь може бути тільки цілим числом.

Наведемо приклад. Для многочлена x^3-x^2-3x+2 за цим правилом знаходимо, що раціональними коренями можуть бути лише числа ±1 та ±2. Підстановка показує, що коренем є лише 2. Якщо нам потрібно, то, розклавши на множники $x^3-x^2-3x+2=(x-2)(x^2+x-1)$ та розв'язавши рівняння $x^2+x-1=0$, ми знайдемо всі дійсні корені даного многочлена.

Вправа 4.7. Розв'язати рівняння $2x^4+5x^3-10x^2-14x-4=0$.

Якщо $P(a)>0$ і $P(b)<0$, то $P(x)$ має корінь між a і b. А щоб довести, що $P(x)$ не має дійсних коренів, як правило, доводять нерівність $P(x)>0$ або нерівність $P(x)<0$.

Задача 4.6. Многочлен $P(x)$ такий, що рівняння $P(x)=x$ не має дійсних розв'язків. Довести, що рівняння $P(P(x))=x$ також не має дійсних розв'язків.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що або для всіх x $P(x)>x$, або для всіх x $P(x)<x$. Тоді відповідно для всіх x $P(P(x))>x$, або для всіх x $P(P(x))<x$. Рівності бути не може.

Вправа 4.8. Довести, що многочлен, всі коефіцієнти якого дорівнюють -1, 0 або 1, не має дійсних коренів з модулем більшим за 2.

Вправа 4.9. Доведіть, що якщо рівняння $ax^2+(c-b)x+(e-d)=0$ має дійсний корінь, більший за 1, то рівняння $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ має принаймні один дійсний корінь.

Інколи може допомогти підстановка конкретних значень x – наприклад, коли треба довести неіснування многочленів з деякими властивостями.

Задача 4.7. Чи існують многочлени від трьох змінних $P=P(x,y,z)$; $Q=Q(x,y,z)$; $R=R(x,y,z)$, для яких виконується тотожність $(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+$ $+(z-2x+1)^3R=1$?

Розв'язання. Ні, не існують, оскільки при $x=1$, $y=2$, $z=1$ ліва частина дорівнює 0.

Вправа 4.10. Довести, що $3x^{1992}+4$ не можна подати у вигляді суми квадратів трьох многочленів з цілими коефіцієнтами.

Вправи

4.11. Відомо, що $a+b+c<0$ і рівняння $ax^2+bx+c=0$ не має дійсних коренів. Визначити знак коефіцієнта с.

4.12. Довести, що якщо многочлен з цілими коефіцієнтами набуває при $x=0$ та $x=1$ непарних значень, то він не має цілих коренів.

4.13. Знайти всі дійсні корені рівняння
$(1+x^{2k})(1+x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{2k-2})=2kx^{2k-1}$, де k – натуральне число.

4.14. Многочлен з цілими коренями $P(x)$ набуває значення 2 при чотирьох різних цілих значеннях x. Довести, що ні при яких цілих x $P(x)$ не набуває значень 1, 3, 5, 7 та 9.

4.15. Чи кожний многочлен четвертого степеня $P(x)$ можна подати у вигляді $P(x)=Q(R(x))$, де $Q(x)$ та $R(x)$ – многочлени другого степеня?

4.16. Двоє грають у таку гру:
а) Перший називає три будь-яких числа, відмінні від нуля, а другий розставляє їх за своїм вибором замість зірочок у виразі $*x^2+*x+*$. Чи завжди перший може добитися того, щоб отриманий тричлен мав два різних раціональних корені?
б) По черзі перший називає число а другий ставить його замість однієї із зірочок у виразі x^3+*x^2+*x+*. Роблять так три рази. Чи завжди перший може добитися того, щоб утворений многочлен мав три різних раціональних корені?

4.17. Довести, що:
а) для будь-якого натурального n існує многочлен $P_n(x)$, що задовольняє тотожність $2\cos nt=P_n(2\cos t)$;

б) для будь-якого раціонального α число $\cos\alpha\pi$ або співпадає з одним із чисел 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1, або є ірраціональним.

Розв'язки та вказівки

4.1. $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$.

4.2. З тотожності видно, що ± 1 та 0 є коренями $P(x)$, тому $P(x)=(x^3-x)Q(x)$. Підстановка дає нам $Q(0)=Q(1)==Q(2)=\ldots$. Тому $P(x)=a(x^3-x)$, $a\in R$.

4.3. а) $(a-x)(a-y)(x-y)(a+x+y)$;
б) $3(x+y)(y+z)(z+x)$.

4.4. а) $(x^2+x+1)(x^6-x^4+x^3-x+1)$.
б) $(x^4-2x^3+2x^2-2x+2)(x^4+2x^3+2x^2+2x+2)$.

4.5. Нехай $(-c_i)$ – корені $P(x)$ (вони всі від'ємні, оскільки коефіцієнти додатні). $P(x)=(x+c_1)(x+c_2)\ldots(x+c_n)$, $2+c_k\geqslant 2\sqrt{2c_k}$. Тому

$$P(2)\geq\left(2\sqrt{2}\right)^n\sqrt{c_1\ldots c_n}=\left(2\sqrt{2}\right)^n\sqrt{a_n}=\left(2\sqrt{2}\right)^n.$$

4.6. Припустимо, що $P(m)=0$. Підберемо $k+i$, $0\leqslant i\leqslant p$, таке, що $k+i-m$ діляться на $p+1$. Тоді $P(k+1)-P(m)=P(k+i)$ повинно ділитись на $p+1$.

4.7. Корені $-\frac{1}{2}$; 2; $-2\pm\sqrt{2}$.

4.8. Якщо $|x|>2$ та $a_0\neq 0$, то

$$|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n|\leqslant$$

$$\leqslant|x^{n-1}|+|x^{n-2}|+\ldots+1=\frac{|x|^n-1}{|x|-1}<|a_0x|^n.$$

4.9. Нехай $t>1$ – корінь першого рівняння, $at^2+ct+e=bt+d$. Позначимо ліву і праву частину цієї рівності A та B, $A=B$. Тоді другий многочлен в $-\sqrt{t}$ та $\sqrt{t}$ набуває відповідно значення $A-\sqrt{t}B$ та $A+\sqrt{t}B$, тобто значення різних знаків. На $[-\sqrt{t};\sqrt{t}]$ він має корінь.

4.10. При $x=1$ отримуємо число 7, яке не можна подати у вигляді суми квадратів трьох цілих чисел.

4.11. $P(1)=a+b+c<0$, тому для всіх x $P(x)<0$. $P(0)=c<0$.

4.12. При парному m різниця $P(m)-P(0)$ ділиться на m, тому парна, а $P(m)$ непарне і $P(m)\neq 0$. При непарному m $P(m)-P(1)$ парна, і тому $P(m)$ непарне.

4.13. Рівняння зводиться до вигляду:

$$\left(x^{2k-1}+\frac{1}{x^{2k-1}}\right)+\left(x^{2k-3}+\frac{1}{x^{2k-3}}\right)+\ldots+\left(x+\frac{1}{x}\right)=2k.$$

Вираз в кожній із k дужок не більший за 2, і дорівнює 2 лише при $x=1$. Це єдиний корінь.

4.14. Для довільного цілого a при діленні многочлена з цілими коефіцієнтами на $x-a$ ми отримаємо многочлен з цілими коефіцієнтами. Тому

$$P(x)-2=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)R(x),$$

де $R(x)$ має цілі коефіцієнти і a, b, c, d, – різні цілі числа. Але жодне з чисел -1, 1, 3, 5, 7 не ділиться на добуток чотирьох різних цілих чисел.

4.15. Ні, не кожний. Графік функції $Q(R(x))$ симетричний відносно осі параболи – графіку $R(x)$. А, наприклад, графік функції $P(x)=x(x-1)(x-3)(x-6)$ не має вертикальної осі симетрії.

4.16. а) Так. Перший може називати 1, 2 та -3. Коренями будуть 1 та вільний член, поділений на перший коефіцієнт.

б) Так. Перший має назвати 0, другий бере його як один з коефіцієнтів в x^3+ax^2+bx+c. Якщо $c=0$, то перший далі називає 2 та -3. Якщо $a=0$, то перший називає $-(3\cdot4\cdot5)^2$, і, в залежності від дій другого, $c=0$ або $b=3^2\cdot4^2-3^2\cdot5^2-4^2\cdot5^2$. Якщо $b=0$, то перший називає $6^2\cdot7^3$, і потім $a=-49$ або $c=-6^8\cdot7^3$.

4.17. а) Доводиться за індукцією з формули

$$P_n(x)=xP_{n-1}(x)-P_{n-2}(x).$$

б) З пункту а) легко бачити, що в $P_n(x)$ старший коефіцієнт (при x^n) дорівнює 1. Якщо $\alpha=\frac{m}{n}$, то $x=2\cos\alpha\pi$ буде коренем многочлена з цілими коефіцієнтами $P_n(x)-2\cos m\pi$. А його корені або цілі, або ірраціональні.

§5. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

У цьому параграфі ми часто будемо використовувати позначення f: $A \to B$. Так позначається функція $f(x)$, визначена для кожного x з множини A і всі значення якої належать множині B. При цьому не обов'язково кожний елемент B дорівнює деякому $f(x)$. Нагадаємо, що через R, R_+, Q, Q_+, Z, Z_+ позначають множини всіх дійсних, всіх невід'ємних дійсних, всіх раціональних, всіх невід'ємних раціональних, всіх цілих, всіх невід'ємних цілих чисел відповідно.

Функціональні рівняння – це співвідношення із значеннями невідомої функції, за якими треба цю функцію знайти. Як правило, при розв'язуванні функціональних рівнянь велике значення має вдала підстановка деяких конкретних значень невідомої або ціла послідовність таких підстановок.

Задача 5.1. Знайти всі функції f: $R \to R$ такі, що для всіх $x \in R$ $x(f(x)+f(-x)+2)+2f(-x)=0$.

Розв'язання. Підставивши замість x змінну $(-x)$, отримаємо виконання рівності

$$(-x)(f(-x)+f(x)+2)+2f(x)=0.$$

Додавши рівність з умови, будемо мати, що $f(x)+$ $+f(-x)=0$. Тепер з рівняння умови маємо, що $2x+2f(-x)=0$, для всіх x (і додатних, і від'ємних) $f(-x)=-x$, тобто для всіх дійсних $x \in R$ $f(x)=x$. Підстановка показує, що ця функція f задовольняє рівняння умови. Відповідь: $f(x)=x$.

Відмітимо, що підстановка отриманої функції f у початкове рівняння є необхідною завжди, коли ми отримали її в результаті послідовності підстановок. Це необхідно робити в усіх випадках, коли ми використовували наслідки з даного функціонального рівняння, а не його еквівалентні перетворення.

Необхідність перевірки знайденого розв'язку проілюструємо таким прикладом.

Задача 5.2. Знайти всі функції f: $R \to R$ такі, що для всіх x, $y \in R$ $f(x+y)=f(x)\cos y-f(y)\sin x$.

Розв'язання. Підстановка $x=0$ дає нам $f(y)=f(0)cosy$, тобто $f(x)=acosx$ для деякої константи $a\in R$. Зробивши підстановку, отримуємо, що для всіх x, y повинні виконуватися рівності:

$$acos(x+y)=a(cosxcosy-cosysinx).$$
$$asinysinx=acosysinx.$$

Підставивши $x=\frac{\pi}{2}$, маємо для всіх $y\in R$ $a\,siny=a\,cosy$, що можливе лише при $a=0$.

Вправа 5.1. Знайти всі функції f: $R\to R$ такі, що для всіх x, $y\in R$ $f((x+y)^2)=f(x^2)+f(y^2)+2xy$.

Задача 5.3. Знайти всі функції f: $R\to R$ такі, що для всіх x, $y\in R$ $f(x-f(y))=1-x-y$.

Розв'язання. Підставивши в рівняння умови $x=0$, $y=1$ маємо, що $f(-f(1))=0$. Підстановкою $y=-f(1)$ для довільного x отримуємо, що $f(x)=1+f(1)-x$. Отже, шукана функція має вигляд $f(x)=a-x$ для деякої дійсної константи a. Підставивши таку функцію в рівняння умови, будемо мати, що тотожність виконується при $a=\frac{1}{2}$.

Відповідь: $f(x)=\frac{1}{2}-x$.

Вправа 5.2. Знайти всі функції f: $R\to R$ такі, що для всіх x, $y\in R$ $xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y)$.

В наступному прикладі звертаємо увагу на те, як послідовними замінами змінної ми приходимо до лінійної системи рівнянь відносно невідомої функції f. При цьому набір послідовно отримуваних виразів від x на деякому кроці замикається, кількість невідомих виявляється рівною кількості рівнянь, що і дає можливість розв'язувати систему.

Задача 5.4. Знайти всі функції f: $R\backslash\{0,1\}\to R$ такі, що для всіх $x\in R\backslash\{0,1\}$ $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$.

Розв'язання. В умові відмічено, що $f(x)$ не визначається для $x=0$ та $x=1$. Підставимо в рівняння умови $\frac{1}{1-x}$ замість змінної x (цей вираз визначений при $x\neq0$, 1 і сам не набуває таких значень). Ми робимо так, щоб у другому доданку рівняння умови замість аргумента $\frac{x-1}{x}$ мати аргумент x. Отримаємо рівність $f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=1+\frac{1}{1-x}$. Підставивши в останнє рівняння $\frac{1}{1-x}$ замість змінної x, прийдемо до рівності $f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=2-\frac{1}{x}$. Так ми отримали три рівняння з трьома невідомими $f(x)$, $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$, $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$:

$$\begin{cases} f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1+x, \\ f(x)+f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{2-x}{1-x}, \\ f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{2x-1}{x}. \end{cases}$$

З системи цих рівнянь знаходимо $f(x)$, віднімаючи третє рівняння від суми двох перших рівнянь. Одержимо, що

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right).$$

Перевірка: $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)+$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x-1}+x\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}+1-\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x-1}+x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(2x+2)=1+x.$$

Відповідь: $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)$.

Вправа 5.3. Знайти всі функції f: $R\backslash\{0\}\to R$ такі, що для всіх $x\in R\backslash\{0\}$ $x\,f(x)+2f\left(-\frac{1}{x}\right)=3$.

Вправа 5.4. Знайти всі функції f: $R\backslash\{-1, 0, 1\}\to R$ такі, що для всіх $x\in R\backslash\{-1, 0, 1\}$ $x\,f(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$.

Тепер розглянемо приклад рівняння з невідомою функцією, визначеною на множині раціональних чисел Q. Значення функцій, визначених на Q та на Z, можуть відшукуватися послідовно за допомогою математичної індукції. Існують прийоми, специфічні саме для визначення функції на таких множинах, але не для функцій f, визначених на R.

Задача 5.5. Знайти всі функції f: $Q \to Q$ такі, що $f(1)=2$ та для всіх x, $y \in Q$ $f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$.

Розв'язання. Підстановка $y=1$ нам дає, що $f(x+1)=f(x)+1$, звідки для всіх $n \in Z$ $f(x+n)=f(x)+n$ (строго обгрунтувати цю рівність можна за допомогою математичної індукції). З урахуванням умови $f(1)=2$ отримуємо, що $f(n)=n+1$, $n \in Z$. Підставивши до рівняння умови $x=\dfrac{1}{n}$, $y=n$, $n \in Z$, $n \neq 0$, отримаємо, що $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=1+\dfrac{1}{n}$. Поклавши $x=p$, $y=\dfrac{1}{q}$, p, $q \in Z$, $q \neq 0$, будемо мати, що $f\left(\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{p}{q}+1$. Перевірка показує, що знайдена функція задовольняє умову.

Відповідь: $f(x)=x+1$, $x \in Q$.

Вправа 5.5. Функція f: $Z \to Z$ задовольняє умови:

1) для всіх $n \in Z$ $f(f(n))=n$;
2) для всіх $n \in Z$ $f(f(n+2)+2)=n$;
3) $f(0)=1$.

Знайти значення $f(1995)$ та $f(-1994)$.

Розглянемо також приклад функціональної нерівності.

Задача 5.6. Знайти всі функції f: $R \to R$ такі, що для всіх x, $y \in R$ $f(x) \leqslant x$, $f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$.

Розв'язання. Підстановка $x=y=0$ дає дві нерівності $f(0) \leqslant 0$, $f(0) \leqslant 2f(0)$, з яких випливає, що $f(0)=0$. Для будь-якого x маємо, що $0=f(x+(-x)) \leqslant f(x)+f(-x)$, $f(x) \geqslant -f(-x)$, $x \geqslant f(x) \geqslant -f(-x) \geqslant -(-x)=x$, тому $f(x)=x$. Перевірка.

Відповідь: $f(x)=x$.

Вправа 5.6. Чи існує функція f: $R \to R$, що не набуває однакових значень при будь-яких різних значеннях аргумента та для всіх $x \in R$

$$f(x^2) - (f(x))^2 \geq \frac{1}{4}.$$

Вправи

5.7. Чи існує функція f: $R \to R$ така, що для всіх x, $y \in R$ $f(x+y)=f(x)+f(y)+x$?

5.8. Знайти всі функції f: $R \to R$ такі, що для всіх x, $y \in R$ $f(x^2+y)=f(x)+f(y^2)$.

5.9. Знайти всі функції f: $R \to R$ такі, що для всіх x, $y \in R$ $f(x-y)=f(x^3-y^3)$.

5.10. Знайти всі функції f: $Q_+ \to Q_+$ такі, що для всіх $x \in Q_+$

1) $f(x+1)=f(x)+1$;

2) $f(x^3)=f^3(x)$.

Розв'язки та вказівки

5.1. Підстановка $x=y=0$ дає, що $f(0)=0$. Підстановкою $-y$ замість y приходимо до рівності $f((x-y)^2)=f(x^2)+f(y^2)-2xy$. Різниця з рівнянням умови дає, що $f((x+y)^2)-f((x-y)^2)=4xy$. Підставивши сюди $x=y$, отримаємо, що $f(4x^2)=4x^2$, тобто для довільного невід'ємного z $f(z)=z$. Перевірка підтверджує, що f – розв'язок.
Відповідь: $f(x)=x$.

5.2. Взявши $x=y=1$, з умови отримаємо $2f(1)=2f^2(1)$, звідки $f(1)=0$ або $f(1)=1$. В першому випадку підстановка $y=1$ до рівняння умови дає нам для всіх x $f(x)=0$. Така ж підстановка для другого випадку дає $x(f(x)--1)=1$, звідки $f(x)=1$ для $x\neq 0$ та $f(0)$ є довільним дійсним числом. Перевірка.
Відповідь: 1) $f(x)=0$, 2) $f(x)=1$, $x\neq 0$ та $f(0)=a$, a – довільне дійсне число.

5.3. Підставляємо замість x вираз $\left(-\frac{1}{x}\right)$, разом з рівнянням умови отримуємо систему двох рівнянь. З цієї системи знаходимо f. Перевірка.
Відповідь: $f(x)=(6x+3)/5x$.

5.4. Підставляємо до рівняння умови замість x вираз $\frac{x-1}{x+1}$, отримуємо нове рівняння, і робимо аналогічні підстановки до отриманих рівностей ще два рази (поки такими замінами ми не отримаємо знову аргумент x). Разом з рівнянням умови отримуємо систему чотирьох рівнянь. З цієї системи знаходимо f. Перевірка.

Відповідь: $f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{5x(x-1)}$.

5.5. Підставимо в 1) $n=0$, і, враховуючи 2), отримаємо $f(1)=0$. З умови 1) випливає, що при $m \neq n$ $f(m) \neq f(n)$. Тому з 2) ми маємо, що для всіх $n \in Z$ $f(f(n+2)+2)=f(f(n))$, $f(n+2)+2=f(n)$. З того, що при зміні аргумента на 2 значення f змінюється на 2 та рівностей $f(0)=1$, $f(1)=0$ легко вивести, що для всіх n $f(n)=1-n$. Перевірка показує, що ця функція задовольняє умови.

Відповідь: $f(1995)=-1994$, $f(-1994)=1995$.

5.6. Для $x=0$ та $x=1$ з умови отримуємо нерівності

$$\left(f(0)-\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0, \quad \left(f(1)-\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0, \text{ звідки } f(0)=f(1)=\frac{1}{2}.$$

Одне і те ж значення функції f ми маємо для двох різних величин аргумента.

Відповідь: такої функції f не існує.

5.7. Підстановка $x=y=0$ дасть нам, що $f(0)=0$. Тепер підстановка $y=0$ дає, що для всіх дійсних x $f(x)=f(x)+x$, що неможливо.

Відповідь: такої функції f не існує.

5.8. Підстановка $x=y=0$ дасть нам, що $f(0)=0$. Підставивши в рівняння умови $(-y)$ замість y, отримаємо $f(x^2-y)=f(x)+f(y^2)$, звідки $f(x^2-y)=f(x^2+y)$. Підставивши сюди $y=-x^2$, отримаємо $f(2x^2)=0$, тому $f(z)=0$ для всіх невід'ємних z. Підставивши $x=0$, маємо $f(-y)=f(y)$, тому $f(z)=0$ і для всіх недодатних z. Отже, $f(x)=0$. Перевірка.

Відповідь: $f(x)=0$.

5.9. Нехай $x=a+y$. Тоді $f(a)=f(3ay^2+3a^2y+a^3)$. Для фіксованого $a>0$ квадратична функція від y $3ay^2+3a^2y+a^3$ має множину значень $\left(\frac{1}{4}a^3, \infty\right)$. З отриманої рівності випливає, що функція f є константою на даній множині. Оскільки $a>0$ можна взяти як завгодно малим, $f(x)$ набуває одного і того ж значення для всіх $x>0$. Розглядаючи $a<0$, аналогічно отримаємо, що $f(x)$ набуває одного і того ж значення для всіх $x<0$. Довільним чином визначаємо $f(0)$. Перевірка.

Відповідь: $f(x)=c_1$ для $x<0$, $f(0)=c_2$, $f(x)=c_3$ для $x>0$, c_1, c_2, c_3 – довільні дійсні.

5.10. Умова 1) нам дає, що $f(x+n)=f(x)+n$ для всіх $n\in Z_+$. З умови 2) випливає, що $f(0)=0$, тому $f(n)=n$ для всіх $n\in Z_+$. Для довільних p, $q\in Z_+$, $q\neq 0$, маємо:

$$f\left(\left(\frac{p}{q}+q^2\right)^3\right)=f^3\left(\frac{p}{q}+q^2\right),$$

$$f\left(\left(\frac{p}{q}\right)^3+3p^2+3pq^3+q^6\right)=\left(f\left(\frac{p}{q}\right)+q^2\right)^3,$$

$$f\left(\left(\frac{p}{q}\right)^3\right)+3p^2+3pq^3+q^6=f^3\left(\frac{p}{q}\right)+3q^2f^2\left(\frac{p}{q}\right)+3g^4f\left(\frac{p}{q}\right)+q^6,$$

$$3p^2+3pq^3=3q^2f^2\left(\frac{p}{q}\right)+3q^4f\left(\frac{p}{q}\right),$$

$$q^2\left(f\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)^2-f^2\left(\frac{p}{q}\right),$$

$$\left(f\left(\frac{p}{q}\right)-\frac{p}{q}\right)\left(q^2+f\left(\frac{p}{q}\right)+\frac{p}{q}\right)=0.$$

Оскільки f набуває невід’ємних значень, то звідси випливає , що функція $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}$. Перевірка.

Відповідь: $f(x)=x$.

§6. ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Майже в кожному варіанті олімпіадних завдань однією із задач є доведення нерівності. Довести – це означає показати, що ця нерівність виводиться з відомих або очевидних тверджень. При цьому часто використовуються різні допоміжні співвідношення. Мабуть, найбільш популярна в цій ролі нерівність $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, де a і b – довільні числа. Вона справедлива, оскільки $(a-b)^2 \geqslant 0$. Інколи її використовують у вигляді $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ $(a,\ b \geqslant 0)$ або $x+\dfrac{1}{x} \geq 2$ $(x>0)$. Для доведення досить в попередній нерівності покласти $a=x$, $b=\dfrac{1}{x}$. Легко бачити, що рівності тут мають місце лише тоді, коли $a=b$ або $x=1$.

У цьому параграфі в умовах задач на доведення нерівності ми будемо, як правило, опускати слова "довести нерівність".

Задача 6.1. $\dfrac{a+b}{a^2+b^2}+\dfrac{b+c}{b^2+c^2}+\dfrac{a+c}{a^2+c^2} \leq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ для додатних a, b, c.

Розв'язання.

Оскільки $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, маємо $\dfrac{a+b}{a^2+b^2} \leq \dfrac{a+b}{2ab}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$.

Аналогічно, $\dfrac{b+c}{b^2+c^2} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$, $\dfrac{a+c}{a^2+c^2} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)$.
Додавши ці три нерівності, отримаємо потрібну.

Вправа 6.1. Доведіть, що якщо $a \leqslant 1$, $b \leqslant 1$ і $a+b \geq \dfrac{1}{2}$, то

$$(1-a)(1-b) \leq \frac{9}{16}.$$

Задача 6.2. $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)^m+\left(1+\dfrac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}$ для додатних a і b та довільного натурального m.

Розв'язання. $\left(1+\frac{a}{b}\right)^m+\left(1+\frac{b}{a}\right)^m \ge 2\left[\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^{\frac{m}{2}} =$
$= 2\left(2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{2}} \ge 2\cdot 4^{\frac{m}{2}} = 2^{m+1}$. Тут ми використали нерівності $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ та $x+\frac{1}{x}\ge 2$.

Вправа 6.2. $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)\geqslant 2^n$ для додатних x_k таких, що $x_1\,x_2\dots\,x_n=1$.

Нерівність $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ означає, що середнє арифметичне двох додатних чисел не менше їх середнього геометричного. Таке співвідношення справедливе і для середнього арифметичного та середнього геометричного будь-якої кількості невід'ємних чисел. Тобто має місце нерівність $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$ $(a_k\geqslant 0,\ n\in N)$. Вона називається ***нерівністю Коші***. Рівність тут має місце тільки тоді, коли всі числа a_k рівні між собою. Тому, наприклад, для n додатних чисел, сума яких дорівнює A, їх добуток набуває найбільшого значення, коли всі числа дорівнюють $\frac{A}{n}$. Одне з можливих доведень нерівності Коші ми дамо в цьому параграфі нижче як приклад застосування нерівності Єнсена.

Задача 6.3. Знайти найменше можливе значення виразу $4+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2$.

Розв'язання. Коли в задачі вимагається знайти найменше значення якогось виразу, то, як правило, доводиться, що цей вираз не менший деякого числа і потім показується, що це число є одним із значень виразу.

З нерівності Коші для трьох чисел маємо: $1+x^2y^4+x^4y^2\ge 3\sqrt[3]{1\cdot x^2y^4\cdot x^4y^2}=3x^2y^2$. Тому даний вираз завжди не менший за 3. З іншого боку, при $x=y=1$ він дорівнює 3. Отже, найменше значення дорівнює 3.

Вправа 6.3. $(2+x_1)(2+x_2)\dots(2+x_n)\geqslant 3^n$ для додатних x_k таких, що $x_1x_2\dots x_n=1$.

Варто знати ще одну класичну нерівність – ***нерівність Коші-Буняковського***:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) \geq \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2,$$

де a_k і b_k – довільні числа. Рівність тут має місце тоді і тільки тоді, коли $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

Доведемо цю нерівність. Для змінної x розглянемо суму $(a_1 + b_1x)^2 + (a_2 + b_2x)^2 + \ldots + (a_2 + b_2x)^2$. Вона невід'ємна. Розкривши дужки, зведемо її до вигляду

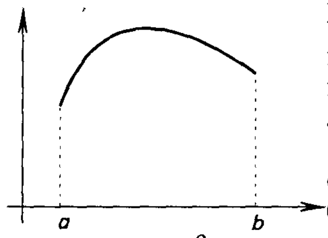
$$\left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right) + 2\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)x + \left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right)x^2.$$

Оскільки цей квадратний тричлен відносно x невід'ємний, його дискримінант не більший від нуля. Записавши це, отримаємо потрібну нерівність.

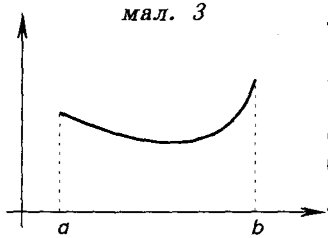
Задача 6.4. $n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) \geq \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2$.

Розв'язання. Досить в нерівності Коші – Буняковського покласти $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$.

Вправа 6.4. Яке найменше значення може набувати сума $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}$ для додатних чисел x_k таких, що $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$?



мал. 3



мал. 4

Наступна класична нерівність – нерівність Єнсена – дуже універсальна і може допомогти в різноманітних випадках. В ній використовується поняття опуклої функції.

Функція $f(x)$ називається опуклою вгору на (a, b), якщо для будь-яких x, $y \in (a, b)$, $\alpha \in (0, 1)$ $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geqslant \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ (приклад графіка такої функції дивись на мал. 3).

Функція $f(x)$ називається опуклою вниз на (a, b), якщо для будь-яких x, $y \in (a, b)$, $\alpha \in (0, 1)$ $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ (приклад графіка такої функції див. на мал. 4).

У перевірці опуклості функції допомагає похідна. Якщо друга похідна $f(x)$ недодатна на (a, b), то $f(x)$ опукла вгору на (a, b). Якщо друга похідна $f(x)$ невід'ємна на (a, b), то $f(x)$ опукла вниз на (a, b).

Тепер ми можемо подати формулювання ***нерівності Єнсена:***

якщо $f(x)$ опукла вгору на (a, b), то для будь-яких $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ $f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$.

Якщо $f(x)$ опукла вниз на (a, b), то для будь-яких $x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$ має місце протилежна нерівність – із знаком менше або дорівнює.

Ми, як і обіцяли раніше, за допомогою цієї нерівності доведемо нерівність Коші.

Розглянемо функцію $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Вона опукла вгору на всій множині визначення (адже $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$). Підставивши таку $f(x)$ та довільні додатні $x_1, \ldots, x_n$ до нерівності Єнсена, одержимо:

$$\ln \frac{(x_1 + \ldots + x_n)}{n} \geq \frac{\ln x_1 + \ldots + \ln x_n}{n},$$

і після потенціювання $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$. Якщо деяке $x_k = 0$, то, легко бачити, що нерівність залишається справедливою. Тому нерівність Коші виконується для довільних невід'ємних чисел.

Вправа 6.5. $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \ldots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \ldots (a_n + b_n)}$,

$a_k, b_k \geqslant 0$ (***нерівність Мінковського***).

Ми бачимо, що в застосуванні відомих нерівностей найважче – це вибрати, що саме ми підставимо замість членів нерівності. Не завжди просто й здогадатись, яке саме співвідношення треба використати.

Далі ми розглянемо ще деякі прийоми, які можуть допомогти при доведенні нерівності.

Нерідко застосовується розклад на множники. Щоб довести, що деякий вираз невід'ємний, нам досить його подати у вигляді добутку кількох невід'ємних множ–

ників або у вигляді повного квадрату. Нагадаємо, що способи розкладання на множники розглядались в §4 цього розділу.

Задача 6.5. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\leq\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$ для $a\geqslant b\geqslant c>0$.

Розв'язання. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\leq 0$.

Вправа 6.6. Розставити числа $x=(a+b)(c+d)$, $y=(a+c)(b+d)$, $z=(a+d)(b+c)$ в порядку зростання, якщо $a<b<c<d$.

Щоб довести невід'ємність виразу, досить його подати у вигляді суми кількох повних квадратів. Наведемо приклад.

Задача 6.6. $a^2+b^2+1\geqslant ab+a+b$.

Розв'язання. Маємо:

$$a^2+b^2+1-ab-a-b=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\right]\geq 0.$$

Вправа 6.7. $t^4-t+\frac{1}{2}>0$.

Зауваження. Задачу 6.6. можна розв'язати й іншим способом. Розглянемо різницю між лівою та правою частинами нерівності як квадратний тричлен відносно a: $a^2-a(b+1)+$ $+(b^2-b+1)$. Його дискримінант дорівнює $-3(b-1)^2\leqslant 0$, коефіцієнт при a^2 додатний, і тому тричлен завжди невід'ємний.

Вправа 6.8. $2a^2+9b^2-6ab+6b+3>0$.

Інколи вимагається довести нерівність для трьох чисел a, b, c, про які відомо, що вони є довжинами сторін деякого трикутника. Як правило, в розв'язанні цих задач немає нічого геометричного. Дана умова для a, b, c лише означає, що це додатні числа такі, що $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$. Із цих трьох нерівностей треба вивести запропоновану.

Задача 6.7. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3$.

Розв'язання. Відмітимо, що $c(a-b)^2+4abc=c(a+b)^2$. Якщо тепер $a^3+b^3+c^3$ перенести в ліву частину, то отримаємо: $a[(b-c)^2-a^2]+b[(c-a)^2-b^2]+c[(a+b)^2-c^2]=(a+b-c)(c^2-(a-b)^2)=$ $=(a+b-c)(c+b-a)(a+c-b)$. Кожен із трьох одержаних множників додатний, оскільки a, b, c – довжини сторін трикутника.

Вправа 6.9. $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$, де a, b, c – довжини сторін трикутника.

Наступна задача є прикладом того, як можна шукати максимум виразу, вважаючи всі змінні, крім однієї, фіксованими і розглядаючи даний вираз як функцію від цієї однієї змінної.

Задача 6.8. $x_1+x_2+x_3-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1 \leqslant 1$, якщо всі $x_k \in [0, 1]$.

Розв'язання. Вираз в лівій частині нерівності є лінійною функцією від x_1, тобто має вигляд px_1+q, де p та q не залежать від x_1 $(p=1-x_2-x_3,\ q=x_2+x_3-x_2x_3)$. Лінійна функція, що розглядається на скінченному інтервалі, своє найбільше значення обов'язково набуває на одному із кінців інтервалу. Тому нам досить перевірити дану нерівність для $x_1=1$ та для $x_1=0$. Для $x_1=1$ отримуємо $1-x_2x_3 \leqslant 1$ – це очевидно. Для $x_1=0$ прийдемо до нерівності $x_2+x_3-x_2x_3 \leqslant 1$.

В лівій частині маємо лінійну функцію відносно x_2, тому досить перевірити випадки $x_2=1$ та $x_2=0$. Нерівності $0 \leqslant 1$ та $x_3 \leqslant 1$ очевидні.

Але завжди треба бути уважним, коли ми шукаємо максимум виразу, змінюючи одну змінну і зафіксувавши інші. Зараз при розв'язуванні для нас було важливо, що вираз набуває найбільше значення при $x_1=0$ або $x_1=1$ для будь-яких значень x_2 та x_3.

Вправа 6.10. Доведіть, що якщо $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$, то

а) $a_1^2-a_2^2+a_3^2 \geq (a_1-a_2+a_3)^2$;

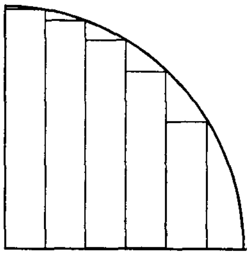
б) $a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2 \geq (a_1-a_2+a_3-a_4)^2$;

в) $a_1^2-a_2^2+\ldots+(-1)^{n+1}a_n^2 \geq \left(a_1-a_2+\ldots+(-1)^{n+1}a_n\right)^2$.

При доведенні деяких нерівностей допомагають геометричні міркування. Ці нерівності можуть мати і алгебраїчні доведення, але геометричні доведення майже завжди красивіші.

Задача 6.9. $\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\ldots+\sqrt{n^2-(n-1)^2} < 0{,}79n^2$.

Розв'язання. В колі одиничного радіуса розглянемо сектор, який обмежений двома перпендикулярними радіусами A_0B та A_0A_n (мал. 5).



мал. 5

Точками A_1, A_2, ..., A_{n-1} поділимо відрізок A_0A_n на частини довжиною $\frac{1}{n}$. На кожному відрізку $A_{k-1}A_k$ побудуємо всередині сектора прямокутник, одна вершина якого лежить на колі. Площа кожного такого прямокутника дорівнює $\frac{1}{n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}$. Сума їх площ менша площі чверті кола. Тому маємо:

$$\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-\frac{1^2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2^2}{n^2}}+\ldots+\sqrt{1-\frac{(n-1)^2}{n^2}}\right)<\frac{\pi}{4}<0{,}79,$$ звідки

отримуємо вказану нерівність.

Вправа 6.11. $\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\ldots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}>$ $>0{,}785n^2-n$.

Вправа 6.12. $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geq\sqrt{a^2+ac+c^2}$ для додатних a, b, c.

У деяких випадках значно полегшити доведення може заміна змінної. Як правило, автори таких нерівностей придумують їх штучно, використовуючи тригонометричні або інші тотожності.

Задача 6.11. $\rho(a,c)\leqslant\rho(a,b)+\rho(b,c)$ де $\rho(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$.

Розв'язання. Нехай α і β такі, що $a=tg\alpha$, $b=tg\beta$. Тоді легко перевірити, що $\rho(a,b)=|sin(\alpha-\beta)|$. Нехай $c=tg\gamma$ і тоді $|sin(\alpha-\gamma)|=|sin(\alpha-\beta+\beta-\gamma)|\leqslant|sin(\alpha-\beta)cos(\beta-\gamma)|+|sin(\beta-\gamma)\times$ $\times cos(\alpha-\beta)|\leqslant|sin(\alpha-\beta)|+|sin(\beta-\gamma)|$, що і треба було довести.

Вправа 6.13. Послідовність чисел h_n задана умовами $h_1=\frac{1}{2}$ та $h_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-h_n^2}}{2}}$. Довести, що сума будь-якої кількості чисел h_n не більша за 1,05.

Вправи

6.14. Доведіть, що для додатних a, b, c не можуть одночасно виконуватись нерівності

$$a(1-b) > \frac{1}{4},\ b(1-c) > \frac{1}{4},\ c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

6.15. $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n + 1)^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$ для чисел x_k з відрізку $[0, 1]$.

6.16. Знайдіть найменше значення виразу $(x+y)(y+z)$ при умові, що x, y, z – додатні числа, які задовольняють рівність $xyz(x+y+z)=1$.

6.17. Доведіть, що якщо числа a, b, c задовольняють нерівностям $a+b+c>0$, $ab+bc+ac>0$, $abc>0$, то ці числа додатні.

6.18. $\left|\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right| < \frac{1}{8}$, якщо a, b, c – довжини сторін деякого трикутника.

6.19. Доведіть, що з чотирьох чисел завжди можна вибрати два числа x та y такі, що $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq 1$.

Розв'язки та вказівки

6.1. $\sqrt{(1-a)(1-b)} \leq \frac{1-a+1-b}{2} \leq \frac{2-\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$.

6.2. $1 + x_k \geq 2\sqrt{x_k}$, тому

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq 2^n\sqrt{x_1x_2\ldots x_n} = 2^n.$$

6.3. $2 + x_k = 1 + 1 + x_k \geq 3\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot x_k}$, тому

$$(2+x_1)(2+x_2)\ldots(2+x_n) \geq 3^n\sqrt[3]{x_1x_2\ldots x_n} = 3^n.$$

6.4. Взявши $a_k = \sqrt{x_k}$ і $b_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}}$, з нерівності Коші–Буняковського отримаємо

$(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$. Якщо взяти всі $x_k = \frac{1}{n}$, одержимо $\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} = n^2$. Це і буде шукане найменше значення.

6.5. Поділити обидві частини на $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$, позначити $\frac{b_k}{a_k} = e^{x_k}$ та застосувати нерівність Єнсена для функції $f(x) = ln(1 + e^x)$.

6.6. $y - x = (a - d)(b - c) > 0$. Аналогічно $z > y$.

6.7. $t^4 - t + \frac{1}{2} = \left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$.

6.8. Якщо вважати a змінною, то $D = -24(b+1)^2 - 12b^2 < 0$.

6.9. $a < |b - c|$, звідки $a^2 < (b - c)^2$. Аналогічно $b^2 < (a - c)^2$, $c^2 < (a - b)^2$. Додаємо ці три нерівності.

6.10. а) Функція $f_3(a_3) = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - (a_1 - a_2 + a_3)^2$ буде лінійною функцією від a_3. Тому досить перевірити її невід'ємність при $a_3 = 0$ та $a_3 = a_2$.

б) Функція $f_4(a_4) = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 - (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)^2$ буде квадратним тричленом вигляду $-2a_4^2 + pa_4 + q$. Тому досить перевірити її невід'ємність при $a_4 = 0$ та $a_4 = a_3$.

в) Функція $f_n(a_n)$ – різниця між лівою та правою частинами нерівності – буде лінійною при непарному n та квадратним тричленом при парному. Тому досить перевірити, що $f_n(0) \geqslant 0$ та $f_n(a_{n-1}) \geqslant 0$ – це зводиться до нерівності з $(n - 1)$ або $(n - 2)$ числами. Користуємось математичною індукцією.

6.11. Треба розглянути прямокутники з однією стороною $A_{k-1}A_k$ і другою – перпендикуляром до A_0A_n, встановленим від A_{k-1} до кола. Сума їх площ більша площі чверті кола.

6.12. З точки O проведемо відрізки $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ так, що $\angle AOB = 60^\circ$ та $\angle BOC = 60^\circ$. Запишемо нерівність $AB + BC > AC$, виразивши довжини цих відрізків через a, b, c за допомогою теореми косинусів.

6.13. Якщо $h_n = sin\,\alpha$, то $h_{n+1} = sin\frac{\alpha}{2}$. Відмітимо, що $sin\,\alpha < \alpha$ та $h_1 = sin\frac{\pi}{6}$. Маємо $\frac{\pi}{6}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{\pi}{3} < 1{,}05$.

6.14. Числа a, b, c не більші за 1 та додатні, тому можемо перемножити дані нерівності.

Отримаємо: $[a(1-a)]\cdot[b(1-b)]\cdot[c(1-c)] > \frac{1}{64}$, але для будь-якого x $x(1-x) \le \frac{1}{4}$.

6.15. Оскільки $(S+1)^2 \geqslant 4S$, маємо

$(x_1 + \ldots + x_n + 1)^2 \ge 4(x_1 + \ldots + x_n)$.

Оскільки числа $x_k \in [0,\ 1]$, маємо $x_k \ge x_k^2$.

6.16. $(x+y)(y+z) = (x+y+z)y + xz = \frac{1}{xz} + xz \ge 2$, де рівність досягається при $x=z=1$, $y=\sqrt{2}-1$.

6.17. Розглянемо многочлен $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$. Оскільки коефіцієнти при x^3 та x додатні, а коефіцієнт при x^2 та вільний член від'ємні, цей многочлен не може мати недодатні корені. У той же час a, b, c – його корені.

6.18. Відмітимо, що при $a=b$, $b=c$ або $c=a$ ліва частина нерівності дорівнює нулю. Це допомагає нам знайти розклад на множники

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right| = \left|\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right| <$$

$$< \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\cdot\frac{\sqrt{bc}}{b+c}\cdot\frac{\sqrt{ca}}{c+a} \le \frac{1}{8}.$$

6.19. Нехай α, β, γ, δ – арктангенси даних чисел. Оскільки вони належать відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, для якихось двох (наприклад α і β) маємо $0 \le \alpha-\beta \le \frac{\pi}{4}$. Тоді $0 \le tg(\alpha-\beta) \le 1$, і при цьому $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\, tg\,\beta}$.

Шуканими числами будуть $tg\alpha$ і $tg\beta$.

§7. ПРИНЦИП КРАЙНЬОГО АБО БЕРЕМО НАЙБІЛЬШИЙ

У багатьох задачах розглядаються скінченні сукупності елементів – набори чисел, множини точок, групи людей тощо. Тоді при розв'язуванні часто буває корисним розглянути елемент або кілька елементів з певною властивістю максимальності або мінімальності – найбільше число, найближчі точки, людину з найбільшим числом знайомих.Такий підхід інколи називають ***принципом крайнього***. Наведемо приклади його застосування.

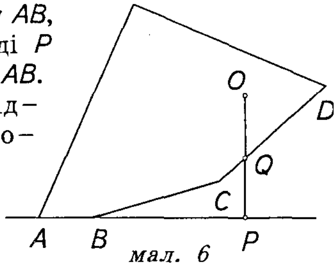
Задача 7.1. Дана прямокутна таблиця розміром $m \times n$, в усі клітинки якої вписано деякі числа. Дозволяється одночасно змінювати знак у всіх чисел одного рядка або у всіх чисел одного стовпчика. Довести, що, застосовуючи цю операцію кілька разів, ми завжди можемо отримати таблицю, в якої суми чисел кожного рядка і кожного стовпчика невід'ємні.

Розв'язання. Розглянемо всі таблиці, які ми можемо отримати з даної. В кожній клітинці таких таблиць стоїть або таке ж число, що і в початковій, або йому протилежне. Всього у нас mn чисел, тому ми можемо отримати не більше 2^{mn} різних таблиць – скінченну кількість. Оберемо серед них ту, що має максимальну суму елементів (якщо таких таблиць кілька, візьмемо одну з них). В цій таблиці суми чисел кожного рядка і кожного стовпчика невід'ємні. Адже в протилежному випадку ми могли б змінити знак у всіх чисел рядка або стовпчика з від'ємною сумою і отримати таблицю з більшою сумою елементів.

Задача 7.2. Довести, що хоча б одна з основ перпендикулярів, опущених з даної внутрішньої точки опуклого многокутника на його сторони, лежить на самій стороні, а не на її продовженні.

Розв'язання. Нехай O – дана точка. Серед усіх перпендикулярів, опущених з O на сторони, виберемо найкоротший (якщо їх кілька, візьмемо один з них). Нехай цей пер–

пендикуляр опущений на сторону AB, а P – його основа (мал. 6). Тоді P обов'язково лежить на стороні AB. Адже в протилежному випадку відрізок OP перетинає якусь іншу сторону CD в точці Q, $OQ<OP$. Тоді перпендикуляр, опущений на CD, буде не більший OQ і коротший OP, що суперечить вибору OP.



мал. 6

Вправа 7.1. Доведіть, що в будь-якому многокутнику знайдеться сторона BC та вершина A, відмінна від B та C, такі, що основа перпендикуляра, опущеного з A на пряму BC, належить відрізку BC.

Задача 7.3. На конгресі серед вчених є знайомі. При цьому будь-які двоє вчених, що мають однакову кількість знайомих, не мають спільних знайомих. Довести, що є вчений, в якого на конгресі точно один знайомий.

Розв'язання. Розглянемо вченого A, що має найбільшу серед учасників конгресу кількість знайомих n , $n > 0$. Всі знайомі A мають різну кількість знайомих (оскільки вони мають спільного знайомого A). Ці кількості можуть набувати значень від 1 до n, і вони розподілені між n вченими. Тому хтось обов'язково має точно одного знайомого.

Вправа 7.2. У шаховому турнірі кожний гравець зустрічався з кожним іншим один раз, причому жодна партія не закінчилась внічию. Відомо, що кожний шахіст знає прізвища учасників турніру, яких він переміг, а також прізвища тих, кого перемогли переможені ним. Довести, що принаймі один гравець знає прізвища всіх інших.

Задача 7.4. На кожній планеті деякої системи знаходиться астроном, що спостерігає найближчу планету. Відстані між планетами попарно різні. Довести, що якщо кількість планет непарна, то якусь планету ніхто не спостерігає.

Розв'язання. Візьмемо дві планети з найменшою відстанню між ними. Зрозуміло, що астрономи на цих планетах дивляться один на одного. Залишаються ще $n-2$ планети та $n-2$ астрономи. Якщо хтось із них дивиться на вже обрану планету, то на одну з $n-2$ планет не вистачить астрономів. Якщо на дві обрані планети ніхто не дивиться, то знову можна провести ті ж самі міркування – з $n-2$ планет обираємо дві найближчі, і т.д. Оскільки кількість планет непарна, в кінці залишиться одна планета, яку ніхто не спостерігає. Відмітимо, що тут ми обирали "крайній" елемент не один раз, а кілька разів – на кожному кроці.

Вправа 7.3. Об'єднання кількох кругів має площу 1. Доведіть, що з них можна вибрати кілька кругів, що попарно не перетинаються, сума площ яких більша $\frac{1}{9}$.

В усіх розглянутих задачах для нас важлива скінченність набору, який ми розглядаємо. Лише тому ми можемо одразу стверджувати, що максимальний або мінімальний в якомусь сенсі елемент існує. Але якщо такий "крайній" елемент обрати можна, то, як ми бачимо, його часто розглядати зручніше, ніж деякий довільний. Адже чим більше інформації ми маємо про наш об'єкт, тим легше для нього щось довести, або з його допомогою прийти до суперечності. І вибір "крайнього" елемента може дуже допомогти саме тоді, коли невідомо, з чого треба починати розв'язування задачі.

Вправи

7.4. Чи існує набір з 1000 попарно різних чисел такий, що в ньому кожне число не більше за півсуму якихось двох інших?

7.5. Знайдіть всі додатні розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2, \\ x_2 + x_3 = x_4^2, \\ x_3 + x_4 = x_5^2, \\ x_4 + x_5 = x_1^2, \\ x_5 + x_1 = x_2^2. \end{cases}$$

7.6. Доведіть, що в будь-якого опуклого многогранника знайдуться дві грані з однаковим числом сторін.

7.7. В деякому місті з будь-якої станції метро можна проїхати (можливо, з пересадками) на будь-яку іншу. Рух в метро двосторонній. Довести, що тоді можна закрити одну станцію (без права проїзду через неї) так, щоб з будь-якої станції, що залишилася, можна було проїхати на будь-яку іншу.

7.8. На площині розташовано n точок так, що будь-який трикутник з вершинами в цих точках має площу не більшу за 1. Доведіть, що всі ці точки можна помістити в трикутник площею 4.

Розв'язки та вказівки

7.1. Нехай BC – найдовша сторона многокутника. Розглянемо смугу, обмежену перпендикулярами до BC, проведеними в точках B і C. Вона містить ще хоча б одну вершину многокутника.

Відмітимо, що тут найкоротший перпендикуляр не обов'язково задовольняє умову задачі.

7.2. Таким буде шахіст, який виграв найбільшу кількість партій. Якби він не знав прізвища якогось другого шахіста, то другий переміг би першого і всіх переможених першим – він мав би виграшів більше, ніж перший.

7.3. Візьмемо круг найбільшого радіуса і розглянемо новий круг з тим же центром і втричі більшим радіусом. Потім відкинемо всі круги, що повністю лежать всередині нового круга. Круги, що залишилися, не перетинаються з початковим, обираємо серед них найбільший і робимо ту ж процедуру. Так робимо, поки не отримаємо кілька «роздутих» кіл, площа об'єднання яких більша 1.

7.4. Ні, не існує. Найбільше число набору більше півсуми будь-яких двох інших.

7.5. Позначимо через x та y відповідно найбільше та найменше з чисел $x_1, \ldots, x_5$. Тоді з відповідних рівнянь маємо: $x^2 \leqslant 2x$ і $y^2 \geqslant 2y$. Тому $x=y=2$, $x_1=\ldots=x_5=2$.

7.6. Нехай існує опуклий многогранник, всі грані якого мають різне число сторін. Тоді до грані з найбільшим числом сторін n примикають n граней з різними числами сторін від 3 до n. Протиріччя.

7.7. Нехай A – довільна станція. Тоді треба закрити станцію, до якої від A їхати довше всього (за кількістю зупинок).

7.8. Серед трикутників з вершинами в даних точках виберемо ABC, що має найбільшу площу. Проведемо через A пряму, паралельну BC, через B – паралельну AC, через C – паралельну AB. Обмежений цими прямими трикутник має площу $4S_{ABC}$ і містить всі дані точки.

§8. ДОВЕДЕННЮ ДОПОМАГАЄ ІНВАРІАНТ

На олімпіадах часто пропонуються задачі про перетворення об'єкта з використанням деяких дозволених операцій.

Задача 8.1. На дошці написано десять плюсів та п'ятнадцять мінусів. Дозволяється стерти будь-які два знаки та написати замість них плюс, якщо вони однакові, і мінус, якщо вони різні. Який знак лишиться на дошці після виконання двадцяти чотирьох таких операцій?

Розв'язання. Замінимо кожен плюс числом 1, а мінус числом -1. Тоді наша операція полягає в тому, що замість двох чисел пишемо їх добуток. Добуток всіх чисел на дошці не змінюється. На початку він дорівнював -1, тому і в кінці він буде дорівнювати -1. Залишається мінус.

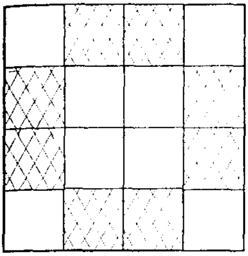
У розв'язанні цієї задачі нам допомогло те, що ми знайшли величину, яка не змінюється при наших операціях. Число або властивість, що не змінюється при дозволених перетвореннях, називається ***інваріантом.*** Інваріант може дати можливість знайти кінцевий результат наших операцій. Якщо числове значення інваріанту на двох об'єктах різне, то ми не можемо один об'єкт отримати з другого.

Вправа 8.1. На дошці написані числа 1, 2, ..., 1991. Кожний раз стираються якісь два числа і замість них пишеться остача від ділення суми цих двох чисел на 13. Яке єдине число залишиться після виконання всіх цих операцій?

Задача 8.2. В таблиці 4×4 плюси та мінуси розставлені так, як показано на мал. 7. Дозволяється змінити знак на протилежний одночасно у всіх клітинках, розташованих в одному рядку, в одному стовпчику або вздовж прямої, паралельної одній

+	+	−	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

мал. 7



мал. 8

з діагоналей (зокрема, в будь-якій кутовій клітинці). Чи можна отримати таблицю, що не має жодного мінуса?

Розв'язання. Ні, не можна. Будемо вважати плюси числами 1, а мінуси числами -1. При наших операціях не змінюється добуток чисел в клітинках, заштрихованих на мал. 8. В початковій таблиці цей добуток дорівнює -1, в таблиці без мінусів 1.

Вправа 8.2. Дано таблицю 3×3 (див. мал. 9). Дозволяється змінювати знак одночасно у всіх клітинках одного рядка, або одного стовпчика. Чи можна отримати таблицю з самими плюсами?

+	+	−
−	+	+
+	−	+

мал. 9

Задача 8.3. Квадратне поле розбите на 100 однакових квадратних ділянок, з яких дев'ять заросли бур'яном. За рік бур'ян може розповсюдитися ще лише на ті ділянки, для яких не менше двох сусідніх вже заросли бур'яном (ділянки називаються сусідніми, якщо вони мають спільну сторону). Довести, що повністю все поле ніколи бур'яном не заросте.

Розв'язання. Неважко перевірити, що довжина границі області, яка поросла бур'яном, не може зростати. Спочатку ця довжина не перевищувала 36 (вважаємо, що сторона кожної ділянки дорівнює 1), тому вона ніколи не зможе дорівнювати 40 – периметру поля.

Відмітимо, що тут ми використовуємо не інваріант в його стандартному розумінні. Довжина границі області з бур'яном може змінюватися. Для нас важливо, що вона не може зростати.

Вправа 8.3. Дано кілька (не менше двох) ненульових чисел. Дозволяється стерти будь-які два числа a і b та записати замість них числа $a+\frac{b}{2}$ та $b-\frac{a}{2}$. Доведіть, що після кількох таких операцій, ми не отримаємо початкового набору чисел.

Задача 8.4. Чи можна шахову дошку 8×8 покрити 11 прямокутниками 1×4 та 5 квадратами 2×2 так, щоб їхні сторони йшли по сторонах клітинок?

0	1	2	3	0	...
1	2	3	0	1	...
2	3	0	1	2	...
3	0	1	2	3	...
0	1	2	3	0	...
...	...	...	...	...	...

мал. 10

Розв'язання. Розставимо на клітинах дошки числа 0, 1, 2 та 3 в порядку, вказаному на мал. 10. Кожний квадрат 2×2 покриває клітинки з сумою чисел 4 або 8. Кожний прямокутник 1×4 покриває клітинки з сумою чисел 6, для 11 прямокутників сума чисел дорівнює 66. Тому сума чисел, покритих 5 квадратами та 11 прямокутниками у нас не може ділитися на 4. З іншого боку, для дошки 8×8 сума всіх чисел дорівнює 96. Тому дошку покрити не можна.

Вправа 8.4. Доведіть, що прямокутниками 1×3 не можна покрити дошку 8×8, в якій з лівого нижнього кута вирізаний прямокутник 1×4.

Задача 8.5. На дошці розміром 10×10 роставлено 50 шашок: 25 у лівій нижній чверті дошки, 25 – у правій верхній чверті. За один хід будь-яка шашка може перестрибнути через шашку, сусідню з нею по горизонталі, вертикалі або діагоналі на наступне поле, якщо воно вільне. Чи зможуть за кілька ходів всі шашки опинитися на одній половині дошки?

Розв'язання. Ні, не зможуть. Нехай клітинки дошки пофарбовані у білий та чорний колір у шаховому порядку. Тоді кожна шашка при переміщеннях не змінює кольору клітинки, на якій вона стоїть. В початковій розстановці у нас на чорних клітинках стоять 24 або 26 шашок (в залежності від кольору лівої нижньої клітинки). А на половині дошки 25 чорних клітинок.

Вправа 8.5. Довести, що шахову дошку, розміром 1989×1991 з вирізаною центральною клітинкою не можна обійти турою, побувавши в кожній клітинці точно один раз.

Докладніше ідея розфарбування розглядається в десятому параграфі.

Вправи

8.6. У Змія Горинича 1000 голів. Ілля Муромець одним ударом меча може відрубати точно 1, 17, 21 або 33 голови, але при цьому в Змія виростає відповідно 10, 14, 0 або 48 голів. Чи зможе богатир перемогти Змія Горинича?

8.7. Доведіть, що шашкову дошку розміром 10×10, не можна розбити на фігурки у формі букви Т, що складається з чотирьох клітинок.

8.8. Якщо в нас є кілька многочленів, то дозволяється до них дописати добуток, суму або різницю двох із них. Спочатку нам задано $f(x)$ та $g(x)$. Чи зможемо ми отримати x, якщо:
а) $f(x)=x^2+x$; $g(x)=x^2+2$;
б) $f(x)=x^2+x$; $g(x)=x^2-2$;
в) $f(x)=2x^2+x$; $g(x)=2x$;
г) $f(x)=2x^3+x$; $g(x)=x^2$.

8.9. Дано 77 однакових брусків розміром 3×3×1. Чи можна їх усіх укласти в коробку з кришкою розміром 7×9×11?

8.10. "Дельфін" – фігура, що ходить на одне поле вгору, вправо або по діагоналі вліво вниз. Чи зможе "дельфін" обійти дошку 8×8, починаючи з лівого нижнього кута і побувавши в кожній клітині один раз?

8.11. Нескінченна послідовність цифр починається цифрами 1, 0, 1, 0, 1, 0. Далі кожна цифра – це остання цифра суми шістьох попередніх. Чи зустрінуться колись в цій послідовності підряд цифри 0, 1, 0, 1, 0, 1?

8.12. На площині задано правильний шестикутник. Кожна його сторона поділена на 1000 рівних частин, і точки поділу з'єднані відрізками, паралельними сторонам шестикутника. В утвореній сітці оберемо три вузла, що є вершинами правильного трикутника (будь-якого розміру та розташування), і пофарбуємо їх. Продовжуємо такий вибір та фарбування, поки це можливо. Доведіть, що якщо залишиться непофарбованим один вузол, то він не є вершиною початкового шестикутника.

Розв'язки та вказівки

8.1. Нехай витерто числа x та y і їх сума при діленні на 13 дає остачу r, тобто $x+y=13q+r$. Якщо сума всіх чисел була S і при діленні S на 13 остача була R, тобто $S=13Q+R$, то після першого виконання операції (стирання чисел x і y), сума чисел, які залишилися, $S'=S-(x+y)+r=13Q+R-13q-r+r=13Q'+R$. Отже, S' при діленні на 13 також дає остачу R. Таким чином, інварвант – остача від ділення суми всіх чисел на 13.

Оскільки $S=\frac{1+1991}{2}\cdot 1991=1983036=13\cdot 152541+3$, тобто остача $R=3$, то після виконання всіх операцій залишиться число 3.

Відповідь: 3.

8.2. Ні, не можна. Якщо замінити плюси на 1, а мінуси на -1, то інваріантом буде добуток чисел у чотирьох кутових клітинках.

8.3. $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\left(a^2+b^2\right)$. Оскільки числа ненульові, сума квадратів всіх чисел при першій дії збільшиться, і далі вже не зменшиться.

8.4. Пронумеруємо вертикалі повної дошки 8×8 цифрами від 0 до 7 та горизонталі цими ж цифрами, починаючи з лівого нижнього кута. В кожну клітину поставимо лишок від ділення на 3 суми відповідних їй горизонталі та вертикалі. Кожна фігура 1×3 покриває числа 0, 1 та 2. А сума чисел на всій дошці з вирізаним нашим прямокутником не ділиться на 3.

8.5. Розфарбуємо клітинки дошки у білий та чорний колір у шаховому порядку. Тоді тура по черзі проходить білі та чорні клітинки. Їх у нас парна кількість, але кількість білих клітинок не перевищує кількості чорних.

8.6. Ні, не зможе. Кожного разу кількість голів Змія змінюється на число, кратне трьом.

8.7. Кожна фігурка покриває 1 або 3 чорних клітинки. Нам потрібно 25 фігурок. На дошці парна кількість чорних клітинок.

8.8. а) Ні, не зможемо. Оскільки $f(-1)=0$, $g(-1)=3$, значення в (-1) многочленів, що ми можемо отримати, ділиться на 3.

б) Зможемо. $x=(f-g)^2-2(f-g)-f$.

в) Ні. При $x=\frac{1}{2}$ многочлени $f(x)$, $g(x)$ та всі многочлени, що ми можемо отримати, набувають цілих значень.

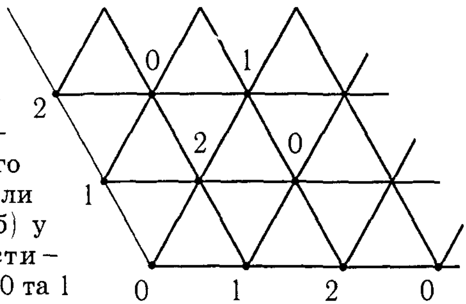
г) Ні. Значення будь-якого отриманого нами многочлена в точці $x=\sqrt{2}$ має вигляд $m+5n\sqrt{2}$; $m, n \in Z$.

8.9. Ні, не можна. Розглянемо в коробці шар товщиною 1, розташований біля грані розміром 7×11. Кожен брусок займає в ньому 3 або 9 кубиків $1\times1\times1$. Але 77 не ділиться на 3.

8.10. Розставимо числа 0, 1, та 2 в клітинках дошки так, як при розв'язанні вправи 8.4. Тоді "дельфін" по черзі буде проходити числа 0, 1, 2, 0, 1, 2, ... Але в нас на дошці кількість одиниць не дорівнює кількості двійок.

8.11. Ні, не зустрінуться. Інваріантом буде остання цифра числа $2x_1+4x_2+6x_3+8x_4+10x_5+12x_6$, де $x_1, x_2, \ldots, x_6$ – шість цифр, що йдуть підряд.

8.12. Розставимо у вузлах сітки числа 0, 1, 2, так, щоб: а) у вершинах будь-якого маленького трикутника стояли всі три числа; б) у вершинах шестикутника стояли 0 та 1 (див. мал. 11). Розставляти числа треба симетрично відносно осей симетрії шестикутника, що проходять через вершини. Тоді сума чисел у вершинах будь-якого правильного трикутника ділиться на 3, а сума всіх розставлених чисел при діленні на 3 дає остачу 2.



мал. 11

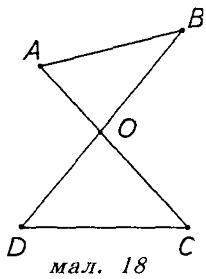
§9. ПРО НАПІВІНВАРІАНТИ

Коли треба довести, що якусь дію не можна проводити нескінченну кількість разів, часто підбирають функцію, що може набувати лише скінченної кількості значень і при кожному виконанні дії зростає або при кожному виконанні спадає. Тоді скінченність процесу стає очевидною. За аналогією з інваріантом – величиною, що не змінюється (див. § 8) – цю функцію природно назвати ***напівінваріантом***.

Задача 9.1. По колу розставлено n чисел. Якщо підряд стоять числа a, b, c, d, і при цьому $(a-d)(b-c)>0$, то числа b і c дозволяється міняти місцями. Довести, що після кількох таких дій ми не зможемо зробити жодної перестановки.

Розв'язання. Нерівність $(a-d)(b-c)>0$ еквівалентна нерівності $ab+bc+cd>ac+cb+bd$. Розглянемо суму всіх попарних добутків сусідніх чисел. Вона, як ми бачимо з останньої нерівності, при виконанні нашої дії кожного разу зменшується. Ця сума може набувати лише скінченної кількості значень, оскільки існує лише скінченна кількість розстановок даних чисел по колу. Ми зможемо виконувати нашу операцію не більше разів, ніж існує розстановок з сумою, меншою ніж у початкової розстановки. Отже, тут напівінваріант – сума попарних добутків сусідніх чисел.

Задача 9.2. На площині зафіксовані кілька точок, ніякі три з яких не лежать на одній прямій. Деякі з них сполучені відрізками, причому з кожної точки виходить не більше одного відрізка. Якщо відрізки AC і BD перетинаються, то дозволяється замінити їх відрізками AB і CD. Довести, що через кілька кроків ми отримаємо набір відрізків, які не перетинаються.



мал. 18

Розв'язання. Нехай AC і BD перетинаються в точці O (мал. 18). Тоді $AO+OB>AB$ і $CO+OD>CD$, звідки $AC+BD>AB+CD$. При виконанні кожної нашої дії сума довжин всіх відрізків зменшується. Ця сума може-набувати лише скінченної кількості значень – є лише скінченна кількість способів вибрати дану кількість пар точок з фіксованих. Тому наш процес замін скінченний, а заміни закінчуються, коли немає відрізків, які перетинаються.

Вправа 9.1. На площині дано $2N$ точок, ніякі три з яких не лежать на одній прямій. N з них пофарбовано у червоний колір, інші – у синій. Доведіть, що ці точки можна з'єднати відрізками, які не перетинаються, кожен з яких з'єднує червону точку з синьою.

Задача 9.3. У парламенті в кожного його члена не більше трьох ворогів. Довести, що парламент можна розбити на дві палати так, щоб у кожного депутата в одній з ним палаті було не більше одного ворога.

Розв'язання. Розіб'ємо парламент на дві палати довільним чином. Якщо є депутат, що має у своїй палаті не менше двох ворогів, переведемо його в іншу палату. Якщо ще є такий депутат, і його переведемо, і так далі. Доведемо, що цей процес скінченний. Позначимо умовно депутатів точками на площині і з'єднаємо відрізками всі пари ворогів, що належать одній палаті. При нашому переведенні не менше двох відрізків витираються і не більше одного з'являється – кількість їх зменшується. А у нас кількість відрізків скінченна.

Вправа 9.2. На площині дано N точок, ніякі три з яких не лежать на одній прямій. Деякі з них сполучені відрізками, причому з кожної точки виходять не більше 11 відрізків. Доведіть, що ці точки можна пофарбувати у чотири кольори так, щоб відрізків з однокольоровими кінцями було не більше N.

Наступна задача розв'язується, формально кажучи, не з допомогою напівінваріанта. Але й тут нам допоможе функція, що монотонно змінюється.

Задача 9.4. Учні з шкільного математичного гуртка побудували обчислювальну машину, яка четвірку чисел (a, b, c, d) натисканням кнопки перетворює на $(a-b, b-c, c-d, d-a)$. Довести, що якщо в початковій четвірці не всі числа однакові, то після кількох натискань утвориться четвірка, принаймні одне число якої більше 1991.

Розв'язання. Нехай (a_n, b_n, c_n, d_n) – числа, що утворилися після n натискань кнопки. Тоді для $n \geqslant 1$ $a_n+b_n+c_n+d_n=0$ і розглянемо суму квадратів цих чотирьох чисел:

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 = 2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2)-$$
$$-2(a_n+c_n)(b_n+d_n) \geqslant 2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2)-(a_n+c_n+b_n+d_n)^2=$$
$$=2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2).$$

Звідси маємо, що

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 \geqslant 2(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2).$$

Оскільки

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2>0,$$

то після достатньої кількості натискань машина буде отримувати як завгодно велике число в четвірці.

Тут сума квадратів чотирьох чисел не є напівінваріантою, оскільки може приймати нескінченну кількість значень. Нам допомогла властивість її зростання.

Вправа 9.3. Послідовність a_1, a_2, a_3,... така, що $a_1=1$ і для

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \quad n \geqslant 1.$$ Доведіть, що $a_{10000}>140$.

Вправи

9.4. Країна Десса розташована на 100 000 островах. Між деякими островами щоденно курсують пароплави, причому з кожного острова можна добратися на будь-який інший. Злочинець та капітан Жеглов можуть робити не більше одного рейсу в день. Злочинець не їздить 13-го числа кожного місяця, капітан Жеглов не забобонний і завжди знає, де знаходиться злочинець. Доведіть, що капітан може наздогнати злочинця.

9.5. На нескінченному аркуші паперу в клітинку кілька клітинок пофарбовано в чорний колір. В моменти часу $t = 1, 2, 3,...$ проходить одночасне перефарбування всіх клітинок за таким правилом: кожна клітинка k приймає той колір, який мала більшість з трьох клітинок: сама k та її сусіди справа та згори. Доведіть, що через деякий час на аркуші не залишиться чорних клітинок.

9.6. На острів, де зарито кілька скарбів, висадилася група стрибаючих піратів. Далі кожну хвилину кожний пірат перестрибує в точку – центр ваги многокутника, вершинами якого є скарби, до яких цей пірат в попередню хвилину був ближчий за всіх інших піратів. Якщо в деякий момент часу пірат не має таких скарбів, то він тоді не рухається. Доведіть, що через деякий час переміщення на острові припиняється.

(Примітка: центром ваги многокутника $A_1A_2...A_n$ називається точка O така, що

$$\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \ldots + \overline{OA_n} = \bar{0}).$$

9.7. У бібліотеці на полиці в деякому порядку стоять N томів Британської енциклопедії. Робот-бібліотекар кожну хвилину робить таку дію: бере довільний том та ставить його на місце (якщо номер тома k – то ставить його k-тим по порядку). Доведіть, що через деякий час всі томи будуть стояти на своїх місцях.

9.8. Є 8 однакових кубиків з ребром 1. Довільні 24 грані з усіх 48 граней пофарбували в білий колір, а інші 24 – в чорний. Доведіть, що з цих 8 кубиків можна скласти такий куб, що на його поверхні білих та чорних квадратиків із стороною 1 буде порівну.

Розв'язки та вказівки

9.1. Спочатку з'єднаймо червоні точки з синіми N відрізками довільним способом. Далі, якщо відрізки $Ч_1С_1$ та $Ч_2С_2$ перетинаються, замінюємо їх відрізками $Ч_1С_2$ та $Ч_2С_1$. Міркування, проведені при розв'язуванні задачі 9.2, показують скінченність процесу замін.

9.2. Розфарбуємо точки в чотири кольори довільним способом. Якщо відрізків з однокольоровими кінцями більше N, то з якоїсь точки виходить не менше 3 таких відрізків. Її можна перефарбувати так, щоб таких відрізків виходило не більше двох – кількість відрізків з однокольоровими кінцями зменшується.

9.3. Оскільки

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} > a_n^2 + 2 > 2\sqrt{2a_n^2} > 2a_n,$$

то маємо, що $a_{10000}^2 > 2 \cdot 9999 = 19998 = 19998.$

Отже,

$$a_{10000} > \sqrt{19998} > 140 \left(140^2 = 19600\right).$$

9.4. За відстань між островами візьмемо найменшу кількість днів, за яку з одного острова можна потрапити на інший. Кожного 13-го числа відстань між злочинцями та капітаном Жегловим зменшується на одиницю.

9.5. Помістимо всю сукупність чорних клітинок у прямокутник і визначимо прямокутну систему координат з початком в лівому нижньому куті цього прямокутника. Для кожної чорної клітинки обчислимо суму її координат. Напівінваріантом буде найбільше з цих чисел.

9.6. Помітимо, що центр ваги многокутника $A_1A_2...A_n$ – точка, в якій досягає мінімуму сума

$$MA_1^2 + MA_2^2 + ... + MA_n^2,$$

де M – довільна точка площини. Тут напівінваріант – сума квадратів всіх відстаней від скарбів до найближчих до них піратів.

9.7. Розглянемо величину

$$|a_1-1| + |a_2-2| + ... + |a_k-k|,$$

де a_k – місце k-го тома. При діях робота вона не може збільшуватись, причому не змінюється, коли всі томи, що стоять між новим та старим місцями перенесенного, віддаляються від своїх "законних" місць. Але томи не можуть лише віддалятися. Отже, через деякий час всі томи будуть стояти на своїх місцях.

9.8. Складемо куб розмірами $2\times2\times2$ довільним способом. Поступово повертаючи кубики відносно різних осей на 90°, можемо прийти до того, що всі грані кубиків, що були всередині куба, будуть зовні і навпаки. Тому якщо спочатку різниця між кількістю чорних та білих квадратиків на поверхні була $2k$ (вона обов'язково парна), то тепер вона стане $(-2k)$. При кожному повороті різниця змінювалась на ±2 або 0. Тому був момент, коли вона дорівнювала нулю.

§10. ІДЕЯ РОЗФАРБУВАННЯ

При розв'язуванні олімпіадних задач інколи клітинки, точки або інші фігури вважають розфарбованими у різні кольори в деякому порядку. Фактично це означає розбиття множини всіх даних фігур на підмножини. Розфарбування робить розв'язання більш наочним, та й міркувати за таким малюнком легше. У восьмому параграфі ми частково познайомилися з тим, як розфарбування дозволяє знаходити важливі для нас закономірності. Розглянемо ще декілька прикладів.

Задача 10.1. У кожній клітині дошки розмірами 5×5 сидить жук. За свистком кожний жук переповзає в одну із сусідніх по діагоналі клітин. При цьому в деяких клітинах можуть виявитися по кілька жуків, а деякі клітини стануть незайнятими. Знайдіть найменше число незайнятих клітин.

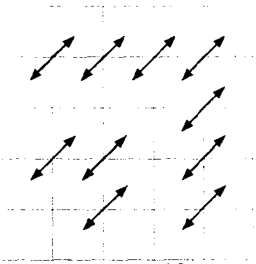
Розв'язання. Пофарбуємо вертикалі дошки у білий та чорний кольори так, щоб сусідні вертикалі мали різний колір. Якщо перша зліва вертикаль – чорна, то у нас 15 чорних та 10 білих клітин. Переповзаючи, кожний жук змінює колір клітини, на якій він сидить. На чорні клітини можуть переповзти лише жуки з білих клітин. Тому не менше 5 чорних клітин стануть вільними. На малюнку 12 наведено приклад, коли залишаються незайнятими 5 клітин.

Відповідь: 5 клітин.

Вправа 10.1. У кожній клітині дошки розмірами 5×5 сидить жук. В деякий момент всі жуки переповзають на сусідні (по горизонталі або вертикалі) клітини. Чи обов'язково при цьому залишиться вільна клітина?

Задача 10.2. Є квадратний лист паперу в клітинку розмірами 100×100. Проведено кілька ламаних без самоперетинів, що йдуть по сторонах клітинок та не мають спільних точок. Ці ламані лежать всередині квадрата, лише їх кінці лежать на межі. Довести, що крім вершин квадрата, знайдеться вузол (всередині або на межі), який не належить жодній ламаній.

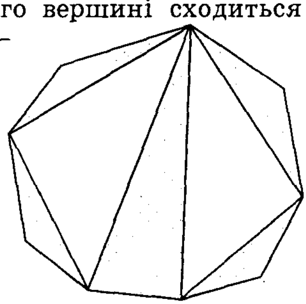
Розв'язання. Пофарбуємо всі вузли у шаховому порядку в чорний та білий кольори. Тоді кожна ламана проходить через чорний та білий вузол по черзі. Нехай всі некутові вузли межі (серед них порівну чорних та білих) – кінці ламаних. Тоді ми маємо однакову кількість ламаних з двома білими та з двома чорними кінцями. Тому загальні кількості чорних та білих вузлів на ламаних всередині квадрата рівні (на ламаних з білими кінцями на один чорний вузол більше, на ламаних з чорними кінцями – на один білий). Але у нас всередині квадрату 99^2 вузлів – непарна кількість.



мал. 12

Вправа 10.2. У турнірі грають $2m$ команд. У першому турі зустрілися між собою m пар команд і в другому турі зіграли між собою m пар (не обов'язково інші). Доведіть, що тепер можна вибрати m команд, серед яких жодні дві ще не грали між собою.

Задача 10.3. Опуклий n–кутник розбитий на трикутники своїми діагоналями, що не перетинаються, причому в кожній його вершині сходиться непарна кількість трикутників. Довести, що n ділиться на 3.



мал. 13

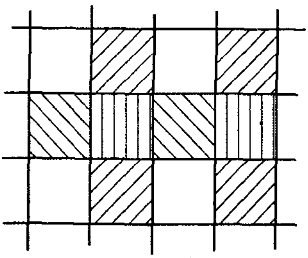
Розв'язання. Якщо многокутник розбитий на частини діагоналями, що не перетинаються, то ці частини можна розфарбувати у білий та чорний кольори так, щоб частини із спільною стороною мали різний колір. Щоб довести це, можемо спочатку вважати весь многокутник білим, а далі при проведенні кожної діагоналі по один бік від неї змінювати кольори всіх частин, а по другий бік – зберігати розфарбування. Оскільки в кожній вершині сходиться непарна кількість трикутників, всі сторони многокутника будуть належати трикутникам одного кольору, наприклад, чорного (мал. 13). А кожна проведена діагональ є одночасно стороною і чорного, і білого трикутника. Тому n дорівнює кількості сторін чорних трикутників мінус кількість сторін білих. Обидві ці кількості, очевидно, діляться на 3, тому і n ділиться на 3.

Вправа 10.3. Площина розбита на однакові шестикутні кімнати. В деяких стінах зроблені двері так, що для будь-якої вершини, в якій сходяться три стіни (сторони шестикутників) двері є точно в двох. Доведіть, що будь-який замкнений шлях цим лабіринтом проходить через парну кількість дверей.

Тепер наведемо приклад, коли нам допомагає розфарбування не в два кольори, а в декілька кольорів.

Задача 10.4. На папері в клітинку задано довільні n клітинок. Доведіть, що з них можна вибрати не менше $\frac{n}{4}$ клітинок, що не мають спільних точок.

Розв'язання. Розфарбуємо клітинки в 4 кольори, як показано на мал. 14. Серед n клітинок знайдуться не менше $\frac{n}{4}$ однокольорових, а однокольорові клітинки не перетинаються.



мал. 14

Вправа 10.4. Чи можна шашкову дошку розмірами 10×10 закласти плитками розмірами 1×4?

Вправи

10.5. Куб розбито на 27 однакових кубиків. У початковий момент жук знаходиться в центральному кубику. З кожного кубика жук може переходити до сусіднього, що має з ним спільну грань. Чи зможе жук обійти всі кубики, побувавши в кожному по одному разу?

10.6. Дно прямокутної коробки викладено плитками розмірами 2×2 та 1×4. Плитки висипали з коробки і загубили одну плитку розмірами 2×2. Замість неї дістали плитку розмірами 1×4. Доведіть, що викласти дно коробки плитками тепер не вдасться.

10.7. Король обійшов дошку розмірами 9×9, побувавши точно один раз на кожному полі. Маршрут короля не замкнений і, можливо, самоперетинається. Яка найбільша можлива довжина такого маршруту, якщо довжина ходу по діагоналі дорівнює $\sqrt{2}$, по вертикалі або горизонталі – 1?

10.8. Правильний трикутник із стороною n розбито прямими, паралельними сторонам трикутника, на n^2 правильних трикутників із стороною 1. По сторонах отриманих трикутників проведена незамкнена ламана, що проходить через всі вершини трикутників точно по одному разу. Доведіть, що не менше n пар сусідніх ланок ламаної утворюють між собою гострий кут.

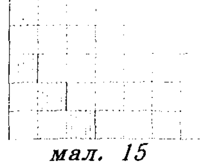
Розв'язки та вказівки

10.1. Нехай клітини дошки пофарбовано у білий та чорний кольори у шаховому порядку так, що чорних клітин 13 а білих 12. Оскільки при переповзанні жук змінює колір клітини, на якій він розташований, одна чорна клітина обов'язково буде вільною.

10.2. Позначимо команди точками на площині. Команди, що зіграли між собою у першому турі, з'єднаємо червоними відрізками, що зіграли у другому – синіми. З кожної точки виходить два різнокольорових відрізка. Тому всі відрізки можна розбити на цикли, в яких кольори відрізків чергуються. Різні цикли не з'єднані між собою і не перетинаються. З кожного циклу візьмемо половину команд, що йдуть через одну.

10.3. Всі кімнати можна пофарбувати у два кольори так, що з'єднані дверима кімнати мають різні кольори. Для доведення спочатку якось пофарбуємо одну кімнату, потім за нашим правилом шість її сусідніх, потім – сусідні з вже пофарбованими і т.д. Оскільки людина повертається в початкову кімнату, вона парну кількість разів змінює колір кімнати.

10.4. Ні, не можна. Для розфарбування в 4 кольори, зображеного на мал. 15, плитка розмірами 1×4 покриває по одній клітинці кожного кольору. Але на дошці розмірами 10×10 не однакова кількість клітин різних кольорів.

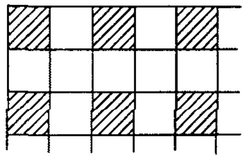


мал. 15

10.5. Нехай всі кубики пофарбовані у білий та чорний кольори у шахо–

вому порядку так, що центральний кубик – білий. Тоді у нас 13 білих кубиків та 14 чорних. Оскільки при переході жук змінює колір кубика, обійти куб він не може.

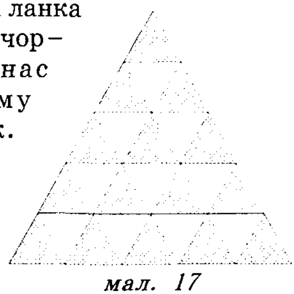
10.6. Пофарбуємо дно коробки у білий та чорний кольори, як показано на мал. 16. Тоді кожна плитка розмірами 2×2 покриває одну чорну клітину, а плитка розмірами 1×4 – 2 або 0. Парність кількості плиток розмірами 2×2 повинна співпадати з парністю кількості чорних клітин.



мал. 16

10.7. Розфарбуємо поля дошки в чорний та білий кольори у шаховому порядку. Нехай кутові поля – білі. Пофарбуємо тепер білі поля у червоний та синій колір так, щоб поля, суміжні по діагоналі, були різного кольору. Нехай кутові поля – сині. Тоді синіх полів на 9 більше, ніж червоних. Тому на шляху короля діагональних ділянок по кольорових клітинках не менше 9 (на кожній ділянці кількість червоних та синіх клітинок відрізняється не більше, ніж на одну), а ділянок по чорних клітинках не менше 8. Тому переходів з чорних клітинок на кольорові і назад не менше 16. Кожен такий перехід має довжину 1, тому загальна довжина маршрута не перевищує $16+64\sqrt{2}$. А маршрут з такою довжиною існує. Король має почати шлях з лівого нижнього кута, пройти по краю одну клітину, звернути на 135° і пройти по діагоналі до краю, ще пройти по краю одну клітину, знову повернути на 135° і пройти по краю і т. д.

10.8. Розфарбуємо трикутники у чорний та білий кольори, як показано на мал. 17. Кожна ланка ламаної проходить по стороні чорного трикутника. У нас $(n^2+3n+2)/2$ вершин, тому ламана має $(n^2+3n)/2$ ланок. Всього чорних трикутників $(n^2+n)/2$, тому не менше n з них містять по парі ланок. Ці пари ланок утворюють гострий кут.



мал. 17

§11. ІГРИ ДВОХ ОСІБ

В задачах про ігри звичайно треба відшукати виграшну стратегію для одного з учасників. Спочатку розглянемо приклади задач, де у виграшних стратегіях гравець має робити ходи, симетричні в певному сенсі ходам суперника. У наведених прикладах симетричні ходи гарантують гравцеві, що йому буде куди зробити хід. А якщо гра завершується за скінченну кількість ходів, то колись не буде куди походити іншому учаснику.

Задача 11.1. Хлопчик та дівчинка по черзі зафарбовують клітини прямокутної таблиці. За один хід треба зафарбувати дві непофарбовані клітини, які мають спільну сторону. Починає гру хлопчик, а програє той, хто не має можливості зробити хід. Хто переможе при правильній грі, якщо таблиця має розміри:

а) 1990×1992;

б) 1991×1992?

Розв'язання.

а) Переможе хлопчик. Після кожного ходу дівчинки йому треба зафарбувати ту пару клітинок, яка центрально – симетрична відносно центра прямокутника клітинкам, тільки що зафарбованих дівчинкою. Простіше кажучи, ходи хлопчика повинні бути центрально–симетричні ходам дівчинки. Клітинки для такого ходу хлопчика завжди будуть чистими. Адже після кожного ходу хлопчика набір непофарбованих клітинок буде мати центр симетрії – центр прямокутника. І якщо дівчинка обере для свого ходу якісь дві чисті клітинки, то чистими будуть і клітинки для ходу хлопчика. Оскільки загальна кількість клітинок скінченна, гра колись скінчиться, а програти може лише дівчинка. Для стратегії хлопчика важливим буде те, що центр прямокутника лежить у вершині клітинки.

б) Виграє дівчинка. Для прямокутника 1991×1992 центр симетрії лежить всередині спільної сторони двох клітинок, і першим ходом дівчинці треба зафарбувати ці дві клітинки.

Далі вона повинна робити ходи, центрально-симетричні ходам хлопчика відносно центра прямокутника.

Вправа 11.1. Двоє гравців по черзі кладуть п'ятикопійчані монети на прямокутний стіл. Монети повинні повністю вміщуватися на столі і не торкатися одна одної. Той, кому нікуди покласти монету, програє. Хто переможе при правильній грі – той, що ходить першим, чи той, хто другим?

Задача 11.2. Прямокутна плитка шоколаду розбита 4 повздовжніми та 9 поперечними заглибленнями на $5\times10=50$ квадратних частин. Починаючий гру розламує плитку по деякому заглибленню на дві прямокутні частини. Двоє гравців по черзі одну із отриманих частин по заглибленню ділять на дві прямокутні частини. Хто виграє при правильній грі, якщо той, хто відламає частину розмірами 1×1:

а) програє;

б) виграє.

Розв'язання. В обох випадках перемагає починаючий, і першим своїм ходом він має розламати плитку на дві частини розмірами 5×5. У варіанті а) на кожний хід другого на одній половині плитки першому треба зробити такий же хід на іншій. Очевидно, що частину розмірами 1×1 раніше отримає другий гравець. У варіанті б) перший гравець дублює ходи другого на іншій половині плитки, поки другий не відламає якусь частину розмірами $1\times n$. Тоді з цієї частини перший отримує частину розмірами 1×1.

Вправа 11.2. На площині відмічено 1992 точки – вершини правильного 1992-кутника. Двоє гравців по черзі з'єднують точки відрізками. При цьому кожна точка не може бути вершиною більш ніж одного відрізка і відрізки не повинні перетинатися. Програє той, хто не може зробити черговий хід. Хто виграє при правильній грі?

Інколи до виграшу приводить стратегія такого типу – вся множина можливих ходів розбивається на пари, і, якщо один гравець вибирає елементи якоїсь пари, другий гравець тут же вибирає собі інший елемент цієї пари. Так другий гравець забезпечує собі можливість завжди зробити хід.

Розглянемо відповідний приклад.

Задача 11.3. Шашка стоїть у куті шахової дошки розмірами 8×8. Двоє гравців по черзі пересовують її на сусіднє поле (поля сусідні, якщо вони мають спільну сторону). Другий раз ходити на поле, де шашка вже побувала, не можна. Той, кому нікуди ходити, програє. Хто переможе при правильній грі?

Розв'язання. Переможе гравець, який ходить першим. Розіб'ємо довільним способом всю дошку на прямокутники розмірами 1×2. Першому завжди треба ходити так: якщо шашка стоїть на одній клітинці прямокутника, йому треба пересунути шашку на іншу клітинку цього ж прямокутника. Тоді переходити на інший прямокутник завжди треба іншому гравцеві, і в першого буде можливість ходити.

Вправа 11.3. Хто виграє у грі, описаній в попередній задачі, якщо розміри дошки 9×9?

Вправа 11.4. На смузі $1\times n$ n полів занумеровані числами 1, 2, ... n. На полях з номерами $n-2$, $n-1$, n стоять по одній шашці. Двоє гравців по черзі переносять одну із шашок на будь-яке вільне поле з меншим номером. Програє той, хто не може походити. Хто виграє при правильній грі?

В іграх з числами або кількостями часто гравцю треба дотримуватися такої стратегії, щоб після кожного його ходу залишалось число або кількість з наперед обраною властивістю. Пояснимо це прикладами.

Задача 11.4. У купі 1991 сірник. Двоє гравців беруть по черзі сірники – від 1 до 9. Виграє той, хто забере останній сірник. Хто виграє при правильній грі?

Розв'язання. Виграє гравець, який ходить першим. Спочатку йому треба взяти 1 сірник, а потім після кожного взяття другим k сірників йому треба брати $10-k$ сірників. Кількості сірників, кратні 10 (в тому числі 0), будуть лишатися лише після ходів першого.

Вправа 11.5. У купі 19 911 991 сірників. Двоє гравців по черзі беруть сірники, причому кожний може взяти p^n сірників (p – будь-яке просте число. $n=0$, 1, 2, ...). Хто може забезпечити собі можливість забрати останній сірник?

Задача 11.5. На дошці написано число 2. Кожний із двох гравців замінює написане число n на число $n+d$, де d – довільний дільник числа n, менший за n. Програє той, хто напише число, більше за 19 911 991. Хто виграє при правильній грі?

Розв'язання. Виграє той, хто ходить першим. Кожного разу він додає 1, і на дошці з'являється непарне число. Збільшуючи кожного разу парне число на 1, перший ніяк не перевершить непарне число 19 911 991 раніше за другого.

Вправа 11.6. Дано купу із $2^{1991}-1$ сірників. Двоє гравців по черзі роблять такі ходи – всі купи, в яких більше одного сірника, ділять на якісь дві менші купи. Перемагає той, хто залишить купи по одному сірнику в кожній. Хто з гравців має переможну стратегію?

Зрозуміло, що наведені приклади лише частково відображають можливі шляхи побудови виграшних стратегій. Розв'язування задач про ігри буває дуже різноманітним. Деякою мірою читач може це побачити і після розв'язування вправ, запропонованих у кінці цього параграфу.

Вправи

11.7. Два хлопчики по черзі пишуть k-значне число: першу цифру пише перший, другу другий, третю – знову перший і т.д. Чи може другий хлопчик добитися того, щоб отримане число ділилося на 9, якщо перший заважає йому це зробити?

11.8. Двоє грають в шашки на дошці розмірами 8×8. При цьому забороняється бити шашки суперника та перетворювати шашки в дамки. Програє той, хто не може зробити хід. Хто переможе при правильній грі?

11.9. В одній купі n сірників, а в другій – m. Двоє гравців по черзі беруть сірники. Кожний може взяти будь-яку кількість, але тільки з однієї купки. Перемагає той, хто забирає останні сірники. Хто виграє при правильній грі?

11.10. Сходи мають $2n+1$ сходинок. На n нижніх сходинках лежать по одному каменю. Двоє гравців по черзі перекладають камені. Перший може перекласти будь-який камінь вгору на найближчу до нього вільну сходинку, а другий – перекласти будь-який камінь на одну сходинку вниз, якщо вона вільна. Мета першого гравця – покласти камінь на найвищу сходинку. Чи може другий йому завадити?

11.11. Кожній вершині куба поставлено у відповідність невід'ємне число, причому сума всіх цих чисел дорівнює 1. Перший гравець обирає довільну грань куба, другий обирає другу грань і, нарешті, перший обирає третю грань. При цьому обирати грані, паралельні вже обраним, не можна. Доведіть, що перший гравець може грати так, щоб число, яке відповідає спільній вершині трьох обраних граней, не перевищувало $\frac{1}{6}$.

Розв'язки та вказівки

11.1. Виграє той, хто ходить першим. Йому треба першу монету покласти в центр стола, а потім класти монети симетрично ходам другого відносно центра стола.

11.2. Виграє починаючий. Першим ходом він з'єднує протилежні вершини, а потім ходить симетрично ходам другого відносно цієї діагоналі.

11.3. Виграє той, хто ходить другим. Треба розбити на прямокутники розмірами 1×2 всю дошку, крім кутової клітинки, де стоїть шашка. Перший буде заходити в новий прямокутник, а другому треба переходити в другу клітинку цього прямокутника.

11.4. Виграє той, хто починає. Всі числа, більші за 1, розіб'ємо на пари (2, 3), (4, 5) і т.д. При непарному n

починаючий першим ходом переносить шашку з $n-2$ на 1. Якщо другий гравець ставить іншу шашку на якесь число, то перший ставить третю шашку на вільне число цієї ж пари. При парному числі n, той хто починає ставить на 1 шашку з поля за номером n.

11.5. Виграє той, хто починає. Він може брати 1, 2, 3, 4 або 5 сірників так, що після його і тільки після його ходів буде залишатися кількість сірників, кратна 6.

11.6. Виграє той, хто ходить другим. Йому треба ходити так, щоб після його ходів кількість сірників у найбільшій купі мала вигляд 2^n-1, де n – довілне натуральне число.

11.7. При парному числі k другий хлопчик зможе добитися потрібного результату, а при непарному – ні. Той, хто пише останню цифру, може цим добитися будь-якої остачі від ділення числа на 9.

11.8. Переможе той, хто ходить другим. Йому треба робити ходи, симетричні ходам партнера, відносно центру дошки.

11.9. При $m \neq n$ виграє той, хто починає. Кожним своїм ходом він може зрівнювати кількості сірників у купках. При $n=m$, дотримуючись такої стратегії, переможе другий.

11.10. Так, другий може завадити першому. Другому треба завжди класти камінь на сходинку, що звільнилася після ходу першого (він завжди може це зробити). Тоді після ходу другого не буде між каменями дві вільні сходинки підряд, і нижня сходинка завжди буде зайнята. Оскільки сходинок $2n+1$, а каменів n, перед ходом першого дві верхні сходинки будуть вільні.

11.11. Серед восьми чисел знайдуться три числа, не більші за $\frac{1}{6}$, причому два з них будуть лежати в кінцях діагоналі одної із граней. Цю грань і треба вибрати першому гравцю на початку гри.

§12. КОМБІНАТОРИКА В ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧАХ

При розв'язуванні деяких задач буває необхідним підрахувати кількість різних комбінацій предметів, чисел або фігур. Часто лише після такого підрахування ми можемо застосувати принцип Діріхле. Галузь математики, що вивчає способи підрахування різних комбінацій, називається ***комбінаторикою***.

Основним правилом комбінаторики (або ***правилом множення***) називають таке твердження: якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами і так далі до k-ї дії, яку можна виконати n_k способами, то всі K дій одну за другою можна виконати $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ способами. Наведемо приклад.

Задача 12.1. З Києва до Харкова можна дістатися поїздом, автобусом або літаком; з Харкова до Запоріжжя – поїздом або автобусом. Скількома способами можна здійснити подорож за маршрутом Київ – Харків – Запоріжжя?

Розв'язання. Поїзку з Києва до Харкова можемо здійснити трьома способами, з Харкова до Запоріжжя – двома. За правилом множення маємо $3 \times 2 = 6$ способів. Тут їх неважко перерахувати: поїзд – поїзд, поїзд – автобус, автобус – поїзд, автобус – автобус, літак – поїзд, літак – автобус.

Вправа 12.1. Між Києвом та Запоріжжям курсують поїзд, автобус, літак та теплохід. Скількома способами можна виїхати з Києва, відвідати Харків та Запоріжжя (в деякому порядку) та повернутися до Києва?

Нехай в нас є n різних предметів. Розглянемо кількість їх перестановок (тобто їх розташувань в різних порядках). На перше місце ми можемо поставити будь-який з n предметів. На друге – будь-який з $(n-1)$ предмету, що залишилися. Для третього місця лишиться $(n-2)$ варіантів, і т.д. За правилом множення маємо $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ способів. Добуток всіх натуральних чисел, що не перевищують n, прийнято позначати через $n!$. Таким чином, маємо $n!$ перестановок. Відмітимо, що вважається $0!=1!=1$.

Задача 12.2. а) Скількома способами можна розставити на шаховій дошці розмірами 8×8 вісім однакових тур так, щоб вони не били одна одну?

б) Те ж питання для 8 різнокольорових тур.

Розв'язання. а) На дошці на кожній вертикалі має стояти одна тура. Спочатку на першу вертикаль ми можемо поставити туру в будь-яке з восьми положень. Для тури на другій вертикалі залишається сім положень, на третій – шість і т.д. Таким чином, маємо $8!$ способів.

б) В цьому випадку для нас, наприклад, будуть різними розміщення, коли синя тура стоїть на полі $a1$, а червона на $b2$ і коли синя на $b2$, а червона на $a1$. Тому для кожного набору з 8 клітин дошки, на яких можуть стояти тури, маємо $8!$ перестановок тур по цих клітинах. Отже, маємо $(8!)^2$ способів.

Вправа 12.2. Клітини шахової дошки розміром $n\times n$, де n – парне число більше 2, пофарбовані $n^2/2$ фарбами так, що кожною фарбою пофарбовані точно дві клітини. Довести, що на дошці можна розставити n тур так, щоб вони стояли на клітинах різного кольору та не били одна одну.

Підрахуємо, скількома способами ми можемо з n різних предметів вибрати k предметів, $n\geqslant k\geqslant 1$. Перший предмет ми можемо вибрати n способами, другий – $(n-1)$ способом, ..., k-тий – $(n-k+1)$ способом. Але при цьому для кожного набору з k предметів ми окремо врахуємо кожну його перестановку, тобто кожний набір врахуємо $k!$ разів. Таким чином,

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(через C_n^k позначається кількість сполучень по k предметів з n). Зокрема, з n предметів виділити два можна $\big(n(n-1)\big)/2$ способами.

Вправа 12.3. Дано прямокутну дошку.

а) Її розміри 4×7, а клітини пофарбовані у чорний або білий кольори у довільному порядку.

б) Її розміри 12×12, а клітини пофарбовані у чорний, білий або червоний кольори у довільному порядку.

Довести, що на дошці обов'язково знайдеться прямокутник, утворений горизонтальними та вертикальними лініями дошки, всі кутові клітини якого мають одинаковий колір. (Порівняйте з вправою 2.11 а)).

Задача 12.3. У правильному дев'ятикутнику всі вершини пофарбовано в білий або чорний колір. Довести, що існують два однакових трикутника, вершини яких пофарбовано одним кольором.

Розв'язання. Серед дев'яти вершин знайдуться п'ять, які пофарбовані одним кольором (нехай білим). Ці п'ять вершин утворюють $C_5^3=10$ різних трикутників. Поворотами відносно центра дев'ятикутника на кути $\frac{K}{9}\cdot 360^\circ$, $0\leqslant K\leqslant 8$, з них ми можемо отримати 90 трикутників. Серед них будуть однакові, оскільки всього 9 вершин утворюють C_9^3 = 84 трикутники. Отже, якісь два білих трикутники при деяких поворотах попадають на один трикутник. Вони будуть задовольняти умові задачі.

Вправа 12.4. В сенаті 30 сенаторів. Кожні двоє – або друзі, або вороги. Кожний сенатор має точно 6 ворогів. Кожні три сенатори утворюють комісію. Знайти загальне число таких комісій, в яких всі троє попарно дружать або всі троє попарно ворогують.

Для множини з n елементів знайдемо кількість різних підмножин даної множини (враховуючи порожню множину як підмножину). Наприклад, для множини з двох елементів $\{0,1\}$ таких підмножин буде чотири: $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0,1\}$. Користуючись математичною індукцією, доведемо, що в n–елементної множини завжди є 2^n підмножин. При n=0 або

$n=1$ легко пересвідчитись, що база індукції має місце. Нехай наше твердження вірне для деякого n і доведемо його справедливість для $n+1$. Але ж серед підмножин множини $\{1, 2, ..., n+1\}$ буде 2^n підмножин таких, що є підмножинами $\{1, 2, ..., n\}$ (за припущенням індукції). Ще буде 2^n підмножин таких, в яких обов'язково є $n+1$ (адже відкинувши цей елемент, ми отримаємо якусь підмножину множини $\{1, 2, ..., n\}$). Всього маємо 2^{n+1} підмножин.

Задача 12.4. 2^n простих чисел записано в рядок. Відомо, що серед них менше, ніж n різних. Довести, що серед них можна вибрати групу чисел таких, що стоять поруч і добуток яких є повний квадрат.

Розв'язання. Нехай серед цих чисел буде m різних, $m<n$. Для кожного i, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, розглянемо групу чисел, що займають місця з першого по i–те. Виділимо ті прості числа, що зустрічаються в ній непарне число разів. Це буде деяка підмножина m – елементної множини. В нас існує 2^m різних підмножин, і, оскільки $2^m<2^n$, для деяких i_1 та i_2 $(i_1<i_2)$ ці підмножини співпадуть. Тоді набір чисел, що стоять з i_1+1 по i_2 місця буде шуканим (кожне просте число зустрінеться в ньому парне число разів).

Вправа 12.5. Дано 1991 натуральне число. Їх добуток має 1990 простих дільників. Довести, що одне з цих чисел або добуток деяких з них є квадратом натурального числа.

Нагадаємо, що олімпіадні задачі цікаві своєю оригінальністю. Часто буває, що задача про кількість певних елементів розв'язується не з допомогою наведених вище формул і тверджень, а деякими міркуваннями. Наведемо лише один приклад.

Задача 12.5: Дано опуклий 1991–кутник f та точку M всередині нього, що не належить жодній з діагоналей f. Розглянемо чотирикутники, вершини яких обираються з вершин f і які містять точку M. Довести, що їх кількість ділиться на 1988.

Розв'язання. Розглянемо деякий трикутник, вершини якого є вершинами f і який містить точку M. В f зали–

шилося 1988 вершин, і, яку б з них ми не додали до трьох обраних, отриманий чотирикутник буде містити M. Так кожному такому трикутнику відповідають 1988 чотирикутників. При такому підрахунку будуть взяті по два рази всі потрібні чотирикутники (подумайте чому?). Тому їх кількість ділиться на 1988.

Вправа 12.6. Для натуральних n та k, $n \geqslant k$, позначимо через $P_n^{(k)}$ кількість розбиттів числа n на k натуральних доданків. Розбиття, що відрізняються лише порядком доданків, вважаємо однаковими. Наприклад, $P_4^{(2)}=2$, оскільки $4=1+3$ та $4=2+2$. Довести, що для $n \geqslant 2k$ $P_n^{(k)} = P_{n-1}^{(k-1)} + P_{n-k}^{(k)}$.

Вправи

12.7. Довести, що в кожному дев'ятикутнику існують дві діагоналі, кут між якими менший за 7°.

12.8. Мова племені Абба використовує дві букви. Відомо, що ніяке слово цієї мови не є початком іншого слова. Чи може словник мови цього племені містити 3 чотирибуквених, 10 п'ятибуквених, 30 шестибуквених та 5 семибуквених слів?

12.9. Довести, що в будь-якій групі з 12 чоловік можна вибрати двох, а серед 10, що залишилися, ще п'ятьох так, щоб кожний з них задовольняв умові: або він знайомий з обома обраними спочатку, або не знайомий з жодним з них.

12.10. На площині проведено 3000 прямих. Ніякі дві з них не паралельні, ніякі три не перетинаються в одній точці. Цими прямими площина розрізана на частини. Довести, що серед цих частин буде трикутників не менше а) 1000; б) 2000;

12.11. Довести, що існує нескінченна кількість чисел B, для яких рівняння $[x^{3/2}]+[y^{3/2}]=B$ має не меншне 1991 розв'язку в натуральних числах x, y ($[z]$ позначає найбільше ціле число, що не перевищує z).

12.12. Дано нескінченний лист паперу в клітинку. Довести, що для будь-якого натурального n існує многокутник (не обов'язково опуклий), сторони якого йдуть по сторонах клітинок і який можна розрізати на прямокутники розмірами 2×1 точно n різними способами. (Наприклад, квадрат розмірами 2×2 можна розрізати двома способами).

Розв'язки та вказівки

12.1. $3\cdot2\cdot4+4\cdot2\cdot3=48$ способів.

12.2. Кількість довільних розстановок однакових тур, які не б'ють одна одну, дорівнює $n!$ Кількість таких розстановок, при яких дві тури стоять на клітинах однакового кольору, не більша $\left(\frac{n^2}{2}\right)(n-2)!$ (маємо не більше $\frac{n^2}{2}$ варіантів вибору пари однокольорових клітин для двох тур та $(n-2)!$ розстановок $(n-2)$ тур, що залишилися). Легко бачити, що $\left(\frac{n^2}{2}\right)(n-2)!<n!$ для $n>2$.

12.3. а) У кожному стовпчику з чотирьох клітин буде не менше двох пар однокольорових клітин. В семи стовпчиках маємо не менше 14 таких пар, з них не менше 7 пар будуть одного кольору. Оскільки маємо 6 варіантів вибору двох клітин з чотирьох, якісь дві пари будуть розташовані однаково.

б) Існує колір, яким пофарбовно не менше 48 клітин, нехай a_j – кількість клітин цього кольору в j-му стовпчику, $1\leqslant j\leqslant12$. Сума кількостей пар клітин цього кольору по всіх стовпчиках дорівнює

$$\frac{a_1(a_1-1)}{2}+\ldots+\frac{a_{12}(a_{12}-1)}{2}=\frac{1}{2}\left(a_1^2+\ldots+a_{12}^2\right)-\frac{1}{2}\left(a_1+\ldots+a_{12}\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{2\cdot12}\left(a_1+\ldots+a_{12}\right)^2-\frac{1}{2}\left(a_1+\ldots+a_{12}\right)\geq\frac{48^2}{2\cdot12}-\frac{48}{2}=72.$$

Оскільки $C_{12}^2 = 66$, то знайдуться дві однаково розташовані пари.

12.4. Нехай x – кількість потрібних комісій, y – всіх інших. Тоді $x+y=C_{30}^3=4060$. Якщо кожний сенатор напише список його комісій, в яких обидва інших члена – його вороги або обидва – його друзі, то кожний напише $C_6^2+C_{23}^2=268$ комісій. Кожна потрібна нам комісія в цих списках зустрінеться тричі, інші – по разу. Звідси $3x+y=30\cdot268=8040$. З двох отриманих рівнянь маємо $x=1990$ (задача пропонувалась на Всесоюзній олімпіаді 1990 року).

12.5. Для кожного набору з даних чисел виділимо прості числа, що присутні в їх добутку в непарних степенях. Наборів з даних чисел є 2^{1991}, наборів простих дільників 2^{1990}. З двох наборів чисел, що мають однакові такі набори дільників, викинемо спільні числа. Добуток інших буде повним квадратом.

12.6. $P_{n-1}^{(k-1)}$ дорівнює числу розбиттів n на k доданків, серед яких є одиниця(відкинувши її, маємо розбиття $n-1$ на $k-1$ доданок). $P_{n-k}^{(k)}$ дорівнює кількості розбиттів n на k доданків, не менших двох (віднявши від кожного одиницю, отримаємо розбиття $n-k$ на k доданків).

12.7. У дев'ятикутнику $\dfrac{9\cdot6}{2}=27$ діагоналей, $\dfrac{180^\circ}{27}<7^\circ$.

12.8. Ні, не може. Існує $2^7=128$ слів довжини 7. Серед них неможливими будуть $3\cdot2^3+10\cdot2^2+30\cdot2=124$ слова.

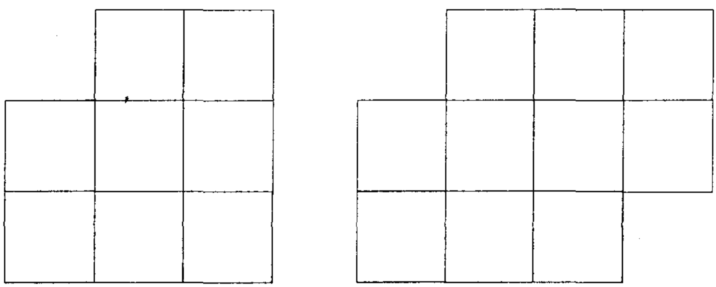
12.9. Доводимо від супротивного. Для кожної пари людей A, B розглянемо інших людей C_1, ..., C_k, що знають точно одного в цій парі, $K\geqslant6$. Кількість трійок $\{A, B, C_i\}$ $N\geqslant C_{12}^2\cdot6=396$. З іншого боку, якщо в C_i n знайомих, то для нього кількість способів вибору пари $\{A, B\}$ дорівнює $n(11-n)\leqslant30$. Тому $N\leqslant12\cdot30=360$. Прийшли до суперечності.

12.10. а) Для кожної з 3000 прямих розглянемо найближчу до неї точку перетину двох інших прямих. Це обов'язково буде вершина трикутника, що примикає до нашої прямої. Кожний такий трикутник при підрахунку може бути врахований не більше, ніж три рази.

б) Легко довести, що не більше, ніж для двох прямих всі точки перетинів лежать по один бік кожної з них. Взявши для них по одній найближчій точці, а для інших 2998 прямих по найближчій точці з кожного боку, отримаємо не менше $\frac{1}{3}\cdot 5958$ трикутників.

12.11. Кожна з n^2 пар натуральних чисел (x, y), де $1 \leqslant x \leqslant n$, $1 \leqslant y \leqslant n$, буде розв'язком деякого рівняння $\left[x^{3/2}\right]+\left[y^{3/2}\right]=C$ $\left(1 \le C \le 2\left[n^{3/2}\right]\right)$. Якщо при будь-якому C маємо не більше M розв'язків, то $2\left[n^{3/2}\right]M \ge n^2$, або $M \ge \frac{\sqrt{n}}{2}$.

12.12. Для $n=1$; 2; 3 можемо взяти прямокутники розмірами 1×2, 2×2, 2×3 відповідно. Для $n=4$; 5 фігури зображені на малюнку 19. І надалі, приставляючи до правої верхньої вершини многокутника прямокутники розмірами 1×2 по черзі горизонтально та вертикально, кожного разу кількість розбиттів збільшуємо на одиницю. Це твердження доводиться методом математичної індукції.



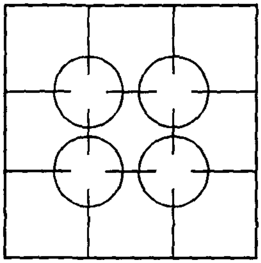
мал. 19

РОЗДІЛ II
УМОВИ ЗАДАЧ ОБЛАСНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

§1. ЗАДАЧІ ДЛЯ СЬОМОГО КЛАСУ

1. Знайти найменше натуральне число, сума цифр якого дорівнює 1982.
2. Треба поділити 7 яблук на 12 чоловік порівну, розрізуючи кожне яблуко не більше, ніж на 5 частин. Як це зробити?
3. Для яких двоцифрових чисел сума куба цифри одиниць і квадрата цифри десятків дорівнює самому числу?
4. У черзі в шкільному буфеті стоять Юра, Коля, Володя, Саша та Олег. Юра стоїть перед Колею, але після Олега. Володя і Олег не стоять поруч, а Саша не знаходиться поруч ні з Олегом, ні з Юрою, ні з Володею. В якому порядку стоять хлопчики?
5. Прямокутник розрізується на два многокутники. Потім один з них знову розрізується на дві частини і т.д. Операція розрізування многокутників повторюється 661 раз. Після останнього розрізування підрахунок показав, що одержані многокутники містять всього 1983 вершини (вершина кожного многокутника рахується окремо). Чи вірно зроблено підрахунок?
6. У мене в трьох коробках лежать цвяхи, гвинти і гайки. На кришці кожної коробки було написано, що в ній лежить. Одного разу мій молодший братик переставив кришки коробок так, що надписи на них перестали відповідати вмістові коробок. Чи можна, відкривши одну з коробок, визначити, що лежить в кожній коробці?
7. Чи можна розрізати квадрат на 6 менших квадратів? На 10 менших квадратів? На 13? (квадрати не обов'язково рівні між собою).

8. Сума 1984 цілих чисел непарна. Довести, що добуток цих чисел – парне число.



9. У клітках квадрата 3×3 (див. малюнок) розмістили числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Потім в кожному колі записали середнє арифметичне оточуючих його чотирьох чисел. Після цього обчислити середнє арифметичне одержаних в колах чотирьох чисел. Яке найбільше число можна при цьому одержати залежно від розміщення чисел в клітках?

10. На прямій взяли декілька точок. Потім між кожними двома сусідніми точками взяли ще по одній точці, і так декілька разів. Доведіть, що після кожної такої операції загальне число точок буде непарним.

11. У записі натурального числа K використовуються тільки одиниці і двійки, причому одиниць в 4 рази більше, ніж двійок. Довести, що число $K+1983$ складене.

12. Квадрат деякого натурального числа записується цифрами 0,2,3,5 (кожна цифра входить до запису квадрата числа тільки один раз). Знайти це число.

13. Є 5 аркушів паперу. Деякі з них розірвали на 4 частини кожен, деякі з одержаних аркушів — знову на 4 частини кожен і так декілька разів. Чи можна при цьому одержати 1984 аркуші?

14. Розмістіть 6 точок на 4 прямих так, щоб на кожній з них було 3 точки.

15. Нехай m і n — цілі числа. Довести, що коли $(1900m+93n)\cdot(1900n+93m)$ ділиться на 1993, то це число ділиться також на 1993^2.

16. Число 19 подати у вигляді різниці кубів двох натуральних чисел. Довести, що ця різниця єдина.

17. Чи існує тризначне число, яке дорівнює добуткові своїх цифр?

18. В коробці лежали сірники, їх кількість подвоїли, а потім забрали 8 сірників. Остачу сірників знову подвоїли, а потім знову забрали 8 сірників. Коли ж таку операцію провели в третій раз, то в коробці не залишилось жодного сірника. Скільки сірників було спочатку?

19. а) Продавець одержав для продажу декілька пачок конвертів по 100 конвертів в кожній. 10 конвертів він відлічує за 5 секунд. За скільки секунд він відлічить 40 конвертів? 50? 60? 90 конвертів?

б) Встановити, яке число треба поставити замість знака "?" в послідовності 7, 17, 37, 77, ?, ..., 317, ?, ...

20. До деякого двозначного числа зліва і справа приписали по одиниці. В результаті одержали число, в 23 рази більше від попереднього. Знайдіть дане число.

21. Розмістити 10 точок на 5 прямих так, щоб на кожній було по 4 точки.

22. Було 4 аркуші паперу. Деякі з них розрізали на 8 частин, потім деякі з цих частин знову розрізали на 8 частин і т.д. Коли підрахували загальну кількість аркушів, то виявилося, що їх всього 1986. Довести, що підрахунок був неправильним.

23. Дано 125 натуральних чисел, попарно не рівних між собою і менших від 1986. Довести, що серед їх попарних різниць знайдеться хоча б 5 однакових.

24. На дошці написана послідовність чисел 3, 8, 15, 24, 35,.... За яким правилом утворені ці числа? Знайти наступні два числа.

25. Чи можна розрізати квадрат розміром 6×6 на прямокутники розміром 1×4?

26. В деякій країні кожен член парламенту має в ньому не більше 3-х ворогів. Довести, що парламент можна поділити на 2 палати так, щоб кожен член парламенту мав в своїй палаті не більше одного ворога.

27. Кожен з 9 нападаючих і півзахисників київського "Динамо" забив в чемпіонаті 1986 року хоча б один гол, а всі разом — 47 голів. Довести, що хоча б двоє з них забили однакове число голів, коли відомо, що Михайличенко забив 12 голів.

28. Якщо між цифрами двозначного числа вписати це ж саме число, то одержане чотиризначне число буде більше від даного в 77 разів. Знайти це число.

29. Розмістити 9 точок на 10 прямих так, щоб на кожній прямій було по 3 точки.

30. В квадраті, що складається з 9 кліток, розмістити числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, щоб суми чисел, які стоять

в кожному вертикальному рядку, в кожному горизонтальному рядку, а також по будь-якій діагоналі, були рівні.

31. Чи можна розмістити на чотирьох полицях 245 книжок так, щоб на першій полиці було на 12 книжок більше, ніж на другій, на 17 книжок більше, ніж на третій, і на 15 книжок менше, ніж на четвертій.

32. Побудувати графік функції $y=|x|^3$.

33. Послідовність чисел будується за таким законом: на першому місці стоїть число 7, кожне наступне число — це сума цифр квадрата попереднього числа, збільшена на 1, тобто на другому місці стоїть число 14, оскільки $7^2=49$, а $4+9+1=14$, на третьому місці — число 17 і т.д. Яке число стоїть на 1989 місці?

34. Сталеву плиту розміром 73×19 обвели олівцем на папері. Знайти точку перетину діагоналей прямокутника, маючи лише цю плиту і олівець.

35. Обчисліть $\dfrac{2^{19}\cdot 27^3+15\cdot 4^9\cdot 9^4}{6^9\cdot 10^{10}+12^{10}}$.

36. На лузі паслися 90 телят і гусей. Всього в них було 256 ніг. Скільки було телят і скільки було гусей?

37. На дошці було записано трицифрове число, яке починалося цифрою 9. Юрко поцікавився, як зміниться число від перестановки першої цифри на останнє місце. Виявилося, що одержане число на 216 менше від даного. Яке число було записане на дошці?

38. Обчисліть суму $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{1987\cdot1988}$.

39. Знайти двозначне число, яке дорівнює подвоєному добутку його цифр.

40. Пасажир помітив, що поїзд, в якому він їде, пройшов мимо поїзда, що стояв (довжиною в 100 м) за 5 сек., а зустрічний поїзд довжиною в 60 м проїхав мимо вікна його поїзда за 2 сек. Знайти швидкість поїзда, в якому їхав пасажир, і швидкість зустрічного поїзда.

41. Доведіть, що дріб $\dfrac{n+1}{2n+1}$ нескоротний при всіх натуральних n.

42. Моторний човен пропливає відстань від A до B за 2 год., а від B до A — за 2 год. 30 хв. Визначити, за який час подолає цю відстань пліт, який рухає тільки течія?
43. Задайте формулою лінійну функцію, графік якої паралельний осі абсцис і проходить через точку A (2,5; −6).
44. Перша зліва цифра чотиризначного числа дорівнює 7. Якщо цю цифру переставити на останнє місце, то одержимо число, менше від даного на 864. Знайти це число.
45. Знайти найбільше тризначне число, яке при діленні на 43 дає остачу, що дорівнює частці.
46. Вологість повітря до полудня знизилась на 12% порівняно з ранком, а до вечора ще на 5% порівняно з полуднем. Скільки процентів від ранкової вологості складає вологість повітря ввечері і на скільки процентів вона знизилась?
47. Студент за 5 років навчання склав 31 екзамен. Кожного наступного року він складав більше екзаменів, ніж у попередньому. На п'ятому курсі екзаменів було втричі більше, ніж на першому. Скільки екзаменів було на четвертому курсі?
48. На скільки частин можна розділити площину чотирма прямими?
49. Володя написав на дошці $1*2*3*\ldots*9=21$, поставивши замість кожної зірочки або "плюс", або "мінус". Сашко змінив деякі знаки на протилежні, і в результаті замість числа 21 написав число 20. Доведіть, що один з хлопчиків помилився.
50. Скількома нулями можуть закінчуватись числа вигляду 9^n+1, якщо $n \in N$?
51. Квадрат із стороною 1 дм відрізками розділено на 100 рівних квадратів. Якої довжини одержимо відрізок, якщо випрямити всю сітку, утворену сторонами квадратів?
52. Розв'язати рівняння $|x| = \frac{x}{2} + 2$.
53. Довести, що будь-яке тризначне число, записане однаковими цифрами, ділиться на 37.
54. Побудувати графік функції $y=4-2|x|$.

55. Пароплави першої лінії відправляються з порту через кожних 12 днів, пароплави другої лінії відправляються з порту через кожних 28 днів. 1 січня 1991 року два пароплави обох ліній вийшли з одного і того ж порту одночасно. Знайдіть найближчий день, коли обидва пароплави знову вийдуть одночасно з порту.

56. Клоун сказав, що число кошенят, які живуть у нього, дорівнює 3/4 цього числа і ще 3/4 кошеняти. Слова про 3/4 кошеняти викликали сміх. Проте клоун сказав вірно. Скільки кошенят живе у нього?

57. Чи можуть троє чоловіків, маючи двомісний мотоцикл, подолати відстань в 60 км. за 3 години, якщо швидкість мотоцикла 50 км/год, а пішохода — 5 км/год? Відповідь пояснити.

58. Довести, що різниця двозначного числа і числа, записаного тими ж самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться на 9.

59. У похід пішло 20 осіб: чоловіки, жінки і діти. Разом вони несли вантаж в 200 кг. Кожен чоловік ніс 20 кг вантажу, кожна жінка – 5 кг, кожна дитина — 3 кг. Скільки чоловіків, скільки жінок і скільки дітей пішло в похід?

60. Знайти трицифрове число $\overline{abc}$, знаючи, що воно дорівнює $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$.

61. Після того, як пішохід пройшов 1 км і половину шляху, що залишився, йому залишилось пройти третину всього шляху і один кілометр. Чому дорівнює весь шлях?

62. Встановити, якими цифрами не закінчуються числа вигляду

1)	2)
1	1
1 +2 =...	1 +3 =...
1 +2 +3 =...	1 +3 +5 =...
1 +2 +3 +4 =...	1 +3 +5 +7 =...
... ...	... ...

63. Числова послідовність складається тільки з одиниць і нулів. Якщо викреслити всі члени, які стоять на непарних місцях, то числа, які залишились, утворюють таку ж числову послідовність. Навести приклади таких послідовностей.

64. Маємо прямокутну пластину масою в 10 г. Яким чином можна розрізати її на три частини з цілим числом грамів кожна так, щоб з їх допомогою можна було, використавши терези без важків, визначити масу будь-якого предмета в 1, 2, 3,...10 грамів?

65. Які цифри позначено буквами x, y, z, якщо добуток числа $\overline{xy}$ на число x дорівнює $\overline{zzz}$?

66. Дано чотири числа a, b, c, d, кожне з яких не дорівнює нулю. Кожне з перших трьох чисел множиться на наступне, а четверте множиться на перше. З новим набором проробляємо те ж саме. Довести, що завжди можна отримати набір з додатних чисел.

67. Знайти таке двозначне число, що куб суми його цифр дорівнює квадрату самого числа.

68. Володя записав на дошці два числа. Третє число він написав рівним сумі перших двох, четверте — сумі третього і другого і т.д. Потім Володя повідомив Саші суму шести послідовних чисел, починаючи з деякого із записаних. Сашко, взнавши суму, зразу ж визначив одне з написаних чисел. Яке це число?

69. Люда довела, що число $7^{17}+17 \cdot 3-1$ ділиться на 9. Чи можна, скориставшись цим висновком, довести, що число $7^{18}+18 \cdot 3-1$ також ділиться на 9?

70. Якщо n — натуральне число, більше за одиницю, то число 2^n-1 не може бути квадратом натурального числа. Довести.

71. Довести, що число 888...88, яке складається з 1992 вісімок, ділиться на 13.

72. Квадрат розміром 7×7 заповнений числами так, що в кожному рядку добуток чисел є від'ємним. Довести, що хоча б в одному стовпці добуток чисел також є від'ємним.

73. Скількома способами з відрізків довжиною в 7 см та 12 см можна скласти відрізок довжиною в 1 м?

74. Три ящики були заповнені горіхами. У другому ящику було на 10% горіхів більше, ніж в першому і на 30% більше, ніж в третьому. Скільки горіхів було в кожному ящику, якщо в першому було на 80 горіхів більше, ніж в третьому?

75. Знайти двозначне число, яке в 4 рази більше від суми його цифр.

76. ABC — рівносторонній трикутник. На продовженні його сторін BA, CB і AC взято відповідно такі точки K, E і D, що $AK=BE=CD=\dfrac{AB}{2}$. Чи буде трикутник DEK рівностороннім?

77. Знайти значення виразу

$x^4+0{,}39x^3-0{,}61x^2+2x-0{,}22$ при $x=0{,}61$.

78. Довести нерівність

$$\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}+\ldots+\frac{1}{2000}>\frac{1}{2}$$

79. Розв'язати рівняння $|3x-17|-x=3$.

80. Дано три різні цифри, що не дорівнюють нулеві. З них складено всі можливі тризначні числа. Довести, що їх сума ділиться на 37.

81. Чи однаковий час потрібен для поїздки на катері (із сталою швидкістю) на однакову відстань туди і назад по річці і по озеру?

82. По колу, довжина якого 100 м, рухаються два тіла. Вони зустрічаються через кожні 20 сек., рухаючись в одному і тому самому напрямі, і через кожні 4 сек., рухаючись у протилежних напрямках. Знайти швидкість кожного тіла.

83. Один із суміжних кутів у три рази більший від їх різниці. Знайдіть градусні міри цих кутів.

84. Довести, що вираз $\dfrac{10^n+8}{9}$ є натуральним числом при будь-якому натуральному n.

85. Довести, що серед 101 цілого числа можна вибрати два таких числа, різниця яких ділиться на 100.

86. Знайти найменше натуральне число, яке закінчується цифрою 6 і збільшується в чотири рази, якщо його останню цифру поставити на перше місце.

87. Поясніть, чому $2{,}6(26^n-1)$ — ціле число при будь-якому натуральному n.

88. Обчислити суму $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{1993\cdot 1994}$.

89. Всередині плоского рівнобедреного трикутника ABC з основою BC взято таку точку M, що $\angle MBC=30^\circ$, $\angle MCB=10^\circ$. Знайдіть $\angle AMC$, якщо $\angle BAC=80^\circ$.

90. У числі 12345123451234512345 закресліть 10 цифр так, щоб залишилося найбільше можливе число.

91. Відомо, що $a=-x^2$, якщо $x<0$ і $a=x^2$, якщо $x \geqslant 0$. Записати a однією формулою.

92. В мене є три відра, кожне з яких вміщує цілу кількість літрів. Якщо вилити повне перше відро води в друге, то вона займе $\frac{2}{3}$ його об'єму, а якщо вилити у третє, то вона займе $\frac{3}{4}$ його об'єму. Одного разу я наповнював бочку в 30 літрів, виливши туди послідовно перше, друге і третє відра води, але не наповнив бочки. Скільки літрів води ще треба долити?

93. Розв'яжіть математичний ребус
ЛІТО+ЛІТО=ПОЛІТ.
Однаковим літерам відповідають однакові цифри, а різним — різні.

94. Дано два баки ємністю по 10 л з соляним розчином 10% та 15% концентрації та посудини ємністю 3 л, 4 л, 5 л. Як за допомогою переливань отримати 1 л соляного розчину 12% концентрації?

95. Чи можна розмістити в таблиці розміром 3×4 числа (-1) та 1 так, щоб усі 7 сум чисел, що стоять в одному рядку або одному стовпчику були різними?

96. Скільки є нескоротних дробів з чисельником 1997, менших, ніж $\frac{1}{1997}$ і більших, ніж $\frac{1}{1998}$?

97. Дано смужку розміром 1×17, клітинки якої пронумеровані послідовними натуральними числами. Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід потрібно закреслити одну довільну клітинку в смужці або деякі дві послідовні клітинки, де перша з них має парний номер. Програє той, хто не може зробити хід. Хто може забезпечити собі виграш – починаючий чи його суперник? Вкажіть виграшну стратегію.

98. Розмістити в порожніх клітинках цілі числа так, щоб сума чисел у будь-яких трьох сусідніх клітинках дорівнювала 99:

34								32							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

(під клітинками написані їх номери)

99. Чи можна розділити 13 аркушів паперу між шістьма учнями так, щоб при цьому кожний аркуш виявився розрізаним не більше, ніж на 3 частини (або зовсім не розрізався) і кожний учень одержав однакову кількість шматочків паперу?

100. Зобразити на координатній площині множину точок $(x;\ y)$ таких, що $\begin{cases} |x-y| = x+y, \\ |x+y| = x-y. \end{cases}$

101. Знайти максимальне значення n, для якого число $N = 3\cdot 33\cdot 333\cdot\ldots\cdot\underbrace{33\ldots3}_{55}$ ділиться на 3^n.

102. Нехай $S(n)$ позначає суму цифр натурального числа n, а $S(S(n))$ – суму цифр натурального числа $S(n)$.

а) Чи існує натуральне n, для якого $n+S(n)=2000$?

б) Чи існує натуральне n, для якого $n+S(n)+S(S(n))=2000$?

Відповіді обґрунтуйте.

103. Кожну точку прямої пофарбовано синім або червоним кольором. Довести, що на цій прямій знайдуться три різні точки A, B, C, що пофарбовані одним кольором і такі, що точка C – середина відрізка AB.

104. На дошці в рядок записано 1999 натуральних чисел. Довести, що з них можна витерти одне число так, що сума чисел, які залишилися, буде парною. Чи правильно це буде для 2000 таких чисел?

105. Запишемо рівність $m-n=k$, в якій m, n, k – натуральні числа, причому m – п'ятизначне число. Довести, що в такому записі принаймні одна цифра повториться (наприклад, в записі $54321-608=53713$ повторюється цифра 5).

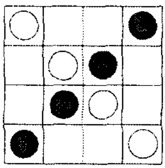
106. Вказати принаймні дві пари натуральних чисел $(m,\ n)$, що задовольняють рівняння $1999\ m^{1999}=n^{2000}$.

107. Відстань між пунктами A та B – 80 км, B та C – 300 км, C та D – 120 км, D та A – 100 км. Яка відстань між A та C?

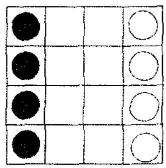
108. За допомогою якої мінімальної кількості доданків, що містять в своєму записі лише цифри 3, можна отримати в сумі число 111111?

109. У таблиці розміщено чорні та білі шашки. За один хід дозволяється пересувати дві довільні шашки одного кольору вздовж вертикалей або вздовж горизонталей в одному або протилежному напрямках на одну клітинку. Чи можна за скінчену кількість ходів:

а) з таблиці 1 утворити таблицю 2?

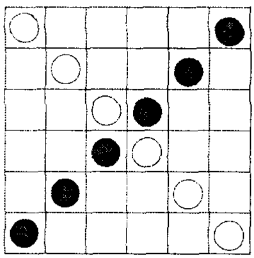


таблиця 1

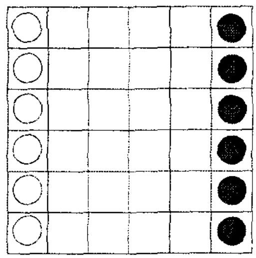


таблиця 2

б) з таблиці 3 утворити таблицю 4?



таблиця 3



таблиця 4

110. а) Чи можна числа 1, 2, 3, ..., 15 розбити на дві групи так, щоб суми квадратів чисел у групах були рівними?

б) Чи можна зробити те ж саме для чисел 1, 2, 3, ..., 1999?

111. На яку найбільшу кількість нулів може закінчуватись добуток трьох натуральних чисел, якщо їх сума дорівнює 407?

112. У кожну клітинку таблиці 3×3 записали по одному додатному числу. Добуток чисел в кожному рядку і в кожному стовпчику дорівнює 1, а добуток чисел в кожному квадраті 2×2 дорівнює 2. Яке число стоїть в центрі таблиці?

113. Дорогою йшла група людей. Більше $1/3$ із них звернули праворуч, більше 30% – ліворуч, а всі інші, яких було більше $4/11$ із них, – повернулись і пішли у зворотному напрямку. Доведіть, що у групі було не менше ніж 173 людини.

114. Із дошки розміром 8×8 по клітинках вирізали 12 прямокутників розмірами 1×2. Чи обов'язково із тієї частини дошки, що залишилась, можна по клітинках вирізати прямокутник розмірами 1×3?

115. Сто піратів переносили з корабля на берег скрині з коштовностями. Кожну скриню несли семеро піратів. Капітан вважає, що під час перенесення всі пірати заробили порівну, бо кожний пірат брав участь в перенесенні 65 скринь. Доведіть, що капітан помилився.

116. Розв'яжіть рівняння $\left|\left|4|x|-3\right|-2\right|=3$.

117. Із селища A до селища B виїхав велосипедист, а через 15 хвилин услід за ним виїхав автомобіль (велосипедист та автомобіль рухаються зі сталими швидкостями). Рівно на половині шляху від A до B автомобіль наздогнав велосипедиста. Коли автомобіль прибув до селища B, велосипедисту залишалося проїхати ще третину шляху. За який час велосипедист подолав шлях від селища A до селища B?

118. Дано прямокутний трикутник ABC ($\angle A=45^\circ$, $\angle C=90^\circ$), на сторонах AC і AB якого обрано такі точки D і E відповідно, що $BD=AD$ і $CB=CE$. Нехай відрізки BD і CE перетинаються в точці O. Доведіть, що $\angle DOE=90^\circ$.

119. Три учні, котрі відвідували заняття математичного гуртка, на перерві вирішили пограти в "слова". Кожен з них записав по 50 різних слів. А потім слова, які зустрічалися принаймні у двох з цих учнів, було викреслено. Після цього у першого учня залишилося 23 слова, у другого – 32 слова, а у третього учня – 26 слів. Коли вчитель математики дізнався про це, то він сказав дітям, що хоча б одне слово було записаним у всіх трьох учнів. Як вчитель зумів зробити такий висновок?

120. Петрик вибрав три різні цифри a, b, c ($a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$) і записав усі можливі різні тризначні натуральні числа, десятковий запис кожного з котрих містить усі три вибрані цифри, але не може починатися з нуля. З'ясувалося, що сума всіх записаних чисел дорівнює 3376. Визначте, які саме цифри були вибрані і доведіть, що інших варіантів немає.

§2. ЗАДАЧІ ДЛЯ ВОСЬМОГО КЛАСУ

1. Чи можна всі 10 цифр розмістити по колу так, щоб сума довільних трьох з них, які йдуть підряд, не перевищувала: а) 13; б) 14; в) 15?
2. Чи існує трикутник, довжини двох висот якого менші від 1 см, а площа дорівнює 4000 см^2?
3. На площині дано три точки. Скільки можна побудувати паралелограмів з вершинами в цих точках?
4. Одного разу при грі в доміно, коли всі "карти" вже були викладені в ланцюжок, на одному кінці опинилася "шістка", а на другому кінці — "п'ятірка". Чи може таке бути при дотриманні правил гри в доміно?
5. Довести, що коли два кола мають єдину спільну точку, то вони дотикаються в ній.
6. Довести, що площа рівнобедреної трапеції, діагоналі якої перпендикулярні, дорівнює квадрату її висоти.
7. Чи має цілі розв'язки рівняння $x^2-y^2=1982$?
8. У магазин привезли борошно у 4 мішках. У першому, другому і третьому мішках разом не менше 60 кг борошна, у першому, другому і четвертому разом — не більше 50 кг, в першому, третьому і четвертому разом — не більше 40 кг, а в другому, третьому і четвертому разом — не більше 30 кг. Скільки борошна у кожному мішку?
9. Чи можна з 36 сірників, не ламаючи їх, скласти прямокутний трикутник?
10. Побудувати графік функції $y=3x+|5x-10|$.
11. Побудувати трикутник, знаючи середини двох його сторін і точку перетину медіан.
12. Батько в 5 разів старший за сина. Батько закінчив інститут у 22 роки. З тих пір пройшов час, що дорівнює половині того, який потрібен синові, щоб йому стало теж 22 роки. Скільки років зараз синові і скільки — батькові?
13. Висота та медіана трикутника, що проведені з однієї вершини, ділять кут трикутника на три рівні частини. Довести, що цей кут прямий.

14. Знайти двозначне додатне число, яке дорівнює квадрату числа його одиниць, доданому до кубу числа його десятків.

15. У колі радіуса R проведено два перпендикулярні діаметри. Довести, що відстань між проекціями будь-якої точки кола на ці діаметри є величина стала і не залежить від положення точки на колі.

16. Довести, що для будь-яких чисел виконується нерівність $x^2-2xy+1989y^2\geqslant 0$.

17. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2-xy+y^2=x^3. \end{cases}$

18. Побудувати трикутник за серединами двох його сторін і основою висоти, проведеної до третьої сторони.

19. Довести, що число $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ є раціональним.

20. Побудувати графік функції $y=\dfrac{x-x^2}{|x|}$.

21. Бісектриса і медіана, проведені з вершини прямого кута трикутника, утворюють рівнобедрений трикутник. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника.

22. У гострокутному трикутнику з однієї вершини проведено висоту, з іншої — медіану, а з третьої — бісектрису. При їх перетині утворився новий трикутник. Довести, що він не може бути правильним.

23. Доведіть, що будь-яку суму, більшу за 7 копійок, можна заплатити трикопійковими і п'ятикопійковими монетами.

24. Довести, що діагональ не може поділити трапецію на два рівних трикутники.

25. У записі натурального числа K використовуються лише одиниці і двійки, причому одиниць на одну більше, ніж двійок. Довести, що число $K+1985$ складене.

26. Сполучили послідовно середини сторін чотирикутника $ABCD$ і одержали квадрат. Чи обов'язково чотирикутник $ABCD$ повинен бути квадратом? Які властивості має чотирикутник $ABCD$?

27. Точки M і K належать відповідно сторонам BC і AC трикутника ABC. Чи може точка перетину відрізків AM і BK бути серединою кожного з них?

28. Якщо a і b — натуральні числа, то число 10^a+1 не ділиться на число 10^b-1. Довести.

29. Многокутник, вирізаний з паперу, перегинають по деякій прямій і обидві частини його склеюють. Чи може периметр одержаного при цьому нового многокутника бути більшим, ніж периметр даного?

30. Чи можна в одиничних клітинках квадратної таблиці розміром 17×17 записати числа -1, 0, 1 так, щоб суми чисел в кожному рядку, в кожному стовпчику і на двох великих діагоналях були різні?

31. На продовженні найбільшої сторони AC трикутника ABC відкладено відрізок $CM=BC$. Доведіть, що $\angle ABM>90^\circ$.

32. Доведіть, що число $1983^{1984}+4$ — складене.

33. Чи можна 44 монети розкласти по 40 гаманцях так, щоб довільні два з них містили різне число монет (вважатимемо, що два порожніх гаманці містять однакове число монет).

34. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y=\dfrac{1}{|x|}$.

35. Довести, що сума добутку чотирьох послідовних цілих чисел і одиниці є точним квадратом.

36. Довести, що не існує таких цілих чисел x, для яких $1986+x^2$ є квадратом цілого числа.

37. Знайти всі розв'язки в цілих числах рівняння $1986x^3=18y^3+z^3+9xyz$.

38. Доведіть, що рівняння $7x^2+px-23=0$ при будь-якому p має один додатний і один від'ємний корінь.

39. В трикутнику ABC AA_1 — висота, а CC_1 — медіана. Побудувати цей трикутник, якщо на малюнку зображено точку B і прямі, яким належать відрізки AA_1 і CC_1.

40. Два гравці по черзі зафарбовують клітинки на клітчастій дошці розміром 198×7. Кожним ходом зафарбовуються декілька клітинок, що утворюють квадрат. Зафарбовувати клітинки двічі не дозволяється. Виграє той, хто зафарбовує останню клітинку. Довести, що гравець, який починає, завжди може виграти.

41. Вписане в трикутник ABC коло дотикається до сторони BC в точці K. Довести, що відрізок AK більший від діаметра цього кола.

42. Турнір з футболу, в якому беруть участь 16 команд, проходить у два круги, тобто кожні дві команди зустрічаються між собою двічі. За перемогу присуджують 2 очки, за перші 10 нічиїх — по 1 очку, за кожну наступну нічию і за поразку команда очок не одержує. Яке найменше число очок міг набрати переможець?

43. Довести, що коли $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$, де a, b, c — дійсні числа, то $a=b=c$.

44. Записати твердження $a=b=c=d$ за допомогою одного лише знака рівності.

45. Для того, щоб $a^3+b^3+c^3=3abc$, необхідно і досить, щоб $a+b+c=0$. Довести.

46. $f(x)=Ax^2(x+1)+B(x^2+1)(x-6)+Cx(x^2+1)$;
$Q(x)=x^2+5x+6$.

При яких значеннях параметрів A, B, C многочлен $f(x)$ тотожно дорівнює многочлену $Q(x)$?

47. Розв'язати рівняння $\left(\sqrt{x}+2\right)\left(x^2-49\right)\left(x+2{,}5\right)=0$.

48. Розв'язати рівняння $x^2-4x+y^2+6y+13=0$.

49. Розв'язати рівняння $x^2+\dfrac{1}{x^2}-x-\dfrac{1}{x}+4=0$.

50. Чи правильно скорочено дріб $\dfrac{x^2|x|-1}{|-x|-1}=x^2+x+1$?

51. Виразити через b дріб $\dfrac{a+1}{a-1}$, якщо $\dfrac{(1-b)^2}{1-ab}=\dfrac{(1+b)^2}{1+ab}$.

52. Скоротити дріб $\dfrac{x^2+xy+y^2}{1+xy+x^2y^2}$, якщо $x+y-xy=1$.

53. Обчислити суму $\dfrac{1}{1+x+xy}+\dfrac{1}{1+y+yz}+\dfrac{1}{1+z+zx}$, якщо $xyz=1$.

54. При яких значеннях x дріб $\dfrac{x^2}{1+x^2}$ буде мати найменше значення. Відповідь поясніть.

55. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+y+z+t=12, \\ x+y-z-t=6, \\ x-y+z-t=4, \\ x-y-z+t=2. \end{cases}$

56. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x(y+z)=5, \\ y(x+z)=10, \\ z(x+y)=13. \end{cases}$

57. Зобразити на координатній площині точки, координати яких задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x^2y-3xy^2=18xy, \\ 12y+3y^2=2xy. \end{cases}$$

58. Побудувати графіки, задані рівняннями
а) $x^2+xy=0$; б) $y=x\,|\,y\,|$.

59. На дошці було записане трицифрове число, яке починалося цифрою 9. Юрко поцікавився, як зміниться число від перестановки першої цифри на останнє місце. Виявилося, що одержане число на 216 менше від даного. Яке число було записане на дошці?

60. Через п'ять років вік брата буде відноситись до віку сестри як 5:7. Скільки років кожному з них зараз, якщо рік тому брат був удвоє старший від сестри?

61. Пройшовши половину шляху, потяг збільшив швидкість на 25% і тому прибув у пункт призначення на півгодини раніше. За який час був пройдений весь шлях?

62. Довести, що $1^3+2^3+\ldots+1992^3$ ділиться на 1993 без остачі.

63. Довести, що сума катетів трикутника дорівнює сумі діаметрів вписаного у нього та описаного навколо нього кіл.

64. У трикутнику ABC відрізок AM — медіана, а точка N — її середина. Пряма BN перетинає сторону AC в точці K. В якому відношенні точка K ділить цю сторону?

65. У трикутнику ABC проведено медіану BM і висоту AH. Відомо, що $BM=AH$. Знайти величину кута MBC.

66. Доведіть, що діагоналі трапеції перетинаються.

67. Пряма відтинає від рівностороннього трикутника трапецію, яка розбивається її діагоналями на чотири рівнобедрених трикутники. Знайти кут між діагоналями трапеції.

68. Доведіть, що прямі, які містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці.

69. Доведіть, що бісектриса, проведена з вершини прямого кута трикутника з нерівними катетами, ділить навпіл кут між медіаною і висотою, проведеними з цієї ж вершини.

70. Довести, що коли в опуклому чотирикутнику суми довжин протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло. (Многокутник називається опуклим, якщо він розміщений по один бік відносно кожної з прямих, яким належать його сторони).

71. Точки K і L — середини сторін AB і CD опуклого чотирикутника $ABCD$. Довести, що коли $LK=0{,}5(AD+BC)$, то $AD \parallel BC$.

72. Точки K, L, M, N, є, відповідно, серединами сторін AB, BC, CD, AD опуклого чотирикутника. Довести, що коли $KM+LN=0{,}5\ (AB+BC+CD+AD)$, то цей чотирикутник — паралелограм.

73. Довести, що прямі, які проходять через вершину паралелограма і середини сторін, що виходять з протилежної вершини, ділять діагональ, що сполучає дві інші вершини паралелограма, на три рівні частини.

74. У трикутнику ABC $\angle A=60^\circ$, а прилеглі до нього сторони AB і AC дорівнюють 2 і 3. Розрізати його на три частини так, щоб з них можна було скласти правильний шестикутник. (Правильним називається опуклий шестикутник, в якого всі сторони і всі кути рівні).

75. За допомогою циркуля і лінійки поділити кут, величина якого дорівнює 54°, на три рівні кути.

76. Побудувати трикутник за стороною, протилежним кутом і радіусом вписаного кола.

77. Побудувати трикутник, знаючи всі його медіани.

78. Побудувати паралелограм, двома суміжними вершинами якого є дві дані точки, а інші вершини належать даному колу.

79. Відшукати геометричне місце середин всіх тих хорд даного кола, продовження яких проходять через задану точку.

80. Побудувати трикутник, знаючи його сторону, протилежний кут і медіану, проведену до іншої сторони.

81. Побудувати трикутник, знаючи його сторону, протилежний кут і висоту, опущену на іншу сторону.

82. В архіві було знайдено такий запис про скарб. У певному місці закопано стовп, ростуть дуб і береза. Для того, щоб знайти скарб, треба пройти від стовпа до дубу по прямій, повернути праворуч під прямим

кутом і, пройшовши таку ж відстань, відмітити точку D. Потім від стовпа пройти до берези, повернути ліворуч під прямим кутом і, пройшовши таку ж відстань, відмітити точку E. Посередині між цими точками закопано скарб. Коли прийшли на місце, то дерева росли, а стовпа не знайшли. Однак, скарб було знайдено. Як?

83. У трикутнику ABC проведено висоту AH. Точка O — центр описаного навколо трикутника кола. Довести, що $\angle OAH = |\angle ABC - \angle BCA|$.

84. Довести, що число $\sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\sqrt{35 - 8\sqrt{19}}}}$ ціле.

85. Довести, що для довільних дійсних чисел a і b виконується нерівність $\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \geq \frac{a^3b + ab^3}{2}$.

86. Надруковано мільйон квитків з номерами від 000000 до 999999. Квиток з номером $\overline{abcdef}$ вважається "щасливим", якщо $af+be+cd=100$. Довести, що сума номерів усіх "щасливих" квитків ділиться на 1001.

87. Нехай m і n — такі цілі числа, що $m^2+9mn+n^2$ ділиться на 11. Доведіть, що m^2-n^2 ділиться на 11.

88. Доведіть, що не існує таких дійсних чисел a і b, для яких одночасно виконуються дві рівності $a=b^2+1$, $b=a^2+1$.

89. Дано два кола T_1 і T_2, які перетинаються в точках A і B. Коло T_2 проходить через центр кола T_1. Дотична до кола T_2, проведена через точку B, перетинає коло T_1 в точці C, відмінній від B. Доведіть, що $AB=BC$.

90. Дано множину з $2n$ додатних чисел, про яку відомо: ці числа можна розбити на n пар так, що сума чисел в кожній парі буде одна і та сама; ці $2n$ чисел можна розбити на n пар (можливо, вже інших) так, що добуток чисел в кожній парі буде одним і тим самим. Доведіть, що серед чисел цієї множини не знайдеться трьох різних.

91. Як можна відміряти 9 хвилин за допомогою пісочних годинників на 5 хвилин та на 7 хвилин?

92. Нехай H — точка перетину висот гострокутного трикутника ABC. Відомо, що $AB=CH$. Знайти величину кута ACB.

93. У садку діда Панаса ростуть груші та яблуні так, що для кожної яблуні знайдуться деякі дві груші на відстані рівно 10 м від неї. Чи може яблунь в садку бути більше, ніж груш?

94. На дошці написано вираз $*n^8*n^7*n^6*n^5*\ *n^4*n^3*n^2*n$.

Петро і Оксана грають в таку гру. Вони роблять ходи по черзі, за один хід дозволяється замінити одну "$*$" на знак "+" або "−". Оксана прагне, щоб отриманий після восьми ходів вираз ділився на 6 для кожного натурального n. Петро намагається цьому завадити. Петро ходить першим. Довести, що Оксана може забезпечити собі перемогу незалежно від того, як ходить Петро.

95. Шахіст зіграв 40 партій в шахи і набрав у сумі 25 очок (за кожну перемогу давалось 1 очко, за нічию – $\frac{1}{2}$ очка, за поразку – 0 очок). Знайти різницю між кількістю його перемог та кількістю поразок.

96. Знайти всі набори ненульових цифр a, b, c, для яких виконується рівність $\overline{a,b} \cdot c = a + b + c$.

Тут $\overline{a,b}$ означає a цілих, b десятих.

97. AE — бісектриса в $\triangle ABC$. Точка D належить стороні AC і $\angle DBC = \angle A + \angle C$. Довести, що DE — бісектриса кута BCD.

98. На Марсі 2000 країн, і для кожної їх четвірки принаймні одна країна з цієї четвірки ворогує з трьома іншими. Знайти найменшу можливу кількість країн Марсу, що ворогують з усіма країнами одночасно.

99. Сума трьох тризначних чисел $\overline{aab}$, $\overline{aba}$ та $\overline{baa}$ дорівнює 1998. Знайдіть усі трійки таких чисел.

100. Чи є число $\underbrace{11\ldots1}_{1998}\underbrace{55\ldots5}_{1997}6$ квадратом цілого числа?

101. Через точки дотику вписаного в трикутник кола із сторонами цього трикутника провели прямі, які відповідно паралельні бісектрисам протилежних кутів. Доведіть, що ці прямі перетинаються в одній точці.

102. На дошці розміром 4×4 грають двоє. Ходять по черзі, і кожний гравець своїм ходом зафарбовує одну клітинку. Кожну клітинку можна зафарбувати лише один раз. Програє той гравець, після чийого ходу утворюється квадрат 2×2, що складається із зафарбованих клітинок. Хто з гравців може забезпечити собі виграш – той, хто ходить першим, чи його суперник? Відповідь обгрунтуйте.

103. Розв'язати рівняння

$$\frac{(-\sqrt{x})^2 + \sqrt{x^2}}{2x^2} = 1999.$$

104. Чи існують цілі числа m і n такі, що $(m+1998)(m+1999)+(m+1999)(m+2000)+(m+1998)\times$ $\times(m+2000)=n^2$.

105. Дано трапецію $ABCD$ з основами AD та BC. Відомо, що бісектриса кута ABC перетинає середню лінію трапеції в точці P, а основу AD – в точці Q. Знайти величину кута APQ.

106. Дано 1999 чисел. Відомо, що сума будь-яких 99 з цих чисел є додатною. Довести, що сума всіх даних чисел також є додатною.

107. Довести, що число $19991999+19991998\cdot19991999\cdot19992000$ є кубом цілого числа.

108. На дні озера б'ють з постійною потужністю джерела води. Стадо з 12 слонів випиває озеро за 4 хвилини, а стадо з 9 слонів – за 6 хвилин. Одного дня до озера підійшли 6 слонів. За скільки хвилин вони вип'ють всю воду з цього озера? (Об'єм води в озері на початку водопою є завжди одним і тим же).

109. Дано трапецію $ABCD$, в якій $AB \parallel CD$, $AB>CD$. Відомо, що в цій трапеції відстань між серединами основ дорівнює відстані між серединами діагоналей. Довести, що кут ADB – тупий.

110. Чи існують цілі числа m та n, такі, що $7m^2-5n^2=2000$?

111. Микола та Сергійко грають у гру, по черзі записуючи цілі числа в клітинки таблиці розмірами 7×9 (7 рядків, 9 стовпців). Першим робить свій хід Миколка. За один хід записується одне число у вільну клітинку, гра

продовжується, поки числа не заповнять всю таблицю. Потім підраховуються значення S_1, S_2, ..., S_7 – суми чисел в рядках таблиці. Якщо серед чисел S_1, S_2, ..., S_7 парних більше, ніж непарних, виграє Миколка. В іншому випадку – Сергійко. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?

112. Розв'яжіть рівняння $\left||x|-2\right| = x$.

113. Турист пройшов половину шляху між пунктами A і B зі швидкістю 4 км/год, а решту шляху до B зі швидкістю 6 км/год. На зворотному шляху від B до A 2/3 цього шляху він пройшов зі швидкістю, що дорівнює середній швидкості руху в напрямку від A до B, а решту шляху пройшов зі швидкістю 5 км/год. Знайдіть відстань між пунктами A і B, якщо відомо, що на зворотний шлях турист витратив на 2 хвилини менше, ніж на весь шлях від A до B.

114. Чи існують цілі числа k і l такі, що $k^3+l^3=2001$?

115. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ вибрали точки M, N, P, Q відповідно так, що відрізки MN і PQ – перпендикулярні. Нехай O – точка перетину відрізків MN і PQ. Доведіть, що $P_{AMOQ}+P_{CPON} = P_{BMOP}+P_{DNOQ}$, де P_F – периметр фігури F.

116. Дано одну купу з 2001-го сірника. Двоє грають в таку гру. Вони по черзі роблять наступні ходи – вибирається довільна купа, що містить більше одного сірника і ділиться на дві менші купи. Гра продовжується до тих пір, поки кожна купа не буде складатися з одного сірника. При кожному поділі купи на дві купи записується добуток чисел сірників в отриманих двох нових купах. Мета гравця, що ходить першим, зіграти так, щоб сума всіх записаних чисел ділилася на 1000. Чи може другий гравець йому завадити?

117. У клубі зустрілися 20 джентльменів. Деякі з них були в капелюхах, а деякі – ні. Час від часу один із джентльменів знімав із себе капелюха і надягав його на одного із тих, у кого в цей момент часу капелюха не було. В кінці 10 джентльменів підрахували, що кожний із них віддавав капелюха більше разів, ніж одержував. Скільки джентльменів прийшли в капелюхах?

118. Всередині трикутника ABC на бісектрисі його кута B відмітили точку M так, що $AM=AC$ і $\angle BCM=30^\circ$. Знайти величину кута AMB.

119. Знайти всі такі пари натуральних чисел m і n, для яких виконується рівність НСК(m, n)–НСД $(m, n)=mn/5$.

120. Малюк і Карлсон грають у таку гру. Вони беруть плитку шоколаду розмірами 2002×2003 і по черзі викушують із неї по клітинках шматочки (не обов'язково від країв): Карлсон – розмірами 2×2, а Малюк – розмірами 1×1. Якщо не залишилось жодного шматочка розмірами 2×2, то увесь шоколад який залишився з'їдає Малюк. Виграє той, хто з'їсть більше шоколаду. Починає гру Малюк. Хто виграє при правильній грі?

121. Вузли нескінченного аркушу паперу в клітинку пофарбовані в три кольори (причому всі три кольори присутні). Довести, що знайдеться прямокутний трикутник з катетами, які не обов'язково йдуть по лініях сітки, вершини якого розташовані у вузлах і пофарбовані в різні кольори.

122. Побудуйте графік функції $y=\dfrac{5x^2-|x|}{x+|x|}$.

123. Сума тангенса гострого кута та котангенса другого гострого кута прямокутного трикутника дорівнює 1. Обчисліть значення тангенса більшого гострого кута цього трикутника.

124. Для яких натуральних n число n^4-22n^2-46 ділиться без остачі на число $n+5$?

125. Розв'яжіть рівняння $\left(\dfrac{37}{21}x\right)^3=P$, де P – середнє арифметичне чисел

$$A=\frac{158^2+158\cdot185+185^2}{158+185},\quad B=\frac{158^2-158\cdot185+185^2}{185-158}.$$

126. Знайдіть натуральне число n за умови, що з трьох наступних тверджень два – істинні, а одне – хибне:

1) $n+41$ є квадратом натурального числа;

2) $n-21$ ділиться на 10;

3) $n-48$ є квадратом натурального числа.

127. За допомогою циркуля та лінійки поділіть кут у 35° на 7 рівних частин.

128. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC на бічній стороні BC вибрано точку K так, що кут BAK дорівнює 24°. На відрізку AK вибрано точку M так, що кут ABM дорівнює 90°, $AM=2BK$. Знайдіть кути трикутника ABC.

129. Як у виразі $\frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{3}{4} * \frac{4}{5} * \ldots * \frac{97}{98} * \frac{98}{99} * \frac{99}{100}$, який містить 99 дробів замінити всі зірочки знаками арифметичних дій таким чином, щоб значення одержаного числового виразу дорівнювало нулю?

130. Дано горизонтальну клітчату смугу розміром 1×2001. нехай у кожній з п'яти крайніх зліва клітинок розташовано по одній шашці. Двоє гравців по черзі беруть одну з шашок і пересувають її на декілька клітинок праворуч (стрибати через шашки і ставити шашки в клітинки, в яких уже знаходиться якась інша шашка, не дозволяється). Переможеним вважається той з гравців, який не може зробити свій черговий хід. Доведіть, що той гравець, який розпочинає гру, завжди зможе забезпечити собі перемогу.

131. Чи ділиться число $10^{15}+10^{17}-74$ на 9?

132. Знайти функцію f, яка при всіх $x\neq0$ задовольняє рівність

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x .$$

133. Побудувати графік рівняння $y+y^2=x+x^2$.

134. Розв'язати рівняння $\left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{x-1}{2}$, де $[x]$ – ціла частина x.

135. Відстань між основами двох висот ромба, проведених з вершини тупого кута, дорівнює половині діагоналі. Знайдіть кути ромба.

§3. ЗАДАЧІ ДЛЯ ДЕВ'ЯТОГО КЛАСУ

1. Числа p, q, $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ — раціональні ($p>0$, $q>0$), Довести, що числа $\sqrt{p}$ і $\sqrt{q}$ також раціональні.
2. Довести: якщо сума додатних чисел a, b, c дорівнює одиниці, то $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\geq 9$.
3. Чи може квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ з цілими коефіцієнтами мати дискримінант, що дорівнює 23?
4. Є 552 гирі масою 1 г, 2 г, 3 г,..., 552 г. Розкласти їх на три рівні за масою купки.
5. Чи ділиться на 10 число $4^{1983}-4^{1917}$?
6. Знайдіть корені квадратного тричлена, якщо його значення при $x=-1$ та $x=5$ рівні, а значення при $x=3$ відрізняється від перших двох лише знаком.
7. Довести, що немає таких простих чисел a, b, c, d для яких $a^2+b^2+c^2+d^2=abcd+4$.
8. На дошці написано числа 18 і 19. Дозволяється записувати на дошці нові числа, які дорівнюють сумі довільних двох з тих, що вже записані. Довести, що в такий спосіб можна одержати число 1983.
9. Довести, що число $3^{60}-2^{60}$ ділиться на 11.
10. Для того, щоб знайти квадрат двозначного числа, яке закінчується цифрою 5 і має p десятків, достатньо число десятків p помножити на $(p+1)$ і до результату дописати 25. Доведіть.
11. Розв'язати рівняння
$(x^3-9x^2-x+9)^2+(x^3+3x^2-x-3)^4=0$.
12. Задумайте деяке двоцифрове число. Помножте його на 20 і додайте до одержаного результату задумане число. Одержане число помножте на 481. Ви одержали число, в записі якого тричі підряд повторюється задумане Вами число. Поясніть результат.
13. В залі клубу 320 місць, розміщених рядами. Після того, як число місць у кожному ряду збільшили на 4 і додали ще один такий ряд, в залі стало 420 місць. Скільки стало рядів в залі?

14. При яких значеннях p обидва корені квадратного рівняння $x^2+2(p+1)x+9p-5=0$ від'ємні?

15. Розв'язати рівняння $|2x^2-1|=x^2-2x-3$.

16. Довести, що число $M=1984^{1984}+1985^{1985}+1986^{1986}$: а) ділиться на 3; б) не є квадратом цілого числа.

17. Довести, що число $1+2+3+\ldots+1986$ не розкладається на суму квадратів двох цілих чисел.

18. 20 учнів разом знають розв'язання двадцяти задач, причому кожен учень знає розв'язання тільки двох задач, і розв'язання кожної задачі знають лише 2 учні. Довести, що можна організувати обговорення цих задач так, щоб кожен учень пояснив розв'язування лише однієї задачі.

19. Яке з чисел більше: $\sqrt{a+1}+\sqrt{a+\sqrt{a+1}}$ чи $\sqrt{a}+\sqrt{a+1+\sqrt{a}}$?

20. Числа $5x-y$, $2x+y$ і $x+2y$ утворюють арифметичну *прогресію, а числа* $(y+1)^2$, $xy+1$ *і* $(x-1)^2$ *утворюють* геометричну прогресію. Знайти x та y.

21. Бригада робітників повинна була за певний час виготовити 400 деталей. За перші 5 днів бригада перевиконувала норму на 20%, а в наступні дні виготовляла щоденно на 15 деталей більше від плану і вже за два дні до встановленого терміну виготовила 405 деталей. Скільки деталей повинна була виготовляти щоденно бригада за планом?

22. Відомо корені x_1 та x_2 рівняння $x^2+ax+b=0$. Знайти корені рівняння $bx^2+a(b+1)x+(b-1)^2+a^2=0$.

23. Відомо, що x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2+ax+a-1989=0$. При якому значенні a сума $x_1^2+x_2^2$ буде найменшою?

24. Побудувати графік функції $y=\sqrt{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$. Знайти ті значення x, при яких $y<2$.

25. Нехай a, b, c — додатні числа. Довести, що

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{a+c}{a^2+c^2}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

26. Шість секторів круга, кожний з центральним кутом, не більшим від 16°, зафарбовано. Чи при всякому розташуванні секторів їх одночасно можна повернути навколо центра круга на один і той самий кут так, щоб всі вони розмістилися на незафарбованій частині круга?
27. Чи можна з квадрата розміром 5×5 одиничних клітинок вирізати одну клітинку так, щоб одержану фігуру можна було розрізати по лініях сітки на 8 прямокутних смужок розміром 1×3 клітинки?
28. Точки A і B є внутрішніми точками плоского гострого кута COD. Побудувати на сторонах OC і OD такі точки K і M відповідно, щоб ламана $AKMB$ мала найменшу довжину.
29. Равлик повзе з точки A по площині, змінюючи напрям руху на 90° через кожні 15 хвилин. Доведіть, що він може повернутися в точку A лише через цілу кількість годин (швидкість равлика стала).
30. Довільний трикутник можна розрізати на чотири рівні між собою трикутники, подібні до даного. Знайдіть такий трикутник, який можна розрізати на три рівні між собою трикутники, подібні до даного.
31. M — внутрішня точка плоского опуклого чотирикутника, а кожна з точок, M_1, M_2, M_3 і M_4 симетрична з точкою M відносно середини однієї з його сторін. Довести, що коли чотирикутник з вершинами в цих точках є опуклим, то його площа не залежить від вибору точки M.
32. Кожна діагональ даного чотирикутника ділить його на трикутники з рівними площами. Довести, що цей чотирикутник — паралелограм.
33. Середини сторін опуклого чотирикутника, що має площу S, сполучили послідовно. Знайти площу одержаного чотирикутника.
34. Відрізок, який визначається серединами протилежних (несуміжних) сторін чотирикутника, називається його середньою лінією. Довести, що коли діагоналі опуклого чотирикутника рівні, то його площа дорівнює добутку довжин середніх ліній.
35. Коло, побудоване на катеті трикутника як на діаметрі, ділить гіпотенузу у відношенні 1 : 3. Обчислити кути трикутника.

36. M — внутрішня точка плоского прямокутника $ABCD$. Знайти на сторонах цього прямокутника такі точки M_1, M_2, M_3 і M_4 (по одній на кожній стороні), щоб довжина ламаної $MM_1M_2M_3M_4M$ була найменшою.

37. Побудувати трапецію, знаючи її середню лінію EF, точку O перетину діагоналей і основу K перпендикуляра, опущеного з точки O на одну з основ трапеції (точки E, F, O і K зображені на малюнку).

38. З кожної вершини п'ятикутника провели вектори до середин трьох несуміжних з цією вершиною сторін. Довести, що сума всіх 15 побудованих векторів дорівнює нуль-вектору.

39. У трикутник з основою в 30 см і висотою в 10 см вписано прямокутний рівнобедрений трикутник так, що його гіпотенуза паралельна до основи, а вершина прямого кута лежить на основі. Визначити сторони вписаного трикутника.

40. Всередині плоского квадрата із стороною 2 розміщено плоский квадрат із стороною 1. Довести, що менший квадрат завжди покриває центр більшого.

41. Побудувати множину точок площини, координати яких задовольняють систему нерівностей $\begin{cases} |x| + |y| \le 3, \\ 1 \le x^2 + y^2 \le 9. \end{cases}$

42. У трикутнику центри вписаного та описаного кіл симетричні відносно прямої, яка містить одну з його сторін. Знайти кути даного трикутника.

43. У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, в 4 рази менша від останньої. Знайти кути цього трикутника.

44. Для всіх дійсних x і y знайти найменше значення виразу $\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{y^2 + (1-x)^2}$.

45. Дано коло (O, r), точку A на ньому і таку точку K, що $OK<r$. Знайти на колі такі точки B і C, щоб точка K була точкою перетину бісектрис трикутника ABC.

46. На сторонах AB і AC довільного трикутника ABC для кожного n обираються точки K_n і M_n відповідно так, що $AK_n = \frac{1}{n}AB$, $AM_n = \frac{1}{n+1}AC$. Довести, що всі прямі K_nM_n перетинаються в одній точці.

47. Відомо, що вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ неколінеарні. Довести, що вектори $\bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{a})\bar{a} + (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{b}$ та $\bar{d} = (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{a} + (\bar{b} \cdot \bar{b})\bar{b}$ також неколінеарні.

48. Скласти квадратне рівняння, корені якого обернені до квадратів коренів рівняння $x^2+55x-45=0$.

49. Побудувати графік функції
$$y = \frac{x^2\sqrt{x} - x^2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{1 - 9x^2}{3x - 1} - \frac{100 - 60x + 9x^2}{3x - 10}.$$

50. Знайти всі пари таких цілих чисел x і y, які задовольняють рівняння $x^2-y^2=2y+13$.

51. Довести, що коли $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, то $\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} = 3$.

52. Спростити вираз $\dfrac{\left(p + \frac{1}{q}\right)^p \cdot \left(p - \frac{1}{q}\right)^q}{\left(q + \frac{1}{p}\right)^p \cdot \left(q - \frac{1}{p}\right)^q}$.

53. Розв'язати рівняння $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=1$.

54. Розв'язати рівняння $\dfrac{(x^2 + 1)x}{(x^2 - x + 1)^2} = \dfrac{10}{9}$.

55. Довести, що коли a, b, c — довжини сторін трикутника, то при довільному значенні x тричлен $bx^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$ буде додатним.

56. Велосипедистові потрібно було проїхати 20 км. Першу половину шляху він їхав із швидкістю, яка на 1 км/год більша від швидкості, з якою він їхав другу половину шляху. В яких межах має знаходитись його менша швидкість, якщо на весь шлях він може витратити від 1 до 2 годин?

57. Розв'язати рівняння $\dfrac{2x}{3x^2 - x + 2} - \dfrac{7x}{3x^2 + 5x + 2} = 1$.

58. Розв'язати нерівність $(x-2)^{10}(x+3)^{17}(x+1)^5(x^2+3)^{17}>0$.

59. Довести, що коли число $4x+3y$ ділиться на 5, то число $2x-y$ теж ділиться на 5.

60. Довести, що коли добуток двох додатних чисел більший за їх суму, то ця сума більша за 4.

61. Човен проплив за течією річки 34 км і проти течії — 39 км, витративши на це стільки часу, скільки йому потрібно було б, щоб проплисти в стоячій воді 75 км. Знайти відношення швидкості човна в стоячій воді до швидкості течії.

62. При яких значеннях параметра a число 1 міститься між коренями рівняння
$(12a+7)x^2-3(14-3a)x+11-3a=0$?

63. Розв'язати рівняння $5x^2-2xy+2y^2-2x-2y+1=0$.

64. Довести, що $a^2+b^2+1>ab+a+b$.

65. Кожне із двох додатних чисел дорівнює неповному квадрату суми своїх цифр. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 50 більше від другого.

66. Знайдіть ті корені рівняння $12x^3+4x^2-17x+6=0$, абсолютні величини яких обернені, а знаки — протилежні.

67. Розв'язати рівняння $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$.

68. Довести, що коли $x>0$, $y>0$ і $x+y=1$, то $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\geq 9$.

69. Розв'язати рівняння $8x^3+12x^2+6x+1=0$.

70. Довести, що коли $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, то
$(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)>16abc$.

71. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}3x+2y=6xy,\\ x+7y=-17xy.\end{cases}$

72. Доведіть, що коли $x=\dfrac{a-b}{a+b}$; $y=\dfrac{b-c}{b+c}$; $z=\dfrac{c-a}{c+a}$, то
$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$.

73. Довести, що в довільному трикутнику ABC бісектриса і висота, проведені з вершини A, утворюють кут із величиною $\dfrac{|\angle B-\angle C|}{2}$.

74. AD і BE — медіани трикутника ABC. Довести, що коли $\angle CAD=\angle CBE=30^\circ$, то трикутник ABC — правильний.

75. Висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Довести, що довжина відрізка AH у два рази більша за відстань від центра описаного кола до прямої BC.
76. У трикутнику ABC $AB<AC$. Довести, що коли AD — медіана, то $\angle BAD>\angle DAC$.
77. На площині побудовано відрізок AM і точку D. Побудувати трикутник ABC, для якого AM є медіаною, а точка D — основою перпендикуляра, опущеного з вершини B на бісектрису кута A.
78. Периметр прямокутної трапеції дорівнюя P, а гострий кут має величину α. Знайти висоту цієї трапеції, якщо в неї можна вписати коло.
79. Дві сторони трикутника мають довжини a і b, а медіани, проведені до них, перпендикулярні. Знайдіть довжину третьої сторони.
80. Розрізати довільний трикутник на такі три частини, щоб з них можна було скласти прямокутник.
81. В плоскому трикутнику ABC $\angle A=90^\circ$ і $AB=AC$. M — така його внутрішня точка, що $\angle MAB=\angle MBA=15^\circ$. Обчислити величину кута BMC.
82. Кут при вершині рівнобедреного трикутника має величину 108°. Доведіть, що висота цього трикутника, проведена до основи, в два рази менша від бісектриси кута при основі.
83. Доведіть, що коли висота, медіана і бісектриса, які проведені з однієї вершини, ділять кут на чотири рівні частини, то цей кут — прямий.
84. Побудувати трикутник, знаючи його висоти.
85. Побудувати трикутник, вписаний в дане коло, знаючи точки, в яких перетинають це коло продовження висоти, бісектриси і медіани, що проведені з однієї вершини шуканого трикутника.
86. Побудувати коло, яке проходить через дві дані точки і дотикається до даної прямої.
87. AD — бісектриса трикутника ABC. Доведіть, що $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC$.
88. Довести, що не існує таких чотирьох різних додатних чисел a, b, c, d, для яких $a+b=c+d$ і $a^3+b^3=c^3+d^3$.

89. Комісія засідала 40 разів. Відомо, що кожного разу в засіданні брало участь 10 осіб і будь-які два члени комісії засідали спільно не більше одного разу. Довести, що до складу комісії входило не менше 60 осіб.

90. Знайти всі трійки таких цілих чисел l, m, n, для яких виконується рівність $l^2+m^2+n^2-2l+4m-6n=-11$.

91. У трикутнику ABC $\angle C=120^\circ$, H — його ортоцентр (точка перетину прямих, які містять його висоти), O — центр описаного кола. Довести, що коли точка M є серединою дуги ACB цього кола, то $HM=MO$.

92. Нехай a, b, с, A, B, C — такі додатні числа, що рівняння $ax^2-bx+c=0$ та $Ax^2-Bx+C=0$ мають по два дійсних різних корені. Довести, що для кожного числа t, яке лежить між коренями першого рівняння, та числа T, яке лежить між коренями другого рівняння, виконується нерівність $(at+AT)\left(\frac{c}{t}+\frac{C}{T}\right)\le\left(\frac{b+B}{2}\right)^2$.

93. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} xy+x+y=80, \\ yz+y+z=80, \\ xz+x+z=80. \end{cases}$

94. Чи можна занумерувати ребра куба натуральними числами від 1 до 12, використовуючи кожне число лише один раз, так, щоб суми номерів ребер, які виходять з кожної вершини, були однаковими?

95. Доведіть, що немає таких натуральних чисел m і n, які задовольняють рівність $\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{1994}$.

96. Знайдіть всі функції f: $R\to R$, для яких при будь-яких x і y виконується рівність $f(x-f(y))=1-x-y$.

97. Пряма l дотикається в точці A до кола, описаного навколо трикутника ABC. Точка D належить стороні AB цього трикутника і $AD=6$ см. Точка E належить стороні AC і $AE=5$ см, а $EC=7$ см. Знайти довжину відрізка BD, якщо $DE\parallel l$.

98. На дошці записано чотири числа 1, 9, 9, 6. Далі на кожному кроці дозволяється робити таку дію: вибирати з написаних на дошці три довільні числа a, b, c та дописувати три числа: $a(b+c)$, $b(a+c)$, $c(a+b)$

(всі числа, що були написані на дошці, залишаються). Чи можна після скінченної кількості таких кроків отримати число 1996?

99. Знайти всі натуральні числа m і n, які задовольняють рівняння $5n^2=m!-n!$ $(m!=1\cdot 2\cdots m,\ n!=1\cdot 2\cdots n)$.

100. Дійсні числа x, y, z є коренями рівнянь $x+y+z=6$, $xy+xz+yz=9$.

Довести, що ці числа належать проміжку $[0; 4]$.

101. AA_1, BB_1 і CC_1 — медіани трикутника ABC. Довести, що $\angle A_1AC=\angle ABB_1$ тоді і тільки тоді, коли $\angle AC_1C=\angle AA_1B$.

102. Дано нескінченний в усі боки аркуш паперу в клітинку. Для яких натуральних n можна зафарбувати скінченну кількість клітинок на аркуші так, щоб кожна зафарбована клітинка мала рівно n зафарбованих сусідніх клітинок? (клітинки вважаються сусідніми, якщо вони мають хоча б одну спільну вершину).

103. Яким повинен бути коефіцієнт k, щоб рівняння $x^3+kx+1=0$ і $x^4+kx^2+1=0$ мали спільний корінь?

104. Дано цілі числа a, b, c такі, що $a^2+b^2+c^2$ ділиться на 6, а $ab+bc+ac$ ділиться на 3. Довести, що $a^3+b^3+c^3$ ділиться на 6.

105. У чотирикутник $ABCD$ вписано коло з центром в точці O. Через точки A, B, C, D перпендикулярно до OA, OB, OC і OD проведено прямі L_A, L_B, L_C, L_D відповідно. $L_A\cap L_B=K$, $L_B\cap L_C=L$, $L_C\cap L_D=M$, $L_D\cap L_A=N$.

а) Доведіть, що KM і LN перетинаються в точці O.

б) Нехай довжини OK, OL і OM дорівнюють p, q і r відповідно. Знайдіть довжину ON.

106. Шахівницю 8×8 покрито 32 плитками доміно і плитки не виходять за межі шахівниці, не перекривають одна одну і кожна накриває рівно дві клітинки. Плитка називається горизонтальною, коли її довша сторона паралельна горизонтальній стороні дошки.

Горизонтальна плитка називається чорно-білою, якщо ліва з двох накритих клітинок чорна, і біло-чорною в іншому випадку. Довести, що кількість чорно-білих горизонтальних плиток покриття дорівнює кількості біло-чорних.

107. Довести, що число $\underbrace{11\ldots1}_{1998}$ ділиться на 37.

108. Дано смужку розміром 1×99. Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід потрібно закреслити одну довільну клітинку смужки або деякі дві послідовні клітинки. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто може забезпечити собі виграш – починаючий чи його суперник?

109. На координатній площині відмітили п'ять точок: $(-2; 8)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, $\left(1; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ та $\left(\frac{1}{4}; \frac{4}{5}\right)$. Яка найбільша кількість із цих точок може належати графіку рівняння $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$?

110. Над квадратним тричленом ax^2+bx+c дозволяється виконувати такі дії:

1) замінити в ньому x на $x-\lambda$, де λ – довільне дійсне число;

2) замінити його на тричлен $cx^2+(b+2c)x+(a+b+c)$.

Чи можна за допомогою таких дій із тричлена x^2-3x-4 одержати тричлен x^2-2x-5?

111. Довести, що десятковий запис числа 1999^6 містить принаймні три однакові цифри.

112. Розв'язати рівняння $(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)=(1+x+x^2+x^3)^2$.

113. Всередині гострокутного трикутника ABC відмітили точку H так, що $AB^2+HC^2=BC^2+AH^2=AC^2+BH^2$. Довести, що H – точка перетину висот даного трикутника.

114. Нехай α – довільне дійсне число, відмінне від нуля. Відомо, що числа x_1 та x_2 – дійсні корені рівняння $x^2+\alpha x-\frac{1}{2\alpha^2}=0$. Довести, що $x_1^4+x_2^4\geq 2+\sqrt{2}$.

115. Три цілих числа a, b, c записали в рядок: a, b, c. Під цими числами записали нову трійку чисел: $a-b$, $b-c$, $c-a$. Числа третього рядка утворені за таким же законом і т. д. Довести, що серед чисел рядків, які розташовані нижче сьомого рядка, не може зустрітися ані 1999, ані 2000.

116. Довести, що всі корені рівняння $x^2-4x-2=0$ є коренями рівняння $(x^2-3x-2)^2-3(x^2-3x-2)-x-2=0$.

117. Про ціле число n та просте число p відомо, що числа $5n-1$ та $n-10$ ділиться на p. Довести, що число $2000n+13$ також ділиться на p.

118. Довести, що для будь-яких додатних чисел a, b, c виконується нерівність

$$\frac{a^4}{bc}+\frac{b^4}{ca}+\frac{c^4}{ab}\geq a^2+b^2+c^2 .$$

119. У сегмент кола ω, що обмежений його хордою MN, вписано два кола. Ці кола дотикаються до дуги кола в точках A та B і дотикаються до MN у точках C та D. Довести, що точки A, B, C, D лежать на одному колі.

120. У рядок записано послідовні натуральні числа від 1 до 2000. Двоє грають в таку гру. Вони по черзі вписують між цими числами знак додавання "+" або знак множення "×" (всього буде вписано 1999 знаків). Якщо значення одержаного в кінці числового виразу буде ділитися на 3, то виграє гравець, що робив перший хід. В іншому випадку виграє його суперник. Хто з гравців може забезпечити собі виграш? Вкажіть для нього виграшну стратегію.

121. Доведіть, що для будь-яких додатних a і b, справджується нерівність $\dfrac{a}{\sqrt{a}}+\dfrac{b}{\sqrt{b}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

122. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x[x]+y[y]=1, \\ [x]+[y]=1, \end{cases}$$

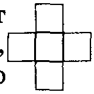
де через $[a]$ позначено найбільше ціле число, яке не перевищує a (цілу частину числа a).

123. На колі зафіксовано дві точки, а третя рухається по цьому колу. Знайдіть ГМТ (геометричне місце точок) перетину медіан трикутника, вершини якого знаходяться у цих точках.

124. Два рівні квадрати утворюють при перетині восьмикутник. Дві діагоналі цього восьмикутника поді-

ляють його на 4 чотирикутники. Доведіть, що ці діагоналі взаємно перпендикулярні.

125. Із паперу в клітинку вирізали квадрат розмірами 8×8. Яку найбільшу кількість фігур, зображених на малюнку, можна вирізати з цього квадрата?



126. У десятковому записі числа $1/14$ викреслили 2003-тю цифру після коми. Що більше: одержане число чи $1/14$?

127. Чи існують такі дійсні числа a, b, c $(a \neq 0)$, що всі дійсні корені рівняння $ax^2+bx+c=0$ будуть коренями рівняння $a(x^2-1)^2+b(x^2-1)+c=0$?

128. Нехай O – точка перетину діагоналей AC і BD прямокутної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $\angle A=\angle B=90°$); M – основа перпендикуляра, опущеного з точки O на бічну сторону AB. Довести, що $\angle CMO=\angle DMO$.

129. Нехай m – довільне натуральне число. Довести, що число $\dfrac{(m-1)^{2003}+1}{m}$ – ціле і непарне.

130. *Про невід'ємні дійсні числа a, b, c відомо, що всі* вони не перевищують 1. Довести, що $a^{17}+a^{10}b^7+b^{17}-b^{10}c^7+c^{17}-c^{10} \leqslant 1$.

131. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^5+x^3+x-42}=x\sqrt{2-x}$.

132. На декатровій площині задано чотири точки: $A_1(0;0)$, $A_2(0;2)$, $A_3(-2;-2)$ та $A_4(4;0)$. Для кожної точки A_i вказати множину точок площини, для яких вона є найближчою серед чотирьох даних точок.

133. Знайти усі $x_0<3$ такі, що для деяких натуральних чисел m, n, k число x_0 є більшим коренем рівняння $(m-x)(n-x)=k$.

134. Знайти всі натуральні n, такі, що в десятковому записі чисел $6n$, $9n$, $13n$ усі цифри від 0 до 9 зустрічаються по одному разу.

135. На дошці намальовано трикутник ABC. Висота AH та бісектриса AL цього трикутника перетинають вписане в трикутник коло в різних точках M та N, P та Q відповідно. Після цього малюнок витерли, залишивши лише точки H, M та Q. Відновити трикутник ABC.

§4. ЗАДАЧІ ДЛЯ ДЕСЯТОГО КЛАСУ

1. Дано два твердження:
   а) рівняння $x^2+(a+1)x+1=0$ має два від'ємні корені;
   б) нерівність $4x^2+(a-2)x+1 \geqslant 0$ справедлива при всіх значеннях x. При яких значеннях a одне з цих тверджень істинне, а друге – хибне?
2. Для фіксованого простого числа p знайти всі пари цілих чисел, що задовольняють співвідношення $p(x+y)=xy$.
3. Чи можна з кубиків розміром $1\times1\times1$ склеїти фігуру, площа поверхні якої дорівнює 1997? При склеюванні кубики з'єднуються так, що їх відповідні грані повністю співпадають.
4. Довести, що число $\underbrace{111\ldots1}_{2k \text{ цифр}}-\underbrace{222\ldots2}_{k \text{ цифр}}$ є квадратом деякого іншого числа і знайти останнє.
5. A — натуральне число. Позначимо через b число, утворене двома останніми цифрами числа A, а через a — число, утворене рештою його цифр (в тому порядку, в якому вони стоять у числі A). Довести, що число A ділиться на 7 тоді і тільки тоді, коли:
   а) $2a+b$ ділиться на 7;б) $5a-b$ ділиться на 7.
6. Чи існують такі два різні степені числа 4, у яких дві останні цифри однакові?
7. Чи може число 101010...10, запис якого містить 1983 одиниці і стільки ж нулів, бути сумою двох квадратів натуральних чисел?
8. У наборі є n однакових кульок. Коли їх розклали у вигляді рівностороннього трикутника (внутрішня його область теж заповнена кульками) з максимальним числом рядків, то залишилося 30 кульок, а для того, щоб число кульок в кожній стороні цього трикутника збільшити на одиницю, не вистачило 33 кульки. Скільки кульок було в наборі?
9. Є чотири пакети різної ваги і терези з двома шальками без важків. За мінімальну кількість зважувань розкласти пакети за вагою.

10. Побудувати на координатній площині фігуру, задану системою нерівностей $\begin{cases} |y| - |x| \le 1, \\ |y| \ge x^2 + 1. \end{cases}$

11. Розв'язати рівняння $2x^2 - 3x = 2x\sqrt{x^2 - 3x} + 1$.

12. Пара чисел 83 і 89 має ту властивість, що $83+8+9=100$ і $89+8+3=100$. Скільки є пар двозначних чисел з цією ж властивістю? Які ці пари?

13. Знайти цілі невід'ємні корені рівняння $x + \dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}} = 10$.

14. Зобразити на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють нерівність
$x^2 - 2|x| + y^2 - 2|y| + 1 \le 0$.

15. Обчислити суму $1986x + 1985x^2 + \ldots + 2x^{1985} + x^{1986}$.

16. Коефіцієнти рівняння $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ є дійсними числами, модуль кожного з яких не перевищує 1985. Довести, що кожен з коренів цього рівняння не більший за 1986.

17. Довести, що всі натуральні числа від 1 до 1986 не можна записати підряд у такому порядку, щоб число, яке утвориться при цьому, було квадратом цілого числа.

18. Довести, що параболи $y^2 = 2x$ і $y = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 6$ перетинаються в чотирьох точках і ці точки належать одному колу. Знайти координати центра і радіус цього кола.

19. Розв'язати рівняння $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$.

20. Довести нерівність
$(a + c)(b + d) \le \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + d^2}\sqrt{c^2 + d^2}$.

21. Два гравці записують по черзі числа 1 і -1 в одиничні клітинки таблиці розміром 1987×1987. Після того, як всі клітинки заповнені, для кожного рядка, стовпця і двох діагоналей таблиці підраховується добуток чисел, які там записані. Довести, що гравець, який робить перший хід, може грати так, щоб серед цих добутків було рівно 1990 додатних.

22. Знайти всі цілі розв'язки рівняння $6x^3+12y^3+1986xyz=1987z^3$.

23. Обчислити без таблиць $tg\,9^\circ - tg\,27^\circ - tg\,63^\circ + tg\,81^\circ$.

24. Розв'язати нерівність $\dfrac{2\sin 3x - 4}{2x - 3x^2 + 1} < 0$.

25. Розв'язати рівняння $\dfrac{4\sin x}{(x-3)^2} + |\sin x| = 0$.

26. Довести нерівність $\dfrac{a^2}{b^2+c^2} + \dfrac{b^2}{a^2+c^2} + \dfrac{c^2}{a^2+b^2} \geq \dfrac{3}{2}$.

27. Відомо, що числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1989}$ — додатні і їх добуток дорівнює 1. Довести, що $(1+x_1)(1+x_2)\times\ldots\times$ $\times(1+x_{1989}) \geqslant 2^{1989}$.

28. Довести, що $\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{k}\underbrace{555\ldots5}_{k-1}6} = \dfrac{10^k+3}{3}$.

29. Знайти найменше натуральне число, яке можна подати у вигляді $13m+75n$ принаймні трьома різними способами (m і n — натуральні числа).

30. Нехай m і n — взаємно прості натуральні числа. Операція A перетворює дріб $\dfrac{m}{n}$ у дріб $\dfrac{m^2+2}{n+1}$. Довести, що коли цю операцію застосувати до останнього дробу, далі – до одержаного результату і т.д., то після деякого скінченного числа застосувань операції A одержиться скоротний дріб.

31. На площині дано n точок, причому кожні чотири з них є вершинами опуклого чотирикутника. Довести, що всі ці точки є вершинами опуклого многокутника.

32. Дві сусідні вершини квадрата належать колу з центром в точці O і радіусом $r=1$. На якій найбільшій відстані можуть знаходитись від точки O дві інші вершини квадрата?

33. Дано десять векторів. Довжина вектора-суми кожних дев'яти з них менша від довжини вектора-суми всіх даних векторів. Довести, що існує така вісь, проекція на яку кожного вектра є додатною.

34. Знайти множину таких точок площини, сума відстаней від кожної з яких до прямих, яким належать сторони одиничного квадрата, дорівнює 4.

35. Вершини правильного дев'ятикутника пофарбовані у два кольори – білий і чорний. Довести, що існують два рівні трикутники, вершинами кожного з яких є однокольорові вершини даного дев'ятикутника.

36. Довести, що даний квадрат можна розбити на довільне число менших квадратів, відмінне від 2, 3 і 5 (ці квадрати можуть бути і різних розмірів).

37. Дано плоский многокутник, симетричний відносно координатних осей. Координати всіх його вершин — цілі числа. Довести, що площа цього многокутника є цілим числом.

38. В одиничному квадраті міститься 51 точка. Доведіть, що хоча б три з них є внутрішніми точками круга радіуса $\frac{1}{7}$.

39. Знайти площу рівнобічної трапеції з основами 8 см і 10 см, якщо її діагоналі перпендикулярні.

40. Для того, щоб точки A, B, і C були вершинами прямокутного трикутника, в якому $\angle C=90^\circ$, необхідно і досить, щоб $\overline{AB}\cdot\overline{AC}+\overline{BC}\cdot\overline{BA}+\overline{CA}\cdot\overline{CB}=\overline{AB}\cdot\overline{AB}$.

41. На площині дано n точок, кожні три з яких не належать одній прямій. Довести, що серед цих точок існують такі точки A, B і C, що всі інші точки належать кругові, описаному навколо трикутника ABC.

42. Чи існує такий 1987–кутник, щоб його сторони мали послідовно довжини 1,2,3,...,1987 і в який можна було б вписати коло?

43. Знайти площу рівнобічної трапеції з основами 16 см і 20 см, якщо її діагоналі перпендикулярні.

44. Основи трапеції дорівнюють a і b ($a<b$). Діагоналі розбивають трапецію на чотири трикутники. Найменша із площ цих трикутників дорівнює S. Знайти площі інших трикутників.

45. Знайти кути ромба, якщо площа вписаного в нього круга удвоє менша від площі ромба.

46. На сторонах правильного плоского n–кутника зовні його побудовано квадрати. Відомо, що $2n$–кутник, утворений тими вершинами цих квадратів, які не є вершинами даного n–кутника, правильний. При яких значеннях n це можливо?

47. a і b — довжини двох сторін трикутника, а h_a і h_b — довжини відповідних висот. Довести, що коли $a>b$ то $a+h_a \geqslant b+h_b$.

48. В опуклому чотирикутнику діагоналі перпендикулярні. Довести, що ортогональні проекції точки перетину його діагоналей на прямі, яким належать сторони чотирикутника, належать одному колу.

49. На стороні AB довільного трикутника ABC взято точку L та проведено прямі $LM \parallel AC$ і $MN \parallel AB$ ($M \in BC$, $N \in AC$). Яке максимальне значення може мати площа трикутника LMN в порівнянні із площею даного трикутника?

50. Розв'язати рівняння $\cos 2x + 4\sin^4 x = 8\cos^6 x$.

51. Знайти дійсні значення параметра a, при яких нерівність $x^2 - |a+1|\, x + a + 1 > 0$ справедлива для всіх тих значень x, які задовольняють нерівність $|x| < 1$.

52. Відомо, що $a+b+c<0$ і рівняння $ax^2+bx+c=0$ не має дійсних коренів. Знайти знак вільного члена c.

53. Знайти три числа, кожне з яких дорівнює квадрату різниці двох інших чисел.

54. Розв'язати нерівність $|\sin x| > |\cos x|$.

55. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$.

56. Розв'язати нерівність $\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \cdot \sin 3x > \dfrac{5}{8}$.

57. Для всіх дійсних значень параметра a розв'язати нерівність $2x^2 + x - a - 8 \leqslant |x^2 + 2x - 2a - 4|$.

58. Побудувати графік функції $y = \dfrac{x^3 - x}{1 - |x|}$.

59. Розв'язати рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$.

60. Яке з чисел $\dfrac{10^{1990}+1}{10^{1991}+1}$ чи $\dfrac{10^{1991}+1}{10^{1992}+1}$ більше?

61. Розв'язати нерівність $\sin^6 x + \cos^6 x \geqslant a$.

62. Довести, що система рівнянь $\begin{cases} x^2 - yz = a, \\ y^2 - xz = b, \\ z^2 - xy = c \end{cases}$

при $a+b+c<0$ не має дійсних розв'язків.

63. Не використовуючи таблиць (калькуляторів), розв'язати рівняння $tgx = \dfrac{\cos 20° \cdot \cos 30°}{\cos^2 10°}$.

64. Побудувати графік рівняння $x^2 + 1 = 2x \cdot \sin y$.

65. Знайти всі цілі розв'язки рівняння $(x+1)(y^2 - x^2 - 4) = x^2$.

66. Розв'язати рівняння

$$4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - 4\cos^2\frac{x+y}{2} - 1 = 0.$$

67. Дано чотири точки, які не належать одній площині. Знайти таку площину, щоб всі ці точки були рівновіддалені від неї, дві з них знаходились по один бік цієї площини, а дві інші — по другий.

68. a, b і c — довжини сторін трикутника ABC, m_a — довжина його медіани, проведеної до сторони BC. Довести, що $m_a^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$.

69. ABC — рівносторонній трикутник, R — довжина радіуса описаного навколо нього кола, M — точка, що не належить площині ABC і віддалена від прямих AB, BC і AC на відстань R. Знайти кут між площинами ABC і MAB.

70. Вершини квадрата належать сторонам трикутника (при цьому, звичайно, дві його вершини належать одній стороні трикутника). a — довжина сторони квадрата, r — довжина радіуса вписаного в трикутник кола. Довести, що $r < a < 2r$.

71. Чи можна через будь-яку точку простору провести пряму, яка перетинає дві дані мимобіжні прямі? Відповідь обгрунтуйте.

72. У прямокутному трикутнику бісектриса одного з гострих кутів дорівнює $\frac{c\sqrt{3}}{3}$, де c — гіпотенуза. Знайти катети цього трикутника.

73. Довести, що висота рівнобічної трапеції, в яку можна вписати коло, є середнім геометричним її основ.

74. У прямокутному трикутнику проведено бісектрису гострого кута; відрізок, що сполучає її основу з точкою перетину медіан, перпендикулярний до катета. Знайти кути трикутника.

75. Знайти всі натуральні розв'язки рівняння $19x+93y=1993$.

76. Довести, що для будь-яких чисел a і b, вімінних від нуля, справедливі нерівності:

1) $\frac{a^6}{b^2}+\frac{b^6}{a^2}\geq a^4+b^4$; 2) $\frac{a^8}{b^4}+\frac{b^8}{a^4}\geq a^4+b^4$.

77. Корені рівняння $x^2+px+q=0$ — натуральні числа, причому $p+q=1993$. Знайти ці корені.

78. α, β, γ — кути трикутника, причому $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\sin\gamma$. Знайти кут γ.

79. У трикутнику ABC $\angle ABC=\alpha$, AD — бісектриса кута BAC, $BC=a$, $\angle ADC=\beta$. Знайти AD.

80. Довести, що при $n\geqslant5$ справедлива нерівність $4^n>n^4$.

81. Обчислити суму

$$S_n=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}.$$

82. Дано пряму a і точки A і B поза нею. Знайти на прямій a таку точку M, для якої AM^2+BM^2 досягає найменшого значення.

83. У трикутнику ABC $\angle A=60^\circ$. На стороні AB взято точку K так, що $AK=\frac{1}{2}AC$. Знайти BK, якщо відстань від центра описаного навколо трикутника ABC кола до прямої AC дорівнює a.

84. У трикутнику ABC $AB=BC=a$. На основі AC взято такі точки K і M, що $\angle MBK=90^\circ$. Знайти MB, якщо

$$\frac{1}{AM}=\frac{1}{MK}+\frac{1}{MC}.$$

85. Довести, що при будь-якому a існує трикутник із сторонами $\sqrt{a^2-a+1}$, $\sqrt{a^2+a+1}$, $\sqrt{4a^2+3}$ і площа цього трикутника не залежить від a.

86. Довести, що при $x>\pi$ виконується нерівність

$$\sin x\geq\frac{\pi^2-x^2}{\pi^2+x^2}\cdot x.$$

87. Розв'язати рівняння $x^4-4x^3-1=0$.

88. Розв'язати рівняння

$$(x^2+3x-4)^3+(2x^2-5x+3)^3=(3x^2-2x-1)^3.$$

89. Обчислити (не використовуючи таблиць і калькуляторів) $tg\,7^{\circ}30'$.

90. Довести, що для довільного натурального n, яке більше від 3, десятковий запис числа n^2 містить принаймні одну парну цифру.

91. Довести, що рівняння $x^2-6x-4\sqrt{x}+13=0$ не має дійсних коренів.

92. Внутрішню точку O плоского правильного $2n$–кутника з'єднано з його вершинами. Отримані трикутники пофарбовано через один червоним та синім кольорами. Довести, що сума площ "червоних" трикутників дорівнює сумі площ "синіх" трикутників.

93. На площині задано 1995 точок A_1, A_2, ..., A_{1995}. Перетворення S площини визначається в такий спосіб: спочатку здійснюється симетрія відносно точки A_1, потім — відносно A_2 і т.д., аж до останньої симетрії відносно точки A_{1995}. Довести, що існує тільки одна точка, яка залишається на місці при перетворенні S.

94. Одиничні квадрати таблиці розмірами 1995×1995 заповнені різними натуральними числами так, що числа кожного рядка зліва направо монотонно зростають. Одного разу в кожному стовпчику числа переставили так, що б вони в стовпчику (зверху вниз) монотонно спадали. Довести, що у кожному рядку отриманої таблиці, як і раніше, числа зліва направо монотонно зростають.

95. Доведіть, що остача від ділення простого числа на 30 буде або простим числом, або 1.

96. Знайдіть всі функції f: $R\to R$, для яких при будь-якому $x\in R$ виконується рівність

$$x(f(x)+f(-x)+2)+2f(-x)=0.$$

97. Відомо, що $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$ і $a+b+c+d+e=100$. Яке найменше можливе значення виразу $a+c+e$?

98. У країні є N міст ($N\geqslant3$). Деякі з них сполучено шляхами, кожний з яких сполучає рівно два міста. Відомо, що коли якісь два міста не сполучені шляхом, то знайдеться третє місто, сполучене шляхом з кожним з цих двох. Якою може бути найменша кількість шляхів у такій країні?

99. На сторонах AB, BC і CA гострокутного трикутника ABC взято такі точки M, N і K, що $\angle AMK = \angle BMN = \angle ACB$. Довести, що єсли $AN \cap BK = L$, то точки C, K, L і N належать одному колу.

100. Розв'язати рівняння $\sqrt{-x^2-2x} + \sqrt{8-x^2-2x} = 4$.

101. На координатній площині взято точки A, B, C з цілочисельними координатами. Відомо, що $\angle ABC = 45^\circ$, та що на відрізках AB і AC немає точок з цілочисельними координатами, крім точок A, B та A, C. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

102. Знайдіть всі такі пари дійсних чисел $(p;q)$, що чотири корені рівнянь $x^2-px-1=0$ і $x^2-qx-1=0$, розміщені в деякому порядку, утворюють арифметичну прогресію.

103. Точка D є внутрішньою точкою плоского гострокутного трикутника ABC. Відомо, що три з чотирьох радіусів кіл, описаних навколо трикутників ABC, ABD, BCD і CAD, рівні між собою. Доведіть, що насправді рівні всі чотири радіуси.

104. Два злодії вкрали коштовний ланцюг, що містить $2k$ срібних та $2m$ золотих кілець. Знайдіть найменшу кількість розрізів (в залежності від k та m), яку буде досить зробити для будь-якого порядку кілець, щоб можна було поділити ланцюг порівну між злодіями (тобто, щоб кожний отримав k срібних та m золотих кілець).

105. Про цілі числа m і n відомо, що $\dfrac{n^2}{m+n}$ – ціле число. Доведіть, що число $\dfrac{m^3}{m+n}$ – ціле.

106. Доведіть, що якщо суми синусів протилежних кутів опуклого чотирикутника рівні між собою, то цей чотирикутник – трапеція або паралелограм.

107. Знайти всі трійки дійсних чисел x, y, z, які задовольняють рівності

$$x = \sqrt{\left|\frac{1-y}{1+y}\right|},\quad y = \sqrt{\frac{1+z}{2}},\quad z = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}.$$

108. У новосформованому десятому класі деякі учні виявилися вже знайомими між собою, а деякі – ні. У перший день навчання кожна дівчинка замріяно подивилася на кожного із знайомих хлопців, тоді як кожен хлопець замріяно подивився на кожну з незнайомих дівчат. Усього було 117 замріяних поглядів. Скільки в класі хлопців і скільки дівчаток, якщо всього в класі не більше 40 учнів?

109. Дві різні паралельні проекції просторової замкненої ламаної $ABCD$ на одну і ту ж саму площину є паралелограмами. Чи можна твердити, що $ABCD$ – паралелограм?

110. Знайти всі трійки дійсних чисел x, y, z, що задовольняють рівностям $x+yz=y+zx=z+xy=6$.

111. Нехай O – центр кола, вписаного в довільний трикутник ABC, S – центр кола, описаного навколо трикутника AOC. Довести, що точки B, O та S належать одній прямій.

112. Зобразити на координатній площині множину всіх точок $(x;\ y)$ таких, що $x^2 = y + \sqrt{x+y}$.

113. Чи існує нескінченна зростаюча послідовність натуральних чисел a_1, a_2, a_3, ... така, що для будь-якого цілого невід'ємного числа k нескінченна послідовність $k+a_1$, $k+a_2$, $k+a_3$, ... містить лише скінченну кількість простих чисел (можливо, жодного)?

114. У країні n^2 міст, розташованих у вигляді квадрата розміром $n \times n$, причому відстані між сусідніми містами дорівнюють 10 км. Міста з'єднані системою доріг, що складається із прямолінійних ділянок, паралельних сторонам квадрата. Яка найменша можлива довжина цієї системи доріг, якщо відомо, що з довільного міста можна добратися до будь-якого іншого міста?

115. Знайти всі трійки дійсних чисел x, y, z, для яких виконується рівність

$$\sqrt{3z^2 - 2y - 6z} = \sqrt{2x - y^2 + z^2 - 7} - \sqrt{2y - x^2 + z^2 - 12}.$$

116. Сільський гіпнотизер Іван Карпович розводить індиків та курей. Внаслідок його експериментів десята частина індиків вважає, що вони – кури, а десята частина курей вважає, що вони – індики.

Всього п'ята частина птахів Івана Карповича вважає себе індиками. А якою є частина індиків у його пташнику насправді?

117. На сторонах AB, BC, CA трикутника ABC взято точки P, Q, R відповідно, а на відрізках RP, PQ, QR – точки A_1, B_1, C_1 відповідно таким чином, що $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CA \parallel C_1A_1$. Площа трикутника ABC дорівнює a, а площа трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює b. Чому дорівнює площа трикутника PQR?

118. На дошці записано в ряд цілі невід'ємні числа a_0, a_1, a_2, ..., a_{10}, кожне з яких не перевищує 10 і при цьому для кожного цілого i, $0 \leqslant i \leqslant 10$, число і зустрічається серед записаних рівно a_i разів. Які числа записано на дошці?

119. Функцію f задано на множині всіх додатних дійсних чисел, і для кожного x з проміжку $(0;\pi/4)$ виконується рівність

$$f(tg2x) = tg^4x + ctg^4x.$$

Довести, що для всіх x з проміжку $(0;\pi/2)$ виконується нерівність

$$f(sinx) + f(cosx) \geqslant 196.$$

120. Для кожного натурального числа n розв'яжіть рівняння $sin^2x + sin2x\ sin4x + sin3x\ sin9x + \ldots + sin\ nx\ sin^2nx = 1.$

121. Для кожного натурального числа n позначимо $a(n) = n^2 + n + 1$. Через S позначимо множину всіх значень $a(n)$, $n \geqslant 1$. Доведіть, що: а) для кожного натурального n число $a(n)a(n+1)$ належить S; б) доведіть, що існують числа n і k, більші за 2001, такі, що число $a(n)a(k)$ не належить S.

122. Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел a, b, c, d, e виконується нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqslant (a+b+c+d)e.$$

123. П'ятикутник $ABCDE$ вписаний у коло. Відомо, що промені AE і CD перетинаються в точці P, а промені ED і BC перетинаються в точці Q так, що $PQ \parallel AB$. Доведіть, що $DA = DB$.

124. Одну з вершин правильного 2001-кутника пофарбовано у чорний колір, а решту його вершин – у білий. За один крок дозволяється вибрати будь-яку пофарбовану у чорний колір вершину та змінити колір на проти-

лежний у неї та ще у двох сусідніх з нею вершин (протилежним до чорного кольору вважається білий колір, а до білого кольору – чорний). Чи можливо за декілька зазначених кроків пофарбувати всі вершини вихідного 2001-кутника у білий колір?

125. Чи існує таке натуральне число n, що число $n^n+(n+1)^n$ ділиться на 2003?

126. Дійсний корінь квадратного рівняння $a^2+bx+b=0$ помножили на дійсний корінь квадратного рівняння $ax^2+ax+b=0$ і в результаті одержали 1. Знайти ці корені.

127. Дано опуклий чотирикутник $ABCD$ такий, що $\angle ABC=90^\circ$, $AC=CD$ і $\angle BCA=\angle ACD$. Точка F – середина відрізка AD. Відрізки BF і AC перетинаються в точці L. Доведіть, що $BC=CL$.

128. Нехай a, b, c та x, y, z – такі додатні дійсні числа, що $a+x=b+y=c+z=1$. Доведіть нерівність

$$(abc+xyz)\left(\frac{1}{ay}+\frac{1}{bz}+\frac{1}{cx}\right)\geq 3.$$

129. Площину пофарбували в три кольори, тобто кожна точка має один із трьох даних кольорів і при фарбуванні були використані всі три кольори. Довести, що на цій площині можна знайти трикутник з площею 1, всі вершини якого пофарбовані в один колір.

130. Нехай a – таке дійсне число, що числа a^2+a та a^3+2a є раціональними. Доведіть, що a також є раціональним числом.

131. Доведіть, що не існує таких непарних натуральних чисел m, n і k, що mn^3-2003, nk^3+2005 і km^3-2007 є квадратами натуральних чисел.

132. Знайдіть усі такі дійсні числа x, які не є цілими і при цьому задовольняють рівність

$$x+\frac{2004}{x}=[x]+\frac{2004}{[x]},$$

де $[x]$ – ціла частина числа x.

133. Нехай у трикутнику ABC точки M і N є серединами сторін BC і AC відповідно. Відомо, що точка перетину висот трикутника ABC збігається з точкою перетину медіан трикутника AMN. Знайдіть величину кута ABC.

134. Доведіть, що якщо x, y, $z > 0$ і $x+y+z=1$, то виконується нерівність

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}+\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{x}+\frac{z^3}{y} \geq \frac{x^2+y^2+z^2+1}{2}.$$

135. Кожне натуральне число пофарбовано в один із двох кольорів – синій або жовтий, причому чисел кожного з кольорів безліч. Відомо до того ж, що сума будь-яких 2003 попарно різних чисел синього кольору є числом синього кольору, а сума будь-яких 2003 попарно різних чисел жовтого кольору є числом жовтого кольору. Визначте, якого кольору буде число 2004, якщо число 1 пофарбовано синім кольором. Відповідь обґрунтуйте.

136. Розв'язати рівняння

$$\sin x \sin 2x \ldots \sin nx = 1,$$

де n – довільне натуральне число.

137. Знайти суму квадратів коренів рівняння $(x^2+2x)^2-5(x^2+2x)+3=0.$

138. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{4x-1}=1.$$

139. Знайти найменше значення виразу

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

140. Розв'язати рівняння $\sin^3 x+9\sin^2 x+9\sin x+6=0.$

141. Побудувати графік рівняння

$$\sqrt{y+1}=\sqrt{|x|}-1.$$

142. Знайти найменше значення функції $y=x(x+1)(x+2)(x+3).$

143. Послідовність задається умовами:

$x_1=1,\ x_{n+1}=|x_n-n|$, якщо $n=1, 2, 3, \ldots$. Знайти x_{2005}.

144. Знайти суму $1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\ldots+100\cdot 2^{99}$.

145. Довести, що для довільних різних натуральних чисел m і n виконується нерівність

$$3(m^2+n^2) \geqslant 5(m+n).$$

§5. ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДИНАДЦЯТОГО КЛАСУ

1. Скільки коренів має рівняння $x^5-5x-2a=0$ залежно від значень параметра a?
2. Знайти прості числа p і q, якщо відомо, що рівняння $x^4-px^3+q=0$ має цілий корінь.
3. Знайти всі розв'язки рівняння $2^{2x}-2^{x+1}\cdot \sin y+1=0$.
4. Довести, що при будь-яких дійсних a і b, які одночасно не дорівнюють нулю, рівняння
$\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{x-1}=1$ має дійсний корінь.
5. При яких $a\in R$ довільний розв'язок нерівності
$\dfrac{\log_3(x^2-3x+7)}{\log_3(3x+2)}<1$ буде також розв'язком нерівності
$x^2+(5-2a)\,x\leqslant 10a$?
6. Доведіть: якщо в шестизначному числі, яке ділиться на одне з чисел 7, 11, 13, 37, переставити першу цифру на кінець числа, то одержане число буде мати той самий дільник, що і дане число.
7. При якому α рівняння $1+\sin^2\alpha x=\sin x$ має єдиний розв'язок?
8. Знайти тризначне число, квадрат якого дорівнює п'ятому степеню суми його цифр.
9. При яких значеннях $a\in R$ рівняння
$\dfrac{2^{2x}}{2^{2x}+2^{2x+1}+1}+a\cdot\dfrac{2^x}{2^x+1}+a=1$ має єдиний корінь?
10. З пункту A вниз за течією річки одночасно відпливли пліт і катер, а назустріч їм в той самий момент часу з пункту B відправився другий такий самий катер. До чого буде ближче пліт — до пункту A чи до другого катера, коли перший катер прибуде в B?
11. Доведіть, що система рівнянь
$$\begin{cases}1986yz+x^2+z=0,\\1986xy+z^2+x=0,\\1986xz+y^2+y+1=0\end{cases}$$
не має розв'язку.

12. Довести, що всі натуральні числа від 1 до 1985 не можна записати підряд в такому порядку, щоб утворене число було точним квадратом.

13. Знайти всі дійсні розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} x^3 + y^2 + x + 1 = 0, \\ y^3 + x^2 + y + 1 = 0. \end{cases}$$

14. Фігуру на площині задано системою нерівностей

$$\begin{cases} |y| - |x| \le 1, \\ |y| \ge x^2 + 1. \end{cases}$$

Обчислити її площу.

15. Послідовність x_1, x_2, x_3, ... задовольняє співвідношенню $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$. Яким повинно бути x_1, щоб $x_{10} = x_1$?

16. Дійсні числа a, b, c, x, y, z такі, що $a^x = bc$, $b^y = ac$, $c^z = ab$, причому числа a, b, c додатні і хоча б одне з них не дорівнює 1. Довести, що $xyz = 2 + x + y + z$.

17. Розв'язати рівняння

$$4\sqrt[n]{(2x-7)^2} + \sqrt[n]{(2x+7)^2} = 4\sqrt[n]{4x^2 - 49}.$$

18. Побудувати такий многочлен з цілими коефіцієнтами (відмінний від тотожного нуля), щоб число $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}$ було його коренем.

19. Довести, що $\dfrac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \ge 2$ при будь-яких дійсних a.

20. Довести, що для додатних a, b, c виконується нерівність

$$\frac{a + ab}{b + ab} + \frac{b + bc}{c + bc} + \frac{c + ac}{a + ac} < \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 2.$$

21. Довести, що для всіх натуральних n число $5^{2n-1} \cdot 2^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 2^{2n-1}$ ділиться на 19.

22. Довести, що для всіх $x > 0$ і натуральних n виконується нерівність $x^n \le \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \cdot e^x$.

23. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n}{n^n}$.

24. Довжини a, b, c і d суміжних сторін опуклого чотирикутника такі, що його площа дорівнює $\frac{1}{2}(ab+cd)$. Довести, що вершини цього чотирикутника належать колу.

25. Кола $(O_1; r_1)$ і $(O_2; r_2)$ дотикаються зовнішнім способом в точці A і до прямої l — в точках B і C. Знайти площу чотирикутника O_1BCO_2, якщо $AB=8$ і $AC=6$.

26. Чи можна утворити піраміду поверхня якої складається з чотирьох плоских рівних тупокутних трикутників?

27. На площині задано 3 прямі. Побудувати рівносторонній трикутник так, щоб кожній з цих прямих належала одна з його вершин. Скільки розв'язків має ця задача в залежності від взаємного розміщення даних прямих?

28. Якщо довжини сторін трикутника утворюють геометричну прогресію, а довжини відповідних висот — арифметичну, то цей трикутник є рівностороннім. Довести.

29. Обчислити площу прямокутного трикутника, якщо *медіана, проведена до гіпотенузи, має довжину 15 см*, а радіус вписаного кола — 4 см.

30. Точка M є внутрішньою точкою гострого плоского кута. Побудувати на сторонах цього кута точки A і B (по одній на кожній стороні) так, щоб трикутник ABM мав найменший периметр.

31. Через довільну точку M основи ABC тетраедра $ABCD$ проведено відрізки, паралельні до бічних ребер до перетину з бічними гранями. Нехай a, b і c — довжини бічних ребер, а x, y і z — довжини відповідно паралельних до них відрізків. Довести, що

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

32. Довести, що коли сума величин плоских кутів при вершині піраміди більша від 180°, то довжина кожного її бічного ребра менша від півпериметра основи.

33. В трапеції $ABCD$ $AB \parallel CD$, $AB=2CD=2AD$. Знайти площу трапеції, якщо $AC=a$, $BC=b$.

34. Діаметр кола поділено на n рівних частин. На колі взято точку M. Довести, що сума квадратів відстаней від точки M до точок поділу не залежить від вибору на колі цієї точки.

35. Чи існує чотирикутна піраміда, у якої дві протилежні грані перпендикулярні до площини основи?

36. Навколо рівностороннього трикутника із стороною 1 описано коло. Довести, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин трикутника є сталою. Знайти її.

37. Знайти мінімальний об'єм тіла, одержаного при обертанні рівнобічної трапеції, в яку вписано коло радіуса $r=1$, навколо прямої, яка містить більшу основу.

38. Сума некомпланарних векторів $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ із спільним початком M дорівнює нульовому вектору. Довести, що через точку M не можна провести площину так, щоб кінці всіх даних векторів лежали по один бік від неї.

39. Площа опуклого чотирикутника дорівнює 1986^2 см^2. Довести, що його периметр не менший, ніж $4 \cdot 1986$ см. Чи може периметр дорівнювати $4 \cdot 1986$ см?

40. Основи трапеції a і b, а сума кутів при основі дорівнює 90°. Знайти довжину відрізка, який визначається серединами основ.

41. У змаганнях на кубок з футболу (один круг) бере участь 30 команд. Довести, що в будь-який момент знайдуться дві команди, які зіграли однакову кількість ігор.

42. Яке найменше число учасників може бути в математичному гуртку, якщо дівчат в ньому менше 50%, але більше 40%?

Розв'язати такі рівняння.

43. $\sqrt{4-x^2} + \sqrt{1+4x} + \sqrt{x^2+y^2-2x-3} = \sqrt[4]{x^4-16} - y + 5$.

44. $\log_{\sqrt{a}} \dfrac{\sqrt{2a-x}}{a} - \log_{\frac{1}{a}} x = 0$.

45. $x\left(\sqrt{x^2+2}+1\right) + (x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x+3}+1\right) = 0$.

46. $\sin^{1991} x - \cos^{1991} x = 1$.

47. $\left(1+x^2+x^4+x^6+x^8\right)\cdot\left(1+x^{10}\right) = 10x^9$.

48. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

49. $\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots - \cos 100x = \dfrac{1}{2}$.

50. Знайти натуральні корені рівняння
$17\cdot(xyzt+xy+xt+zt+zt+1)-54\cdot(yzt+y+t)=0.$

51. Знайти найменше із значень x, для якого існують числа y,z, що задовольняють рівняння
$x^2+2y^2+z^2+xy-xz-yz=1$

52. Довести, що рівняння $x^2+y^2=n$ і $x^2+y^2=2n$, $n\in N$, мають однакову кількість розв'язків в цілих числах.

53. Розв'язати в натуральних числах рівняння
$x^2+y^2+z^2+xyz=20.$

54–56. Розв'язати системи рівнянь:

54. $\begin{cases} x+y=1, \\ 200\cdot 5^x=2^y. \end{cases}$

55. $\begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=420, \\ y^2+x\sqrt{xy}=280. \end{cases}$

56. $\begin{cases} \sqrt{(x+3)^2}=x+3, \\ \sqrt{(x-3)^2}=3-x. \end{cases}$

57–58. Розв'язати нерівності:

57. $\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{x-1}\geq x.$

58. $\sin x>\sqrt{1-\sin 2x}.$

59. Довести, що $\sqrt{33-16\sqrt{3}\sin 80^\circ}=1+8\sin 10^\circ.$

60. Довести, що коли $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$, то $(a+b+c)^3=27abc.$

61. Довести нерівність $\sin^{2n}x+\cos^{2n}x\geq\dfrac{1}{2^{n-1}}.$

62. $a_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{2}}$ Довести, що для кожного $n\in N$ справджується нерівність $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n<\dfrac{\pi}{2}.$

63. Для додатних a, b, c довести нерівність
$\dfrac{2(a+b+c)^3}{abc}\geq 7\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{d}\right)+7\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\right)+12.$

64. Довести, що для кожного $n\in N$
$\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\ldots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}<\dfrac{\pi n^2}{4}.$

65. Обчислити інтеграл $\int\limits_{1}^{3}\sqrt{4x-x^2-3}\,dx$.

66. Чи можна записати по колу цифри 1,2,...,9 так, щоб з кожних двох сусідніх цифр можна було утворити просте двозначне число?

67. Знайти множину точок, координати x і y яких задовольняють нерівність $2-x^2-y^2-\sqrt{(1-x^2)^2+(1-y^2)^2}>0$.

68. При якому значенні $a\in R$ площа фігури, обмеженої параболою $y=2x^2$ і прямою $y=a$, дорівнює $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$?

69. У кожній вершині правильного 1992-кутника записано додатне число, причому кожне з цих чисел дорівнює або середньому геометричному, або середньому арифметичному двох чисел, які записано в сусідніх вершинах. Відомо, що серед записаних чисел є число 26. Знайти решту записаних чисел.

70. На сторонах AB і BC зовні плоского трикутника ABC побудовано квадрати ABB_1A_1 і BCC_1B_2. Довести, що продовження висоти BD трикутника ABC є медіаною трикутника B_1BB_2.

71. Клітини шахової дошки розміром $2n\times 2n$ пофарбовано $2n^2$ фарбами, кожною по 2 клітини. Довести, що на дошці можна так розташувати n тур, щоб вони стояли на клітинах різного кольору (попарно) і не били одна одну.

72. Дошка розміром 4×7 одиничних клітинок пофарбована у два кольори (кожна клітинка біла або чорна). Довести, що знайдеться прямокутник, сторони якого паралельні сторонам дошки, а вершини лежать у центрах чотирьох клітин одного кольору.

73. Два кола, центри яких знаходяться в точках O_1 і O_2, перетинаються в двох точках, одна з яких M. Дві точки X_1 і X_2 починають одночасно рухатись з точки M по першому та другому колах відповідно з рівними кутовими швидкостями. Довести, що на площині існує така точка N, що $X_1N=X_2N$ в будь-який момент часу.

74. Довжина драбини, що стоїть біля стіни вертикально, 4 м. Нижній кінець драбини починає ковзати по підлозі із сталою швидкістю 2 м/сек. З якою швидкістю опускається верхній кінець драбини?

75. Довести, що відрізки, які з'єднують середини мимобіжних ребер трикутної піраміди, перетинаються в одній точці.

76. Твірна конуса має довжину l, а висота — h. Конус перетяли прямою, паралельною до площини основи і віддаленою від неї на відстань $\frac{1}{2}h$, а від висоти — на відстань d. Знайти довжину відрізка цієї прямої, обмеженого поверхнею конуса.

77. Три послідовні сторони основи чотирикутної піраміди мають довжини a, b, c. Бічні грані утворюють з площиною основи піраміди рівні двогранні кути. Обчислити четверту сторону основи.

78. Через вершину конуса проведені всі можливі перерізи. Знайти серед них переріз, що має найбільшу площу.

79. У правильній чотирикутній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бічна грань і переріз AB_1C — рівновеликі. Знайти кут між площиною цього перерізу і бічним ребром призми.

80. Сторона основи правильної шестикутної піраміди $MABCDPK$ дорівнює a, кут між бічним ребром і стороною основи, яку воно перетинає, 80°. Жук почав повзти по поверхні піраміди з точки A і, побувавши на всіх бічних гранях, повернувся в точку A. Визначити найменшу можливу довжину шляху жука.

81. Переріз правильної трикутної піраміди із стороною основи a деякою площиною є квадрат із стороною b. Знайти об'єм піраміди.

82. Про дійсне число K та послідовність дійсних чисел u_0, u_1, u_2,... відомо, що $u_0=1$, $u_{1995}=100$, $u_1 \cdot u_2>O$, $u_{n+1} \cdot u_{n-1}=Ku_n$ для всіх натуральних n. Знайти K.

83. Чи існує такий многочлен $p(x)$ з дійсними коефіцієнтами, що $p(x) \geqslant 1995\, p'(x)$ для всіх дійсних x?

84. Функція f визначена на множині цілих невід'ємних чисел і набуває значень з цієї множини. Для довільного числа n з цієї множини виконується рівність $f(f(n))+f(n)=2n+3$. Знайти $f(1995)$.

85. У деякому місті є декілька (більше, ніж один) автобусних маршрутів. Кожні два з них мають рівно одну спільну зупинку, кожні дві зупинки з'єднує хоча б один маршрут. Знайти:

а) кількість маршрутів, якщо на кожному з них рівно три зупинки;

б) кількість зупинок на кожному з маршрутів, якщо кількість маршрутів дорівнює 13, і на кожному з них не менше трьох зупинок.

86. Плоский квадрат вписано в круг. На сторонах квадрата як на діаметрах всередині квадрата побудовано півкруги. Чотири попарних перетини цих півкругів утворюють фігуру "квітка". Доведіть, що площа цієї "квітки" дорівнює площі частини описаного круга, що лежить поза квадратом.

87. Переставивши в деякому порядку числа 1,2,3,..., 1994, дістали послідовність a_1, a_2, $a_3,\ldots,a_{1994}$. Доведіть, що найбільше з чисел $(n-1)a_n$, $1 \leqslant n \leqslant 994$, не менше від 997^2.

88. Знайдіть усі функції $f:R\to R$, які при будь-яких дійсних x і y задовольняють рівність $f(x^2+y)=f(x)+f(y^2)$.

89. Трикутник $A_1B_1C_1$ є ортогональною проекцією на площину правильного трикутника ABC з довжиною сторони 1. Відомо, що $A_1B_1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $A_1C_1 < \frac{1}{2}$. Доведіть, що кут між площинами ABC і $A_1B_1C_1$ більший за 60°.

90. Для всіх дійсних x доведіть нерівність

$$x^2 \sin x + x\cos x + x^2 + \frac{1}{2} > 0.$$

91. Знайдіть всі пари дійсних чисел, які задовольняють систему рівнянь $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 16^y = 48. \end{cases}$

92. У трикутнику ABC $AB=AC$ і $\angle A=100^\circ$, $P\in AC$, BP — бісектриса кута B. Довести, що $AP+BP=BC$.

93. Довести, що для будь-якого натурального числа $n\geqslant 2$ виконується нерівність $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}>n\sqrt[n]{2}-n$.

94. Точки площини пофарбовано в чорний або білий колір. Довести, що на цій площині знайдеться трикутник з кутами 30°, 60° і гіпотенузою 2, вершини якого однокольорові.

95. Послідовність чисел a_0, a_1, $a_2,\ldots$, $a_n,\ldots$ побудована таким чином, що $a_0=0$, $a_1=k$, $a_{n+2}=ka_{n+1}-a_n$ для всіх $n\geqslant 0$ (k — деяке натуральне число). Довести, що число $a_{n+1}^2+a_n^2$ ділиться на $a_{n+1}\cdot a_n+1$ для всіх $n\geqslant 0$.

96. Двоє гравців у виразі $a_1 sinx+a_2 cos2x+a_3 sin3x+$ $+a_4 cos4x+\ldots+a_{1996}\cdot cos1996x+a_{1997}\cdot sin1997x$ по черзі вибирають ще не вибрані числа a_i та замінюють їх будь-якими дійсними числами. Коли всі a_i замінені, отримується функція $f(x)$. Якщо рівняння $f(x)=0$ має корінь на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, то виграє той, хто починав гру. В іншому випадку виграє його суперник. Хто з двох гравців може забезпечити собі виграш?

97. Задано опуклий п'ятикутник, в якому кожна діагональ паралельна одній із сторін. Довести, що відношення довжини діагоналі до довжини відповідної паралельної сторони є одним і тим самим для всіх п'яти пар таких відрізків. Знайти величину цього відношення.

98. Знайти всі дійсні числа x, y такі, що $x\geqslant y\geqslant 1$ та $2x^2-xy-3x+y+1=0$.

99. У трикутнику ABC через AA_1, BB_1, CC_1 позначено висоти, а через AA_2, BB_2, CC_2 — медіани. Доведіть, що довжина ламаної $A_2B_1C_2A_1B_2C_1A_2$ дорівнює периметру трикутника.

100. Довести, що для довільного a $(1<a<2)$ площа фігури, обмеженої графіками функцій $y=1-|x-1|$ і $y=|2x-a|$, менша, ніж $\frac{1}{3}$.

101. Точки M та N відмічено на стороні AB трикутника ABC. Відомо, що радіуси кіл, описаних навколо $\triangle AMC$ та $\triangle BNC$, співпадають. Також співпадають радіуси кіл, описаних навколо $\triangle ANC$ та $\triangle BMC$. Доведіть, що $\triangle ABC$ рівнобедрений.

102. За круглим столом сидять 30 учнів, кожен з яких або завжди говорить правду, або завжди бреше. Відомо, що серед двох сусідів кожного брехуна є один брехун. При опитуванні 12 учнів сказали, що один з

їх сусідів брехун, а решта сказали, що обидва сусіди – брехуни. Скільки брехунів сидить за столом?

103. Дано невід'ємні дійсні числа x та y, які задовольняють умовам $x - \sqrt{x} \le y - \frac{1}{4} \le x + \sqrt{x}$.

Довести, що для цих чисел виконуються нерівності

$y - \sqrt{y} \le x - \frac{1}{4} \le y + \sqrt{y}$.

104. Розв'язати рівняння

$$\cos 12x = 5\sin 3x + 9tg^2 x + ctg^2 x.$$

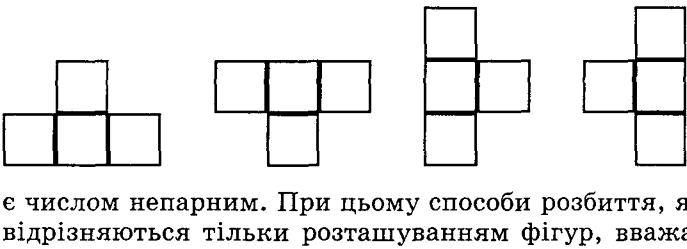
105. Відомо, що на сторонах CD і AD опуклого чотирикутника $ABCD$ існують такі точки K і M відповідно, що кожна з прямих AK та CM розбиває цей чотирикутник на дві рівновеликі частини. Нехай P – точка перетину прямих KM та BD. Знайти відношення площі даного чотирикутника до площі чотирикутника $ABCP$.

106. Про функцію f, яка визначена на множині всіх відмінних від нуля дійсних чисел і набуває дійсних значень, відомо, що рівняння $f(x)=0{,}5$ має принаймні один корінь та

$f(x)-f(y)=f(x)f\left(\frac{1}{y}\right)-f(y)f\left(\frac{1}{x}\right)$ для всіх $x \ne 0$, $y \ne 0$.

Знайти $f(-1)$.

107. Прямокутник розміром $2^{1998} \times 1998^2$ поділено на одиничні квадрати – клітинки. Довести, що кількість способів, якими цей прямокутник можна розбити на фігури, кожна з яких є або прямокутником із трьох клітинок, або складеною із чотирьох клітинок фігурою вигляду



є числом непарним. При цьому способи розбиття, які відрізняються тільки розташуванням фігур, вважаються різними.

108. Розв'язати рівняння
$(1+x+x^2)(1+x+x^2+\ldots+x^{10})=(1+x+\ldots+x^6)^2$.

109. Нехай α та β – гострі кути, для яких виконується рівність $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$. Довести, що $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

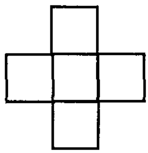
110. Чи існує функція f, яка визначена на всій множині дійсних чисел, має похідну у всіх точках та задовольняє умову:

а) при всіх дійсних x виконується нерівність $f(x)\geqslant f(x+\sin x)$;

б) рівняння $f(x)=0$ має скінченну кількість коренів?

111. Нехай точка P знаходиться всередині гострокутного трикутника ABC. На сторонах AC і BC відмітили такі точки M і K відповідно, що $\angle PMC=\angle PKC=90^\circ$. Довести, що якщо точки M та K рівновіддалені від середини сторони AB, то $\angle PBC=\angle PAC$.

112. Чи можна шахівницю розміром 7×7, із якої вилучено чотири кутові клітинки, так заповнити цілими числами (у кожну клітинку записується одне число), сума яких дорівнюватиме числу 199919991999, щоб у будь-якій п'ятиклітинковій фігурі вигляду



сума чисел була від'ємною?

113. Чи існує натуральне число, десятковий запис якого складається лише з двійок та яке можна подати у вигляді суми кубів деяких трьох послідовних натуральних чисел?

114. Дано коло ω та різні точки B, C, D на ньому. Дотична до ω, проведена через точку D, перетинає промінь CB у точці A. На продовженні відрізка BD за точку D обрано довільну точку E. Коло, яке описане навколо трикутника CDE, перетинає пряму AD у точці K, що відмінна від D, а пряму AC – у відмінній від C точці F. Довести, що прямі KF та BD паралельні.

115. Знайдіть всі такі пари дійсних чисел a, b, що для будь-якого $x \in R$ справджується рівність

$$\sin 1999x + \sin ax + \sin bx = 0.$$

116. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 12, \\ xyz = 2 + x + y + z, \end{cases}$$

якщо відомо, що x, y, z – невід'ємні дійсні числа.

117. Множина X складається з шести попарно різних елементів. Нехай A_1, A_2, ..., A_9 – такі підмножини X, що кожна з них містить по три попарно різних елементи. Довести, що існує "пофарбування" елементів множини X в два кольори (тобто, кожному елементу ставиться у відповідність один з двох кольорів) таке, що в кожній множині A_i, $1 \leqslant i \leqslant 9$, буде принаймні два різнокольорових елементи.

118. Числова послідовність a_1, a_2, a_3, ..., в якій $a_1 = 2$, $a_2 = 500$, $a_3 = 2000$, при всіх натуральних $n \geqslant 2$ задовольняє умову $\frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{a_{n+1} + a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}$. Доведіть, що всі члени цієї послідовності є натуральними числами, причому a_{2000} ділиться без остачі на число 2^{2001}.

119. Знайдіть усі функції f, які визначені на всій числовій осі та одночасно задовольняють такі дві умови:

а) рівняння $f(x) = 0$ має єдиний корінь,

б) для будь-яких x, $y \in R$, виконується рівність

$$f(y + f(x)) = f(x^2 - y) + 4f(x)y.$$

120. Поза площиною α дано точку A. Доведіть, що для будь-якої прямої l, яка належить площині α, у цій же площині існує така відмінна від l пряма $m \parallel l$, що для кожної точки спільний перпендикуляр мимобіжних прямих l та AM проходитиме через середину відрізка AM.

121. Знайти найменше натуральне число n, при якому виконується рівність

$$\sin(n^\circ + 80^\circ) + \sin(n^\circ - 40^\circ) + \sin(n^\circ + 70^\circ) = \sin 65^\circ.$$

122. На сторонах AC і BC трикутника ABC, зовні його, побудовано трикутники ALC і CKB ($\angle ALC = \angle CKB = 90^\circ$, $\angle LAC = \angle KCB = 30^\circ$). Точка Q ділить відрізок AB у відношенні $AQ:QB = 3:1$. Доведіть, що $\angle KQL = 90^\circ$.

123. Нехай $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ – дійсні числа, для яких $x+y=2$. Довести, що $x^2y^2(x^2+y^2) \leqslant 2$.

124. Натуральне число n таке, що $n+1$ ділиться на $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$. Довести, що $(n-1)(n-3)$ ділиться на $\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1$, де $\lfloor a \rfloor$ – найбільше ціле число, яке не перевищує a.

125. Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами. Відомо, що $P(x^2-x+1) = Q(x^2+x+1)$ для всіх дійсних значень x, а $P(2002)=2003$. Знайдіть $Q(2003)$.

126. Знайдіть усі значення параметра Q при яких рівняння $\sqrt{2-Qx}+2=x$ має лише один дійсний корінь.

127. Дано трикутник ABC, в якому $\angle B = 90^\circ$. Серединний перпендикуляр до сторони AB перетинає сторону AC в точці M, а серединний перпендикуляр до сторони AC перетинає продовження сторони AB за вершину B в точці N. Відомо, що відрізки MN і BC є рівними та перетинаються під прямим кутом. Знайдіть величини всіх кутів трикутника (у градусах).

128. Відомо, що

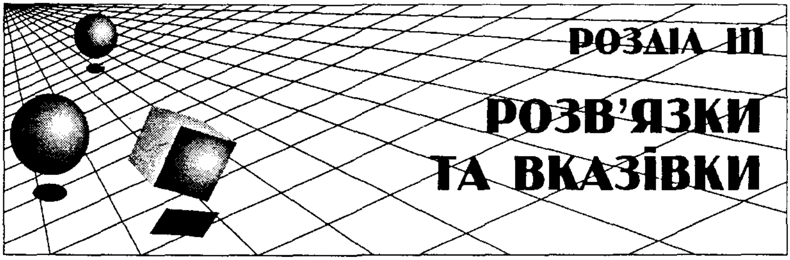
$$\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x+y+z)} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin(x+y+z)} = a\,.$$

Доведіть, що

$$\cos(x+y) + \cos(y+z) + \cos(z+x) = a\,.$$

129. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нехай точки E і F є основами перпендикулярів, проведених із точки A до прямих A_1D і A_1C відповідно, а точки P і Q є основами перпендикулярів, проведених із точки B_1 до прямих A_1C_1 і A_1C відповідно. Доведіть, що $\angle EFA = \angle PQB_1$.

130. Знайдіть усі такі визначені на множині $(0;+\infty)$ функції f, що для будь-якого $x>0$ виконується нерівність $f(x)>0$ і при всіх $x>0$ справджується рівність $f(xf(y))+f(x)+f(y)=f(x+y)$.



§1. СЬОМИЙ КЛАС

1. Щоб шукане число було найменшим, воно має розпочинатись найменшою можливою цифрою і мати найменше розрядів. При цих обмеженнях сума його цифр буде даною тільки тоді, коли всі останні цифри будуть найбільшими, тобто дев'ятками. $1982 = 220 \cdot 9 + 2$, тому шуканим буде число $2\underbrace{999\ldots9}_{220\text{раз}}$.

2. Треба розрізати 3 яблука на 4 рівні частини кожне, а 4 яблука – на 3 рівні частини кожне. Буде 12 чвертей яблук і 12 третин яблук. Тепер можна дати кожному по одній чверті і по одній третині яблука.

3. Нехай дане число $\overline{ab}$. За умовою задачі

$$b^3 + a^2 = \overline{ab},$$
$$b^3 + a^2 = 10a + b,$$
$$b\left(b^2 - 1\right) = a\,(10 - a),$$
$$b\,(b - 1)(b + 1) = a\,(10 - a).$$

Оскільки b і a — цифри, то шляхом підбору знаходимо $b=3$, $a=4$. Справді, $3\cdot2\cdot4 = 4\cdot6$; $24=24$.

Отже, шуканим є число 43.

4. Якби Саша стояв всередині черги, він був би поряд з двома якими-небудь хлопчиками. Але за умовою відомо, що він не стоїть поряд ні з Юрою, ні з Володею, ні з Олегом, а хлопчиків всього 5. Отже, Саша стоїть або на початку або в кінці черги, а поряд з ним (другим або четвертим) стоїть Коля. Але відомо, що Юра стоїть перед Колею, отже Коля не стоїть другим (тоді перед

ним стояв би тільки Саша) і, отже, стоїть четвертим (а Саша п'ятим). Якби Юра стояв перед Колею, то першим і другим стояли б Володя і Олег. Але відомо, що вони поряд не стоять. Отже, Юра стоїть другим, Олег — першим, а Володя — третім. Таким чином, хлопчики стоять в такому порядку: Олег, Юра, Володя, Коля, Саша.

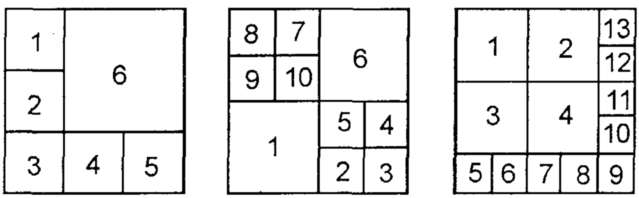
5. Розпочнемо із випадку, коли всі одержані многокутники є трикутниками.

   Після першого розрізування число вершин дорівнюватиме $3+1\cdot 3=6$. Після другого — $3+2\cdot 3$, після 662-го — $3+662\cdot 3=1989\neq 1983$.

   Якщо при розрізуванні появиться хоч один многокутник, відмінний від трикутника, то число вершин всіх одержаних многокутників буде більшим, ніж 1989 (переконайтесь в цьому, розрізавши даний прямокутник на два чотирикутники, а потім — на нові чотирикутники, або на п'ятикутники і трикутники і т.д.). Отже, підрахунок проведено неправильно.

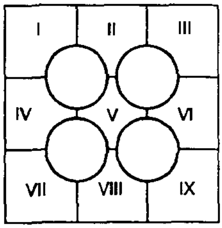
6. Нехай ми відкрили коробку з надписом "Гвинти", а в ній виявились цвяхи, отже, в тій коробці, на якій надпис "Гайки", будуть гвинти, а в тій, на якій надпис "Цвяхи", будуть гайки, тому що за умовою відомо, що написи на коробках перестали відповідати вмістові коробок. Отже, можна, відкривши одну з коробок, визначити, що лежить в кожній коробці.

7. Квадрат можна розрізати на 6 менших квадратів, на 10 менших квадратів, на 13. Такі розрізування показано на малюнках.



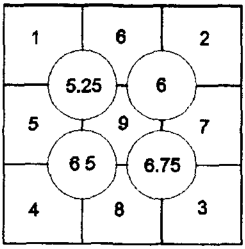
8. Якби всі 1984 числа були непарні, то їх сума була б парним числом, оскільки доданків парне число (1984). Але за умовою їх сума непарна. Отже, серед доданків є хоча б один парний. Але тоді добуток цих чисел — теж парне число, що й потрібно було довести.

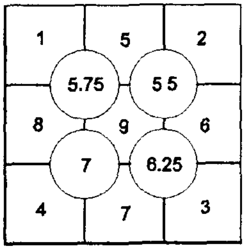
9. Пронумеруємо клітки квадрата так, як це показано на малюнку.



Квадрат V входить в кожний круг. Оскільки ми шукаємо середнє арифметичне, то воно буде найбільшим тоді, коли найбільші числа знаходяться в кругах.

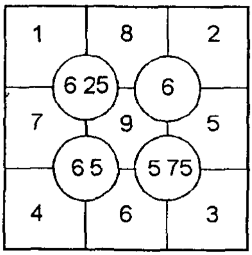
Тому в V квадраті слід розмістити найбільше число — 9. Квадрати II, IV, VI, VIII входять в два круги, тому в них розмістимо числа 8, 7, 6, 5, а в квадрати I, III, VII, IX — числа 1, 2, 3, 4.

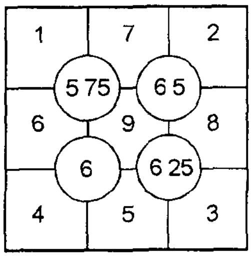




5,25 +6 +6,75 +6,5 =24,5 5,75 +5,5 +6,25 +7 =24,5

24,5 : 4 =6,125 24,5 : 4 =6,125





6,25 +6 +5,75 +6,5 =24,5 5,75 +6,5 +6,25 +6 =24,5

24.5 : 4 =6.125 24.5 : 4 =6,125

10. Якщо на прямій взяти парне число точок, то відрізків, які ними визначаються, буде непарне число. І якщо між кожними двома сусідніми точками взяти ще по одній точці, то цих точок буде непарне число. Тому сума числа тих і других точок буде непарним числом. Якщо ж точок на прямій — непарне число, то взятих між ними точок буде парне число. Кількість тих і других точок — непарне число і т.д.

11. Якщо число K закінчується цифрою 1, то сума $K+1983$ закінчується цифрою 4, отже, число буде парним, а парне число є складеним.

Якщо число K закінчується цифрою 2, то сума $K+1983$ закінчується цифрою 5. Отже, за ознакою подільності на 5, це число ділиться на 5. Таким чином, це число має принаймні три дільники, а тому є складеним.

12. Число не може закінчуватись цифрами 2 і 3, оскільки квадрат жодного натурального числа не закінчується 2 чи 3. Одним нулем квадрат числа теж закінчуватись не може. Отже, дане число закінчуються цифрою 5. Квадрати чисел, запис яких закінчуються цифрою 5, мають в записі дві останні цифри 25. Нулем число починатись теж не може. Отже, перша цифра 3. Тоді друга — нуль. Дане число 3025.

13. Після n розривань загальне число аркушів буде $5+3n$. Дане число при діленні на 3 дає в остачі 2, а число 1984 при діленні на 3 дає в остачі 1.

Або: $5+3n=1984,$

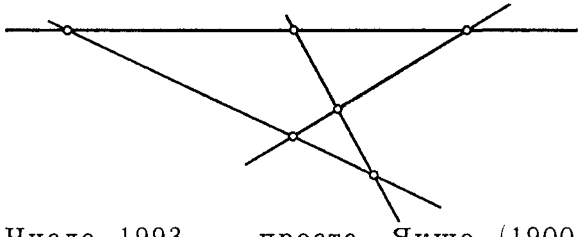
$3n=1984-5,$

$3n=1979,$

$$n=\frac{1979}{3}$$

не є цілим числом. Отже, при такому розриванні одержати 1984 аркуші не можна.

14. Розв'язання видно з малюнка.



15. Число 1993 — просте. Якщо $(1900m+93n)\times\times(1900n+93m)\,\vdots\,1993$, то один з співмножників ділиться на 1993. Оскільки сума цих співмножників ділиться на 1993, то й другий співмножник ділиться на це число.

16. $19=3^3-2^3=(3-2)\,(3^2+3\cdot2+2^2)$.

Ця різниця єдина, оскільки $2^3-1^3<19$; $4^3-3^3>19$.

17. Припустимо, що існує тризначне число $\overline{abc}$, для якого виконується рівність $\overline{abc} = a \cdot b \cdot c$. Маємо: $\overline{abc} = 100a + 10b + c \geq 100a$. Тоді $a \cdot b \cdot c \geqslant 100a$. Отже, $bc \geqslant 100$. Але b та c — цифри, тому $b \leqslant 9$, $c \leqslant 9$ і $bc \leqslant 81$. Одержане протиріччя показує, що такого трицифрового числа не існує.

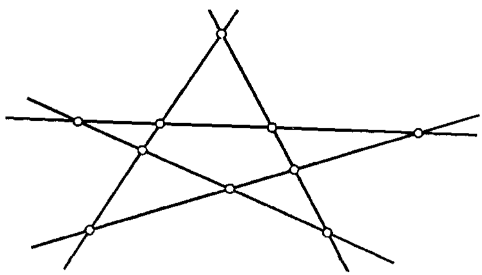
18. Нехай в коробці було x сірників. Після того, як їх кількість подвоїли, а потім забрали 8 сірників, їх стало $2x-8$ Коли ж остачу знову подвоїли, а потім забрали 8 сірників, то їх залишилось $2(2x-8)-8$. Врахувавши третю аналогічну операцію, приходимо до рівняння $2(2(2x-8)-8)-8=0$, розв'язок якого $x=7$.

19а. 40 конвертів він відлічить за 20 секунд, 50 конвертів за 25 секунд; 60 конвертів за 20 секунд (достатньо від пачки в 100 конвертів забрати 40), 90 конвертів — за 5 секунд (достатньо від пачки в 100 конвертів забрати 10).

19б. Замість першого знаку запитання слід поставити число 157, замість другого — 637.

20. Нехай дане двозначне число $\overline{ab}$. Після того, як до нього приписали по одиниці зліва і справа, одержали число $\overline{1ab1}$. Складаємо рівняння $\overline{1ab1} = 23\overline{ab}$, або $1000+100a+10b+1=23(10a+b)$.
Звідси маємо, що $10a+b=77$, тобто $a=7$, $b=7$.

21. Розв'язання видно з малюнка.



22. Очевидно, що після розривання одного аркушу паперу на 8 частин, загальна кількість аркушів збільшиться на 7. Таким чином, якщо таку операцію провести n разів, то після цього ми будемо мати $7n+4$ аркуші. Приходимо до рівняння $7n+4=1986$ яке не має розв'язку в множині натуральних чисел.

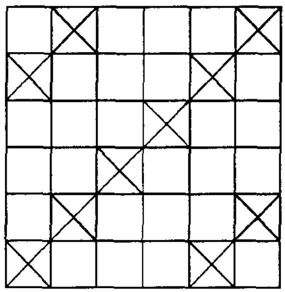
23. Розмістимо ці числа в порядку зростання: $a_1, a_2, \ldots, a_{125}$.
Різниць виду $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1, \ldots, a_{125} - a_1$ буде 124.
Різниць виду $a_3 - a_2$, $a_4 - a_2, \ldots, a_{125} - a_2$ буде 123.
Продовжимо цей процес.
Нарешті, різниця $a_{125} - a_{124}$ одна, і процес закінчується.
Всього цих попарних різниць

$$124 + 123 + \ldots + 1 = \frac{124+1}{2} \cdot 124 = 62 \cdot 125 = 7750 .$$

Кожна з них менша 1986. Отже, однакових різниць буде $7750-1986$, тобто значно більше 5.

24. Перепишемо члени послідовності в такому вигляді: $4-1$; $9-1$; $16-1$; $25-1$; $36-1$; ... .
Це можна також записати як 2^2-1; 3^2-1; 4^2-1; 5^2-1; 6^2-1; ... .
Бачимо, що $a_n=(n+1)^2-1$.
Отже, $a_6=(6+1)^2-1=49-1=48$;
$a_7=(7+1)^2-1=64-1=63$.

25. Якщо квадрат можна розрізати на вказані прямокутники, то прямокутників повинно бути $(6\times6):4=9$. Замалюємо квадрат так, як на малюнку, тоді кожен прямокутник 4×1 буде містити одну замальовану клітинку. Але замальованих клітинок не 9, а 10. Отже, неможливо розрізати квадрат розмірами 6×6 на прямокутники розмірами 1×3.



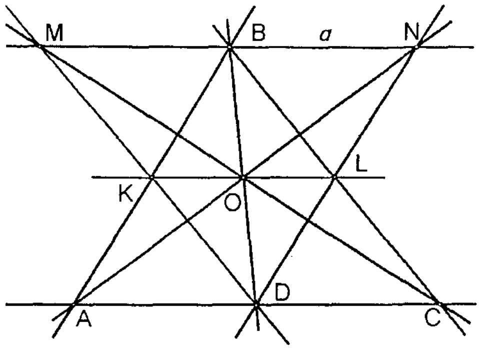
26. Розіб'ємо спочатку парламент на дві палати довільним способом. Нехай n і m — число пар ворогів в I-й і II-й палатах відповідно. Якщо в кожній із палат знайдеться член парламенту, який має в цій палаті не менше двох ворогів, то переведемо його в другу палату. При цьому одне з чисел n і m зменшиться напевно на 2, а друге збільшиться не більше, ніж на 1. Отже, сума чисел n_1 і m_1 після такого переводу зменшиться. Оскільки ця сума не може зменшуватись нескінченно, то рано чи пізно одержимо розбиття, що задовольняє умову задачі.

27. З умови випливає, що 8 гравців (без Михайличенка) забили $47-12=35$ голів. Якби всі вони забили різне число голів, то їх було б $\underbrace{1+2+3+4+5+6+7+8=36}_{\text{8 гравців}}$.

Отже, така ситуація неможлива, тобто хоча б двоє з гравців забили однакову кількість голів.

28. Нехай $\overline{xy}$ – дане двозначне число, а $\overline{xxyy}$ одержане чотиризначне число. Маємо рівняння $\overline{xxyy} = 77 \cdot \overline{xy}$, або $1000x+100x+10y+y=77\,(10x+y)$. Звідси $5x=y$. Отже, $x=1$, $y=5$, а шукане число дорівнюєю 15.

29. 1) Будуємо довільний $\triangle ABC$; 2) будуємо KL, BD ($AK=KB$, $AD=DC$, $BL=LC$) і одержуємо $O=KL \cap BD$; 3) через B проводимо $a \parallel AC$; 4) будуємо $M=a \cap CO$ і $N=a \cap AO$;



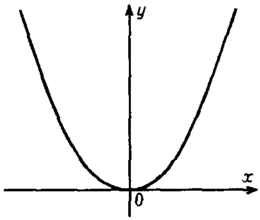
5) будуємо DL і DK (доведіть, що $M \in DK$ і $N \in DL$).

30.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

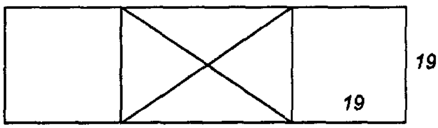
31. Нехай на другій полиці було x книжок, тоді на першій — $x+12$ книжок, на третій $x+12-17$ книжок, а на четвертій — $x+12+15$ книжок. Складаємо рівняння $x+12+x+x+12-17+x+12+15=245$, з якого випливає, що $x=211:4$. Це означає, що розмістити книжки так, як вказано в умові задачі, неможливо, бо 211 не ділиться на 4.

32. Будуємо графік при $x \geqslant 0$ та відображаємо його симетрично відносно осі ординат.



33. Знайдемо декілька членів послідовності. Це будуть числа 7,14,17,20,5,8,11,5,8,11,... . Ми бачимо, що група чисел 5,8,11 буде повторюватись. При діленні числа 1989–4 на 3 в остачі буде 2. Отже, на 1989 місці буде число 8.

34. Розв'язання зрозуміле з малюнка.



35. Відповідь: $\dfrac{7}{2\,(5^{10}+6)}$.

36. Нехай на лузі паслося x телят, тоді гусей було $90-x$. Оскільки кожне теля має 4 ноги, то всього ніг у телят $4x$. У кожної гуски 2 ноги, то всього у гусей було $2(90-x)$ ніг, а у телят і гусей разом було $4x+2(90-x)$ ніг. Складаємо рівняння $4x+2(90-x)=236$, розв'язуючи яке, одержуємо відповідь: $x=38$ (телят), $y=52$ (гусей).

37. Нехай на дошці записано число $\overline{9ab} = 9\cdot 100+10a+b$. Після того, як Юрко переставив першу цифру на останнє місце, одержали число $\overline{ab9} = 100a+10b+9$. Маємо рівняння $900+10a+b-100a-10b-9=216$, звідки $10a+b=75$.

38. $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1987\cdot 1988}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+$$
$$+\ldots+\left(\frac{1}{1987}-\frac{1}{1988}\right)=1-\frac{1}{1988}=\frac{1987}{1988}.$$

39. Нехай шуканим є число $\overline{ab}$. Складаємо рівняння: $\overline{ab} = 2ab$ або $10a+b=2ab$. Оскільки a, b — цифри, то шляхом підбору встановлюємо, що $a=3$, $b=6$.

40. Легко встановити, що швидкість поїзда з пасажиром дорівнює 72 км/год. Сумарна швидкість поїздів, що рухались, дорівнює 108 км/год. Отже, швидкість зустрічного поїзда дорівнює 36 км/год.

41. Якщо скоротний даний дріб, то скоротний і дріб $\frac{2n+1}{n+1}$. Але цей вираз дорівнює $2-\frac{1}{n+1}$. Маємо рівність $2(n+1)=(2n+1)+1$. Нехай дріб скоротний на m. Тоді ліва частина цієї рівності ділиться на m та $(2n+1)\,\vdots\, m$, отже, одиниця повинна ділитися на m, що неможливо.

42. Позначимо час руху плоту через t, тоді швидкість течії $\frac{AB}{t}$ (км/год). Швидкість руху човна від A до B дорівнює $\frac{AB}{2}$ км/год, а від B до A — $\frac{AB}{2{,}5}$ км/год.

Різниця між швидкістю човна вниз за течією і швидкістю проти течії дорівнює подвоєній швидкості течії. Отже, маємо $\frac{AB}{2}-\frac{AB}{2{,}5}=\frac{2AB}{t}$. Розв'язавши це рівняння, отримаємо відповідь: $t=20$ годин.

43. Оскільки графік шуканої функції паралельний осі абсцис, то всі точки цієї лінії мають однакові ординати. Графік проходить через точку $A\,(2{,}5;-6)$, тоді ордината дорівнює -6 а абсциса — будь-яка. Отже шукана функція задається рівнянням $y=-6$.

44. Нехай $\overline{7xyz}$ — шукане число, тоді отримаємо $\overline{7xyz}-\overline{xyz7}=864$, або $\overline{xyz7}+864=\overline{7xyz}$. Звідси послідовно встановлюємо, що $z=1$, $y=8$, $x=6$.

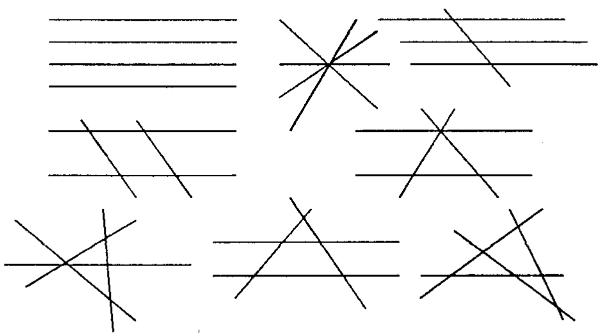
45. Найбільше тризначне число 999. Поділивши його на 43, отримаємо частку 23 і остачу 10. Остача менша частки. Збільшити остачу не можемо — число стане чотиризначним. Тоді зменшимо частку на одиницю, отримаємо 22 : 22·43=946. Додамо до отриманого числа доданок рівний частці — 22. Отримаємо 968 – шукане.

46. Нехай x — волога в одиниці об'єму повітря вранці, y — волога в одиниці об'єму повітря вдень, z — волога в одиниці об'єму повітря ввечері.

Тоді $\frac{x}{y}\cdot 100\% = 100\% - 12\%$ і $\frac{z}{x}\cdot 100\% = 100\% - 5\%$, або $100y = 88x$, $100z = 95y$. Звідси $\frac{z}{x}\cdot 100 = \frac{95\cdot 88}{100}$. Отже, вечірня вологість складає 83,6% в порівнянні з ранішньою і знизилась на 16,4%.

47. Студент не міг мати на першому курсі два екзамени, тому, що в цьому випадку за п'ять років загальна кількість екзаменів була б менша за 31. Чотири екзамени і більше він теж не міг мати на 1 курсі. Справді, тоді він мав би не менше ніж $4+5+6+7+12=34$ екзамени, тобто більше ніж 31. Отже, на 1 курсі студент мав тільки три екзамени, а на останньому — 9. В цьому випадку він міг мати на четвертому курсі тільки 8 екзаменів.

48. 5, 8, 9, 10 і 11 (див. мал.).



49. Найбільше значення суми дорівнює 45. При зміні знака у будь-якого доданка x сума змінюється на $2x$. Отже, сума лишається непарною при будь-якій комбінації знаків плюс та мінус. Тому помилився Сашко, написавши у відповіді 20.

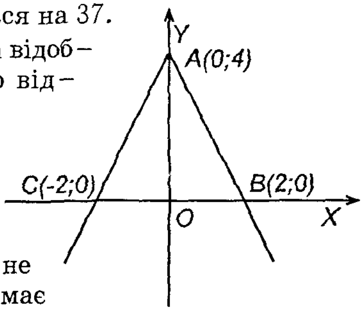
50. Десяткові записи чисел вигляду 9^n можуть закінчуватись такими двома двома цифрами: 09, 81, 29, 61, 49, 69, 41, 21, 89, 01. Отже, десяткові записи чисел вигляду 9^n+1 закінчуються тільки одним нулем при будь-якому непарному n.

51. 100 утворених квадратів — це 10 стовпців по 10 квадратів у кожному. Стовпці відділяються 11-ма відрізками довжиною 1 дм. При спрямленні отримаємо $11 \times 1 = 11$ дм. Аналогічно для суміжної сторони великого квадрата. Отже, при спрямленні отримаємо відрізок довжиною 22 дм.

52. Відповідь: $x_1 = -\frac{4}{3}$; $x_2 = 4$.

53. Нехай a — цифра, за допомогою якої записано дане число. Маємо $\overline{aaa}$ або $a \cdot 100 + a \cdot 10 + a = 111a$. Оскільки $111 : 37$, то і добуток ділиться на 37.

54. Будуємо графік при $x \geqslant 0$ та відображаємо його симетрично відносно осі ординат.



55. Знайдемо найменше спільне кратне чисел 12 і 28: $K = 84$. Отже, через 84 дні пароплави одночасно вийдуть з порту. 1991 рік не високосний. Отже, лютий має 28 днів, січень – 31. $84 = 31 + 23 + 25$. Отже, обидва пароплави одночасно знову вийдуть з порту 25 березня 1991 року.

56. Нехай x – кількість кошенят. Тоді отримаємо рівняння $\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} = x$ або $3x + 3 = 4x$, звідси $x = 3$. Отже, в клоуна було 3 кошеняти.

57. Нехай t — час руху на мотоциклі першого і другого чоловіків. Тоді $50t + 5(3 - t) = 60$ або $50t + 15 - 5t = 60$, звідси $45t = 45$, $t = 1$ година.

Отже, якщо другий чоловік повезе першого одну годину на мотоциклі, то перший пішки дійде в пункт призначення в строк. $50 + 5 = 55$ (км/год) — швидкість зближення другого і третього чоловіків. За одну годину третій пройде відстань 5 км, а другий проїде 50 км, отже між ними відстань $50 - 5 = 45$ (км). Вони зустрінуться через $45/55$ години. За цей час третій пішки пройде $5 \cdot 45/55$ км. Отже, другому і третьому лишилось проїхати на мотоциклі $60 - 5 - 5 \cdot 45/55$ км. Цю відстань вони подолають за $\dfrac{60-5-5\cdot\dfrac{45}{55}}{50}$ (год), тобто за

$$\frac{55-\dfrac{45}{11}}{50}=\frac{605-45}{50\cdot 11}=\frac{56}{55}\ \text{(год)}.$$

Отже, в пункті призначення другий і третій чоловіки будуть через

$$1+\frac{45}{55}+\frac{56}{55}=\frac{55+45+56}{55}=\frac{156}{55}<\frac{165}{55}=3\ \text{(год)}.$$

Отже, всі троє подолають відстань 600 км за три години.

58. $\overline{ab}-\overline{ba}=10a+b-10b-a=9(a-b)\vdots 9$.

59. Нехай у похід пішло x чоловіків і y жінок, тоді $20-(x+y)$ – дітей. Складемо рівняння:

$20x+5y+3\,(20-(x+y))=200$ або $17x+2y=140$.

Другий доданок і сума кратні двом. Отже, $17x\vdots 2$, тобто $x\vdots 2$. Десять чоловіків перенесуть весь вантаж, отже, чоловіків було менше десяти. Якщо б всі були жінками, то перенесли б тільки 100 кг вантажу, отже, чоловіки перенесли більше 100 кг. Звідси $20x>100$, тоді $x>5$. Отже, $5<x<10$ і x — парне, тобто $x=8$ або $x=6$. Перевіркою переконуємось, що чоловіків було 8, жінок — 2 і дітей — 10.

60. $\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}=(a+b+c)\cdot 10+a+b+c=100a+10b+c$, тому, враховуючи, що цифри a, b, c не більші дев'яти, одержуємо: $b+10c=89a$, $b+10c\leqslant 99$, звідси $a=1$. Отже, шукане число 198.

61. Нехай x км — весь шлях, $1+\dfrac{x-1}{2}$ (км) — пройшов пішохід. Складаємо рівняння $1+\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x}{3}+1=x$, розв'язуючи яке, одержуємо $x=9$ км.

62. Починаючи з доданків третього десятку, останні цифри в сумах починають повторюватись. Перші суми не містять на останньому місці цифр 2,4,7,9.

2) 2,3,7,8.

63. Відповідь: 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, ... або 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0 ... .

64. 1 г, 2 г, 7 г або 1 г, 3 г, 6 г. Вказівка. Розглянути насамперед всі випадки визначення маси предмета в 9 г.

65. $\overline{xy} \cdot x = \overline{zzz} = 100z + 10z + z = 111z = 3 \cdot 37 \cdot z$. Оскільки $111 \vdots 37$, то $\overline{xy} \vdots 37$. Звідси $\overline{xy} = 37$ або $\overline{xy} = 74$. Перевіркою переконуємося, що $x=3$, $y=7$, $z=1$.

66. Вказівка. Показати, що п'ятий набір складеться з квадратів деяких чисел.

67. Нехай x — сума цифр двозначного числа y. За умовою $x^3=y^2$. Ця рівність в натуральних числах можлива лише тоді, коли $x=z^2$ і $y=z^3$, причому $z \in N$. Оскільки сума цифр двозначного числа не більша 18, то $z^2 \leqslant 18$, отже, $z \leqslant 4$. Перебором переконуємося, що є єдине число, яке задовольняє умові задачі – 27.

68. Нехай перший з шести доданків дорівнює a, другий — b, тоді третій, четвертий, п'ятий і шостий доданки відповідно дорівнюють $a+b$, $a+2b$, $2a+3b$, $3a+5b$. Їх сума дорівнює $4(2a+3b)$, тобто дорівнює п'ятому доданку, збільшеному в чотири рази.

69. Нехай $7^{17}+17 \cdot 3-1=9k$, тоді $7^{17}=9k-17 \cdot 3+1$. Отримаємо $7^{18}+18 \cdot 3-1=7 \cdot 7^{17}+53=7(9k-50)+53=63k-297=$ $=9(7k-33)$. Отже, друге число ділиться на 9.

70. Припустимо, що число 2^n-1 є квадратом деякого натурального числа. Тоді це число має бути непарним. Отже, $2^n-1=(2m+1)^2$ або $2^n=4m^2+2+4m$, тому $2^{n-1}=2m^2+2m+1$. Ліва частина останньої рівності кратна 2, а права на 2 не ділиться. Отримане протиріччя доводить, що число 2^n-1 не є квадратом натурального числа.

71. $1992=2^3 \cdot 3 \cdot 83$. Дільниками числа 1992 будуть числа 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 83, 166, ... Будемо ділити на 13 числа, які складаються з 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 83, 166, ... вісімок. Виявляється, що $888888:13=68376$. Оскільки в запису даного числа можна виділити ціле число (332) груп, які складаються з 6 вісімок, то дане число можемо записати у вигляді суми $\underbrace{88...8}_{1992}=888888 \cdot (10^6)^{331}+$ $+888888 \cdot (10^6)^{330}+...+888888 \cdot 10^6+888888$. Кожний доданок кратний 13, отже, і вся сума кратна 13.

72. Оскільки в кожному рядку добуток чисел від'ємний, то це означає, що в кожному рядку непарне число від'ємних чисел. Маємо непарну кількість рядків. Отже, всього в квадраті непарне число від'ємних чисел. Як би не розподіляли ці числа по 7 стовпцях, обов'язково хоча б в одному стовпці буде непарне число від'ємних чисел, а отже, їх добуток буде від'ємним.

73. Складемо рівняння $7a+12b=100 \Rightarrow 7a=100-12b \Rightarrow$ $\Rightarrow 7a=4(25-3b)$.

Звідси а $\vdots 4$ і $25-3b \vdots 7$. Оскільки $25-3b<25$, то ця різниця може дорівнювати або 21, або 14, або 7. Перевіркою встановлено, що можлива лише рівність $25-3b=7$, тоді $b=6$, $a=4$. Отже, відрізок довжиною в 1 м можна скласти з даних тільки одним способом: 4 відрізки по 7 см і 6 відрізків по 12 см.

74. Нехай в другому ящику було x горіхів. Тоді в першому — $0{,}9x$, а в третьому — $0{,}7x$. Складемо рівняння: $0{,}9x-0{,}7x=80$,

розв'язуючи яке, одержуємо $x=400$.

75. Нехай $\overline{ab}$ — шукане число. Тоді $a\cdot 10+b= =4(a+b)$, звідси маємо $2a=b$, де $0<a\leqslant 9$, $0\leqslant b\leqslant 9$. Ці умови задовольняють чотири пари цифр: (1;2), (2;4), (3;6), (4;8). Отже, шуканими є числа 12,24,36,48.

76. Так. Оскільки $\angle KBE=\angle ECD=\angle DAK=180^\circ-60^\circ$,

$$KB=EC=DA=\frac{AB}{2}+AB;\quad AK=BE=CD=\frac{AB}{2},$$

то трикутники KBE, ECD, DAK рівні за першою ознакою рівності трикутників. Тоді $KE=ED=DK$. Отже, трикутник KED — рівносторонній.

77. $x^4+0{,}39x^3-0{,}61x^2+2x-0{,}22=x^4+0{,}39x^3+0{,}61x^3-$ $-0{,}61x^3-0{,}61x^2+2x-0{,}22=x^3(x+1)-0{,}61x^2(x+1)+2x-$ $-0{,}22=x^2(x+1)(x-0{,}61)+2x-0{,}22=\{x=0{,}61\}=0+$ $+2\cdot 0{,}61-0{,}22=1$.

78. Оскільки $\dfrac{1}{1001}>\dfrac{1}{2000};\ \dfrac{1}{1002}>\dfrac{1}{2000};\ \ldots;\ \dfrac{1}{2000}=\dfrac{1}{2000}$, то, підсумовуючи праві і ліві частини нерівностей, отримаємо: $\dfrac{1}{1001}+\ldots+\dfrac{1}{2000}>\dfrac{1000}{2000}=\dfrac{1}{2}$.

79. Відповідь: $x=10$.

80. Нехай a, b, c — дані різні цифри. Всього можна скласти 6 тризначних чисел. Їх сума

$\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}+\overline{acb}+\overline{bac}= =2(a+b+c)\times$
$\times(100+10+1)=2(a+b+c)\cdot 111$, $111 \vdots 37$.

Отже, і вся сума кратна 37.

81. Нехай швидкість катера дорівнює a км/год, швидкість течії b км/год, $a>b>0$, S — шлях в кілометрах, який проходить катер в одному напрямку. Тоді час в годинах, витрачений на поїздку по річці, дорівнює $\frac{S}{a-b}+\frac{S}{a+b}=\frac{2aS}{a^2-b^2}$.

Час на поїздку по озеру дорівнює $\frac{2S}{a}=\frac{2aS}{a^2}$. Чисельники двох дробів рівні, а знаменник першого дробу менший за знаменник другого. Тому перший дріб більший за другий. Отже, на поїздку по річці потрібно більше часу.

82. Нехай x м/сек — швидкість першого тіла, а y м/сек — швидкість другого тіла. За умовою задачі складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}20(x-y)=100,\\4(x+y)=100,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=5,\\x+y=25,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=15,\\y=10.\end{cases}$$

Отже, швидкості тіл 15 м/сек і 10 м/сек.

83. Нехай градусна міра більшого із суміжних кутів дорівнює x. Тоді другий кут має міру $180^\circ-x$. Різниця кутів $x-(180^\circ-x)=2x-180^\circ$.
За умовою задачі $x=3(2x-180^\circ)\Leftrightarrow 5x=540^\circ$, $x=108^\circ$.
Отже, градусні міри кутів дорівнюють 108° і 72°.

84. $\frac{10^n+8}{9}=\frac{\overbrace{100\ldots0}+8}{9}=\frac{\overbrace{100\ldots08}^{n-1}}{9}$ натуральне число, оскільки сума цифр чисельника ділиться на 9 (ознака подільності на 9).

85. При діленні на 100 можливими остачами є $0,1,\ldots,99$. Серед 101 числа знайдуться два числа (принцип Діріхле), які при діленні на 100 дадуть однакову остачу. Різниця цих двох чисел ділиться на 100.

86. Позначимо шукане число через $\overline{a_1a_2...a_n6} \equiv A$ і утворимо число $\overline{6a_1a_2...a_n} \equiv B$. Очевидно, що $A = 10 \cdot \overline{a_1a_2...a_n} + 6$, $B = 6 \cdot 10^n + \overline{a_1a_2...a_n}$. Нехай $\overline{a_1a_2...a_n} \equiv C$. За умовою $6 \cdot 10^n + C = 4\,(10C+6)$, звідки $C = \dfrac{6 \cdot 10^n - 24}{39} = \dfrac{2 \cdot 10^n - 8}{13}$.

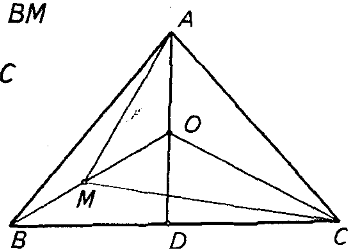
Натуральне число C отримаємо при $n=5$. Його значення 15384. Отже, шукане число 153846.

87. При будь-якому натуральному n число 26^n закінчується цифрою 6, тому число 26^n-1 закінчується цифрою 5. При множенні цілого числа, що закінчується цифрою 5, на число 2,6 одержимо ціле число. Дійсно,

$\overline{a5} \cdot 2{,}6 = (a \cdot 10 + 5) \cdot 2{,}6 = 26a + 13$ — ціле число.

88. $$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{1993 \cdot 1994} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{1993} - \frac{1}{1994}\right) = 1 - \frac{1}{1994} = \frac{1993}{1994}.$$

89. Проведемо бісектрису AD і BM продовжимо до перетину з AD в точці 0. $\triangle AOC = \triangle MOC$ (OC — спільна, $\angle MOC = \angle AOC = 120°$, $\angle OCM = \angle OCA = 20°$). Отже, $MC = AC$ і $\triangle AMC$ — рівнобедрений. $\angle ACM = 40°$, $\angle AMC = \angle MAC = 70°$.



90. Відповідь: 5534512345.

91. Відповідь: $a = x|x|$.

92. Нехай друге відро вміщує x літрів, тоді перше відро вміщує $\frac{2}{3}x$ літрів, а третє відро — $\frac{8}{9}x$ літрів. В бочку було налито $\frac{2}{3}x + x + \frac{8}{9}x = \frac{23}{9}x$ літрів води. За умовою задачі $\frac{23}{9}x$ — ціле число, менше від 30. Отже, $x=9$. Відповідь: 7 літрів.

93. Записавши умову задачі у вигляді

$$\begin{array}{r} \text{Л І Т О} \\ +\,\text{Л І Т О} \\ \hline \text{П О Л І Т} \end{array}$$

підбором знаходимо розв'язок: $8947+8947=17894$.

94. Для отримання розчину 12 % концентрації потрібно змішати 3 л розчину 10 % концентрації та 2 л розчину 15 % концентрації. Можлива, наприклад, така послідовність дій:

Кроки – Посудина	3 л	4 л	5 л
1.	3 л 10 %	4 л 15 %	–
2.	–	2 л 15 %	5 л 12 %
3.	2 л 15 %	4 л 12 %	1 л 12 %

95. Можна. Такою буде, наприклад, така таблиця:

1	1	1
−1	1	1
−1	−1	1
−1	−1	−1

96. Розглянемо дроби $\frac{1997}{n}$. За умовою задачі

$$\frac{1}{1998} < \frac{1997}{n} < \frac{1}{1997}.$$

Звідси одержуємо, що $1997\cdot 1997 < n < 1997\cdot 1998$. Отже, $n = 1997\cdot 1997 + k$, де $k = 1, 2, \ldots, 1996$. Для всіх цих значень n дріб $\frac{1997}{n}$ нескоротний, оскільки число 1997 просте. Відповідь: 1996.

97. Забезпечити собі виграш може починаючий. Розіб'ємо клітинки з номерами 2–17 на 4 набори по 4 клітинки. Перший гравець спочатку закреслює першу клітинку смужки, а потім діє аналогічно до другого: якщо другий закреслює клітинку з парним номером, то перший – іншу клітинку з парним номером з цього ж набору; якщо другий закреслює клітинку з непарним номером, то перший – іншу клітинку з непарним номером з цього ж набору; якщо другий закреслює дві клітинки, то перший – інші дві клітинки з цього ж набору. Таким чином, перший гравець завжди буде мати можливість ходу.

98. Можливим є, наприклад, таке розміщення:

34	33	32	34	33	32	34	33	32	34	33	32	34	33	32	34
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

99. Нехай кожний учень одержить по k цілих аркушів, m половинок та n третин аркуша. Тоді $13 = 6k + 6 \cdot \frac{m}{2} + 6 \cdot \frac{n}{3} = 6k + 3m + 2n$. Звідси одержуємо, що $6(k+1)+3(m-1)+3(n-2)=0$. Розв'язком цього рівняння є $k=1$, $m=1$, $n=2$. Отже, кожний учень одержить по 1 цілому аркушу, по 1 половинці аркуша та по 2 третини аркуша. Відповідь: можна.

100. Оскільки $|x-y| \geqslant 0$, то з першого рівняння системи одержуємо, що $x+y \geqslant 0$. Тоді $|x+y| = x+y$ і друге рівняння системи набуває вигляду $x+y=x-y$, звідки $y=0$. Отже, $|x| = x$, звідки $x \geqslant 0$. Таким чином, шукана множина точок: $\{(x;\ 0),\ x \geqslant 0\}$ – промінь на осі абсцис.

101. Винесемо 3 з кожного множника. Тоді дане число запишеться у вигляді $N = 3^{55} \cdot 1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot \ldots \cdot \underbrace{11\ldots1}_{55}$.

Звідси випливає, що $N \vdots 3^{55}$. Залишається обчислити, скільки чисел виду $\underbrace{11\ldots1}_{k}$ діляться на степені числа 3.

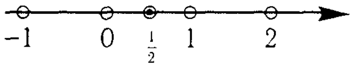
На $3^1=3$ діляться числа, в яких $k=3$, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, 42, 48, 51. На $3^2=9$ діляться числа, в яких $k=9$, 18, 36, 45. На $3^3=27$ діляться числа, в яких $k=27$, 54. Отже, $n=55+12 \cdot 1+4 \cdot 2+2 \cdot 3=81$.
Відповідь: 81.

102. а) Так. Умову задачі задовольняє число $1981 (1981+1+9+8+1=2000)$.

б) Ні. Число n та сума його цифр $S(n)$ при діленні на 3 дають одну і ту ж саму остачу. Тому число $n+S(n)+S(S(n))$ завжди ділиться на 3, а число 2000 на 3 не ділиться (сума його цифр дорівнює 2). Протиріччя.

103. (Від супротивного). Припустимо, що твердження задачі невірне. Візьмемо дві довільні точки, що мають один колір, наприклад, синій. Нехай ці точки мають

координати 0 та 1 на координатній прямій. Тоді точка з координатою (-1) повинна бути червоною і точка з координатою 2 повинна бути червоною:



Отже, точка з координатою $1/2$ є одночасно серединою відрізка з синіми кінцями і серединою відрізка з червоними кінцями, що неможливо.

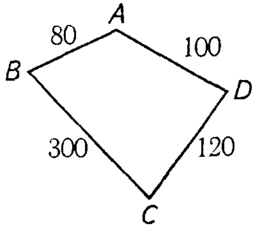
104. Якщо всі 1999 чисел парні або всі ці числа непарні, то витираємо будь-яке число – сума 1998 чисел однакової парності обов'язково парна. Якщо серед 1999 чисел є числа різної парності (парні і непарні), то витираємо число такої парності, щоб привести суму залишених 1998 чисел до парного число. Для 2000 чисел дане твердження невірне, наприклад, у випадку, коли всі ці числа дорівнюють 1.

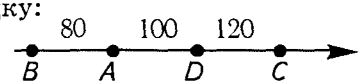
105. Серед одинадцяти цифр завжди знайдуться принаймні 2 однакові цифри (принцип Діріхле). Якщо n є двозначним або тризначним числом, то число k буде не менше ніж чотиризначним, і однакові цифри знайдуться. Якщо n – п'ятизначне число, то хоча б одна цифра буде в записі числа k, і також принаймні дві однакові цифри знайдуться. Залишається розглянути випадок, коли n – чотиризначне і k – однозначне, або навпаки. Але тоді $m=n+k\leqslant 9999+9=10008$, і ми маємо однакові нулі, що й треба було довести.

106. Шукатимемо ці пари у вигляді $m=1999^x$, $n=1999^y$. Тоді $1999(1999^x)^{1999}=(1999^y)^{2000}$; $1999^{1999x+1}=1999^{2000y}$, звідки випливає, що $1999x+1=2000y$ або $y=1999(x-y)+1$. Позначимо $x-y=k$. При $k=0$ одержуємо $y=x=1$, тобто $m=1999$, $n=1999$. При $k=1$ одержуємо $y=2000$, $x=2001$, тобто $m=1999^{2001}$, $n=1999^{2000}$.

Відповідь: $(1999; 1999)$, $(1999^{2001}; 1999^{2000})$.

107. Оскільки сума трьох відстаней від B до A, від A до D та від D до C дорівнює відстані від B до C $(80+100+120=300)$, то ці пункти лежать на одній прямій в такому порядку:





Отже, $AC=AD+DC=100+120=220$ (км).

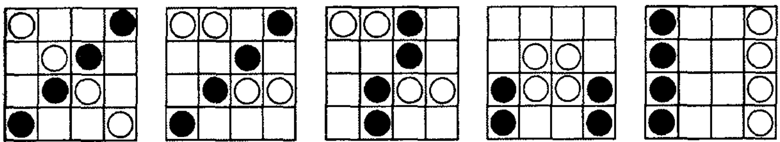
Відповідь: 220 км.

108. Щоб мати мінімальну кількість доданків, ми повинні брати якомога більше доданків з максимально можливою кількістю трійок у їх записі. Оскільки $111111=3\times33333+11112$; $11112=3\times3333+1113$; $1113=3\times333+114$; $114=3\times33+15$; $15=5\times3$, то маємо: $111111=3\times33333+3\times3333+3\times333+3\times33+5\times3$.

Отже, шукана кількість доданків дорівнює $3+3+3+3+5=17$.

Відповідь: 17 доданків.

109. а) Так. Один з можливих варіантів утворення з таблиці 1 таблиці 2 такий:



(таблиця 1) (таблиця 2)

б) Ні. Перенумеруємо стовпчики таблиці 3 зліва направо числами від 0 до 5. Тоді сума номерів рядків, на яких стоять чорні шашки, дорівнює $0+1+2+3+4+5=15$. Після кожного ходу парність цієї суми не змінюється (інваріант). В таблиці 4 ця сума парна ($6\times5=30$). Отже, перехід від таблиці 3 до таблиці 4 за вказаними правилами неможливий.

110. Можна встановити безпосередніми обчисленнями, що $3^2+5^2+6^2=1^2+2^2+4^2+7^2$. Візьмемо до однієї групи числа 3, 5, 6, а до іншої – 1, 2, 4, 7. Кожні наступні 8 чисел розмістимо за таким правилом: в одній з груп числа n, $n+3$, $n+5$, $n+6$, а в іншій – числа $n+1$, $n+2$, $n+4$, $n+7$ (будемо мати $n=8k$, $k\in N$). Оскільки $n^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+6)^2=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+4)^2+(n+7)^2$, то рівність суми квадратів зберігається. Врахувавши, що числа $15=8\times1+7$, $1999=8\times249+7$ мають вигляд $8k+7$, приходимо до висновку, що потрібне розбиття можливе і в пункті а), і в пункті б).

Відповідь: а) так, б) так.

111. Вказівка. $407=250+125+32$. Тоді добуток $20\cdot125\cdot32=1000000$. Далі потрібно довести, що коли добуток трьох натуральних чисел закінчується більше, ніж на 6

нулів, то їх сума буде більшою за 407, бо одне з них буде не менше ніж $5^4=625$.

Відповідь: 6 нулів.

112. Вказівка. Розгляньте два перші рядки. Добуток всіх шести чисел цих рядків дорівнює 1. Оскільки добуток чотирьох чисел в квадраті 2×2 дорівнює 2, то добуток двох чисел, що є першими в цих рядках, дорівнює $1/2$. Те ж саме одержимо, якщо розглянути два перші стовпці. Далі числа легко відновлюються.

Відповідь: 16.

113. Вказівка. Нехай x людей звернули праворуч, y – ліворуч, а z – пішли у зворотному напрямку. За умовою задачі одержимо такі нерівності: $2x \geqslant y+z+1$, $7y \geqslant 3x+3z+1$, $7z \geqslant 4x+4y+1$. Звідси потрібно одержати нерівність $x+y+z \geqslant 173$.

114. Вказівка. Вкажіть таке вирізання, що залишаться тільки квадрати розмірами 2×2.

Відповідь: ні, не обов'язково.

115. Нехай було n скринь, де n – натуральне число. Припустимо, що капітан не помилився. Підрахуємо кількість таких пар (пірат; скриня). З одного боку їх кількість дорівнює $7n$. А з другого – $100\cdot65=6500$, що неможливо, бо 6500 не ділиться на 7.

116. Розкривши знак модуля, одержуємо рівняння

$$\big|4|x|-3\big|-2=-3 \text{ або } \big|4|x|-3\big|-2=3;$$

$$\big|4|x|-3\big|=-1 \text{ або } \big|4|x|-3\big|=5.$$

Оскільки $|a|\ge 0$ для будь-якого a, то перше рівняння не має розв'язку. З другого рівняння випливає, що $4|x|-3=-5$ або $4|x|-3=5$; $4|x|=-2$ або $4|x|=8$, звідки $|x|=2$, тобто $x=-2$ або $x=2$.

Відповідь: -2; 2.

117. Нехай велосипедист подолає весь шлях за x год, а автомобіль – за y год. За умовою задачі складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{2} + \frac{1}{4}, \\ \frac{2x}{3} = y + \frac{1}{4}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = y + \frac{1}{2}, \\ x = \frac{3}{2}y + \frac{3}{8}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}y + \frac{3}{8}, \\ x = y + \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}y = \frac{1}{8}, \\ x = y + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Звідси знаходимо, що $y = \frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{4}$.

Відповідь: 3/4 год.

118. Нехай $\angle DBA = \alpha$, $\angle CDB = \beta$. Тоді $\angle BEC = \angle CBE = \alpha + \beta$. Звідси випливає, що $\angle ACE = \beta$. Далі $\angle CAB = \angle CBA = 2\alpha + \beta = 90^\circ$. У трикутнику BOE $\angle E + \angle B = 2\alpha + \beta$, а тому $\angle BOE = 90^\circ$. Звідси й випливає твердження задачі.

119. Припустимо, що кожне викреслене слово записали рівно два учні. Оскільки вони обидва його викреслили, то всього викреслених слів була парна кількість. Учні зробили 150 записів, а тому має залишитись парна кількість слів. Оскільки $23 + 32 + 26 = 81$ – число непарне, то маємо протиріччя. Отже, припущення невірне, і хоча б одне слово було записаним у всіх трьох учнів.

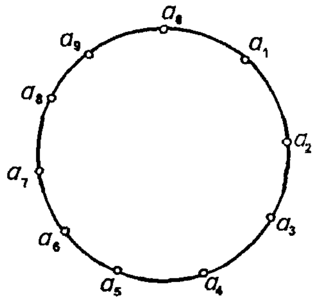
120. Розглянемо спочатку випадок, коли серед вибраних цифр немає нуля. Тоді має бути записано шість попарно різних тризначних чисел:

$$\overline{abc},\ \overline{acb},\ \overline{bac},\ \overline{bca},\ \overline{cab},\ \overline{cba}.$$

Сума цих чисел становить $222(a+b+c)$? що неможливо, оскільки число 3376 без остачі на 22 не ділиться. Таким чином, серед вибраних цифр має бути нуль. Нехай $c = 0$. Тоді можна записати числа $\overline{ab0}$, $\overline{a0b}$, $\overline{ba0}$, $\overline{b0a}$. Сума цих чисел дорівнює $211(a+b)$. Отже, $3376 = 211(a+b)$, звідки $a+b = 16$. Оскільки цифри мають бути різними, то вибраними цифрами є 7 і 9.

Відповідь: було вибрано цифри 0, 7, 9.

§ 2. ВОСЬМИЙ КЛАС

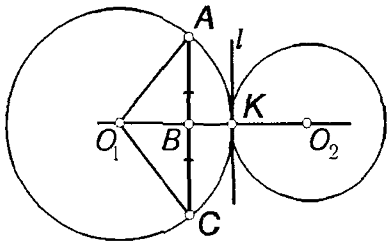


1. Позначимо цифри, розміщені по колу так, як вказано на малюнку. Тоді $a_1+a_2+a_3 \leqslant 13$, $a_4+a_5+a_6 \leqslant 13$, $a_7+a_8+a_9 \leqslant 13$.
Додавши ці нерівності, одержимо, що $a_1+a_2+a_3+\ldots+ +a_9 \leqslant 39$. Оскільки $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_9=45$, то $a_9 \geqslant 6$. Це ж саме можна сказати про кожну цифру, змінюючи початок підсумовування. Цього бути не може, отже, випадок а) неможливий. Аналогічно можна показати, що випадок б) теж неможливий. Випадок в) можливий, наприклад: 9, 5, 1, 8, 4, 3, 2, 7, 6, 0.
2. Існує безліч таких трикутників. Якщо, наприклад, в трикутнику ABC $\angle C=90^\circ$, $BC=a<1$ (катет BC є однією з висот трикутника) і $AC=\dfrac{8000}{a}$, то $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot DC=$ $=4000$. Якщо CD — висота, то $CD<BC<1$.
3. Якщо точки лежать на одній прямій, то жодного. В противному випадку – три.
4. Всього "карт", що містять "шістку", є 7, причому одна "карта" містить "шістку" двічі.

   Припустимо, що в кінці ланцюжка лежить саме ця "карта". Тоді "карти" ляжуть так: |6||6| |6||?| ... |?||5|. Залишилось п'ять невикористаних "шісток" на різних 5 "картах". Число 5 — непарне, отже, ситуація неможлива. Якщо в кінці лежить "карта", що містить одну "шістку", то "карти" ляжуть так: |6||?| ... |?||6| |6||6| |6||?| ... |?||5|. Не використали 3 "шістки" на 3-х "картах". Знов непарна кількість. Ситуація неможлива.

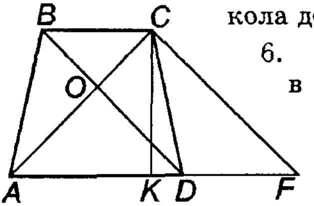
   Аналогічні міркування можна провести з "п'ятіркою". Яке число стоїть на "карті" під знаком "?" значення не має.

5. Із означення дотичних кіл (O_1, r_1) і (O_2, r_2) випливає, що в їх спільній точці K існує спільна дотична цих кіл. Оскільки при цьому $O_1K \perp l$ і $O_2K \perp l$, то $K \in O_1O_2$. Навпаки, якщо два кола мають спільну точку K і остання належить їх лінії центрів O_1O_2, то такі два кола дотикаються в цій точці.



Дійсно, якщо $K \in l$, і $l \perp O_1O_2$, то пряма l і є спільною дотичною даних кіл.

Припустимо, що спільна точка A даних кіл не належить прямій O_1O_2. Опустимо з неї перпендикуляр AB на пряму O_1O_2 і на його продовженні відкладемо відрізок $BC = BA$. Оскільки $\triangle O_1AB = \triangle O_1CB$, то $O_1C = O_1A = r_1$. Аналогічно доводимо, що $O_2A = O_2C = r_2$. Точки A і C різні (чому?) і належать кожному з даних кіл, що суперечить умові задачі. Отже, $A \in O_1O_2$ і дані кола дотикаються в ній.



6. Нехай $ABCD$ — трапеція, дана в умові задачі $(AD \parallel BC)$. Проведемо відрізок $CF \parallel BD$ і одержимо рівнобедрений прямокутний трикутник ACF, в якому CK — висота. Оскільки $AK = KC = KF$, то

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CK = \frac{AF}{2} \cdot CK = \frac{2CK}{2} \cdot CK = CK^2.$$

7. Розглянемо три випадки:

1) x та y — парні. Тоді $x = 2k$, $y = 2p$, звідки $x^2 - y^2 = 4k^2 - 4p^2 \vdots 4$, а 1982 на 4 не ділиться;

2) x та y — непарні. Тоді $x = 2k+1$, $y = 2p+1$ звідки $x^2 - y^2 = 4k^2 + 4k - 4p^2 - 4p \vdots 4$, а 1982 на 4 не ділиться;

3) x — парне, y — непарне (або навпаки). Тоді $x = 2k$, $y = 2p+1$, звідки $x^2 - y^2 = 4k^2 - 4p^2 - 4p - 1$ не ділиться на 2, а число 1982 — парне. Отже, цілих розв'язків дане рівняння не має.

8. Позначимо масу борошна у мішках відповідно x, y, z, p. Тоді маємо:

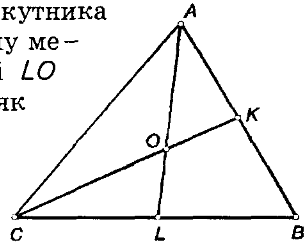
$$x+y+z \geqslant 60,$$
$$x+y+p \leqslant 50,$$
$$x+z+p \leqslant 40,$$
$$y+z+p \leqslant 30.$$

Звідси $2x+2y+2z+3p \leqslant 120$, $2x+2y+2z \geqslant 120$, отже $p=0$, тобто четвертий мішок порожній. Тоді $x+y+z=60$, отже, $x+y=50$; $x+z=40$; $y+z=30$. Звідси $x=30$, $y=20$, $z=10$, $p=0$.

9. Можна: (9, 12, 15).

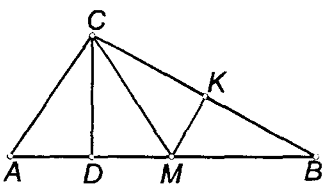
10. При $x \geqslant 2$, $y=8x-10$, а при $x<2$, $y=10-2x$. Побудувати графік окремо на кожному інтервалі.

11. Позначимо середини сторін трикутника буквами K і L, а точку перетину медіан — буквою O. На промені LO відкладаємо відрізок $OA=2OL$, як вказано на малюнку. Аналогічно відкладаємо відрізок $OC=2OK$. Проводимо AK та CL і від їх перетину одержуємо точку B. Для того, щоб довести, що трикутник ABC — шуканий, досить показати, що $AK=KB$ і $CL=LB$.



12. Якщо синові x років, то батькові $5x$ років. З того часу, як батько закінчив інститут, минуло $5x-22$ роки. Синові до 22 треба ще $22-x$ років. За умовою $(5x-22)\cdot 2=22-x$. Звідси $x=6$. Отже, синові — 6 років, батькові — 30 років.

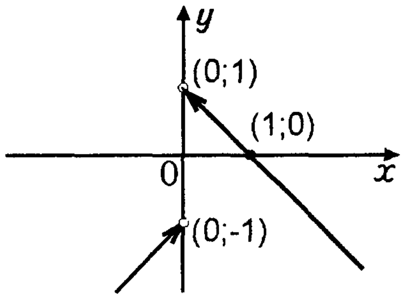
13. Нехай ABC — даний трикутник, CD — висота, CM — його медіана. Легко бачити, що $AD=DM=\dfrac{MB}{2}$. Якщо $MK \perp BC$, то $MK=MD=\dfrac{MB}{2}$, тому $\angle B=30^\circ$, $\angle BCD=60^\circ$ і $\angle ACB=90^\circ$.

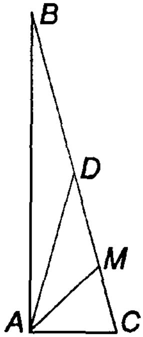


14. Шукане число подамо у вигляді $10a+b$. За умовою $10a+b=b^2+a^3$. Очевидно, $b \neq 0$. Якщо $b=1$, то $a^3-10a=0$ звідки $a=0$ і дане число 1 (не двозначне). Отже, $b>1$. Тоді $10a-a^3>0$, звідки $a(10-a^2)>0$, отже

$a^2<10$. Це означає, що a може набувати значень 1, 2, 3. Кожне з цих значень перевіряємо. Підходить лише $a=2$. Відповідно $b=4$. Таким чином, шукане число єдине і дорівнює 24.

15. Відстань між проекціями дорівнює радіусу кола.
16. Вираз в лівій частині нерівності записати у вигляді $(x-y)^2+1988y^2$.
17. Перемноживши рівняння системи, одержимо, $x^3+y^3=x^3$, звідки $y^3=0$. Отже, розв'язок системи $x=1$, $y=0$.
18. Нехай середини сторін — M і N, а основа висоти — K; MN — середня лінія шуканого трикутника. З точки K опускаємо перпендикуляр KO на пряму MN і на його продовженні відкладаємо відрізок $OB=OK$. B — шукана вершина.
19. $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}=$
$=\left|3+\sqrt{2}\right|+\left|3-\sqrt{2}\right|=6.$
20. При $x>0$ $y=1-x$; при $x<0$ $y=x-1$. Графік





21. Спочатку слід показати, що медіана і бісектриса в даному трикутнику можуть розміщуватись тільки так, як вказано на малюнку: AD — медіана; AM — бісектриса. Після цього слід встановити, які саме сторони в $\triangle ADM$ можуть бути рівними.

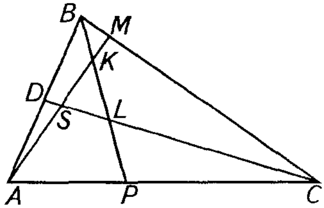
1) Припустимо, що $AD=DM$.

Але цього бути не може, бо $AD=DC$ як радіуси описаного кола, а $DM \neq DC$.

2) Припустимо, що $AD=AM$. Нехай $\angle ABC=\alpha$. Тоді $\angle BAD=\alpha$, $\angle ADM=\angle DMA=2\alpha$. Легко бачити, що $\angle MAD=180°-4\alpha$, а з другого боку $\angle MAD=90°-45°-\alpha$. Прирівнюючи два останніх вирази, знаходимо $\alpha=45°$. Отже, $\angle DAM=0°$, що суперечить умові задачі.

3) $AM=MD$. Знову позначимо $\angle ABD=\alpha$. Тоді $\angle ADM=\angle MAD=2\alpha$. Але $\angle MAD=\angle MAB-\angle DAB=45°-\alpha$. Отже, $45°-\alpha=2\alpha$, $\alpha=15°$, $\angle ACB=75°$.

22. Нехай ABC — даний трикутник і в ньому $AM\perp BC$, $AD=DB$, $\angle ABP=\angle PBC$. Припустимо, що $\triangle SKL$ — правильний. Оскільки $\angle BKM=60°$, то $\angle KBM==30°=\angle KBA$. Отже, $\angle ABC=60°$. В $\triangle SMC$ $\angle MSC=60°$, тому $\angle BCD=30°$ і $\angle CDB=90°$. Якщо CD є і висотою $\triangle ABC$, то $AC=BC$. Оскільки $\angle ABC=60°$, то трикутник ABC — рівносторонній і в ньому точки S, K і L співпадають, що суперечить означенню трикутника.



23. Запишемо послідовність всіх натуральних чисел, починаючи з 8: 8, 9, 10, 11, ... При цьому $8=3+5$. При $n\in N$, $n>2$ будь-які три послідовні натуральні числа можна подати у вигляді $3n$, $3n+1$,$3n+2$. Тоді будь-яке число $3n$ можна подати як $3\times n$ і сплатити цю суму 3-х копієчними монетами.

Число $3n+3(n-3)+10=3(n-3)+5\cdot 2$. Число виду $3n+2=3(n-1)+5$. Тобто, всі числа 8, 9, 10, 11,... можна подати у вигляді суми цілого числа трійок та п'ятірок.

24. Нехай $ABCD$ — трапеція, в якій $AD\parallel BC$. Якщо б трикутники ABC і ACD були рівними, то: 1) оскільки $\angle BCA=\angle CAD$, то $BC=AD$, що неможливо; 2) $\angle BAC=\angle ACD$, що також неможливо, бо тоді $AB\parallel CD$; 3) $\angle ABC=\angle ADC$, що також неможливо, бо тоді $\angle BAC=\angle ACD$ (випадок 2).

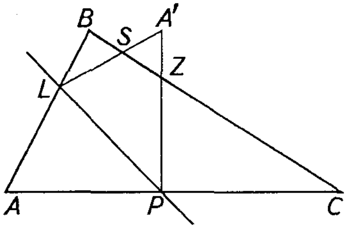
25. Нехай в записі числа K використано n двійок та $n+1$ одиниця. Сума цифр числа K дорівнює $3n+1$. Число $K+1985$ запишемо у вигляді $K-1+1986$. Очевидно, що сума цифр числа $(K-1)\vdots 3$ (вона дорівнює $3n$), тому й саме число $(K-1)\vdots 3$. Число $1986\vdots 3$. Тоді сума $(K+1986)\vdots 3$. Отже, це число складене.

26. Середини суміжних сторін всякого чотирикутника є вершинами паралелограма (доведіть!), тому останній може бути квадратом тільки тоді, коли 1) $AC=BD$ і 2) $AC \perp BD$. При цих обмеження чотирикутник $ABCD$ може і не бути квадратом.

27. Не можуть, бо в протилежному випадку чотирикутник $ABMK$ — паралелограм і $AC \parallel BC$, що неможливо.

28. Число $10^b - 1 = \overline{9\,9...9} \vdots 9$. Якщо $10^a + 1 \vdots \overline{9\,9...9}$, то число $(10^a+1) \vdots 9$. Тоді сума цифр цього числа ділиться на 9, що неможливо, бо сума цифр числа 10^a+1 дорівнює 2.

29. Не може, тому що після склеювання до периметра даного многокутника додається довжина відрізка, по якому перегинають многокутник, і віднімається довжина ламаної, кінці якої співпадають з кінцями відрізка. Пояснимо це на малюнку. Периметр трикутника ABC $P=AB+BC+AC$.



Периметр $LBSA'ZCPL$ $P'=LB+BS+SA'+A'Z+ZC+CP+PL$, тобто $P'=P+PL-(LS+SZ+ZP)$.

30. Не можна. Всього сум по рядках, стовпцях та двох діагоналях буде $2 \cdot 17+2$. З 17 доданків, що можуть набувати значень $0, -1, 1$, максимально можлива сума 17, мінімально можлива (-17). Всі останні суми можуть набувати всі проміжні цілі значення, включаючи і 0. Таких різних значень всього 35. Якщо 35 елементами заповнити 36 місць, то зрозуміло, що хоча б два місця будуть містити однакові елементи.

31. Побудуємо коло з центром C і радіусом $CB=CM$. Воно перетинає промінь CA в такій точці A_1, що $CA_1=CB$. Оскільки за умовою задачі $AC>CB$, то точка A_1 лежить між точками A і C. В зв'язку з цим $\angle ABC$ більший $\angle A_1BC$. Оскільки точка C лежить між точками A і M (за умовою задачі), то $\angle ABM$ більший $\angle A_1BM=90^\circ$.

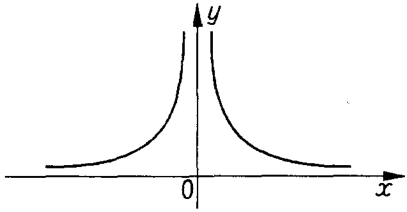
32. $1983^{1984}=(1983^4)^{496}$. Число 1983^4 закінчується 1, отже число $(1983^4)^{496}$ теж закінчується 1. Отже, дане число закінчуються п'ятіркою і ділиться на 5.

33. Мінімальна кількість монет, яку можна розкласти по 10 гаманцях, як вимагаються в умові задачі, дорівнює $0+1+2+3+\ldots+9=45$. Оскільки монет всього 44, то зробити цього не можна.

34. Якщо $x>0$, то $y=\frac{1}{x}$;

якщо $x<0$, то $y=\frac{1}{-x}$.

Графік будується окремо на інтервалах.



35. Подамо вираз, який нас цікавить, у вигляді $A=n(n+1)(n+2)(n+3)+1$. Маємо:
$A=(n+1)(n+1)(n+2)(n+3)-(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n+1)\times$
$\times(n+1)(n+2)(n+2)+(n+1)(n+1)(n+2)-(n+1)(n+2)(n+3)+$
$+1=(n+1)^2(n+2)^2-2(n+1)(n+2)+1=((n+1)(n+2)-1)^2$.

36. Нехай $1986+x^2=y^2$, де y – ціле число. Тоді $(x+y)(y-x)=1986$. Позначимо $y-x=m$; $y+x=n$. Тоді $m+n=2y$, тобто число парне. Звідси випливає, що або m і n обидва парні, або обидва непарні. В першому випадку $(m\cdot n)\,\vdots\,4$, а 1986 не ділиться на 4, в другому випадку $m\cdot n$ – непарне, а 1986 – парне. Прийшли до протиріччя. Отже, такого цілого числа не існує.

37. З рівняння випливає, що $z^3\,\vdots\,3$, отже, і $z\,\vdots\,3$, бо z – ціле число. Подамо його у вигляді $z=3z_1$ та підставимо в рівняння. Одержимо $662x^3=6y^3+9z^3+9xyz_1$. Звідси випливає, що $662x^3\,\vdots\,3$, отже $x^3\,\vdots\,3$. Тоді $x\,\vdots\,3$. Подамо його у вигляді $x=3x_1$ та підставимо в рівняння. Одержимо $662\cdot x_1^3=2y^3+3z_1^3+9x_1yz_1$, звідки випливає, що $y\,\vdots\,3$, тому $y=3y_1$. Нарешті, одержимо, що $1986x_1^3=18y_1^3+z_1^3+9x_1y_1z_1$. Отже, якщо (x,y,z) – цілий розв'язок даного рівняння, то $\left(\frac{x}{3};\frac{y}{3};\frac{z}{3}\right)$ теж цілий розв'язок цього ж рівняння. Отже, цілі числа x, y, z діляться на 3 нескінченну кількість разів. Звідси випливає, що x,y,z – нулі.

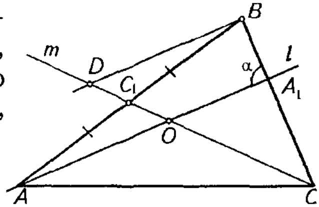
Іншого розв'язку не існує.

38. Дискримінант рівняння $D = p^2 + 644 > 0$, отже при будь-якому р воно має два різні корені:

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 644}}{14}; \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + 644}}{14}.$$

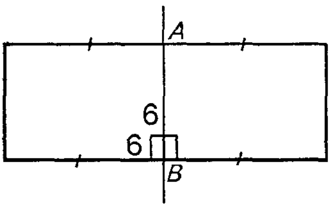
Очевидно, $x_2 < 0$, а $x_1 > 0$, бо $\sqrt{p^2 + 644} > |p|$. Легко також розв'язати задачу, застосовуючи теорему Вієта.

39. Нехай ABC – шуканий трикутник, l і m – дані прямі, O – точка їх перетину. Якщо б вдалося побудувати точку C_1, то задача була б розв'язана. Побудуємо $BD \parallel l$. Оскільки $AC_1 = C_1B$, то $C_1D = C_1O$, тому



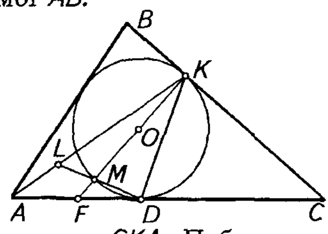
точку C_1 можна побудувати, після чого легко будуються точки A і C. Точка D будується завжди і однозначно, тому задача завжди має і до того ж єдиний розв'язок.

40. Гравцю, що починає, слід першим ходом зафарбувати



квадрат розміром 6×6, симетричний відносно відрізка, що ділить дошку навпіл, як вказано на малюнку. Який би квадрат не зафарбував партнер своїм ходом, гравець, що починав, повинен зафарбувати квадрат, симетричний вказаному відносно прямої AB.

41. Якщо центр O вписаного кола належить відрізкові AK, то $OA > r$, тому $AK > 2r$. Припустимо, що промінь KO проходить між сторонами одного з кутів BKA або CKA. Нехай, для певності, промінь



KO проходить між сторонами кута CKA. Побудуємо відрізок KD (D – точка дотику вписаного кола і сторони AC). Точка O не належить DK (чому?). Нехай промінь KO перетинає коло в точці M, а пряму AC – в точці F. Оскільки $KM < KF$ (чому?), то точка M лежить між точками K і F. Тоді промінь DM перетинає відрізок AK в точці L і точка M лежить між точками D і L. Оскільки $\angle KDL = 90^\circ$ то $KD < KM < KL$.

42. Припустимо, що команда-переможець набрала x очок. Тоді будь-яка інша команда набрала кількість очок, меншу за x. Звідси випливає, що сума очок, набраних всіма командами, менша, ніж $16x$. Щоб x було мінімальним, треба, щоб і загальна кількість набраних в турнірі всіма командами очок була мінімальною.

Потрібну кількість очок дає така ситуація.

Нехай перші 10 ігор були зіграні 1, 2, ..., 11 командами між собою. Це разом складає 55 ігор. Кожна з них, як би вона не закінчилась, дає разом (для обох команд) 2 очки. Нехай кожна з команд 12–16 зіграє перші 10 ігор з командами 1–10 внічию. Кожна з цих ігор принесе по одному очку, бо для 1–10 команд нічия дає 0 очок. Таких ігор 50. Якщо всі останні ігри — нічиї, то вони дадуть 0 очок. Отже, при такій ситуації загальна кількість очок дорівнює $2 \cdot 55 + 1 \cdot 50 = 160$. Звідси $160 < 16x$, $x > 10$. Таким чином, $x = 11$.

43. Як випливає з умови, $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0$. Перетворивши ліву частину, матимемо $a^2-2ab+b^2+a^2-$ $-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2=0$, що рівносильно рівності $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$, яка виконується лише за умови $a=b=c$ (чому?).

44. $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2=0$.

45. Необхідність. Нехай $a^3+b^3+c^3=3abc$. Тоді: $a^3+b^3+c^3-$ $-3abc=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc=(a+b+c)\times$ $\times(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=0$.

Як випливає із задачі 43, вираз, що є другим співмножником, за умови задачі в нуль не перетворюється. Отже, для того, щоб $a^3+b^3+c^3=3abc$, необхідно, щоб $a+b+c=0$.

Достатність. Нехай тепер $a+b+c=0$. Тоді $a+b=-c$, $(a+b)^3=-c^3$, $a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)=0$, $a^3+b^3+c^3=$ $=-3ab(a+b)$, $a^3+b^3+c^3=3abc$.

46. $Ax^2(x+1)+B(x^2+1)(x-6)+Cx(x^2+1)=x^2+5x+6$;
$(A+B+C)x^3+(A-6B)x^2+(B+C)\in 6B=x^2+5x+6$.

Звідси $\begin{cases} A+B+C=0, \\ A-6B=1, \\ B+C=5, \\ 6B=-6. \end{cases}$ Отже, $\begin{cases} A=-5, \\ B=-1, \\ C=6. \end{cases}$

47. $(\sqrt{x}+2)(x^2-49)(x+2{,}5)=0$. Область допустимих значень змінної: $x \geqslant 0$. Тому серед розв'язків рівняння $(x^2-49)(x+2{,}5)=0$ необхідно вибрати лише додатні. Отже, $x=7$ — єдиний розв'язок рівняння.

48. З рівняння $x^2-4x+y^2+6y+13=0$ маємо: $x^2-2\cdot 2\cdot x+4+y^2+2\cdot 3\cdot y+9=0$. Отже, $(x-2)^2+(y+3)^2=0$. Звідси $x=2$, $y=-3$.

49. Оскільки $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$, то

$$x^2+\frac{1}{x^2}-x-\frac{1}{x}-4=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-6.$$

Вираз перетворюється в нуль за умови

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=3, \\ x+\dfrac{1}{x}=-2, \end{array}\right. \quad \text{звідки} \quad x\in\left\{-1;\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

50. Оскільки $|x|=|-x|$, то $\dfrac{x^2|x|-1}{|-x|-1}=\dfrac{|x|^3-1}{|x|-1}=x^2+|x|+1$.

Отже, дріб скорочено неправильно.

51. Перетворимо рівність $\dfrac{(1-b)^2}{1-ab}=\dfrac{(1+b)^2}{1+ab}$. Маємо:

$$\begin{cases}(1-b)^2(1+ab)-(1+b)^2(1-ab)=0,\\ 1-a^2b^2\neq 0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2b\,(ab^2+a-2)=0,\\ a\neq\pm\dfrac{1}{b};\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}ab^2+a-2=0,\\ a\neq\pm\dfrac{1}{b};\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\dfrac{2}{b^2+1};\\ a\neq\pm\dfrac{1}{b}.\end{cases}$$

Отже, $a=\dfrac{2}{b^2+1}$ — для всіх дійсних значень b, крім $b=\pm 1$, при яких перетворюються в нуль знаменник вихідної рівності. Після цього отримуємо: $\dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{b^2+3}{1-b^2}$ для всіх дійсних значень b, відмінних від ± 1.

52. Оскільки $x+y-xy=1$, то $x+y=1+xy$. Тоді

$$\frac{x^2+xy+y^2}{1+xy+x^2y^2}=\frac{x^2+2xy+y^2-xy}{1+2xy+x^2y^2-xy}=\frac{(x+y)^2-xy}{(1+xy)^2-xy}=1.$$

53. Помноживши чисельник і знаменник першого дробу на z, а другого на xz і врахувавши, що $xyz=1$, отримаємо, що сума дробів дорівнює одиниці.

54. $\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{1+x^2-1}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}$. Оскільки $0<\frac{1}{1+x^2}\le 1$ для всіх дійсних значень x, то $0\le\frac{x^2}{1+x^2}\le 1$, причому дріб дорівнює нулеві лише при $x=0$. При всіх інших значеннях змінної дріб набуває додатних значень. Тобто при $x=0$ дріб набуває свого найменшого значення.

55. Виконаємо такі перетворення заданої системи: 1) почленно додамо всі рівняння системи; 2) помноживши на -1 третє і четверте рівняння системи, додамо їх до перших двох; 3) виконаємо аналогічну операцію спочатку з другим і четвертим, а потім з другим і третім рівняннями. В результаті цього отримаємо розв'язок системи $x=6$, $y=3$, $z=2$, $t=1$.

56. Віднявши від другого рівняння перше і додавши до третього, отримаємо $yz=9$. Після цього матимемо, що $xy=1$, $xz=4$. Отже, $xyz=\pm 6$. Звідси знаходимо розв'язки: $\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2};6\right)$, $\left(-\frac{2}{3};-\frac{3}{2};-6\right)$.

57. $\begin{cases}4x^2y-3xy^2=18xy,\\12y+3y^2=2xy.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2xy(4x-3y-18)=0,\\2xy=12y+3y^2.\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3y(4+y)(4x-3y-18)=0,\\2xy=12y+3y^2.\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=0,\\2xy=12y+3y^2.\end{cases}\\\begin{cases}4+y=0,\\2xy=12y+3y^2,\end{cases}\\\begin{cases}4x-3y-18=0,\\2xy=12y+3y^2.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=0,\\x\in R.\end{cases}\\\begin{cases}y=-4,\\x=0.\end{cases}\\\begin{cases}4x=3y+18,\\3y^2+6y=0.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in R,\\y=0.\end{cases}\\\begin{cases}x=0.\\y=-4.\end{cases}\\\begin{cases}x=3,\\y=-2.\end{cases}\end{array}\right.$$

58. а) Рівняння $x^2+xy=0 \Leftrightarrow x(x+y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ y=-x, \end{array}\right.$ тому графік, заданий рівнянням $x^2+xy=0$, буде об'єднанням графіків, заданих рівняннями $x=0$ і $y=-x$.

б) $$y=x|y| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0, \\ x \in R. \end{cases} \\ \begin{cases} y \neq 0, \\ x=\dfrac{y}{|y|}. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0, \\ x \in R. \end{cases} \\ \begin{cases} y>0, \\ x=1. \end{cases} \\ \begin{cases} y<0, \\ x=-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отже, графік рівняння $y=x|y|$ буде об'єднанням прямої $y=0$ і півпрямих $\begin{cases} x=1, \\ y>0. \end{cases}$ та $\begin{cases} x=-1, \\ y<0. \end{cases}$

59. Запишемо умову задачі в такий спосіб:

$$\begin{array}{r} -\ 9\$\# \\ \$\#9 \\ \hline 216 \end{array}$$

Тут однакові символи означають однакові цифри. Для знаходження останньої цифри зменшуваного додамо останні цифри різниці і від'ємника. $6+9=15$, отже $\#=5$. При цьому слід врахувати, що при відніманні від \$ у зменшуваному "позичається" 1, тобто повинно виконуватись співвідношення: $1+5=\$-1$, звідки $\$=7$. Отже, на дошці було записане число 975.

60. Якщо x — вік брата, а y — сестри, то $5(x+5)=7(y+5)$ і $x-1=2(y-1)$ одночасно.

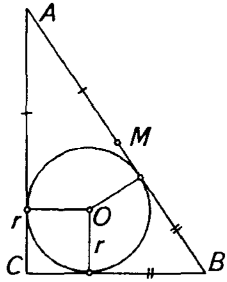
Звідси отримуємо, що $x=9$, $y=5$.

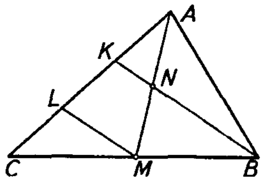
61. Приймемо весь шлях, який пройшов потяг, за 1. Нехай першу половину шляху він пройшов за t годин. При цьому його швидкість була $\frac{1}{2t}$. Другу половину шляху він пройшов за $t-0{,}5$ години. При цьому його швидкість була $\frac{1}{2t-1}$. За умовою $V_2=\frac{5V_1}{4}$, звідки маємо $\frac{1}{2t-1}=\frac{5}{8t}$. Отже, $t=2{,}5$. Таким чином, весь шлях потяг пройшов за 4,5 години.

62. $1^3+2^3+\ldots+1992^3=(1^3+1992^3)+(2^3+1991^3)+\ldots+(996^3+$ $+997^3)=(1+1992)(1-1992+1992^2)+(2+1991)(2^2-2\cdot1991+$ $+1991^2)+\ldots+(996+997)(995^2-995\cdot996+\ +996^2)$.

Кожен доданок суми ділиться на 1993, отже, сума ділиться на 1993.

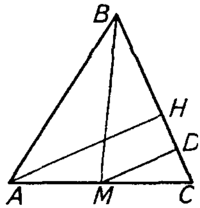
63. Нехай ABC — прямокутний трикутник, катети якого мають довжини a і b, а гіпотенуза — c. Нехай O — центр кола, вписаного в цей трикутник, r — його радіус. Якщо $AM=MB$, то точка M — центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Якщо R — його радіус, то $c=2R$. Використавши властивість дотичних, проведених до кола з однієї точки, одержимо, що $a+b-c=2r$, звідки і отримаємо потрібне співвідношення.

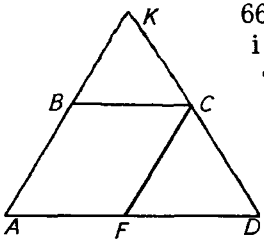




64. Для розв'язання задачі досить виконати допоміжну побудову: $ML \parallel BN$. Після цього, двічі застосувавши теорему Фалеса, одержимо $AK:KC=1:2$.

65. Проведемо $MD \parallel AH$. Трикутник BMD — прямокутний. $MD=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}BM$ тому $\sin\angle CBM=\frac{1}{2}$. Отже, $\angle CBM=30^\circ$.





66. Нехай $ABCD$ — дана трапеція, $AD \parallel BC$ і $BC<AB$. Якщо $CF \parallel AB$, то $AF=BC$ і тому точка F лежить між точками A і D. Із означення трапеції випливає, що $AB \nparallel CD$, тому $AB \cap CD=K$. Оскільки F лежить між A і D, то C лежить між D і K. Аналогічно доводимо, що B лежить між A і K. Відомо, що коли в трикутнику AKD точки C і B належать його сторонам DK і AK, то відрізки AC і BD перетинаються.

67. Нехай AKD — даний трикутник (див. попередній малюнок), BC — пряма, про яку йдеться в умові задачі. Оскільки $ABCD$ — трапеція, то $BC \parallel AD$ і $AB=CD$ (чому?).

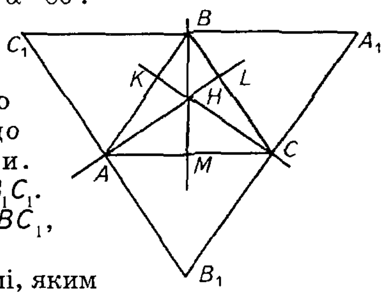
Якщо $CF \| AB$, то $CF=AB=CD$, тому $\angle CFD=\angle BAD=\angle CDF$. Звідси зразу випливає, що $\angle CAD=\angle BDA$, $AO=OD$ і $OB=OC$. Отже, трикутники AOD і BOC рівнобедрені у всякій рівнобічній трапеції. За умовою задачі трикутники AOB і DOC теж рівнобедрені. Оскільки $\triangle AOB=\triangle DOC$, то для подальших міркувань досить розглянути один з них:

1) якщо б $AO=OC$, то $AO=OC$, $DO=CB$ і чотирикутник $ABCD$ був би паралелограмом, що суперечить умові задачі;

2) якщо $AB=BO$, то $\angle BAO=\alpha$, $\angle BCA=\frac{\alpha}{2}=\angle CAD$. Оскільки точка O лежить між точками B і D, то $\angle BAD=\frac{2}{3}\alpha=60°$, тому $\alpha=40°$;

3) якщо $AB=AO$, то $\angle ABO=\alpha$, $\angle OBC=\angle OCB=\frac{\alpha}{2}$, $\angle ABC=\frac{3}{2}\alpha=120°$, тому $\alpha=80°$.

68. Нехай ABC — заданий трикутник. Через кожну його вершину проведемо пряму, паралельну до протилежної сторони. Одержимо трикутник $A_1B_1C_1$. Доведіть, що $A_1B=BC_1$, $AC_1=AB_1$, $CA_1=CB_1$.



Покажіть також, що прямі, яким належать висоти AL, BM і CK трикутника будуть серединними перпендикулярами сторін трикутника $A_1B_1C_1$. Оскільки серединні перпендикуляри сторін всякого трикутника перетинаються, то прямі AL, CK і BH, які містять висоти заданого трикутника, перетинаються в одній точці.

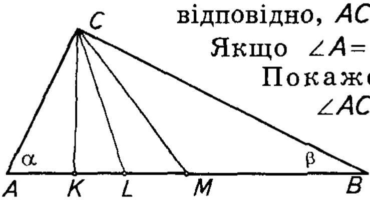
Якщо трикутник ABC гострокутний, то $M*AC$ (точка M лежить між точками A і C) і $L*BC$.

На основі відомої задачі відрізки BM і AL перетинаються. В цьому випадку точка H є точкою перетину висот трикутника.

Якщо трикутник ABC прямокутний з прямим кутом C, то $H \equiv C$.

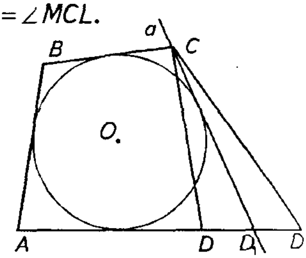
Якщо ж в трикутнику ABC один з кутів тупий, то точка H не належить жодній з його висот.

69. Нехай CK, CL і CM — висота, бісектриса і медіана відповідно, $AC<BC$.

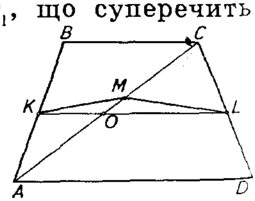


Якщо $\angle A=\alpha$, а $\angle B=\beta$, то $\alpha>\beta$ і $\alpha>45^\circ$. Покажемо спочатку, що $L*KM$. $\angle ACK=90^\circ-\alpha<45^\circ$, а $\angle ACL=45^\circ$, тому $K*AL$. За властивістю бісектриси трикутника $AL<LB$, тому $AL<MA$, а отже, $L*AM$. Таким чином, $AK<AL<AM$, тому $L*KM$. З того, що $\angle ACK=90^\circ-\alpha=\beta$ і $MA=MB=MC$ зразу випливає, що $\angle MCB=\angle MBC=\beta$, а отже $\angle KCL=\angle MCL$.

70. Використавши властивість дотичних, проведених до кола з однієї точки, легко показати, що суми довжин протилежних сторін описаного чотирикутника рівні. Нехай тепер $ABCD$ — опуклий чотирикутник, сума довжин сторін якого задовольняє співвідношенню $AB+CD=BC+AD$ (1). Нехай O — точка перетину бісектрис кутів ABC та BAD. Тоді вона буде центром кола, яке дотикається до сторін BC, AB та AD чотирикутника $ABCD$. Доведемо, що сторона CD також дотикається до цього кола. Припустимо супротивне. Через точку C проведемо пряму a так, щоб вона була дотичною до побудованого кола. Нехай $D_1=a\cap AD$. Можливі два випадки: або D_1*AD, або $D*AD_1$. Нехай, для певності, D_1*AD (в іншому випадку міркування будуть аналогічними). Матимемо, що побудоване коло буде вписаним в чотирикутник $ABCD_1$. Тоді $AB+CD_1=BC+AD_1$ (2). Віднявши почленно від рівності (1) рівність (2), одержимо $CD-CD_1=AD-AD_1=DD_1$, що суперечить нерівності трикутника.



71. Нехай $KL\cap AC=0$. Для розв'язання задачі досить показати, що $AO=OC$ (чому?). Припустимо, що $AO\neq OC$ і точка M є серединою відрізка AC.



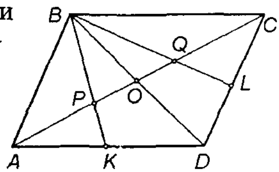
Тоді $KM=\dfrac{BC}{2}$, $ML=\dfrac{AD}{2}$ і $KM+ML=\dfrac{AD+BC}{2}=KL$, що суперечить нерівності трикутника KLM.

72. Перепишемо останнє співвідношення так:

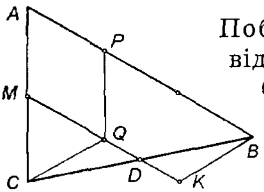
$KL+LN=\dfrac{AB+CD}{2}+\dfrac{AD+BC}{2}$ (1). Із міркувань, проведених в попередній задачі, випливає, що в опуклому чотирикутнику $KM\le\dfrac{AB+CD}{2}$ і $LN\le\dfrac{AD+BC}{2}$.

Співвідношення (1) матиме місце тільки у випадку, коли два останні співвідношення будуть рівностями, а за попередньою задачею при цьому $AB\parallel CD$ і $AD\parallel BC$.

73. Відрізки AO і BK — медіани $\triangle ABD$, тому $AP{:}OP=2{:}1$. Аналогічно $CQ{:}OQ=2{:}1$. З того, що $OA=OC$ випливає, що $CQ=AP=$ $=OP+OQ$. (Доведіть самостійно, що $P{*}AO$, $Q{*}AC$, $O{*}PQ$).

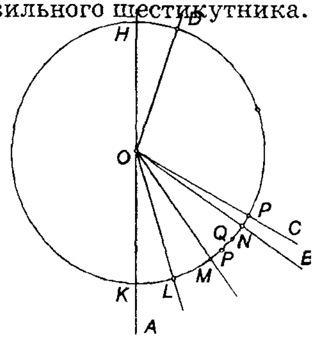


74. Нехай $AM=MC$, $AP=\dfrac{1}{3}AB$ і $CD=DB$. При цьому $MD\parallel AB$.



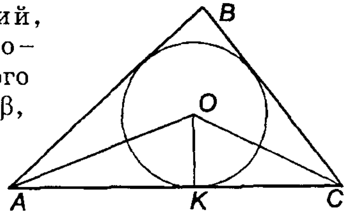
Побудуємо $PQ\parallel AC$ і на продовженні відрізка QD відкладемо відрізок $DK=QD$. Оскільки $\triangle CQD=$ $=\triangle BKD$, то із трикутника CQD і трапеції $BDQP$ можна скласти трапецію $BPQK$, яка рівна трапеції $ACQP$ і становить половину правильного шестикутника.

75. *I спосіб.* Нехай $\angle AOB=54^\circ$. На промені OA зафіксуємо довільну точку K і опишемо коло (O,OK). Нехай $P=(O,OK)\cap(K,OK)$. Тоді $\angle POK=60^\circ$, а $\angle POB=6^\circ$. Нехай $N=(O,OK)\cap OB$ (OB — промінь). Будуємо далі $Q=(O,OK)\cap(N,NP)$; $R=(O,OK)\cap(Q,NP)$; $M=(O,OK)\cap(P,PR)$. Очевидно, що дуга MN стягує кут у 18°. Далі досить побудувати точку $L=(O,OK)\cap(M,MN)$ і побудувати промені OL та OM.



II спосіб. $\angle AOH=180^\circ$, $\angle AOD=3\angle AOB=162^\circ$, тоді $\angle HOD=18^\circ$.

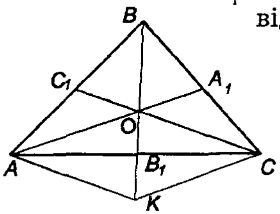
76. Нехай $\triangle ABC$ — шуканий, (O, OK) — коло, вписане в нього, і K — точка дотику цього кола до сторони AC; $\angle B = \beta$, $AC = b$ і $CK = r$. Якщо б вдалося виразити $\angle AOC$ через β, то задача була б розв'язана. $\angle OAC = \angle OAB$;



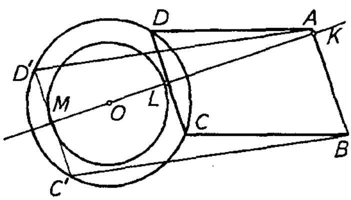
$\angle OCA = \angle OCB$; $\angle AOC = 180^\circ - (\angle OAC + \angle OAC) = 90^\circ + \dfrac{\beta}{2}$.

Побудова: 1) будуємо кут з величиною $90^\circ + \dfrac{\beta}{2}$ (як?); 2) будуємо $\triangle AOC$ (як?), 3) будуємо коло (O, OK); 4) з точок A і C проводимо дотичні до кола (O, OK) і від їх перетину одержуємо точку B.

77. Нехай $\triangle ABC$ — шуканий, тобто $AA_1 = m_c$, $BB_1 = m_b$, $CC_1 = m_c$, і нехай $AA_1 \cap BB_1 = 0$. На продовженні відрізка OB_1 відкладаємо відрізок $B_1K = OB_1$. З'єднаємо точку K із точками A і C. Оскільки $AOCK$ — паралелограм (чому?), то $AO = \dfrac{2}{3} m_a$, $AK = \dfrac{2}{3} m_c$ і $OK = \dfrac{2}{3} m_b$. Побудувавши $\triangle AOK$, легко побудуємо $\triangle ABC$.



78. Нехай A і B — дані точки, (O, r) — дане коло і $ABCD$ — шуканий паралелограм. Якщо $OK \perp AB$ то $OL \perp CD$ і $CL = LD = \dfrac{AB}{2}$.

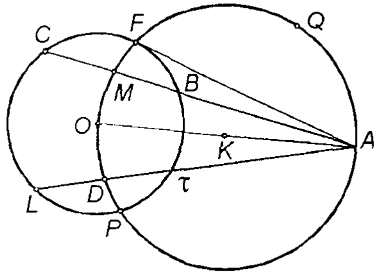


Прямокутний трикутник з гіпотенузою r і катетом $\dfrac{AB}{2}$ можна побудувати.

Другий його катет матиме довжину $x = \sqrt{r^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}$.

Звідси і випливає побудова: 1) будуємо відрізок з довжиною x; 2) будуємо коло $(0, x)$; 3) будуємо пряму $OK \perp AB$ і від перетину її з колом $(0, x)$ одержуємо точки L і M; 4) будуємо хорди CD і $C'D'$, які паралельні до AB. Паралелограми $ABCD$ і $ABC'D'$ — шукані.

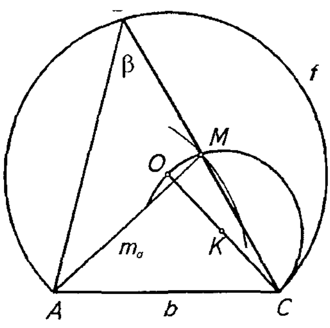
79. Нехай (O,r) — дане коло, A — така точка, що $OA>r$. а) Проведемо таку довільну пряму через точку A, яка перетинає це коло в точках B і C. Середина M хорди BC буде точкою шуканого геометричного місця (ГМТ). Оскільки $OM \perp BC$, то точка M належить колу f діаметра OA. Отже, кожна точка шуканого ГМТ належить цьому колу.



б) Легко бачити, що точка O теж належить шуканому ГМТ. Прямі AF і AP (див.малюнок) дотикаються до даного кола в точках F і P, тому останні є серединами хорд з довжиною нуль. Отже, точки F і P теж належать шуканому ГМТ. Довільна точка D дуги FOP теж належить шуканому ГМТ ($\angle ODA = 90^\circ$, тому $LD=DT$). Жодна із точок Q дуги FAP не належить цьому ГМТ, бо $OQ>r$.

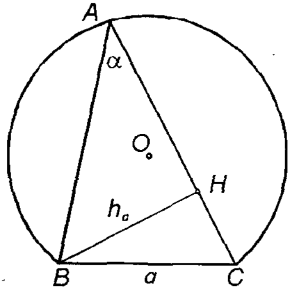
Висновок: шуканим ГМТ є об'єднання дуги FOP і її кінців. (Розгляньте цю задачу для випадків, коли $OA=r$ і $OA<r$).

80. Нехай $\triangle ABC$ — шуканий, тобто $AC=b$, $\angle B=\beta$ і $AM=m_a$.



Відрізок AC можна побудувати безпосередньо, після чого розв'язання задачі зводиться до побудови точки B. Остання належить ГМТ, з якого відрізок AC видно під кутом β. Цим ГМТ є об'єднання двох дуг з кінцями A і C (ці точки виключаються!), кожна з яких вміщує кут з величиною β. Нехай f — одна з цих дуг. Якщо б вдалось побудувати точку M, то задача була б розв'язана, бо $B=f \cap CM$. Точка M є перетином кола (A,m_a) і кола діаметра OC (див. попередню задачу). Кількість розв'язків залежить від існування і числа тих точок, які одержуються від перетину двох останніх кіл і належать тій півплощині, яка визначаються межею AC і точкою B.

81. Нехай $\angle ABC$ — шуканий, тобто $BC=a$, $\angle A=\alpha$ і $BH=h$.

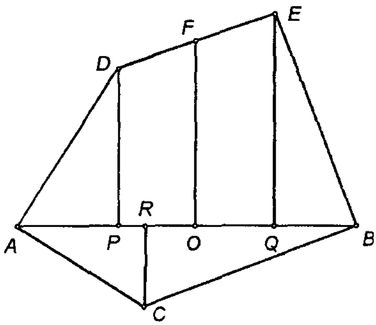


Як і в попередній задачі, безпосередньо можна побудувати відрізок BC, після чого залишається побудувати точку A. Остання може бути одержана від перетину ГМТ, з яких відрізок BC видно під кутом з величиною α і променя CH. Точка H належить колу (B,h_a) і колу діаметра BC (чому?).

А чи не можна розпочати розв'язання цієї задачі з побудови відрізка $BH=h$? Як це зробити?

Розпочніть розв'язання задачі із побудови кута $B_1AC_1=\alpha$. Скільки розв'язків має ця задача?

82. Нехай точки A, B і C є зображеннями дуба, берези і стовпа відповідно. Розглянемо загальний випадок, в якому $C\overline{\in}AB$. Побудуємо точки D і E ($\angle CAD=90^\circ$ і $DA=AC$; $\angle CBE=90^\circ$ і $BE=BC$) і такі точки P, Q і R, що $DP\perp AB$, $CR\perp AB$ і $EQ\perp AB$. Нехай точка F — середина DE і $FO\triangle AB$. За теоремою Фалеса

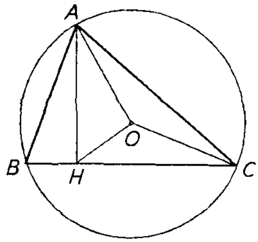


$PO=OQ$, отже, $FO=\frac{1}{2}(DP+EQ)$.

Легко бачити, що $AP=RC=BQ$ ($\triangle ADP=\triangle CAR$ і $\triangle BRC=\triangle EQB$) тому $OF=\frac{AB}{2}$, звідки і випливає побудова точки F.

Зауважимо, що точки F і C належать різним півплощинам з межею AB. Покажіть, що коли $C\in AB$ (два випадки), то точку F будуємо так, як вказано вище ($OA=OB$, $FO=AB$ і $FO=OA$). Однак, в цьому випадку, задача матиме ще один розв'язок (який?).

83. Очевидно, що $\angle AOC = 2\angle ABC$. Трикутник AOC — рівнобедрений, тому $\angle OAC = \angle OCA$. Отже, $2\angle OAC + \angle AOC = 180^\circ$. Звідси $\angle OAC = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle AOC = 90^\circ - \angle ABC$. Трикутник AHB — прямокутний ($\angle BHA = 90^\circ$), тому $\angle HAB = 90^\circ - \angle ABC$. $\angle OAH = |\angle BAC - \angle HAB - \angle OAC| = |180^\circ - \angle ABC - \angle ACB - 90^\circ + \angle ABC - 90^\circ + \angle ABC| = |\angle ABC - \angle ACB|$.



84. $$\sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\sqrt{35 - 8\sqrt{19}}}} = \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3 - 8\sqrt{\left(\sqrt{19} - 4\right)^2}}} =$$
$$= \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{35 - 8\sqrt{19}}} = \sqrt{\sqrt{19} - \left(\sqrt{19} - 4\right)} = \sqrt{4} = 2.$$

85. **1-й спосіб.** Різниця
$$\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} - \frac{a^3b + ab^3}{2} =$$
$$= \frac{2a^4 + 2a^2b^2 + 2b^4 - 3a^3b - 3ab^3}{6} =$$
$$= \frac{a^4 + b^4 - a^3b - ab^3 + a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^3b - 2ab^3}{6} =$$
$$= \frac{1}{6}\left[a^3(a - b) + b^3(b - a) + \left(a^2 + b^2\right)^2 - 2ab\left(a^2 + b^2\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{6}\left[(a - b)\left(a^3 - b^3\right) + \left(a^2 + b^2\right)\left(a^2 - 2ab + b^2\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{6}\left[(a - b)^2\left(a^2 + ab + b^2\right) + \left(a^2 + b^2\right)(a - b)^2\right] =$$
$$= \frac{1}{6}(a - b)^2\left(2a^2 + ab + 2b^2\right) =$$
$$= \frac{1}{6}(a - b)^2\left[a^2 + \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}b^2\right] \ge 0.$$

2-й спосіб. Оскільки $(a-b)(a^3-b^3) = (a-b)^2(a^2+ab+b^2) = a^4 - ab^3 - ba^3 + b^4 \geqslant 0$, то $a^4 + b^4 \geqslant a^3b + ab^3$. $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geqslant 2(a^3b + b^3a)$, бо $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $(a^2+b^2)^2 \geqslant 2ab(a^2+b^2)$. Отже, $a^4 + b^4 \geqslant a^3b + ab^3$, $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geqslant 2(a^3b + ab^3)$. Додавши ці нерівності, отримаємо $2a^4 + 2a^2b^2 + 2b^4 \geqslant 3(a^3b + ab^3)$. Звідси $\dfrac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \ge \dfrac{a^3b + ab^3}{2}$.

86. Якщо квиток $\overline{abcdef}$ — “щасливий”, тобто $\overline{af}+\overline{be}+\overline{cd}=100$, то квиток $\overline{defabc}$ також “щасливий”, бо $\overline{dc}+\overline{eb}+\overline{fa}=100$. Можливі випадки:

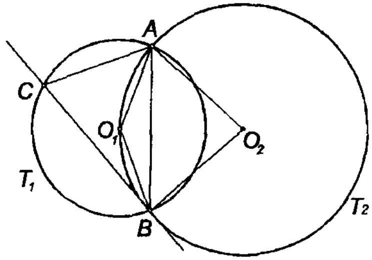
1) $\overline{abc}=\overline{def}$. Тоді квитки мають номери $\overline{abcabc}=$ $=\overline{abc}\cdot 1000+\overline{abc}=\overline{abc}\cdot 1001$, і сума цих номерів ділиться на 1001.

2) $\overline{abc}\neq\overline{def}$. Всі “щасливі” квитки розбиваються на пари $\left(\overline{abcdef},\overline{defabc}\right)$. Сума номерів кожної пари $\overline{abcdef}+\overline{defabc}=\overline{abc}\cdot 1000+\overline{def}+\overline{abc}+\overline{def}\cdot 1000=$ $=\overline{abc}\cdot 1001+\overline{def}\cdot 1001=1001(\overline{abc}+\overline{def})$ ділиться на 1001, тому сума номерів всіх пар також ділиться на 1001.

87. $m^2+9mn+n^2=(m-n)^2+11mn$, тому на 11 ділиться $(m-n)^2$. Оскільки 11 — просте число, то на 11 ділиться $m-n$. Отже, $m^2-n^2=(m-n)(m+n)$ також ділиться на 11.

88. Припустимо, що такі числа існують. Тоді з рівностей випливає, що $a>0$ і $b>0$. З першої рівності отримаємо, що $\frac{a}{b}=b+\frac{1}{b}\geq 2$, а з другої $\frac{b}{a}=a+\frac{1}{a}\geq 2$. Протиріччя.

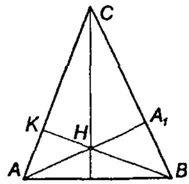
89. Якщо $\angle ABC=\alpha$, то $\angle ABO_2=90^\circ-\alpha$, $\angle AO_2B=2\alpha$, $\angle AO_1B=180^\circ-\alpha$. Отже, $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AO_1B=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$, $\angle CAB=180^\circ-\alpha-$ $-\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$.



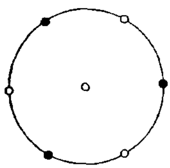
Таким чином, $\triangle CAB$ — рівнобедрений і $AB=BC$.

90. Нехай $a_1+a_{n+1}=a_2+a_{n+2}=\ldots=a_n+a_{2n}=2b$. Вважаємо, $a_i=b-c_i$, $a_{n+i}=b+c_i$.
Щоб одержати однакові добутки в парах, потрібно найменше число помножити на найбільше, друге знизу значення на друге зверху і т.д. Тому одержуємо добуток $(b-c_i)(b+c_i)=b^2-c_i^2=2a$.
Звідси випливає, що всі числа c_i рівні, тому серед чисел цієї множини не знайдеться трьох різних.

91. Встановлюємо обидва годинники і, коли пройде 5 хвилин, перевертаємо п'ятихвилинний годинник, а потім, коли закінчить йти семихвилинний годинник, п'ятихвилинний потрібно перевернути знову, і чекати поки він знову зупиниться. Таким чином відмірюється 9 хвилин.



92. Нехай A_1 — основа висоти AA_1. Тоді $\triangle CA_1H = \triangle AA_1B$ $(CH=AB,\ \angle HCA_1 = \angle BAA_1 = 90^\circ - \angle B)$, тому $HA_1 = BA_1$. Отже, $\angle CBH = \angle CBK = 45^\circ$. Таким чином, $\angle ACB = \angle KCB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.



93. Може. Наприклад, садок у вигляді правильного шести-кутника з відміченим центром описаного кола, радіус якого 10 м.

О —яблуні, ● — груші.

94. $n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$ ділиться на 6 при будь-якому натуральному значенні n. Розіб'ємо числа на пари $(*n^8;\ *n^6)$, $(*n^7;\ *n^5)$, $(*n^4;\ *n^2)$, $(*n^3;\ *n)$. Оксана має ставити кожного разу знак, протилежний знакові, який ставить Петро, біля числа, що лежить в тій же парі, що і число, біля якого поставив знак Петро. Тоді вираз, що отримається, буде ділитися на 6.

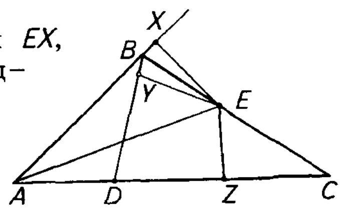
95. Нехай у шахіста було x перемог, y нічиїх, z поразок.

Маємо систему рівнянь $\begin{cases} x + y + z = 40, \\ x + \dfrac{1}{2}y = 25. \end{cases}$

Тоді $x-z=x-(40-x-y)=2\left(x+\dfrac{1}{2}y\right)-40=50-40=10$.

Відповідь: 10.

96. Оскільки $\overline{a,b}\cdot c=ac+0{,}1bc$, то $bc\,\vdots\,10$. Отже, або $b=5$, або c=5. Далі перебором варіантів одержуємо розв'язки: (6; 5; 2) та (2; 6; 5).



97. Опустимо перпендикуляри EX, EY, EZ на прямі AB, BD, DC відповідно. Тоді $EX=EY$ (бо $\angle YBE=\angle XBE$); $EX=EZ$ (бо $\angle XAE=\angle ZAE$). Звідси $EY=EZ$ і $\angle BDE=\angle ZDE$.

98. Нехай країни A та B між собою не ворогують, країни C та D між собою не ворогують. Тоді якісь з них співпадають, інакше четвірка A, B, C, D протирічить умові. Тому існує країна, яка не ворогує з усіма тими країнами, що не ворогують з усіма одночасно. Нехай ця країна X, і не ворогує вона з $Y_1,\ldots,Y_k$. Якщо $k>2$, то четвірка X, Y_1, Y_2, Y_3 протирічить умові. Це означає, що є не більше, ніж 3 країни, що не ворогують з усіма одночасно. Відповідно, не менше, ніж 1997 країн ворогують з усіма одночасно.

Відповідь: 1997.

99. $\overline{aab}+\overline{aba}+\overline{baa}=1998$,

$a\cdot 100+a\cdot 10+b+a\cdot 100+b\cdot 10+a+b\cdot 100+a\cdot 10+a=1998$,

$(2a+b)\cdot 100+(2a+b)\cdot 10+(2a+b)=1998$,

$(2a+b)\cdot 111=18\cdot 111$, $2a+b=18$, $b=18-2a=2(9-a)$.

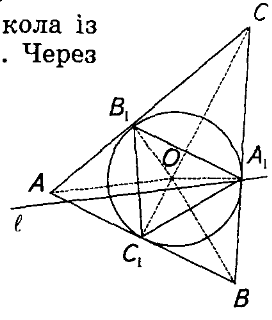
Отже, число b – парне. Звідси:

$b=2$, $a=8$; $b=4$, $a=7$; $b=6$, $a=6$; $b=8$, $a=5$.

Відповідь: (882,828,288), (774,747,477), (666,666,666), (558,585,855).

100. $\underbrace{11\ldots1}_{1998}\underbrace{55\ldots5}_{1997}6=6+5\cdot 10^1+\ldots+5\cdot 10^{1997}+1\cdot 10^{1998}+\ldots+$
$+1\cdot 10^{3995}=6++5\cdot(10^1+\ldots+10^{1997})+(10^{1998}+\ldots+10^{3995})=$
$=6+5\cdot\dfrac{10(10^{1997}-1)}{10-1}+\dfrac{10^{1998}(10^{1998}-1)}{10-1}=6+\dfrac{5\cdot 10^{1998}-50}{9}+$
$+\dfrac{10^{2\cdot 1998}-10^{1998}}{9}=\dfrac{54+5\cdot 10^{1998}-50+10^{2\cdot 1998}-10^{1998}}{9}=$
$=\dfrac{10^{2\cdot 1998}+4\cdot 10^{1998}+4}{9}=\left(\dfrac{10^{1998}+2}{3}\right)^2$. Відповідь: так.

101. Нехай A_1, B_1, C_1 – точки дотику кола із сторонами BC, AC, AB відповідно. Через точку A_1 проведемо пряму ℓ, паралельну бісектрисі AO. Оскільки $\triangle OB_1C_1$ – рівнобедрений ($OB_1=OC_1=r$), то $\angle OB_1C_1=\angle OC_1B_1$. $\angle OB_1A=\angle OC_1A=90^\circ$. Отже, $\angle AB_1C_1=\angle AC_1B_1$, тобто $\triangle AB_1C_1$ – рівнобедрений. Звідси одержуємо, що $AO\perp B_1C_1$. Таким



чином, прямій ℓ належить висота $\triangle A_1B_1C_1$, проведена з вершини A_1. Аналогічно встановлюємо, що інші дві прямі перпендикулярні до сторін B_1A_1 та A_1C_1 відповідно, тобто їм належать висоти $\triangle A_1B_1C_1$, проведені з вершин B_1 та C_1. Відомо, що прямі, яким належать висоти трикутника, перетинаються в одній точці.

1	2	3	4
5	6	7	8
1	2	3	4
5	6	7	8

102. Виграш може забезпечити собі той, хто ходить другим. Після ходу першого гравця в клітинку з якимось номером (див. мал.) він має зафарбувати іншу клітинку з таким же номером.

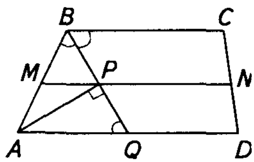
103. Із умови $-x>0$ знаходимо, що $x<0$. Тоді $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ і рівняння набуває вигляду $\frac{-x-x}{2x^2}=1999$, $-\frac{1}{x}=1999$, звідки $x=-\frac{1}{1999}$. Відповідь: $-\frac{1}{1999}$.

104. Позначимо $m+1998=k$. Тоді рівність набуває вигляду $k(k+1)+(k+1)(k+2)+k(k+2)=n^2$ або $n^2=3(k^2+2k)+2$.

Остання рівність означає, що при діленні на 3 квадрата цілого числа одержимо остачу 2, а це неможливо. Дійсно, якщо $n=3l$, то $n^2=9l^2=3(3l^2)$ і остача дорівнює 0. Якщо $n=3l+1$, то $n^2=9l^2+6l+1=3(3l^2+2l)+1$ і остача дорівнює 1. Якщо $n=3l+2$, то $n^2=9l^2+12l+4=$ $=3(3l^2+4l+1)+1$ і остача дорівнює 1.

Відповідь: не існують.

105. За умовою $\angle ABQ=\angle CBQ$. Очевидно, що $\angle CBQ=\angle DQA$ (чому?) і $\triangle ABQ$ – рівнобедрений. MP – медіана $\triangle ABQ$, а, отже, і його висота. Таким чином, $\angle APQ=90°$. Відповідь: $\angle APQ=90°$.



106. Маємо, що $1999=99\cdot 20+19$. Розіб'ємо сукупність даних чисел на 20 груп по 99 чисел та одну групу із 19 чисел. В кожній з 20 груп, які містять по 99 чисел, є принаймні одне додатне число (чому?). Тому серед даних чисел є 19 додатних. Відокремивши їх, останні 1980 чисел розіб'ємо на 20 груп по 99 чисел, і суми чисел в них будуть додатними. Звідси випливає, що сума всіх даних чисел буде додатною.

107. $19991999+19991998\cdot19991999\cdot19992000=19991999(1+$ $+(19991999-1)\cdot(19991999+1))=19991999(1+19991999^2-$ $-1)=19991999\cdot19991999^2=19991999^3$, що й треба було довести.

108. Нехай V – початковий об'єм води в озері, x – об'єм води, що випиває за 1 хв один слон, y об'єм води, яку дають джерела за 1 хв, t – шуканий час (у хвилинах). За умовою задачі складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}48x=V+4y,\\54x=V+6y,\\6xt=V+yt,\end{cases}\quad\begin{cases}6x=2y,\\48x=V+4y,\\6x(9-t)=y(6-t),\end{cases}\quad\begin{cases}y=3x,\\48x=V+4y,\\6x(9-t)=3x(6-t).\end{cases}$$

Звідси одержуємо рівняння: $2(9-t)=6-t$; $18-2t=6-t$; $t=12$.

Відповідь: 12 хв.

109. Вказівка. Доведіть спочатку, що чотирикутник, вершинами чкого є середини основ трапеції та середини її діагоналей – прямокутник.

110. Записавши рівняння у вигляді $7m^2=5n^2+2000$ помічаємо, що його права частина ділиться на 5. Тоді $7m^2$ також повинно ділитися на 5, а, отже, $m=5k$, $k\in Z$. Рівняння набуває вигляду $7\cdot25k^2-5n^2=2000$, звідки $n^2=7\cdot5k^2-400$. Права частина останнього рівняння знову ділиться на 5, тому $n=5l$, $l\in Z$. Рівняння набуває вигляду $7\cdot25k^2-$ $-5\cdot25l^2=2000$, звідки $7k^2-5l^2=80$. Записавши це рівняння у вигляді $7k^2=5l^2+80$, приходимо до висновку, що $k=5p$, $p\in Z$. Рівняння набуває вигляду $7\cdot25p^2-5l^2=80$, тобто $35p=l^2+16$. Останнє рівняння не має розв'язків у цілих числах, оскільки l^2+16 не може ділитися на 7.

Відповідь: не існують.

111. Виграє Миколка. Опишемо можливу виграшну стратегію його гри. Першим своїм ходом він записує 1 в центральну клітинку. Надалі, після того, як Сергійко запише в деяку клітинку число a, Миколка пише число $a+1$ в центральносиметричну клітинку таблиці. Тоді легко бачити, що числа S_1+S_7, S_2+S_5, S_3+S_4 будуть непарними, в кожній з цих пар одна сума буде парною. Також буде парною S_4. Отже, матимемо чотири парних числа S_i.

Відповідь: Миколка.

112. Ліва частина рівняння набуває тільки невід'ємних значень, тому права його частина $x \geqslant 0$. Тоді $|x| = x$ і рівняння набуває вигляду $|x - 2| = x$. Звідси випливає, що $x-2=x$ або $x-2=-x$. Перше рівняння не має розв'язків. Розв'язок другого рівняння: $x=1$.
Відповідь: $x=1$.

113. Нехай відстань між пунктами A і B дорівнює x км. Тоді час руху від A до B дорівнює $\frac{x/2}{4} + \frac{x/2}{6} =$
$= \frac{x}{8} + \frac{x}{12} = \frac{5x}{24}$ (год). Отже, його середня швидкість руху у напрямку від A до B дорівнює $\frac{x}{5x/24} = \frac{24}{5} = 4{,}8$ (км/год).
За умовою задачі складаємо рівняння:

$$\frac{x}{4{,}8} - \frac{2x/3}{4{,}8} - \frac{x/3}{5} = \frac{1}{30};\ \frac{5x}{24} - \frac{10x}{72} - \frac{x}{15} = \frac{1}{30};$$

$$\frac{x}{360} = \frac{1}{30};\ x = \frac{360}{30} = 12.$$

Відповідь: 12 км.

114. Оскільки $(k+l)^3 = k^3 + l^3 + 3kl(k+l) = 2001 + 3kl(k+l)$, то права частина ділиться на 3. Тоді $2001 = (k+l)^3 - 3kl(k+l) = (k+l)((k+l)^2 - 3kl)$. Права частина останньої рівності може бути записана у вигляді $3p((3p)^2 - 3kl) = 9p(3p^2 - kl)$, тобто ділиться на 9, а число 2001 на 9 не ділиться. Отже, таких чисел k і l не існує.
Відповідь: не існує.

115. Вказівка. Приведіть через центр квадрата O_1 відрізки з кінцями на сторонах $M_1N_1 \parallel MN$ та $P_1Q_1 \parallel PQ$. Тоді легко довести, що $P_{AMOQ} + P_{CPON} = P_{AM_1O_1Q_1} + P_{CP_1O_1N_1} = P_{AMOQ} +$
$+ P_{CPON} = P_{BM_1O_1P_1} + P_{DN_1O_1Q_1} = P_{BMOP} + P_{DNOQ}$.

116. Розглянемо величину S, яка дорівнює півсумі квадратів чисел сірників у купах. На початку гри $S=2001^2/2$, а в кінці гри $S=2001/2$. Якщо купа, в якій було $k+l$ сірників, розбивається на дві купи, що містять k і l сірників, то S зменшиться на kl, тобто на число, яке

записують. Тому сума всіх записаних чисел буде дорівнювати загальному зменшенню числа S і становитиме $2001^2/2-2001/2=(2001^2-2001)/2=2001\cdot2000/2=$ $=2001\cdot1000$, що ділиться на 1000. Отже, другий гравець завадити першому гравцю не зможе.

Відповідь: ні, не зможе.

117. Вказівка. Якщо джентельмен прийшов без капелюха, то він віддавав капелюха не більше разів, ніж одержував.

Відповідь: 10 джентельменів.

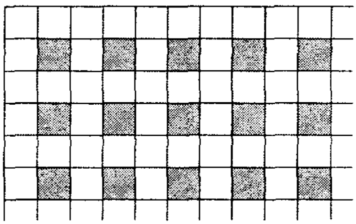
118. Вказівка. Нехай MP, MQ, AR – перпендикуляри до AB, BC, MC відповідно. Тоді $MC=2MQ=2MP$. Звідси випливає, що трикутники APM, ARM та ARC будуть рівними між собою.

Відповідь: $\angle AMB=150^\circ$.

119. Нехай НСК$(a,\ b)=x$, НСД$(a,\ b)=y$. Тоді $ab=xy$ і задана рівність матиме вигляд $x-y=(xy)/5$, звідки $(5-y)\times$ $\times(5+x)=25$, де $x,\ y\in N$. Єдиним натуральним розв'язком цього ріняння є $x=20$, $y=4$. Таким чином, $a=4$, $b=20$ або $a=20$, $b=4$.

Відповідь: $a=4$, $b=20$; $a=20$, $b=4$.

120. Відмітимо на плитці такі частинки розміром 1×1, як це показано на малюнку. Нехай Малюк кожним своїм ходом з'їдає одну з відмічених частинок плитки. Оскільки Карлсон кожним своїм ходом також з'їдає рівно одну відмічену частинку, то після501000 ходу Карлсона відмічених частинок не залишиться, а тому, не залишиться жодного квадрата розміром 2×2, і далі ходи робитиме лише Малюк. Карлсон з'їсть при цьому 2004000 частинок розмірами 1×1, що менше половини від $2002\cdot2003=4010006$. Отже, виграє Малюк.



Відповідь: виграє Малюк.

121. Нехай для певності ми маємо три кольори: синій, червоний і зелений. Припустимо, що не існує прямокутних трикутників з вершинами різного кольору. Тоді обов'язково знайдеться пряма (горизонтальна або вертикальна), яка містить вузли двох або трьох різних

кольорів. Розглянемо таку пряму l, припустивши, що вона горизонтальна. Якщо вона містить вузли тільки двох кольорів, наприклад, синього і червоного, то візьмемо довільний вузол A зеленого кольору та вузол B, який лежить на l на одній вертикалі з A. нехай вузол B має синій колір. Тоді вузол C, який лежить на l і має червоний колір, разом з вузлами A і B, утворює прямокутний трикутник ABC з прямим кутом B і різнокольоровими вершинами. Протиріччя. Отже, на прямій l вузли всіх трьох кольорів. Нехай B, C і D – відповідно синій, червоний і зелений вузли, які лежать на прячмій l. Тоді на вертикалі, яка проходить через вузол B, всі вузли синього кольору (інакше ми можемо легко побудувати прямокутний трикутник з різнокольоровими вершинами). Аналогічно, вертикаль, яка проходить через вузол D, містить вузли тільки зеленого кольору. Через точку C проведемо дві прямі: одну під кутом 45° до l, а другу – під кутом 135° до l. Ці дві прямі перетинають синю і зелену вертикалі у чотирьох точках. Дві з них – сині, а дві – зелені. Вибравши одну синю і одну зелену точки, разом з точкою C, одержимо приямокутний трикутник з прямим кутом при вершині C, всі вершини якого різного кольору, знову протиріччя. Отже, потрібний трикутник існує.

122. Вказівка. Функція при $x \leqslant 0$ невизначена (знаменник перетворюється в нуль), а при $x>0$ задається формулою

$$y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}.$$

123. Якщо a і b – катети трикутника, то тангенс одного гострого кута та котангенс другого гострого кута дорівнюють $\frac{a}{b}$. За умовою $\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 1$, тобто $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$. Тоді тангенс більшого гострого кута дорівнює $\frac{b}{a} = 2$.

Відповідь: 2.

124. $n^4-22n^2-46=n^4-25n^2+3n^2-75+29=n^2(n^2-25)+3(n^2-25)+29=(n^2-25)(n^2+3)+29=(n+5)(n-5)(n^2+23)+29$. Отже, число n^4-22n^2-46 буде без остачі ділитися на $(n+5)$,

якщо 29 ділиться на $(n+5)$. Оскільки 29 – просте число, то $n+5=29$, звідси $n=24$.

Відповідь: 24.

125. Оскільки

$$A+B=\frac{158^2+158\cdot185+185^2}{185+158}+\frac{158^2-158\cdot185+185^2}{185-158}=$$

$$=\frac{(185-158)(185^2+185\cdot158+158^2)+(185+158)(185^2+185\cdot158+158^2)}{343\cdot27}=$$

$$=\frac{185^3-158^3+185^3+158^3}{213}=\frac{2\cdot185^3}{213}=2\cdot\left(\frac{185}{21}\right)^3,$$

то середнє арифметичне $p=\frac{A+B}{2}=\left(\frac{185}{21}\right)^3$.

Рівняння набуває вигляду $\left(\frac{37}{21}x\right)^3=\left(\frac{185}{21}\right)^3$, звідки $37x=185$, тобто $x=5$.

Відповідь: $x=5$.

126. Припустимо, що твердження 3) хибне. Тоді з умови 2) маємо, що число $n-21$ закінчується цифрою 0, тобто число n закінчується цифрою 1. З умови 1) випливає, що число $n+41$ буде закінчуватися цифрою 2, а це неможливо, бо воно має бути квадратом. Отже, твердження 3) – вірне. Аналогічно встановлюється, що твердження 1) також не може бути хибним. таким чином, істинними є твердження 1), 3), а хибним – твердження 2). Нехай $n+41=x^2$, $n-48=y^2$. Тоді $x^2-y^2=89$, $(x-y)(x+y)=89$. Оскільки 89 – просте число, то $x-y=1$, $x+y=89$. Звідси одержуємо, що $x=45$, $y=44$. Тоді $n=1984$.

Відповідь: 1984.

127. Вказівка. Від довільної точки кола відкладаємо 10 разів дугу 35°. Тоді $(360°-350°):2=5°$.

128. Нехай P – така точка на відрізку AM, що $\angle ABP=24°$. Тоді $AP=PB$, $\angle BPM=48°$, $\angle PBM=66°$, $\angle AMB=66°$, а тому $PB=PM$. Оскільки $AM=2BK$, то $AP=PB=PM=BK$. Отже,

$\angle BKP = \angle BPK = 48^\circ$. Тому, $\angle PBK = 84^\circ$, а $\angle ABC = 24^\circ + 84^\circ = 108^\circ$ і $\angle A = \angle C = 36^\circ$.

129. Зірочки можна змінити знаками арифметичних дій, наприклад, так:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{9}{10}-\frac{10}{11}\cdot\frac{11}{12}\cdots\frac{19}{20}-\frac{20}{21}\cdot\frac{21}{22}\cdots\frac{49}{50}-\frac{50}{51}\cdot\frac{51}{52}\cdots\frac{99}{100}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=0.$$

130. Перший гравець може діяти таким чином. Позначимо шашки (у тому порядку в якому вони стоять на початку зліва направо) через *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Своїм першим ходом перший гравець поставить шашку *E* до крайньої правої клітинки нашої клітчастої смуги. Шашки *A* і *B* пофарбуємо білим кольором, а шашки *C* і *D* – чорним. Далі першому гравцеві досить дотримуватися такої стратегії: на кожен хід суперника він відповідатиме ходом другої шашки цього ж самого кольору таким чином, щоб ці шашки опинилися в сусідніх клітинках. Зрозуміло, що перший гравець завжди матиме можливість зробити свій черговий хід.

131. Маємо: $10^{15}+10^{17}-74=(10^{17}-1)+(10^{15}-1)+72$ ділиться на 9, оскільки кожний доданок ділиться на 9 (сума цифр кожного числа ділиться на 9).

132. Замінивши x на $\frac{1}{x}$, одержимо рівняння $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x}$.

Отже, для визначення функції f маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x, \\ 2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}, \end{cases} \quad \text{звідки } f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}-x\right).$$

Перевіркою встановлюємо, що знайдена функція f задовольняє рівняння.

Відповідь: $f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}-x\right)$.

133. Запишемо рівняння у вигляді $y^2+y-x^2-x=0$ і розглянемо його як квадратне відносно змінної y. Дискримінант рівняння $D=1+4x^2+4x=(2x+1)^2\geqslant 0$. Отже, $y=\dfrac{-1-2x-1}{2}=-x-1$ або $y=\dfrac{-1-2x+1}{2}=x$. Таким чином, графіком даного рівняння є сукупність двох прямих: $y=x$ та $y=-x-1$.

134. Дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases}\left[\dfrac{x+1}{3}\right]=k,\\ k\le\dfrac{x+1}{3}<k+1,\\ k=\dfrac{x-1}{2},\ k\in Z,\end{cases}\quad \begin{cases}x=2k+1,\\ k\le\dfrac{2k+1}{3}<k+1,\\ \left[\dfrac{x+1}{3}\right]=k,\ k\in Z,\end{cases}$$

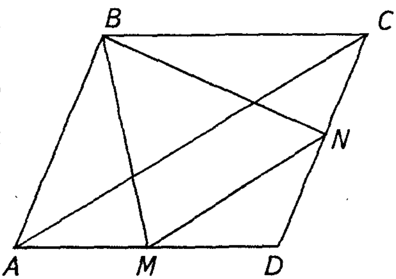
тобто

$$\begin{cases}x=2k+1,\\ k\le 2,\\ k>-1,\\ \left[\dfrac{x+1}{3}\right]=k,\ k\in Z.\end{cases}$$

Звідси випливає, що $k=0,\ 1,\ 2,$ а з першого рівняння одержуємо, що $x=1,\ 3,\ 5$.

Відповідь: 1, 3, 5.

135. Нехай $ABCD$ – ромб; $BM\perp AD$; $BN\perp CD$. Очевидно, що $\triangle AMB=\triangle CMB$, тому $AM=CN$ і $MN\parallel AC$. Оскільки $MN=\dfrac{1}{2}AC$, то MN – середня лінія $\triangle ACD$, а $\triangle ABD$ рівнобедрений: $AB=BD$, а, отже, й рівносторонній. Тому $\angle BAD=60^\circ$, $\angle ADC=120^\circ$.



Відповідь: 60°, 120°.

§3. ДЕВ'ЯТИЙ КЛАС

1. Оскільки числа p та q раціональні, то їх різниця також є раціональним числом. Розкладемо на множники: $p - q = \left(\sqrt{p} - \sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p} + \sqrt{q}\right)$. За умовою сума $\left(\sqrt{p} + \sqrt{q}\right)$ є число раціональне. Тоді і різниця $\left(\sqrt{p} - \sqrt{q}\right)$ є раціональним числом як частка двох раціональних чисел. Отже, і числа $\sqrt{p} = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{p} + \sqrt{q}\right) + \left(\sqrt{p} - \sqrt{q}\right)\right)$ та $\sqrt{q} = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{p} + \sqrt{q}\right) - \left(\sqrt{p} - \sqrt{q}\right)\right)$ також є раціональними.

2. Запишемо нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним чисел a, b, c: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Оскільки $a+b+c=1$, то одержимо
$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{3} \text{ або } \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3.$$
Запишемо нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним чисел ab, bc, ac:
$\frac{ab+bc+ac}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ac}$ або $\frac{ab+bc+ac}{3} \geq \sqrt[3]{(abc)^2}$,
звідки $\frac{ab+bc+ac}{\sqrt[3]{(abc)^2}} \geq 3$. Перемноживши почленно нерівності $\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3$ та $\frac{ab+bc+ac}{\sqrt[3]{(abc)^2}} \geq 3$, одержимо $\frac{ab+bc+ac}{\sqrt[3]{(abc)^3}} \geq 9$ або $\frac{ab+bc+ac}{abc} \geq 9$. Поділивши в лівій частині кожен доданок чисельника на знаменник, отримаємо потрібну нерівність.

3. Дискримінант квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ дорівнює b^2-4ac. Якщо числа a, b, c — цілі та при цьому число b парне, то дискримінант також є парне число (як різниця парних чисел) і тому не може дорівнювати 23. Нехай число b — непарне, тоді $b=2n+1$, де число n — ціле. Розглянемо вираз $b^2-23=(2n+1)^2-$

$-23=4n^2+4n-22=4(n^2-n)-22$. Це число ні при якому цілому значенні n не кратне 4, отже, не може бути значенням почетвереного добутку першого коефіцієнта на вільний член, тобто $4ac$, якщо a та c — цілі числа. Отже, $b^2-4ac\neq 23$ при цілих a, b, c.

4. Числа 1,2,3,...,552 утворюють арифметичну прогресію. Скористаємось тим, що суми рівновіддалених від кінців членів арифметичної прогресії рівні між собою і згрупуємо гирі по дві так, щоб в пару потрапили гирі, маси яких є рівновіддаленими від кінців членами арифметичної прогресії: 1 г та 552 г, 2 г та 551 г, ..., 276 г та 277 г. Ми одержали 276 рівних за масою пар гир. Лишилось розділити ці пари на три рівні купки по 92 пари в кожній.

5. Число 4^{2n} закінчується цифрою 6, а 4^{2n-1} — закінчується цифрою 4 при будь-якому цілому $n>0$. Оскільки обидва показники степенів непарні, то і зменшуване, і від'ємник закінчуються цифрою 4. Тоді їх різниця закінчується нулем, тобто, кратна 10.

6. Будемо шукати тричлен у вигляді $y=ax^2+bx+c$.

За умовою задачі маємо: $\begin{cases} a-b+c=25a+5b+c, \\ a-b+c=-(9a+3b+c). \end{cases}$

Розв'язавши цю систему, одержимо $b=-4a$, $c=-a$. Тоді квадратний тричлен має вигляд $ax^2-4ax-a$. Знайдемо його корені, вважаючи $a\neq 0$ (інакше вираз не був би квадратним тричленом): $ax^2-4ax-a=0$, або $x^2-4x-1=0$, $x_{1,2}=2\pm\sqrt{5}$.

7. Нехай $a^2+b^2+c^2+d^2=abcd+4$, числа a, b, c, d — натуральні. Якщо серед чисел a, b, c, d є парні, то їх добуток $abcd$, а отже і значення виразу $abcd+4$ є парне число. Тоді парним має бути і значення виразу $a^2+b^2+c^2+d^2$. Тому парних чисел може бути 4, 2 або жодного. Розглянемо кожен з випадків окремо.

а) Всі чотири числа парні. Серед парних чисел є лише одне просте, тому $a=b=c=d=2$. Але для цих значень не виконується вказана рівність. Випадок а) неможливий.

б) Два числа парні. Нехай це числа c і d. Тоді $c=d=2$, $a=2n+1$, $b=2k+1$, де n, k — деякі цілі числа.

$a^2+b^2+8=4ab+4$ $a^2+b^2=4ab-4$.

Значення виразу $4ab-4$ — кратне 4.

Розглянемо вираз $a^2+b^2=(2n+1)^2+(2k+1)^2=4(n^2+k^2+n+k)+2$. Як бачимо, значення виразу a^2+b^2 не кратне 4, отже, випадок б) неможливий.

в) Всі числа непарні: $a=2n+1$, $b=2k+1$, $c=2m+1$, $d=2p+1$, де n, k, m, p — деякі цілі числа. Тоді $a^2+b^2+c^2+d^2=(2n+1)^2+(2k+1)^2+(2m+1)^2+(2p+1)^2=4(n^2+k^2+m^2+p^2+n+k+m+p+1)$. $abcd+4=(2n+1)\times(2k+1)(2m+1)(2p+1)+4=(4nk+2k+2n+1)(4mp+2p+2m+1)+4=2[(4nk+2k+2n+1)(2mp+p+m)+2nk+k+n+2]+1$.

Значення виразу, що стоїть в лівій частині, кратне 2, а значення виразу, що стоїть в правій частині, не кратне 2. Випадок в) неможливий.

Отже, рівність не виконуються в простих числах.

8. Очевидно, будь-яке з чисел, записаних на дошці, має вигляд $18a+19b$, де a, b — натуральні числа. І навпаки, кожне число виду $18a+19b$, де a, b — натуральні числа, може бути серед написаних на дошці. Оскільки $1983=12\cdot18+31\cdot19$ (можливі і інші подання), то воно може бути серед записаних на дошці. Для цього достатньо записати число 37, далі 11 чисел, кожне з яких дорівнює сумі числа 18 і попередньо записаного, потім 30 чисел, кожне з яких дорівнює сумі числа 19 і попередньо записаного. Останнє з так записаних чисел дорівнює 1983.

9. Розкладемо на множники вираз $3^{60}-2^{60}$. Маємо:
$3^{60}-2^{60}=(3^{60}-2^{30})(3^{30}+2^{30})=(3^{15}+2^{15})(3^{15}-2^{15})(3^{30}+2^{30})=(3^5+2^5)(3^{10}-3^5\cdot2^5+2^{10})(3^{15}-2^{15})(3^{30}+2^{30})$.

Але $3^5+2^5=243+32=25\cdot11$. Якщо один з множників ділиться на 11, то і добуток ділиться на 11. Отже, $3^{60}-2^{60}$ ділиться на 11.

10. Двозначне число, яке закінчується цифрою 5, має вигляд $10p+5$, де p — цифра десятків.

Тоді квадрат цього числа

$(10p+5)^2=100p^2+100p+25=100p(p+1)+25$.

Отже, щоб піднести $10p+5$ до квадрату, досить помножити p на $p+1$, одержаний результат помножити на 100 (тобто, дописати два нулі) і додати 25 (тобто, замінити нулі на 25). Це і означає, що до добутку чисел p та $p+1$ дописано 25.

11. Вираз $(x^3+3x^2-x-3)^4$ можна подати у вигляді квадрату $((x^3+3x^2-x-3)^2)^2$. Тоді сума квадратів двох виразів дорівнює нулю. Це можливе лише за умови, що обидва ці вирази дорівнюють нулю, тобто, дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} x^3 - 9x^2 - x + 9 = 0, \\ \left(x^3 + 3x^2 - x - 3\right)^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 9x^2 - x + 9 = 0, \\ x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(x^2 - 1\right)\left(x - 9\right) = 0, \\ \left(x^2 - 1\right)\left(x + 3\right) = 0. \end{cases}$$

Система (отже, і дане рівняння) рівносильна рівнянню $x^2-1=0$. Тоді $x_1=1$; $x_2=-1$.

12. Нехай задумане число має a десятків і b одиниць, тобто, дорівнює $10a+b$. Після множення на 20 одержимо $20(10a+b)$. Додавши задумане число, одержимо: $20(10a+b)+(10a+b)=21(10a+b)$. Помноживши останнє на 481, одержимо: $21(10a+b)\cdot481=10101\cdot(10a+b)=$ $=10^5\cdot a+10^4\cdot b+10^3\cdot a+10^2\cdot b+10\cdot a+b$, тобто, число $\overline{ababab}$.

13. Нехай в залі x рядів по y місць в кожному. Тоді $xy=320$. Після збільшення місць в ряду їх стало $y+4$, а рядів $x+1$. Отже, $(x+1)(y+4)=420$. Маємо систему

$$\begin{cases} xy = 320, \\ (x + 1)(y + 4) = 420. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 320, \\ xy + 4x + y + 4 = 420. \end{cases}$$

Її розв'язки $\begin{cases} x = 4, \\ y = 80. \end{cases}$ та $\begin{cases} x = 20, \\ y = 16. \end{cases}$

За змістом задачі в залі став 21 ряд (бо залів, в яких 4 ряди по 80 місць в кожному практично не буває).

14. Якщо обидва корені зведеного квадратного рівняння мають однаковий знак, то вільний член, що дорівнює їх добутку, додатний. Якщо обидва корені від'ємні, то від'ємна їх сума, отже другий коефіцієнт — число, протилежне вказаній сумі — додатний. Параметр p повинен задовольняти системі нерівностей

$$\begin{cases} 2(p + 1) > 0, \\ 9p - 5 > 0. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} p > -1, \\ p > \dfrac{5}{9}. \end{cases}$$

Отже, при $p > \frac{5}{9}$ обидва корені рівняння, якщо вони існують, від'ємні. Щоб квадратне рівняння $x^2+2(p+1)x+9p-5=0$ мало корені, його дискримінант має бути невід'ємним. Отже, $(p+1)^2-9p+5 \geqslant 0$. Звідси $p^2+2p+1-9p+5 \geqslant 0$, $p^2-7p+6 \geqslant 0 \Rightarrow p \leqslant 1$ або $p \geqslant 6$. Відповідь: $\left(\frac{5}{9};1\right] \cup [6;\infty)$.

15. Дане рівняння рівносильне сукупності мішаних систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2-1=x^2-2x-3,\\2x^2-1\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}2x^2-1=-x^2+2x+3,\\2x^2-1\leq 0,\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+2x+2=0,\\|x|\geq \frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}\\ \begin{cases}3x^2-2x-4=0,\\|x|\leq \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Перша система несумісна — рівняння не має дійсних коренів. Корені другого рівняння $x_1=\frac{1+\sqrt{13}}{3}$ та $x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{3}$. Умові $|x|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ не задовольняє жоден з них. Отже, рівняння розв'язку не має.

16. а) Число 1984 при діленні на 3 дає остачу 1, отже, і 1984^{1984} має вигляд $3k+1$. Число 1985 має вигляд $3n+2$, тоді $1985^{1985}=(3n+2)^{1984}(3n+2)=((3n+2)^{992})^2(3n+2)$. Число $(3n+2)^{992}$ не ділиться на 3, тому $((3n+2)^{992})^2$ при діленні на 3 дає остачу 1, отже число 1985^{1985} при діленні на 3 дає остачу 2, тобто, має вигляд $3m+2$. Число 1986^{1986} ділиться на 3, тому 1986^{1986} також ділиться на 3, тобто, має вигляд $3p$. Тоді $1984^{1984}+1985^{1985}+1986^{1986}=(3k+1)+$ $+(3m+2)+3p=3(k+m+p)+3$. Отже, число M ділиться на 3.
б) Число 1984^{1984} закінчується цифрою 6, бо $(10k+4)^2$ закінчується цифрою 6, тобто, має вигляд $10n+6$. А число $10n+6$ в будь-якому степені (отже, і в степені 992) закінчується цифрою 6. Число 1985 в будь-якому степені закінчується цифрою 5. Число 1986 в будь-якому степені закінчується цифрою 6. Отже, $1984^{1984}+$ $+1985^{1985}+1986^{1986}=(10k+6)+(10n+5)+(10m+6)$, тобто закінчується цифрою 7. А жоден квадрат цілого числа цією цифрою не закінчується.

17. Числа 1,2,3,...,1986 утворюють арифметичну прогресію з першим членом 1 і різницею 1. При цьому $n=1986$, $a_n=1986$. Отже, $1+2+3+...+1986=$
$$=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{1+1986}{2}\cdot 1986=1987\cdot 993=100k+91.$$
Квадрати цілих чисел можуть закінчуватись цифрами 0,1,4,5,6,9. Тому сума двох квадратів, що закінчується цифрою 1, має вигляд $(10p)^2+(10l+1)^2$, або $(10p+5)^2+(10l+6)^2$, або $(10p+5)^2+(10l+4)^2$, або $(10p)^2+(10l+9)^2$. В усіх випадках цифра десятків, що стоїть перед одиницею, парна. Отже, сума двох квадратів цілих чисел не може закінчуватись на 91.

18. (Метод математичної індукції). Якщо учнів (отже, і задач) всього дві, то обидва учні знають розв'язання обох задач. Один пояснює одну з них, другий — другу. Твердження задачі, яке треба довести, справедливе. Нехай твердження задачі справедливе, якщо учнів (отже, і задач) не більше ніж n. Покажемо, що воно справедливе і тоді, коли учнів (і задач) $n+1$. Викличемо одного з учнів. Він розкаже розв'язання однієї з відомих йому задач. Далі будемо весь час викликати учня, який знає розв'язання тільки що поясненої задачі. Він розкаже розв'язання другої відомої йому задачі. Очевидно, жоден учень (крім першого) не може бути викликаний двічі. Якщо в такий спосіб будуть викликані всі учні, то задачу розв'язано. Якщо ж на якомусь кроці перший учень виявиться викликаним вдруге, то група учнів, що виступала, розповіла всі задачі, розв'язання яких вони знають. Залишилось лише k учнів $(k\leqslant n)$, які знають розв'язання k задач, причому кожен учень знає розв'язання тільки двох задач і розв'язання кожної задачі знає лише два учні. А для групи k учнів $(k\leqslant n)$ твердження задачі справедливе. Отже, твердження справедливе для будь-якого числа учнів (і для 20 також).

19. Нехай $x=\sqrt{a+1}+\sqrt{a+\sqrt{a+1}}$, $y=\sqrt{a}+\sqrt{a+1+\sqrt{a}}$. Очевидно, $a\geqslant 0$, $x>0$, $y>0$. Тоді $x^2=2a+1+\sqrt{a+1}+$ $+2\sqrt{a(a+1)+(a+1)^{3/2}}$, $y^2=2a+1+\sqrt{a}+2\sqrt{a(a+1)+a^{3/2}}$. Очевидно, $x^2>y^2$. Отже, $x>y$.

20. Використовуючи основну властивість арифметичної прогресії, запишемо $(x+2y)+(5x-y)=2\,(2x+3y)$. Аналогічно, за основною властивістю геометричної прогресії, маємо $(x-1)^2(y+1)^2=(xy+1)^2$. Одержали систему

$$\begin{cases}(x+2y)+(5x-y)=2\,(2x+3y),\\ (x-1)^2(y+1)^2=(xy+1)^2.\end{cases}$$

Ця система розпадається на дві:

$$1.\ \begin{cases}(x+2y)+(5x-y)=2\,(2x+3y),\\ (x-1)(y+1)=xy+1.\end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases}(x+2y)+(5x-y)=2\,(2x+3y),\\ (x-1)(y+1)=-(xy+1).\end{cases}$$

Розв'язавши першу систему, маємо $\begin{cases}x_1=3\frac{1}{3};\\ y_1=1\frac{1}{3}.\end{cases}$

Розв'язавши другу систему, одержимо:

$$\begin{cases}x_2=0,\\ y_2=0,\end{cases}\quad \begin{cases}x_3=-0{,}75,\\ y_3=-0{,}3.\end{cases}$$

Відповідь: $\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)$, $(0;0)$, $(-0{,}75;\ -0{,}3)$.

21. Нехай бригада повинна була за день виготовляти x деталей і працювати $5+y$ днів. Тоді:

Днів:	*Перші 5*	*Наступні*	*Всього*
За планом	$x\cdot 5$	xy	400 деталей
Виготовлено	$1{,}2x\cdot 5$	$(x+15)(y-2)$	405 деталей

Маємо систему рівнянь $\begin{cases}5x+xy=400,\\ 6x+xy+15y-2x-30=405.\end{cases}$

Залишивши перше рівняння без змін, замінимо друге різницею другого і першого

$$\begin{cases}5x+xy=400,\\ x+15y-2x-30=5.\end{cases}\quad \text{або} \quad \begin{cases}5x+xy=400,\\ 15y-x=35.\end{cases}$$

Оскільки нам треба визначити тільки планову щоденну кількість деталей (тобто, x), виключимо з системи y, виразивши його з другого рівняння: $y=\dfrac{x+35}{15}$, і підставимо цей вираз в перше. Одержимо рівняння відносно x: $5x + x\dfrac{x+35}{15} = 400$. Розв'яжемо його:

$$75x+35x+x+x^2=6000,$$
$$x^2+110x-6000=0,$$
$$x_1=40,\ x_2=-150.$$

Другий корінь є стороннім. Відповідь: 40 деталей.

22. Параметр $b \neq 0$ (інакше друге рівняння — лінійне). За теоремою Вієта $a=-(x_1+x_2)$, $b=x_1\cdot x_2$. Дискримінант рівняння $bx^2+a(b+1)x+(b-1)^2+a^2=0$ дорівнює $a^2(b+1)^2-$ $-4b((b-1)^2+a^2)=(a^2b^2-2a^2b+a^2)-4b(b-1)^2=a^2(b-1)^2-$ $-4b(b-1)^2=(x_1x_2-1)^2((x_1+x_2)^2-4x_1x_2)=(x_1x_2-1)^2(x_1-x_2)^2$.

Корені цього рівняння x_1' та x_2' знаходяться за формулами

$$x_{1,2}' = \frac{-a(b+1)\pm(x_1x_2-1)(x_1-x_2)}{2b} =$$
$$= \frac{(x_1+x_2)(x_1x_2+1)\pm(x_1x_2-1)(x_1-x_2)}{2x_1x_2}$$

Отже, $x_1' = x_1+\dfrac{1}{x_1}$; $\quad x_2' = x_2+\dfrac{1}{x_2}$.

Відповідь $x_1+\dfrac{1}{x_1}$; $\quad x_2+\dfrac{1}{x_2}$.

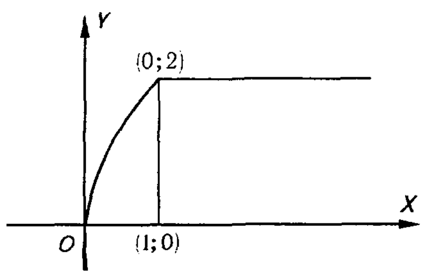
23. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$. Але $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=a-1989$ (за теоремою Вієта). Отже, $x_1^2+x_2^2=a^2-2(a-1989)=a^2-$ $-2a+3978=(a-1)^2-3977$.

Найменшою ця сума буде при $a=1$.

24. Перетворимо вираз для функції

$$y=\sqrt{(1+\sqrt{x})^2}-\sqrt{(1-\sqrt{x})^2}=\left|1+\sqrt{x}\right|-\left|1-\sqrt{x}\right|=$$
$$=\begin{cases}2\sqrt{x} & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 2 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

При $x<0$ функція не визначена. Графік функції подано на малюнку.



25. Розглянемо вираз $\frac{a+b}{a^2+b^2}$ і покажемо, що він не перевищує $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$. Справді, $\frac{a+b}{a^2+b^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=$

$$=\frac{2ab(a+b)-(a^2+b^2)(a+b)}{2ab(a^2+b^2)}=-\frac{(a+b)(a-b)^2}{2ab(a^2+b^2)}\le 0,$$

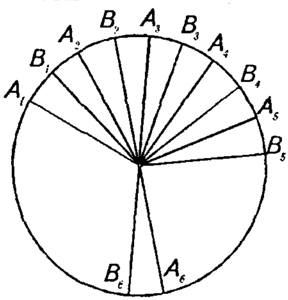
оскільки всі множники невід'ємні, а перед дробом стоїть знак мінус. Отже, $\frac{a+b}{a^2+b^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\le 0$,

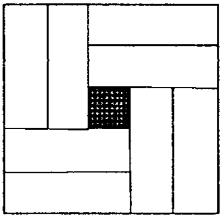
звідки
$$\frac{a+b}{a^2+b^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Аналогічно, $\frac{b+c}{b^2+c^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, $\frac{a+c}{a^2+c^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$.

Додавши почленно ці три нерівності, одержимо нерівність, яку потрібно було довести.

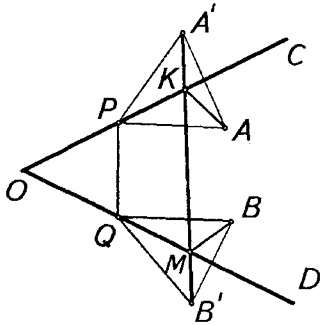
26. Існує розташування секторів, при якому вказаний поворот неможливий (див. мал.). Справді, нехай кожен із зафарбованих секторів A_1OB, A_2OB_2, A_3OB_3, A_4OB_4, A_5OB_5 і A_6OB_6 має центральний кут в 16°, причому $\angle B_1OA_2=\angle B_2OA_3=$ $=\angle B_3OA_4=\angle B_4OA_5=15^\circ$ а $\angle B_5OA_6=\angle B_6OA_1=102^\circ$. Тоді, якщо кут повороту менший від 140°, то зафарбований сектор $A_1'OB_1'$ — образ сектора A_1OB_1 — обов'язково перетнеться з одним із зафарбованих секторів A_1OB_1, A_2OB_2, A_3OB_3, A_4OB_4 або A_5OB_5, оскільки він не може цілком вміститись на незафарбованому проміжку між двома з цих секторів. При повороті ж на кут, не менший від 140°, сектор A_6OB_6 (зафарбований) перетнеться з образом одного із зафарбованих секторів (з $A_1'OB_1'$, $A_2'OB_2'$, $A_3'OB_3'$, $A_4'OB_4'$ або $A_5'OB_5'$), оскільки сектор $A_1'OB_5'$ не поміститься цілком в секторах B_5OA_5 або B_6OA_1. Отже, при будь-якому повороті хоча б один із зафарбованих секторів частково чи повністю розміститься на зафарбованій частині круга.





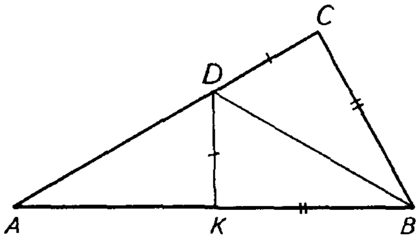
27. Можна. Дивись малюнок. Вирізану клітинку зафарбовано.

28. Нехай P і Q — довільні точки сторін даного кута (див.мал.). Побудуємо точки A' та B', симетричні точкам A і B відносно прямих OC і OD. Тоді $AP=A'P$, $BQ=B'Q$ і довжина ламаної $A'PQB'$ дорівнює довжині ламаної $APQB$. З усіх ламаних, що починаються в точці A' і закінчуються в точці $B\cdot$, найменшу довжину має відрізок $A'B'$. Точки перетину цього відрізка із сторонами кута і є шуканими.

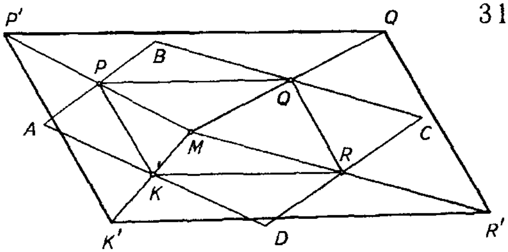


29. Щоб повернутись в початкову точку, равлик повинен описати певний многокутник. Оскільки кожну сторону равлик проповзав за 15 хвилин (після чого робив поворот), то достатньо показати, що число сторін цього многокутника ділиться на 4. Для зручності мови будемо вважати, що равлик рухався у напрямках північ–південь (вздовж меридіанів) та захід–схід (вздовж паралелей). Оскільки кожен поворот здійснювався на кут 90°, то напрям руху вздовж меридіан змінювався напрямом руху вздовж паралелі і навпаки, тому число сторін напрямку північ–південь дорівнює числу сторін напрямку захід–схід. Отже, загальне число сторін многокутника n — парне число: $n=2k$. Розглянемо, наприклад, відрізки, пройдені вздовж меридіана. Оскільки равлик повернувся у початкову точку, то число відрізків, які він проповз на північ, дорівнює числу відрізків, які він проповз на південь. Аналогічно, число відрізків, які равлик проповз на схід, дорівнює числу відрізків, які він проповз на захід. Отже, число k — парне: $k=2p$. Тоді $n=2k=4p$. Число сторін многокутника кратне 4. Тоді час руху равлика кратний $15\cdot4=60$ хвилинам, тобто становить ціле число годин.

30. Нехай $\triangle ABC$ — шуканий і $\angle A$ — найменший його кут. Останній має бути кутом одного з трикутників, що утворяться при розрізуванні три-

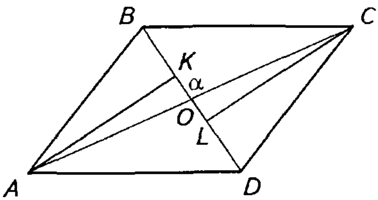


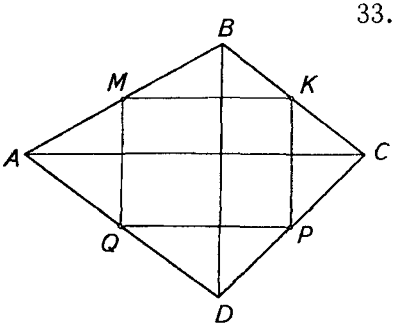
кутника ABC. Дійсно, якщо б кутом згаданого трикутника була частина кута A, то він не був би подібним до $\triangle ABC$. Нехай одним з трикутників розбиття є $\triangle ADK$. Останні два трикутники мають бути одержані від розбиття чотирикутника $BCDK$ однією із його діагоналей. При цьому дві пари сторін згаданого чотирикутника мають бути рівними. Якщо б рівні сторони були протилежними, то ми б одержали $BC \parallel DK$ і $CD \parallel BK$, що неможливо. Отже, $DK=DC$ і $BC=BK$. Діагональ CK не може здійснювати потрібного нам розбиття, бо тоді $BC=CD=DK=KB$ і знову CD і BK були б паралельними. Отже, рівними мають бути трикутники BCD і BKD. Оскільки $\angle CDB > \angle DAB$ і $\angle CDB > \angle ABD$, то $\angle A = \angle ABD = \angle DBC$ і $\angle CDB = \angle BDK$. $\angle AKD \neq \angle KDB$ (чому?), тому $\angle BDK = \angle KDB$. Отже, $\angle AKD = \angle BKD = 90^\circ = \angle C$, $\angle ADK = \angle KDB = \angle BDC = 60^\circ$ і $\angle A = 30^\circ$. Таким чином, існує і до того ж єдиний (з точністю до подібності) шуканий трикутник, тобто прямокутний трикутник з кутом в 30°.



31. Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник. Точки K, P, Q і R — середини його сторін, точки K', P', Q' і R' — образи точки M при симетрії відносно точок K, P, Q і R відповідно. Тоді чотирикутник $K'P'Q'R'$ гомотетичний з чотирикутником $KPQR$ відносно точки M з коефіцієнтом гомотетії $k=2$. Отже $S_{K'P'Q'R'} = 4S_{KPQR}$ і не залежить від вибору точки M.

32. Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник. Оскільки діагональ AC розбиває його на два трикутники, то точки B і D належать різним півплощинам з межею AC, тому за відомою аксіомою відрізок BD перетинає пряму AC. Аналогічно доводимо, що відрізок AC перетинає пряму BD. Звідси випливає, що відрізки AC і BD перетинаються. Нехай $AC \cap BD = O$. Якщо $AK \perp BD$ і $CL \perp BD$, то $AK = CL$ (за умовою задачі $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CBD}$). Звідси зразу випливає, що $AO = OC$ ($\triangle OAK = \triangle OCL$). Аналогічно доводимо, що $BO = OD$. За відомою ознакою $ABCD$ — паралелограм.





33. Нехай чотирикутник $ABCD$ має площу S, і точки M, K⇒, P, Q — середини його сторін. Розглянемо $\angle ABC$. В ньому MK — середня лінія, отже $MK \parallel AC$. $\triangle MBK \backsim \triangle ABC$ з коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$. Отже,

$$S_{\triangle MBK} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}.$$

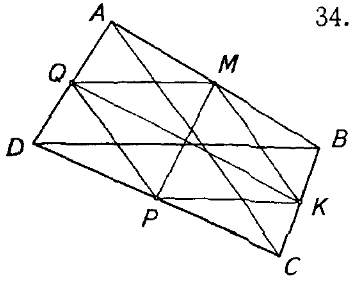
Аналогічно $S_{\triangle AMQ} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABD}$, $S_{\triangle PDQ} = \frac{1}{4} S_{\triangle ADC}$, $S_{\triangle KCP} = \frac{1}{4} S_{\triangle BCD}$.

Тоді $S_{\triangle MBK} + S_{\triangle PDQ} + S_{\triangle KCP} + S_{\triangle AMQ} = \frac{1}{4} (S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} + S_{\triangle BCD} +$

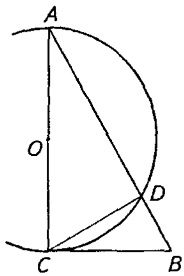
$+ S_{\triangle ABD}) = \frac{1}{4} 2 S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Але $S_{AMKPQ} = S_{ABCD} - (S_{\triangle MBK} + S_{\triangle PDQ} + S_{\triangle KCP} + S_{\triangle AMQ}) = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Отже, $S_{MKPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} S$.

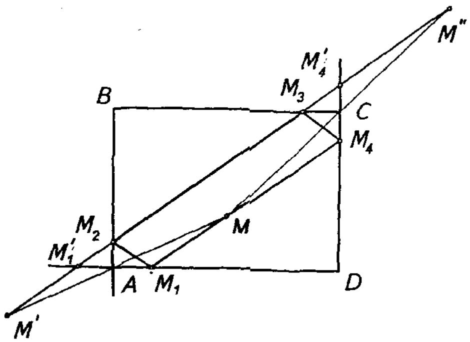


34. Нехай в даному чотирикутнику $ABCD$ (див.мал.) $AC=BD$ і точки M, K, P і Q — середини його послідовних сторін. Тоді $MK=QP=\frac{1}{2}AC$, $KP=QM=\frac{1}{2}BD$, $MK\parallel PQ$ і $KP\parallel MQ$. Якщо $BD=AC$, то $MK=KP=PQ=QM$ і чотирикутник $MKPQ$ — ромб. Його діагоналі MP і QK перпендикулярні. $S_{MKPQ}=\frac{1}{2}MP\cdot QK$. Як показано в попередній задачі, $S_{MKPQ}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$. Тоді $S_{ABCD}=2\cdot\frac{1}{2}MP\cdot QK$. Отже, $S_{ABCD}=MP\cdot PQ$.



35. Нехай ABC — даний трикутник, $\angle C=90^\circ$ і коло з діаметром AC перетинає гіпотенузу AB в такій точці D, що $AD=3\cdot DB$. Оскільки $\angle ADC=90^\circ$, то $BC^2=AB\cdot BD$. Отже, $BC^2=4BD^2$ $BC=$ $=2\cdot BD\cos\angle B=\frac{1}{2}$ $\angle B=60^\circ$ $\angle A=30^\circ$. Таким чином, $\angle A=30^\circ$, $\angle B=60^\circ$.

36. Аналіз. Нехай задачу розв'язано і точки M_1, M_2, M_3, M_4 побудовано (мал.). Побудуємо точки M' і M_1', симетричні відповідно з точками M та M_1 відносно точки A, (точка M_1' лежить на продовженні DA), і точки M'' та M_4', симетричні відповідно з точками M і M_4 відносно точки C. Тоді $M'M_1'=MM_1$ (як симетричні відносно точки A) $M_1'M_2=M_1M_2$ (як симетричні відносно прямої AB — це легко доводиться, оскільки M_2 лежить на прямій AB і $M_1A=M_1'A$), $M''M_4'=MM_4$ (як симетричні відносно точки C), $M_4'M_3=M_4M_3$



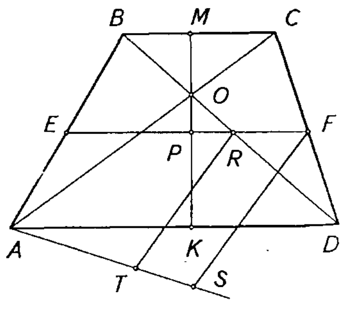
(як симетричні відносно прямої CD) – доведення аналогічне до попереднього. Тоді довжина $\overline{M'M_1'M_2M_3M_4'M''}$ дорівнює довжині ламаної $\overline{MM_1M_2M_3M_4M}$. Але з усіх ламаних, що сполучають точки M' і M'', найменшу довжину має відрізок $M'M''$.

Побудова. 1) Будуємо точку M', симетричну з M відносно A. 2) Будуємо M'', симетричну з M відносно C. 3) Будуємо відрізок $M'M''$. Точками перетину цього відрізка із сторонами прямокутника є точки M_2 та M_3, а з продовженням сторін — M_1' та M_4'. 4) Будуємо M_1, симетричну з M_1' відносно A. 5) Будуємо M_4, симетричну з M_4' відносно C.

Доведення випливає з аналізу та побудови.

Дослідження. Якщо точка M не лежить на жодній з діагоналей, то задача має два розв'язки (другий розв'язок одержується аналогічно до першого, якщо в п. 1 і 4 взяти точку B, а в п. 2 і 5 точку D). Якщо точка M лежить на одній з діагоналей (наприклад, на AC), то точки M' і M'' лежать на прямій, що містить цю діагональ. Задача має один розв'язок. Другий розв'язок приводить до виродження ламаної в діагональ, що проходиться двічі (точки M_1 та M_2 співпадають з точкою A, точки M_3 та M_4 — з точкою C). Якщо точка M співпадає з точкою перетину діагоналей O, то обидва розв'язки теж приводять до виродження ламаної в діагональ, що проходиться двічі.

37. Аналіз. Нехай трапеція $ABCD$ — шукана, EF — її середня лінія, O — точка перетину діагоналей, OK — перпендикуляр, опущений на основу AD (мал.). Продовжимо KO до перетину з другою основою в точці M. Точку перетину відрізка MK з прямою EF назвемо P.



Очевидно, $MP=PK$, причому $MK \perp EF$. $\triangle AOD \backsim \triangle COB$ ($\angle CAB = \angle ACB$ як внутрішні різносторонні), тому $BC : AD = OM : OK$.

Нехай R — точка перетину діагоналі BD і середньої лінії EF. Тоді $ER=\frac{1}{2}AD$ (середня лінія $\triangle ABD$). Отже, $RF:ER=BC:AD=OM:OK$. Поділ відрізка в заданому відношенні ми вміємо виконувати.

Побудова:

1) Проводимо промінь KO і одержуємо $P=KO\cap EF$.

2) Від точки P на промені PO відкладемо $PM=KP$.

3) Через точки M і K проведемо прямі, паралельні до EF (або, що те саме, перпендикулярні до MK). Назвемо їх a та b. На цих прямих лежать основи трапеції.

4) На відрізку EF будуємо таку точку R, що $ER:RF=OK:OM$. Точка R належить діагоналі BD.

5) Через точки O та R проводимо пряму, на якій лежить діагональ BD. Нехай B та D — точки перетину прямої OR відповідно з прямими a і b.

6) Будуємо пряму BE. Нехай $BE\cap b=A$.

7) Будуємо пряму DF. Нехай $DF\cap a=C$.

Трапецію $ABCD$ побудовано.

Доведення. EF — середня лінія трапеції, діагональ BD проходить через точку O за побудовою. Треба показати, що діагональ AC також проходить через точку O. Нехай діагональ AC перетинає діагональ BD в деякій точці O_1. Тоді відстань від точки O_1 до прямої BC відноситься до відстані цієї точки від прямої AD як $BC:AD$ (оскільки $\triangle BCO_1 \backsim \triangle DAO_1$). Але на відрізку AC є лише одна точка, відстані якої від даних прямих відносяться як $BC:AD$ — це точка O. Отже, діагоналі трапеції перетинаються в точці O. Ми довели, що трапеція $ABCD$ — шукана.

Дослідження. 1) Оскільки середня лінія трапеції паралельна до її основ, то пряма, перпендикулярна до основ, перпендикулярна до середньої лінії. Отже, $KO\perp EF$.

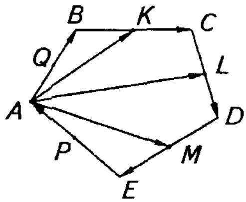
2) Точка перетину діагоналей трапеції і її середня лінія лежать в одній півплощині відносно прямої, що містить основу, тому промінь KO перетинає пряму EF.

3) Точка O лежить ближче до меншої з основ, тому не може лежати на прямій EF.

При виконанні цих умов побудова завжди можлива, причому з аналізу випливає, що трапеція $ABCD$ — єдина.

Якщо порушується умова 3) (але умови 1) та 2) виконуються), то при $EO=OF$ трапеція перетворюється в паралелограм, причому таких паралелограмів безліч. В усіх інших випадках задача не має розв'язку.

38. Нехай $\bar{a}=\overline{AB}$, $\bar{b}=\overline{BC}$, $\bar{c}=\overline{CD}$, $\bar{d}=\overline{DE}$, $\bar{e}=\overline{EA}$. Відомо, що $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}+\bar{e}=\bar{0}$. Розглянемо суму векторів $\overline{AK}$, $\overline{AL}$, $\overline{AM}$:



$\overline{AK}=\bar{a}+\frac{1}{2}\bar{b}$, $\overline{AL}=\bar{a}+\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{c}$,

$\overline{AM}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\frac{1}{2}\bar{d}$. Отже,

$\overline{AK}+\overline{AL}+\overline{AM}=3\bar{a}+2{,}5\bar{b}+1{,}5\bar{c}+0{,}5\bar{d}$.

Аналогічно

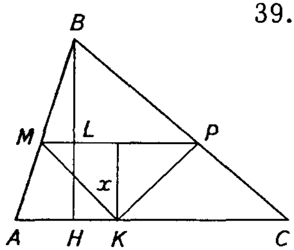
$\overline{BL}+\overline{BM}+\overline{BP}=3\bar{b}+2{,}5\bar{c}+1{,}5\bar{d}+0{,}5\bar{c}$,

$\overline{CM}+\overline{CP}+\overline{CQ}=3\bar{c}+2{,}5\bar{d}+1{,}5\bar{e}+0{,}5\bar{a}$,

$\overline{DP}+\overline{DQ}+\overline{DK}=3\bar{d}+2{,}5\bar{e}+1{,}5\bar{a}+0{,}5\bar{b}$

і, нарешті, $\overline{EQ}+\overline{EK}+\overline{EL}=3\bar{e}+2{,}5\bar{a}+1{,}5\bar{b}+0{,}5\bar{c}$.

Тоді сума всіх п'ятнадцяти векторів дорівнює $3(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}+\bar{e})+2{,}5(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}+\bar{e})+1{,}5(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}+\bar{e})+$ $+0{,}5(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}+\bar{e})=\bar{0}$.

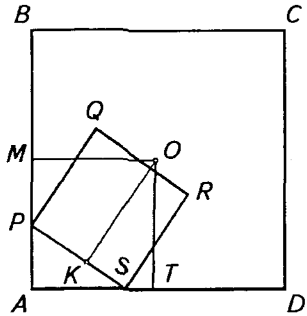


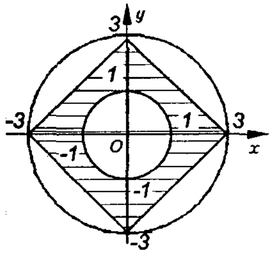
39. Нехай ABC– даний трикутник. $AC=30$ см, його висота $BH=10$ см. Вписаний прямокутний трикутник – MPK, $\angle K=90^\circ$. $MP\parallel AC$, $MK=KP$. Нехай $MP=2x$, тоді $MK=KP=x\sqrt{2}$.

$\triangle ABC \backsim \triangle MBP$, оскільки $MP\parallel AB$. Висота $\triangle MPK$, опущена на гіпотенузу, дорівнює x (в рівнобедреному трикутнику висота є медіаною, а медіана прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи). Тоді висота $\triangle MBP$ дорівнює $10-x$. В подібних трикутниках висоти відносяться як основи: $\frac{AC}{MP}=\frac{h_{AC}}{h_{MP}}$, тобто $\frac{30}{2x}=\frac{10}{10-x}$.

Звідси $300-30x=20x$; $50x=300$; $x=6$. Отже, $MP=12$см, $MK=KP=6\sqrt{2}$см.

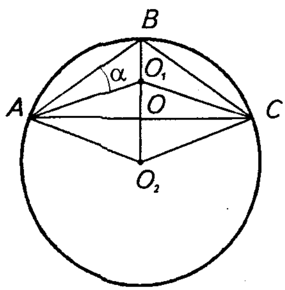
40. Припустимо, що менший квадрат $PQRS$ не покриває центр O більшого квадрата $ABCD$ (мал.). Очевидно, $PS \nparallel AD$ (у супротивному випадку відстань від точки O до прямої PS була б меншою від 1 і квадрат $PQRS$ покривав би точку O). Проведемо $OK \perp PS$, $OM \perp AB$ і OT і AD. За умовою $OM = MA = AT = OT = PS = 1$. За припущенням $OK > 1$. Сполучимо точку O з точками P та S. З $\triangle OMP$ маємо $OP^2 = OM^2 + MP^2 = 1 + MP^2$. З $\triangle OPK$ $OK^2 = OP^2 - PK^2 = 1 + MP^2 - PK^2$. Оскільки $OK > 1$, то $MP^2 > KP^2$, отже $MP > PK$. З $\triangle OTS$ $OS^2 = OT^2 + ST^2 = 1 + ST^2$. З $\triangle OSK$ $OK^2 = OS^2 - KS^2 = 1 + ST^2 - KS^2$. Оскільки $OK > 1$, то $ST > KS$. Але $ST = 1 - AS$, $KS = 1 - PK$. Отже, $1 - AS > 1 - PK$, тобто $AS < KP$. З $\triangle APS$ $AP + AS > PS = 1$, $AP + AS > 1$. Але $AP = 1 - MP$. Отже, $1 - MP + AS > 1$, тобто $AS > MP$. Маємо: $MP > PK$, $PK > AS$, $AS > MP$, що неможливо. Ми прийшли до протиріччя.



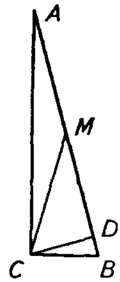


41. Відповідь: множина точок заштрихованої фігури, включаючи межі.

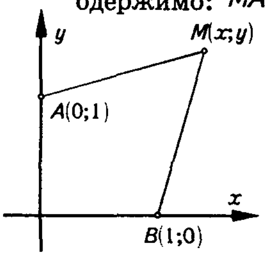
42. Нехай ABC — даний трикутник, O_1 і O_2 — центри вписаного та описаного кіл і точки O_1 та O_2 симетричні відносно прямої AC. Тоді $AC \perp O_1O_2$, $O_1O_2 \cap AC = 0$, $O_1O = O_2O$, $AO_1 = O_1C = R = O_2A = O_2C$, $\angle O_1AC = \angle O_1CA$, $\angle BAC = \angle BCA$, тобто $AB = BC$. Оскільки $AO = OC$, то точка O_2 належить прямій BO (і прямій BO_1). Отже, $O_2A = O_2B = R = O_2C$. З цього випливає, що $\angle BAO_2 = \angle ABO_2 = 3\angle BAO_1 = 3\alpha$. Оскільки $\angle AO_1O - 90^\circ - \alpha = \angle BAO_1 + \angle ABO_1$, то $\alpha = 18^\circ$, $\angle BAC = 36^\circ$ і $\angle ABC = 108^\circ$.



43. Нехай в даному трикутнику ABC $\angle C=90^\circ$, $CD\perp AB$ і $AM=MB$. За умовою задачі $AB=4\cdot CD$. Оскільки $CM=\frac{1}{2}AB$, то $CD=\frac{1}{2}CM$ і $\sin\angle CMD=$ $=\frac{1}{2}$ $\angle CMD=30^\circ$. В прямокутному трикутнику $CM=MB$, тому $\angle ABC=75^\circ$ і $\angle BAC=15^\circ$.

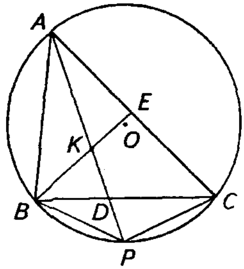


44. Введемо прямокутну декартову систему координат XOY і розглянемо точки $A(0;1)$, $B(1;0)$ і $M(x;y)$ (див. мал.). Використавши формулу для знаходження відстані між двома точками, одержимо: $MA=\sqrt{x^2+(1-y)^2}$, $MB=\sqrt{(1-x)^2+y^2}$.



Виходячи з нерівності трикутника, число $MA+MB$ буде найменшим тоді, коли точка M належить відрізкові AB, тобто $MA+MB=AB$. Оскільки $AB=\sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$, то найменшим значенням даного виразу буде число $\sqrt{2}$.

45. Аналіз. Нехай задачу розв'язано і трикутник ABC — шуканий (мал.). В ньому AD — бісектриса кута A, BE — бісектриса кута B. Продовжимо бісектрису AD до перетину з колом в точці P. Сполучимо точки P та B. Тоді $\angle PAC=\angle PBC=\frac{1}{2}\angle A$ (вписані кути, що спираються на одну дугу). Аналогічно $\angle BCP=\angle PAB$. Розглянемо $\triangle BKP$. В ньому $\angle KBP=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B$. Тоді $\angle KBP=\angle BKP$ (бо $\angle BKP=\angle BAK+\angle ABK=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B$).



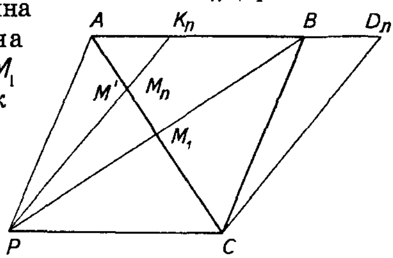
Отже, $\triangle BPK$ — рівнобедрений, $BP=PK$. Аналогічно можна показати, що $CP=PK$.

Побудова. 1) З точки A через точку K проводимо хорду AP. 2) З точки P як із центра проводимо коло радіуса PK. Воно перетне дане коло в точках B та C. $\triangle ABC$ — шуканий.

Доведення. Оскільки $\breve{PB} = \breve{PC}$, то $\angle PAB=\angle PAC$, отже, бісектриса кута A проходить через точку K. Покажемо, що бісектриса кута B також проходить через K. Проведемо відрізки PB та KB і розглянемо $\triangle PKB$. Він рівнобедрений, оскільки $PB=PK$ (за побудовою). Отже, $\angle PKB=\angle KBP$, $\angle BPA=\angle BCA$ (як вписані, що спираються на одну дугу). Тоді $\angle BKP+\angle KBP=180^\circ-\angle C$, тобто $\angle BKP+\angle KBP=\angle ABC+\angle BAC$, звідки $\angle KBP=\frac{1}{2}\angle ABC+$ $+\frac{1}{2}\angle BAC$. Оскільки $\angle KBP=\angle KBC+\angle CBP$, то $\frac{1}{2}\angle BAC+$ $+\frac{1}{2}\angle ABC=\angle KBC+\angle CBP$. Враховуючи, що $\angle CBP=\frac{1}{2}\angle BAC$, одержимо, що $\angle KBC=\frac{1}{2}\angle ABC$, тобто BK — бісектриса кута B. Точка K є точкою перетину бісектрис.

Дослідження. Побудова завжди виконувана. З аналізу випливає, що шуканий трикутник єдиний.

46. За умовою задачі $AK_n=\frac{1}{n}AB$ і $AM_n=\frac{1}{n+1}AC$ (див. мал.). Нехай M_1 — середина відрізка AC. Якщо на продовженні відрізка BM_1 відкласти відрізок $M_1P=BM_1$, то $ABCP$ — паралелограм. Покажемо, що при будь-якому n пряма K_nM_n проходить через точку P. На продовженні відрізка AB відкладемо відрізок $BD_n=AK_n$. Тоді $K_nD_n=AB=PC$, тобто K_nD_nCP — паралелограм. Нехай $M'=AC\cap K_nP$. За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{AK_n}{AD_n}=\frac{AM'}{AC}$. Оскільки $AD_n=AB+BD_n=$ $=AB+\frac{1}{n}AB=\frac{n+1}{n}AB$ і $AK_n=\frac{1}{n}AB$, то $\frac{AK_n}{AD_n}=\frac{1}{n+1}$.



Отже, $AM'=\frac{1}{n+1}AC$ і $AM'=AM_n$ тобто точки M' і M_n співпадають. Звідси і випливає, що при всякому n пряма K_nM_n проходить через точку P.

47. Якщо припустити, що $\bar{c} \parallel \bar{d}$, то $\bar{c} \parallel \lambda\bar{d}$, де λ — деяке дійсне число. Тоді $\bar{c}=(\overline{aa})\bar{a}+(\overline{ab})\bar{b}=\lambda\bar{d}$. Але $\lambda\bar{d}=\lambda(\overline{ab})\bar{a}+ +\lambda(\overline{bb})\bar{b}$. Отже, $(\overline{aa})\bar{a}+(\overline{ab})\bar{b}=\lambda(\overline{ab})\bar{a}+\lambda(\overline{bb})\bar{b}$. Звідси $(\overline{aa}-\lambda\overline{ab})\bar{a}+(\overline{ab}-\lambda\overline{bb})\bar{b}=0$. Оскільки $\bar{a} \nparallel \bar{b}$, то остання рівність можлива лише при умові $\overline{aa}-\lambda\overline{ab}=0$, $\overline{ab}-\lambda\overline{bb}=0$, тобто $\bar{a}(\bar{a}-\lambda\bar{b})=0$, $\bar{b}(\bar{a}-\lambda\bar{b})=0$, $\bar{a}\neq\bar{0}$, $\bar{a}-\lambda\bar{b}\neq\bar{0}$ (оскільки $\bar{a}\nparallel\bar{b}$). Отже, $\bar{a}\perp(\bar{a}-\lambda\bar{b})$. Аналогічно, $\bar{b}\perp(\bar{a}-\lambda\bar{b})$ (оскільки $\bar{b}\neq\bar{0}$). Але два перпендикуляри до однієї прямої паралельні, отже, $\bar{a}\parallel\bar{b}$, що суперечить умові. Ми прийшли до протиріччя. Отже, $\bar{c}\nparallel\bar{d}$.

48. Якщо x_1 і x_2 — корені даного рівняння, то за теоремою Вієта $x_1+x_2=-55$, $x_1x_2=-45$. Нехай $y^2+px+q=0$ — шукане рівняння.

З рівностей $q=\left(\frac{1}{x_1x_2}\right)^2$ і $p=\frac{2}{x_1x_2}-\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2{}^2}$ знаходимо: $q=\frac{1}{2025}$; $p=-\frac{3115}{2025}$. Шуканим є рівняння $2025y^2-3115y+1=0$.

49. Після тотожних перетворень одержимо, що
$$y=\frac{x^2\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1}-\frac{(3x-1)(3x+1)}{3x-1}-\frac{(3x-10)^2}{3x-10},$$
звідки випливає, що $x\geqslant 0$, $x\neq 1$, $x\neq\frac{1}{3}$, $x\neq\frac{10}{3}$. Після скорочень одержимо: $y=x^2-(3x+1)-(3x-10)$ або $y=x^2-$ $-6x+9$, тобто $y=(x-3)^2$. Графіком цієї функції буде частина параболи з вершиною в точці (3;0), з якої виключено точки з абсцисами 1;1/3 і 10/3. Парабола розміститься над віссю абсцис і віссю симетрії її буде пряма з рівнянням $x=3$. Побудуйте графік самостійно.

50. Дане рівняння можна звести до такого виду: $x^2-(y+1)^2=12$ або $(x-y-1)(x+y+1)=12$. Позначимо $x-y-1=k$, $x+y+1=l$ і одержуємо: $2x=k+l$, тобто $k+l$ — парне число. Число 12 є добутком цілих чисел k і l, тому можливі такі випадки: 1) $kl=(\pm1)(\pm12)$, 2) $kl=(\pm2)(\pm6)$, 3) $kl=(\pm3)(\pm4)$, 4) $kl=(\pm12)(\pm1)$, 5) $kl=(\pm6)(\pm2)$, 6) $kl=(\pm4)(\pm3)$. Оскільки число $k+l$ — парне, то можуть мати місце тільки випадки 2) і 5).

Якщо $\begin{cases} x-y-1=2, \\ x+y+1=6, \end{cases}$ то $\begin{cases} x=4, \\ y=1. \end{cases}$

Якщо $\begin{cases} x-y-1=-2, \\ x+y+1=-6, \end{cases}$ то $\begin{cases} x=-4, \\ y=-3. \end{cases}$

Якщо $\begin{cases} x-y-1=6, \\ x+y+1=2, \end{cases}$ то $\begin{cases} x=4, \\ y=-3. \end{cases}$

Якщо $\begin{cases} x-y-1=-6, \\ x+y+1=-2, \end{cases}$ то $\begin{cases} x=-4, \\ y=1. \end{cases}$

51. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, тому $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}$. (1)

$$\frac{1}{b^2}+\frac{2}{bc}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a^2}; \qquad (2)$$

Аналогічно, $$\frac{1}{a^2}+\frac{2}{ac}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{b^2}. \qquad (3)$$

Помноживши (1) на ab, (2)—на bc і (3)—на ac, одержуємо: $2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{ab}{c^2}$; $2+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}=\frac{bc}{a^2}$; $2+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}=\frac{ac}{b^2}$.

Додавши почленно ліві і праві частини останніх рівностей, одержимо, що ліва частина дорівнює

$$3+\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{b}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{a}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{c}\right)=3.$$

52. $$\frac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^p \cdot \left(p-\frac{1}{q}\right)^q}{\left(q+\frac{1}{p}\right)^p \cdot \left(q-\frac{1}{p}\right)^q}=\ldots=\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}.$$

53. Запишемо дане рівняння в такому вигляді:

$$[(x+1)(x+4)]\times[(x+2)(x+3)]=1$$

або $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=1$. Зробивши заміну $x^2+5x+4=y$, одержимо $y(y+2)-1=0$ або $y^2+2y-1=0$, звідки $y=-1\pm\sqrt{2}$. Отже, маємо сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5x+4=-1-\sqrt{2}, \\ x^2+5x+4=-1+\sqrt{2}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x+5+\sqrt{2}=0, \\ x^2+5x+5-\sqrt{2}=0. \end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності коренів не має, а друге рівняння має корені

$$x_1=\frac{1}{2}\left(-5-\sqrt{5+4\sqrt{2}}\right), \quad x_2=\frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{5+4\sqrt{2}}\right).$$

54. $\dfrac{(x^2-x+1)^2}{(x^2+1)x}=\dfrac{9}{10}$; $\dfrac{(x^2+1)^2-2x(x^2+1)+x^2}{x(x^2+1)}=\dfrac{9}{10}$;

$\dfrac{x^2+1}{x}-2+\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{9}{10}$. Після заміни $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ одержимо: $10y^2-29y+10=0$, звідки $y=\dfrac{1}{20}(29\pm 21)$; маємо $y_1=\dfrac{2}{5}$; $y_2=\dfrac{5}{2}$; тоді $5x^2-2x+5=0$ і $2x^2-5x+2=0$. Дискримінант першого рівняння від'ємний, а з другого рівняння маємо: $x_1=\dfrac{1}{2}$; $x_2=2$.

55. Розглянемо функцію $y=b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$. Її графіком є парабола. Оскільки $b^2>0$, то вітки параболи направлені вгору. Якщо б вдалося показати, що ця парабола не має спільних точок з віссю абсцис, то це означало б, що вона розміщена над цією віссю, а отже, для всіх її точок $y>0$. Знаходимо дискримінант даного тричлена: $D=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2=(a^2-b^2-c^2-2bc)\times$ $\times(a^2-b^2-c^2+2bc)=(a^2-(b+c)^2)(a^2-(b-c)^2)=(a-b-c)\times$ $\times(a+b+c)\times(a-b+c)(a+b-c)=-(b+c-a)(a+b+c)(a+c-b)\times\times(a+b-c)<0$. Це означає, що пряма OX (її рівняння $y=0$) не має спільних точок із згаданою вище параболою, бо рівняння $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ — не має розв'язків.

56. Якщо x — шукана швидкість, то для знаходження її маємо такі нерівності: $1\le\dfrac{10}{x+1}+\dfrac{10}{x}\le 2$, або

$$\begin{cases} x^2-19x-10\le 0, \\ x^2-9x-5\ge 0, \end{cases} \text{ звідки } \left\{\begin{array}{l} \dfrac{19-\sqrt{401}}{2}\le x\le\dfrac{19+\sqrt{401}}{2}; \\ \left[\begin{array}{l} x\le\dfrac{9-\sqrt{101}}{2}; \\ x\ge\dfrac{9+\sqrt{101}}{2}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Оскільки $x>0$, то $\dfrac{1}{2}\left(9+\sqrt{101}\right)\le x\le\dfrac{1}{2}\left(19+\sqrt{401}\right)$.

57. $x=0$ не є коренем даного рівняння, тому після ділення на x одержимо $\dfrac{2}{3x-1+\dfrac{2}{x}}-\dfrac{7}{3x+5+\dfrac{2}{x}}=1$. Поклавши $3x+\dfrac{2}{x}=y$, одержимо рівняння $y^2+9y-22=0$, звідки $y=\dfrac{1}{2}(-9\pm13)$, тобто $y_1=-11$, $y_2=2$. Оскільки $y=3x+\dfrac{2}{x}$, то $x=\dfrac{-11\pm\sqrt{97}}{6}$.

58. Оскільки $x^2+3>0$, то дана нерівність рівносильна такій: $(x-2)^{10}(x+3)^{17}(x+1)^5>0$. Методом інтервалів одержуємо розв'язок $x\in(-\infty;-3)\cup(-1;2)\cup(2;+\infty)$.

59. За умовою $4x+3y=5k$, де $k\in N$. Позначивши $2x-y=l$, матимемо $y=2x-l$, звідки $4x+3(2x-l)=5k$ або $5(2x-k)=3l$. Отже, $3l\,\vdots\,5\Rightarrow l\,\vdots\,5$.

60. Нехай x і y — дані числа, тобто $x>0$, $y>0$, $xy>x+y$. Для цих чисел $\dfrac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\Rightarrow(x+y)^2>4xy$. Оскільки $xy>x+y$, то $(x+y)^2>4(x+y)\Rightarrow x+y>4$.

61. Якщо x — швидкість течії, а y — швидкість човна в стоячій воді, то $\dfrac{34}{x+y}+\dfrac{39}{y-x}=\dfrac{75}{y}\Rightarrow 2y^2-5xy-75x^2=0$

$$\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{5\pm25}{4}\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{15}{2}.$$

62. $f(x)=(12a+7)x^2-3(14-3a)x+11-3a=0$, $f(1)=18a-24\Rightarrow$

$$1)\ \begin{cases}12a+7>0,\\18a-24<0,\end{cases}\quad\text{або}\quad 2)\ \begin{cases}12a+7<0,\\3a-4>0.\end{cases}$$

З 1) маємо: $\begin{cases}a>-\dfrac{7}{12},\\a<\dfrac{4}{3},\end{cases}$

а з 2) – $\begin{cases}a<-\dfrac{7}{12},\\a>\dfrac{4}{3}.\end{cases}\Rightarrow-\dfrac{7}{12}<a<\dfrac{4}{3}.$

63. Розглянемо це рівняння, як квадратне відносно x (можна і відносно y) і одержимо:

$$x = \frac{1}{10}\left(2(y+1) \pm \sqrt{-4(9y^2-12y+4)}\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(2(y+1) \pm \sqrt{-4(3y-2)^2}\right) \Rightarrow$$

$$3y-2=0, y=\frac{2}{3} \Rightarrow x=\frac{1}{3}. \text{ Отже, } \begin{cases} x=\frac{1}{3}, \\ y=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

64. Для доведення даної нерівності досить показати, що $a^2+b^2+1-ab-a-b \geqslant 0$ або $2a^2+2b^2+2-2ab-2a-2b>0 \Rightarrow$ $(a^2+b^2-2ab)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)=(a-b)^2+(a-1)^2+$ $+(b-1)^2 \geqslant 0$.

65. Оскільки в задачі мова йде про числа, для кожного з яких розглядається неповний квадрат суми їх цифр, то кожне з цих чисел є двозначним. Нехай меншим з шуканих чисел є число $10x+y$. За умовою задачі $10x+y=x^2+xy+y^2$ (1). Другим є число $10x+y+50=$ $=10(x+5)+y$, отже $x<5$. З другого боку, $10(x+5)+y=$ $=(x+5)^2+(x+5)y+y^2$. За умовою задачі $(x+5)^2+(x+5)y+$ $+y^2-x^2-xy-y^2=50$; $y=5-2x$. Використавши (1), одержимо: $3x^2-23x+20=0 \Rightarrow$ $x=1$, $y=3$. Першим шуканим числом буде 13, а другим — 63. Відшукайте ще одне число із вказаною в задачі властивістю.

66. Якщо одним з коренів даного рівняння є a, то $-\frac{1}{a}$ теж є коренем рівняння, тому має місце така система:

$$\begin{cases} 12a^3+4a^2-17a+6=0, \\ -\frac{12}{a^3}+\frac{4}{a^2}+\frac{17}{a}+6=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a^3+4a^2-17a+6=0, \\ 6a^3+17a^2+4a-12=0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30a^2+25a-30=0, \Rightarrow a_1=\frac{2}{3}; a_2=-\frac{3}{2}.$$

Покажіть, що третього розв'язку ця система не має.

67. Оскільки $2+\sqrt{3}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$, то після заміни $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=y$ одержимо $y^2-4y+1=0 \Rightarrow y=2\pm\sqrt{3}$; $x_1=-2$, $x_2=2$.

68. $$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{1+x}{x}\cdot\frac{1+y}{y}=$$
$$=\frac{1+x+y+xy}{xy}=\frac{2+xy}{xy}=1+\frac{2}{xy}. \qquad (1)$$
При даних обмеженнях на x і y має місце залежність $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$; $xy\le\frac{1}{4}$. Із (1) одержимо: $1+\frac{2}{xy}\ge 1+8=9$.

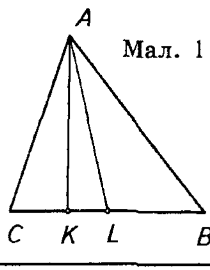
69. Зробивши заміну $2x=y$, одержимо
$$y^3+3y^2+3y+1=0 \text{ або } (y+1)^3=0;\ y=-1,\ x=-\frac{1}{2}.$$

70. Оскільки $\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$, то $a+1\geqslant 2\sqrt{a}$, $b+1\geqslant 2\sqrt{b}$,
$$a+c\geqslant 2\sqrt{ac},\ b+c\geqslant 2\sqrt{bc}.$$
Отже, $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)\geqslant 16abc$.

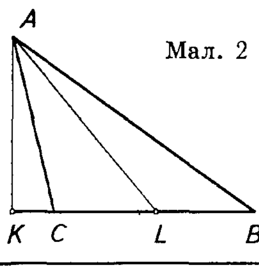
71. Легко бачити, що числа $x=0$ і $y=0$ є розв'язком даної системи, тому інші розв'язки матимуть властивість $xy\neq 0$. Після ділення кожного рівняння на xy одержимо: $\frac{3}{y}+\frac{2}{x}=6$, $\frac{1}{y}+\frac{7}{x}=-17$. Зробивши заміну $u=\frac{1}{x}$ і $v=\frac{1}{y}$, одержимо: $u=-3$, $v=4$.

72. $$1+x=\frac{2a}{a+b};\ 1+y=\frac{2b}{b+c};\ 1+z=\frac{2c}{a+c}\Rightarrow$$
$$(1+x)(1+y)(1+z)=\frac{2a}{a+b}\cdot\frac{2b}{b+c}\cdot\frac{2c}{a+c}=\frac{2b}{a+b}\cdot\frac{2c}{b+c}\times$$
$$\times\frac{2a}{a+c}=\frac{b+a-a+b}{a+b}\cdot\frac{c+b-b+c}{b+c}\cdot\frac{a+c-c+a}{c+a}=$$
$$=(1-x)(1-y)(1-z).$$

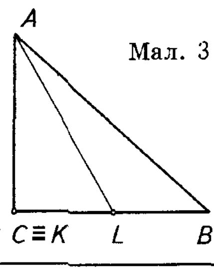
73.



Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3

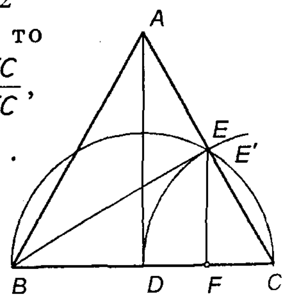
Випадок 1. $\angle C<90^\circ$ (мал. 1). Оскільки мова йде про кут між висотою і бісектрисою (між променями, які їх містять), то за означенням кута ці промені різні, а отже висота AK і бісектриса AL не співпадають, тобто $AC \neq AB$. Нехай, для певності, $AC<AB \Rightarrow \angle C>\angle B$. Оскільки $\angle C<90^\circ$, то $\angle B<90^\circ$ і за відомою задачею точка K лежить між точками C і B. Цю ж властивість має і точка L . Покажемо, що точка K лежить між точками C і L (K^*CL). Дійсно, $\angle CAK=90^\circ-\angle C$, а $\angle CAL=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B-\angle C)>90^\circ-\frac{1}{2}(\angle C+\angle C)=90^\circ-\angle C$, тому промінь AK проходить між сторонами кута CAL, а отже перетинає відрізок CL.

За аксіомою про вимірювання кутів $\angle KAL=\angle CAL-$ $-\angle CAK=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B-\frac{1}{2}\angle C-(90^\circ-\angle C)=\frac{\angle C-\angle B}{2}$. Якщо невідомо, яка із сторін AC і AB більша, то $\angle KAL=|\angle B-\angle C|:2$.

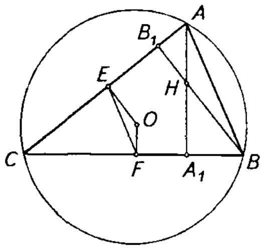
Випадок 2. $\angle C>90^\circ$ (мал.2). Доведіть, що в цьому випадку промінь AC проходить між сторонами кута KAL, тобто що $\angle KAC<\angle KAL$ і покажіть, що $\angle KAL=\angle KAC+\angle CAL=$ $=\frac{\angle C-\angle B}{2}$.

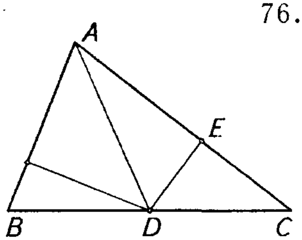
Випадок 3. $\angle C=90^\circ$ (мал. 3). Оскільки K співпадає з C, то $\angle KAL=\angle CAL=\frac{1}{2}\angle A=(90^\circ-\angle B)\frac{1}{2}=(\angle C-\angle B):2$.

74. Якщо побудувати $EF \parallel AD$, то $\angle FEC=30^\circ$, $\triangle BCE \backsim \triangle ECF$, $\frac{BC}{CE}=\frac{EC}{FC}$, $\angle CE^2=BC\cdot FC=BC\cdot\frac{BC}{4}=\frac{BC^2}{4}$. $BC=2\cdot EC$. Покажемо, що $\angle BEC$ — прямий. Побудуємо для цього кола(D,DC) і (C,CD). Якщо E' — одна з точок їх перетину, то $\angle BE'C=90^\circ$, а $\angle CBE'=30^\circ$. З останнього випливає, що точка E належить променеві BE'. Крім того, точка E належить колу (C,CD), тому вона є спільною точкою променя BE і цього кола. Оскільки пряма BE дотикається до кола (C,CD) в точці E, то E співпадає з E' і $\angle BEC=90^\circ$, $\angle BCE=60^\circ$; $AB=BC=AC$.



75. Нехай AA_1 і BB_1 — висоти даного трикутника, $AE=EC$, $BF=FC$ і O — центр описаного кола, тобто $OF \triangle BC$ і $OE \triangle AC$. Оскільки при цьому $OF \parallel AA_1$, $OE \parallel BB_1$, а $EF \parallel AB$, $EF=\frac{1}{2}AB$, то із подібності трикутників ABH і FEO маємо: $OF=\frac{1}{2}AH$.



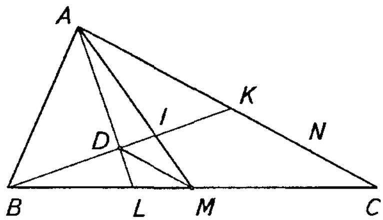


76. 1-й спосіб. $BD: sin\alpha = AB: sin\gamma$; $CD: sin\beta = AC: sin\gamma$. Поділивши почленно ліві і праві частини одержаних рівностей, отримаємо:

$$\frac{sin\,\beta}{sin\,\alpha} = \frac{AB}{AC} < 1, \Rightarrow \alpha > \beta.$$

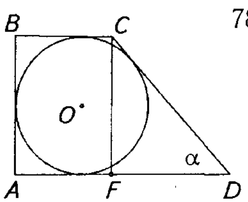
2-й спосіб. Оскільки $AB<AC$, то $\angle B > \angle C \Rightarrow sinB > sinC \Rightarrow DF > DE$ $(DF \perp AB,\ DE \perp AC) \Rightarrow sin\alpha > sin\beta \Rightarrow \angle\alpha\angle\beta$.

77. Якщо $K=BD \cap AC$, то $\triangle ABD = \triangle AKD$ $(\angle BDA = \angle KDA = 90^\circ,$ $\angle BAD = \angle DAK) \Rightarrow$ $\angle BD = DK$.



Оскільки $BM=MC$, то DM — середня лінія трикутника BCK, тому $KC \parallel DM$, звідки і випливає побудова шуканого трикутника.

1) Будуємо $AN \parallel DM$; 2) Будуємо пряму AD; 3) Через точку D проводимо $l \perp AD$ і одержуємо точку $K=AN \cap l$; 4) Будуємо точку $B=l \cap (D, DK)$; 5) Будуємо точку $C=BM \cap AN$; 6) Будуємо шуканий трикутник ABC.

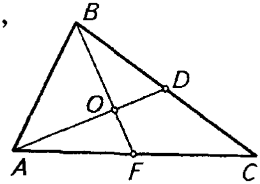


78. Нехай $CF \perp AD$, тоді $CF=AB=h$,

$$CD=\frac{h}{sin\,\alpha},\quad P=2(AB+CD)=2\left(h+\frac{h}{sin\,\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow h=\frac{P \cdot sin\,\alpha}{2\,(1+sin\,\alpha)}.$$

79. Нехай $AF=FC$ і $BD=DC$. Як відомо, $AO=\frac{2}{3}AD$ і $OB=\frac{2}{3}BF$.



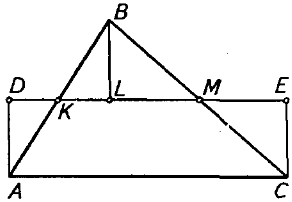
Відомо також, що

$AD=m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ і

$BF=m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2} \Rightarrow AO=\frac{1}{3}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$,

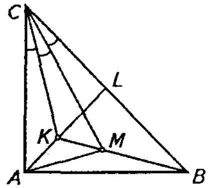
$OB=\frac{1}{3}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$. Із $\triangle AOB$ $AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=$

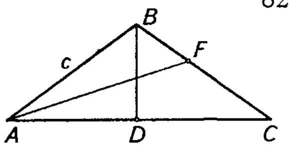
$=\frac{\sqrt{a^2+b^2+4c^2}}{3} \Rightarrow AB=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$.



80. Якщо $AK=KB$, $BM=MC$ і $BL\triangle KM$, то таке розбиття є шуканим. Дійсно, коли $DA\perp KM$ і $CE\perp KM$, то $\triangle ADK=\triangle BLK$ і $\triangle CEM=\triangle BLM$, а $ADEC$ — прямокутник.

81. Нехай AL — бісектриса кута BAC і $AL\cap BM=K$. Оскільки $\triangle AKB=\triangle AKC$, то $\angle ACK=15^\circ$, $\angle BKA=\angle CKA=120^\circ=$ $=\angle CKM \Rightarrow \triangle AKC=\triangle MKC \Rightarrow \angle KCM=$ $=15^\circ \Rightarrow \angle MCB=15^\circ \Rightarrow \angle BMC=135^\circ$.





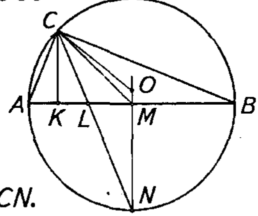
82. Нехай $BD\perp AC$, а $\angle BAF=\angle FAC$.

$BD=c\cdot \sin 36^\circ$, $\frac{c}{\sin 54^\circ}=\frac{AF}{\sin 108^\circ}$,

$\frac{BD}{\sin 36^\circ\cdot \sin 54^\circ}=\frac{AF}{\sin 108^\circ}$;

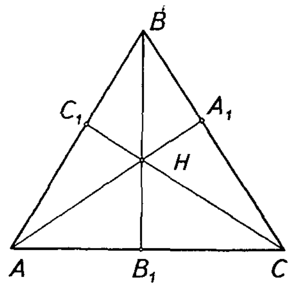
$$AF=\frac{BD\cdot \sin 72^\circ}{\sin 36^\circ\cdot \sin 54^\circ} \Rightarrow AF=\frac{BD\cdot 2\cos 36^\circ}{\cos 36^\circ}=2\cdot BD.$$

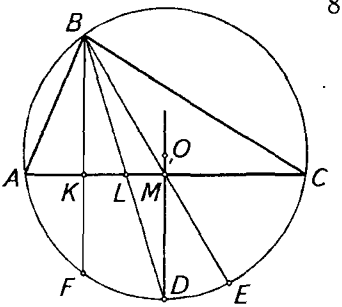
83. Нехай CK, CL і CM — відповідно висота, бісектриса і медіана трикутника ABC. Опишемо навколо нього коло з центром O. Якщо промінь CL перетинає його в точці N, то $\smile AN=\smile NB \Rightarrow MN\perp AB \Rightarrow$ $\Rightarrow O\in MN \Rightarrow ON=OC \Rightarrow \angle ONC=\angle OCN$.



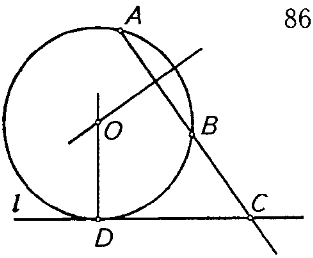
З другого боку, $\angle MCN=\angle CNM$, отже $\angle NCM=\angle NCO$, тому точка O співпадає з точкою M (аксіома про відкладання кута в дану півплощину). Отже, AB — діаметр описаного кола і $\angle ACB=90^\circ$.

84. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 — висоти шуканого трикутника ABC і H — точка перетину прямих, яким ці висоти належать. Оскільки $\triangle ACC_1 \backsim \triangle ABB_1$, $\triangle BCB_1 \backsim \triangle ACC_1$, то $\frac{AC}{CC_1} = \frac{AB}{BB_1}$ і $\frac{BC}{BB_1} = \frac{AC}{AA_1} \Rightarrow \quad a:b:c: = h_b:h_a:\frac{h_a \cdot h_b}{h_c}$ (доведіть!). Шуканий трикутник буде подібним до трикутника $A'B'C'$, сторони якого мають довжини $a' = h_b$, $b' = h_a$, $c' = \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}$. Оскільки відрізок з довжиною $c = \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}$ будується, то трикутник $A'B'C'$ *можна побудувати, якщо для чисел* h_a, h_b і $\frac{h_a \cdot h_b}{h_c}$ *має* місце нерівність трикутника. Побудувавши $\triangle A'B'C'$, будуємо його висоту $B'B_1'$. На промені $B'B_1'$ відкладемо відрізок з довжиною h_b і через його кінець проведемо пряму, паралельну до $A'C'$. Від перетину цієї прямої із променями $B'A'$ і $B'C'$ одержимо останні вершини шуканого трикутника.

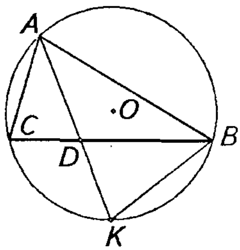




85. Нехай ABC — шуканий трикутник, тобто точки F, D і E є точками перетину описаного кола із продовженням висоти BK бісектриси BL і медіани BM. O — центр цього кола. Оскільки $\smile AD = \smile DC$, то $OM \perp AC$ і $M \in OD$. З другого боку, $BF \perp AC$, тобто $FB \parallel OD$. Звідси випливає така побудова: 1) будуємо пряму OD, 2) будуємо таку точку B даного кола, що $FB \parallel OD$. 3) будуємо точку $M = OD \cap BE$. 4) будуємо хорду AC, яка проходить через точку M і перпендикулярна до прямої BF.



86. Нехай l — дана пряма, A і B — дані точки і (O,OA) — шукане коло. Центр O цього кола належить серединному перпендикуляру відрізка AB. Якщо б вдалося побудувати точку D дотику прямої l і шуканого кола, то задача була б розв'язана $(OD\perp l)$. Побудувавши точку $C=l\cap AB$ і використавши відоме співвідношення $CD^2=CB\cdot CA$, одержимо $CD=\sqrt{CB\cdot CA}$. Будуємо $D=l\cap(C,CD)$.



87. Опишемо навколо даного трикутника коло і розглянемо точку K перетину цього кола з прямою AD. Легко бачити, що $\triangle ACD \backsim \triangle AKB$,

тому $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{AK}{AB}\Rightarrow$

$\Rightarrow AC\cdot AB=(AD+DK)AD\Rightarrow$

$\Rightarrow AC\cdot AB=AD^2+AD\cdot DK.$ (1)

За відомою задачею $AD\cdot DK=CD\cdot DB$, тому із (1) маємо: $AD^2=AC\cdot AB-BD\cdot DC$.

88. Розклавши суму кубів у другій рівності та скоротивши на $a+b=c+d$, отримаємо $(a+b)^2-3ab=(c+d)^2-3cd$, звідки $ab=cd$ та $(a-b)^2=(c-d)^2$. Тому $a-b=\pm(c-d)$. Таким чином,

$$\begin{cases} a+b=c+d, \\ a-b=c-d. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a+b=c+d, \\ a-b=d-c. \end{cases}$$

Звідси $a=c$, $b=d$ або $a=d$, $b=c$. Протиріччя.

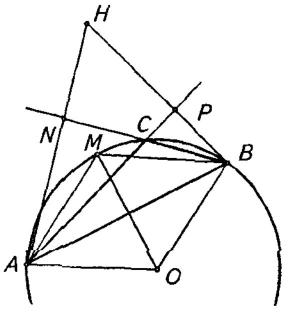
89. Припустимо, що в комісії менше 60 членів. Кожний учасник комісії на засіданні зустрічав 9 інших учасників, і оскільки зустрітися з кожним він міг не більше одного разу, то він відвідав не більше 6 засідань. Загальна кількість людиновідвідувань дорівнює $40\cdot 10=$ $=400$. Оскільки на кожного учасника відвідувань не більше 6, то кількість членів комісії не менша $400:6>60$. Протиріччя.

90. Рівність $l^2+m^2+n^2-2l+4m-6n=-11$ перепишемо у вигляді $(l-1)^2+(m-2)^2+(n-3)^2=3$. Оскільки l, m, n — цілі числа, то рівність можлива тільки у випадку

$$\begin{cases}(l-1)^2=1,\\(m+2)^2=1,\\(n-3)^2=1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|l-1|=1,\\|m+2|=1,\\|n-3|=1,\end{cases}$$

Звідси знаходимо вісім трійок: $(0;-1;2)$, $(0;-3;2)$, $(2;-1;2)$, $(2;-3;2)$, $(0;-1;4)$, $(0;-3;4)$, $(2;-1;4)$, $(2;-3;4)$.

91. Якщо $AN\perp BC$ і $BP\perp AC$, то $AN\cap BP=H$. Навколо чотирикутника $CNHP$ можна описати коло діаметра CH, тому $\angle NHP=180^\circ-\angle NCP=60^\circ$. Оскільки $\angle AOB=120^\circ$, M — середина дуги ACB, то $\angle AOM=\angle MOB=60^\circ$. Навколо чотирикутника $OAHB$ також можна описати коло (воно буде описаним і навколо $\triangle AOB$) і його центром буде точка $M(MA=MO=MB)$. Отже. $MH=MO$.



92. Оскільки коефіцієнти рівнянь додатні, то корені рівнянь

$$x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ та } x=\frac{B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A} -$$

додатні. Числа t і T, які лежать між коренями першого і другого рівняння відповідно, також додатні і задовольняють нерівності $at^2-bt+c<0$ і $AT^2-BT+C<0$.

Звідси $$at+\frac{c}{t}<b,\ AT+\frac{B}{T}<B.$$

Тому $$(B+b)^2>\left(AT+\frac{C}{T}+at+\frac{c}{t}\right)^2\geq$$

$$\geq\left(2\sqrt{(at+AT)\left(\frac{c}{t}+\frac{C}{T}\right)}\right)^2=4(at+AT)\left(\frac{c}{t}+\frac{C}{T}\right),$$

тобто $$\left(\frac{B+b}{2}\right)^2\geq(at+AT)\left(\frac{c}{t}+\frac{C}{T}\right).$$

93. Прирівнявши ліві частини перших двох рівнянь системи, одержимо $x(y+1)=z(y+1)$, звідки $y=-1$ або $x=z$. Випадок $y=-1$ неможливий (чому?). Для $x=z$ з третього рівняння одержуємо квадратне рівняння $x^2+2x-80=0$, звідки $x_1=-10$, $x_2=8$.

Отже, отримуємо два розв'язки: $(-10;-10;-10)$, $(8;8;8)$.

94. Припустимо, що дана сума номерів для всіх вершин дорівнює m. Додавши ці суми при всіх восьми вершинах, отримаємо рівність $8m=2(1+2+\ldots+12)$ (2 з'являється за рахунок того, що кожне ребро зустрічається два рази).

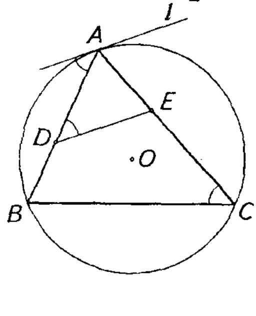
З рівності випливає, що $m=\frac{39}{2}$, що неможливо.

95. Припустимо, що такі натуральні числа m і n існують. Піднісши ліву і праву частини рівності до квадрату, одержимо $m+2\sqrt{mn}+n=1994$, звідки $2\sqrt{mn}=k$, де k — натуральне число. Підставивши $n=\frac{k^2}{4m}$ в задану рівність, одержимо $\sqrt{m}+\frac{k}{2\sqrt{m}}=\sqrt{1994}$ або $2m+k=2\sqrt{1994m}$.

Отже, число $1994m$ є точним квадратом. Але число $1994=2\cdot997$ має прості множники тільки в першому степені, тому ці множники 2 і 997 мають бути дільниками числа m. Таким чином, $m\geqslant2\cdot997=1994$. З рівності $\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{1994}$ випливає: $\sqrt{n}\leqslant0$, що неможливо.

96. Для $x=0$ і $y=1$ з даної рівності маємо $f(-f(1))=0$. Підставивши в рівність $y=-f(1)$, приходимо до рівності $f(x)=(1+f(1))-x$. Таким чином, наша функція має вигляд $f(x)=a-x$. Відповідно до рівності одержуємо, що $a-(x+y-a)=$ $=1-x-y$, звідки $a=\frac{1}{2}$. Отже, шукана функція $f(x)=\frac{1}{2}-x$.

97. Із властивостей дотичної випливає, що кут між l і AB дорівнює $\angle ACB$. Оскільки $l \parallel DE$, то $\angle ADE=$ $=\angle ACB$. Отже. $\triangle ABC$ і $\triangle ADE$ — подібні (за рівністю двох кутів), причому $\frac{AD}{AE}=\frac{AC}{AB}$. Таким чином, $\frac{6}{5}=\frac{5+7}{6+BD}$, звідки BD=4см.



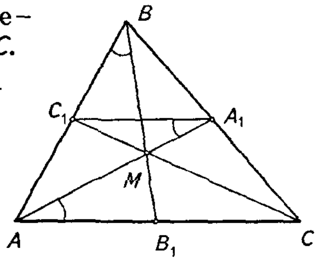
98. Ні, не можна. Всі числа, які далі будуть записуватися на дошці, будуть ділитися на 3 (чому?), а 1996 на 3 не ділиться.

99. Очевидно, що $m \geqslant n+1$, і тому $5n^2 \geqslant (n+1)!-n! = n!(n+1-1) = n^2(n-1)!$.

Отже, $(n-1)! \leqslant 5 < 6 = 3!$, тому $n<4$. Розглядаючи рівняння $5n^2+n! = m!$ для $n=1$, 2, 3, лише для $n=1$ дістанемо в правій частині 3!. Таким чином, $m=3$, $n=1$.

100. $9 = x(y+z)+yz \leqslant x(y+z)+\frac{1}{4}(y+z)^2 = x(6-x)+\frac{1}{4}(6-x)^2 \Rightarrow$ $36 \leqslant 4x(6-x)+(6-x)^2 \Rightarrow x(4-x) \geqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 4$.

101. Позначимо через M точку перетину медіан трикутника ABC.



1) Нехай $\angle ABB_1 = \angle A_1AC$ (і рівні $\angle AA_1C_1$, оскільки $A_1C_1 \parallel AC$). Тоді точки M, A_1, B, C_1 (лежать на одному колі (чому?). Отже, $\angle AA_1B = 180^\circ - \angle CC_1B = \angle AC_1C$.

2) Якщо $\angle AA_1B = \angle AC_1C$, то міркування проводяться в зворотному порядку.

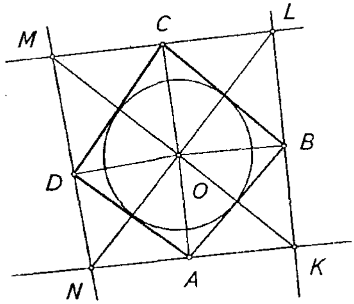
102. Для $n=1,2,3$ можуть бути зафарбовані відповідно прямокутник 1×2, "куточок" з трьох клітинок, квадрат 2×2. (Виконайте відповідні малюнки і переконайтесь, що це дійсно так).

В загальному випадку на нашому аркуші візьмемо найлівіший стовпчик, де зафарбовані клітинки, і в цьому стовпчику візьмемо найвищу зафарбовану клітинку A. Вона не має зафарбованих сусідів зліва і прямо над собою, і тому має не більше 4 зафарбованих сусідів. Отже, $n \leqslant 4$. Припустимо, що $n=4$. Тоді для клітинки A сусіди B_1 та B_2 зафарбовані, для B_1 C_1 та C_2 чисті, для B_2 C_2 та C_3 зафарбовані. Тому в стовпчику з клітинками B можна взяти найвищу зафарбовану клітинку, і вона не буде мати зафарбованих сусідів зліва і прямо над собою. Для цієї клітини проводимо ті ж міркування, що і для A, і т.д. Отримаємо нескінченну послідовність "верхніх" клітинок, що суперечить умові.

103. З умови випливає, що спільний корінь α задовольняє рівності $\alpha^4+k\alpha^2+1=0$, $\alpha^4+k\alpha^2+\alpha=0$, звідки $\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow 1+k+1=0 \Rightarrow k=-2$. Відповідь: $k=-2$.

104. $(a+b+c)^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac))$.
За умовою $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)\,\vdots\,6$, тому $(a+b+c)^3\,\vdots\,6$. $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+6abc+3(a^2b+a^2c+b^2a+c^2a+c^2b)+b^2c$. Оскільки $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b=ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)$ парне число, то $a^3+b^3+c^3\,\vdots\,6$.

105. Доведемо, що N, O і L лежать на одній прямій. Оскільки O — центр вписаного кола, то AO, BO, CO, DO — бісектриси кутів чотирикутника $ABCD$. Чотирикутники $AKBO$, $BLCO$, $CMDO$ і $DNAO$ — вписані (протилежні кути прямі). Отже,



$\angle NOK+\angle KOL=180^\circ-\angle ONA-\angle OKA+\angle 180^\circ-\angle OKB-\angle OLB=180^\circ-\angle ADO-\angle ABO+180^\circ-\angle BAO-\angle BCO=$

$$=360^\circ-\left(\frac{\angle CDA}{2}+\frac{\angle ABC}{2}+\frac{\angle DAB}{2}+\frac{\angle BCD}{2}\right)=360^\circ-\frac{360^\circ}{2}=$$

$=180^\circ$, тобто N, O і L лежать на одній прямій. Це ж саме стосується точок M, O і K. Тому прямі KM і NL перетинаються в точці O.

Доведемо тепер, що навколо $MLKN$ можна описати коло. $\angle NKL+\angle NML=\angle AKO+\angle OKB+\angle DMO+\angle OMC=$
$=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle DAB+\angle BCD+\angle CDA)=180^\circ$. Отже,

$$\triangle NMO \backsim \triangle LKO \Rightarrow \frac{OK}{OL}=\frac{OM}{ON} \Rightarrow \frac{r}{q}=\frac{p}{ON} \Rightarrow ON=\frac{pq}{r}.$$

Відповідь: $ON=\frac{pq}{r}$.

106. Напишемо у кожній клітинці номер стовпчика (якщо рахувати зліва направо) зі знаком "+", коли клітинка чорна і "−" коли вона біла. Сума чисел, написаних у клітинках, покритих плиткою доміно, дорівнює нулю, коли плитка не горизонтальна, 1 — коли горизонтальна і біло-чорна, −1 — коли горизонтальна і чор-

но–біла. Сума всіх чисел на дошці дорівнює 0. Отже, чорно–білих стільки ж, скільки біло–чорних.

-1	2	-3	4	-5	6	-7	8
1	-2	3	-4	5	-6	7	-8
-1	2	-3	4	-5	6	-7	8
1	-2	3	-4	5	-6	7	-8
-1	2	-3	4	-5	6	-7	8
1	-2	3	-4	5	-6	7	-8
-1	2	-3	4	-5	6	-7	8
1	-2	3	-4	5	-6	7	-8

107. Дане число запишемо у вигляді

$$\underbrace{\underbrace{111111}\underbrace{111111}\ldots\underbrace{111111}}_{333},$$

виділивши групу із шести одиниць. Звідси випливає, що дане число ділиться на число 111111. Оскільки $111111 = 111 \cdot 1001 = 37 \cdot 3 \cdot 1001$, то дане число ділиться на 37.

108. Перемогу може забезпечити собі починаючий. Першим ходом він закреслює 50–ту (центральну) клітинку, і потім повторює ходи суперника симетрично відносно неї.

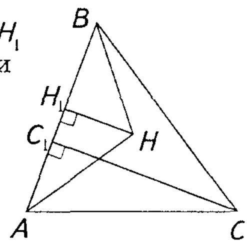
109. Кожній з даних точок $(x; y)$ поставимо у відповідність точку з координатами $(x_1; y_1)$, де $x_1 = \frac{1}{x}$, $y_1 = \frac{1}{y}$. Тоді повинна виконуватися рівність $ax_1 + by_1 = 1$, тобто «перетворені» точки лежать на прямій. Перебором знаходимо, що серед цих точок максимальна кількість точок, що лежать на одній прямій, дорівнює трьом. Відповідь: три.

110. Якщо в тричлені ax^2+bx+c замінити x на $x-\lambda$, то одержимо тричлен $ax^2+(b-2a\lambda)x+a\lambda^2-b\lambda+c$. Дискримінант цього тричлена $D_1=(b-2a\lambda)^2-4a(a\lambda^2-$ $-b\lambda+c)=b^2-4ab\lambda+4a^2\lambda^2-4a^2\lambda^2+4ab\lambda-4ac=b^2-4ac$, тобто дорівнює дискримінанту тричлена ax^2+bx+c. Якщо тричлен ax^2+bx+c замінити на тричлен $cx^2+(b+2c)x+a+b+c$, то дискримінант останнього $D_2=(b+2c)^2-4c(a+b+c)=b^2+4bc+4c^2-4ac-4bc-4c^2=$ $=b^2-4ac$. Таким чином, при вказаних діях дискримінант тричлена ax^2+bx+c не змінюється (інваріант). Оскільки дискримінант тричлена x^2-3x-4 дорівнює 25, а дискримінант тричлена x^2-2x-5 дорівнює 24, то за допомогою вказаних дій одержати з тричлена x^2-3x-4 тричлен x^2-2x-5 не можна. Відповідь: не можна.

111. Оскільки $1900^6 < 1999^6 < 2000^6$, тобто $47 \cdot 10^{18} < 1999^6 < 64 \cdot 10^{18}$, то у десятковому записі числа 1999^6 беруть участь 20 цифр. Якщо серед них не буде трьох однакових цифр, то у записі числа будуть два нулі, дві одиниці, ..., дві дев'ятки. Сума цифр такого числа дорівнюватиме $2(1+2+...+9)=90$. Отже, це число ділиться на 3. А число 1999 на 3 не ділиться, тому і 1999^6 на 3 не ділиться. Протиріччя. Таким чином, у десятковому записі числа 1999^6 будуть принаймні три однакові цифри.

112. Легко перевірити, що $x=1$ не є коренем даного рівняння. Помноживши обидві частини рівняння на $(1-x)^2$ та врахувавши, що $(1-x)(1+...+x^{n-1})=1-x^n$, одержимо рівняння $(1-x^3)(1-x^5)=(1-x^4)^2$, $1-x^3-x^5+x^8=$ $=1-2x^4+x^8$, $x^5-2x^4+x^3=0$, $x^3(x-1)^2=0$, звідки $x=0$.

Відповідь: 0.



113. Опустимо перпендикуляри CC_1 та HH_1 на сторону AB. Тоді, використовуючи теорему Піфагора, одержимо: $AC_1^2-BC_1^2=(AC^2-CC_1^2)-(BC^2-CC_1^2)=$ $=AC^2-BC^2$. Оскільки $AC^2-BC^2=$ $=AH^2-BH^2$, то $AC_1^2-BC_1^2=AH^2-$ $-BH^2=(AH_1^2+HH_1^2)-(BH_1^2+HH_1^2)=$ $=AH_1^2-BH_1^2$, тобто $AC_1^2-BC_1^2=$ $=AH_1^2-BH_1^2$. Звідси випливає, що точки C_1 та H_1 співпадають. Отже, точка H належить висоті CC_1. Аналогічно доводиться, що точка H належить двом іншим висотам трикутника ABC.

114. За теоремою Вієта $\begin{cases} x_1+x_2=-\alpha, \\ x_1x_2=-\dfrac{1}{2\alpha^2}. \end{cases}$ Отже, $x_1^4+x_2^4=$

$$=((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-2x_1^2x_2^2=\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)^2-\frac{1}{2\alpha^4}=$$

$$=2+\left(\alpha^4+\frac{1}{2\alpha^4}\right)\geqslant 2+2\sqrt{\alpha^4\cdot\frac{1}{2\alpha^4}}=2+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}.$$

115. У восьмому рядку будуть записані числа $27(a-b)$, $27(b-c)$, $27(c-a)$. Тому числа восьмого рядка і всіх наступних рядків будуть ділитися на 27. Оскільки числа 1999 та 2000 на 27 не діляться, то нижче восьмого рядка вони не зустрінуться.

116. Якщо $x-a$ – корінь першого рівняння, то $a^2=4a+2$. $(a^2-3a-2)^2-3(a^2-3a-2)-a-2=(4a+2-3a-2)^2-3(4a+2-3a-2)-a-2=a^2-4a-2=0$, тобто $x=a$ – корінь другого рівняння, що й треба було довести.

117. Число $(5n-1)-5(n-10)=5n-1-5n+50=59$ також буде ділитися на p, тому $p=7$. Отже, $2000n=13=400(5n-1)+413=400(5n-1)+7\cdot 59$ ділиться на $p=7$, що й треба було довести.

118. Відповідно до нерівності Коші матимемо, що

$$\frac{a^4}{bc}+bc\ge 2a^2,\ \frac{b^4}{ca}+ca\ge 2b^2,\ \frac{c^4}{ab}+ab\ge 2c^2.$$

Додавши ці нерівності, одержимо нерівність

$$\frac{a^4}{bc}+\frac{b^4}{ca}+\frac{c^4}{ab}+bc+ca+ab\ge 2(a^2+b^2+c^2),$$

звідки випливає, що

$$\frac{a^4}{bc}+\frac{b^4}{ca}+\frac{c^4}{ab}\ge 2(a^2+b^2+c^2)-(bc+ca+ab).$$

Оскільки $bc\le\dfrac{b^2+c^2}{2}$, $ca\le\dfrac{c^2+a^2}{2}$, $ab\le\dfrac{a^2+b^2}{2}$, то

$$bc+ca+ab\le a^2+b^2+c^2\cdot$$

Отже, $\dfrac{a^4}{bc}+\dfrac{b^4}{ca}+\dfrac{c^4}{ab}\ge 2(a^2+b^2+c^2)-\left(a^2+b^2+c^2\right)$, що й треба було довести.

119. Нехай O_1 та O_2 – центри вписаних кіл, O – центр кола ω. Точки A і C лежать на колі з центром O_1, точки B і D – на колі з центром O_2. Позначимо через X точку перетину прямої AC та кола ω, $X\ne A$. Оскільки A – точка дотику двох кіл, то A, O_1, O лежать на одній прямій. Трикутники AO_1C та AOX рівнобедрені, тому $O_1C\parallel OX$, $OX\perp MN$. Отже, X – центр дуги MXN. Аналогічно, в центрі дуги перетинає коло ω і пряма BD. Далі, використовуючи властивості вписаних кутів, доводимо, що $\angle DCX=\angle ABD$. Звідси випливає твердження задачі.

120. Відповідь: виграє гравець, який почав гру. Виграну стратегію опишіть самостійно.

121. Вказівка. Розгляньте різницю між лівою і правою частинами нерівності.

122. Вказівка. Дана система рівнянь рівносильна сукупності чотирьох мішаних систем:

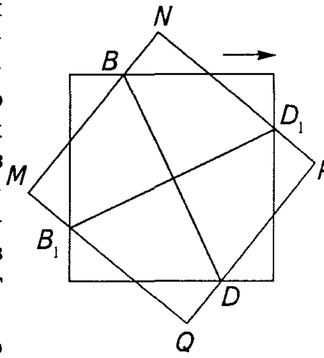
$$\begin{cases} x \ge 0,\ y \ge 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \\ [x] + [y] = 1, \end{cases} \begin{cases} x < 0,\ y > 0, \\ y^2 - x^2 = 1, \\ [x] + [y] = 1, \end{cases} \begin{cases} x < 0,\ y < 0, \\ x^2 + y^2 = -1, \\ [x] + [y] = 1, \end{cases} \begin{cases} x > 0,\ y < 0, \\ x^2 - y^2 = 1, \\ [x] + [y] = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $x=0$, $y=1$; $x=1$, $y=0$.

123. Нехай фіксовані точки A і B, а рухається точка C ($C \neq A$, $C \neq B$). Тоді точка перетину медіан трикутника ABC утворюється за допомогою гомотетії з центром в середині AB та коефіцієнтом $k=1/3$. Шукане ГМТ знаходиться як образ всього кола (з виколотими точками A і B) і саме є колом (з двома виколотими точками).

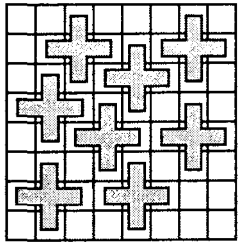
Відповідь: коло (з двома виколотими точками).

124. Якщо рухати квадрат $MNPQ$ у вказаному стрілкою напрямку, то відрізки BD та B_1D_1 будуть рухатись паралельно. Адже при переміщенні на відстань d, точки B і D перемістяться на однакову відстань, що дорівнює d, а обидві точки B_1 і D_1 – на однакову відстань, що дорівнює $d\ tg\alpha$, де через α позначено гострий кут перетину сторін квадратів у точці B. Отже, кут між BD та B_1D_1 не змінюється. Аналогічні міркування можна провести для руху у напрямку, перпендикулярному стрілці. Такими рухами ми можемо сумістити центри двох квадратів. Для квадратів із спільним центром O поворот на 90° відносно O переводить кожний квадрат в себе, а BD – в B_1D_1. Тому кут між ними – прямий.



125. Розглянемо 28 клітинок, що прилягають до сторін квадрата 8×8. Оскільки до кожної сторони квадрата 8×8 не можуть "дотикатися" більше двох заданих фігур, то серед цих 28 клітинок

не менше 20 клітинок, які не будуть вирізані. А з залишених 44 клітинок можна вирізати не більше 8 заданих п'ятиклітинних фігур. Приклад вирізання 8 фігур подано на малюнку.



Відповідь: 8 фігур.

126. Оскільки $1/14=0{,}0(714285)$, то 2003-тя цифра після коми дорівнює 2. Якщо її викреслити, то на її місце стане 8, тобто одержане число буде більшим.

Відповідь: одержане число.

127. Нехай задане квадратне рівняння має вигляд $(x-\lambda)^2=0$. Тоді всі його корені мусять бути коренями рівняння $(x^2-1-\lambda)^2=0$. Воно рівносильне рівнянню $(x^2-\lambda^2+\lambda^2-\lambda-1)^2=0$, тобто рівнянню $(x^2-\lambda^2)^2=0$, якщо $\lambda^2-\lambda-1=0$.

Отже, $a=1$, $b=-2\lambda$, $c=\lambda^2$, де $\lambda=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Відповідь: так, існують.

128. Вказівка. $MO \parallel BC \parallel AD$, тому $\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{BM}{MA}$. Звідси випливає, що трикутник CBM подібний до трикутника DAM. Тому $\angle MCB=\angle MDA$.

129. Скориставшись формулою

$$a^{2k+1}+b^{2k+1}=(a+b)(a^{2k}-a^{2k-1}+\ldots-ab^{2k-1}+b^{2k})$$

будемо мати:

$$\frac{(m-1)^{2003}+1}{m}=\frac{(m-1)^{2003}+1^{2003}}{m}=$$

$$=\frac{(m-1+1)}{m}\cdot\left((m-1)^{2002}-(m-1)^{2001}+\ldots-(m-1)+1\right)=$$

$$=\left((m-1)^{2002}-(m-1)^{2001}+\ldots-(m-1)+1\right)-$$

ціле число, що й треба було довести.

130. Вказівка. Скористайтесь таким твердженням: якщо $0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant1$, то $0\leqslant\beta-\alpha\leqslant1$.

131. Вказівка. Якщо врахувати ОДЗ рівняння, то єдиним його розв'язком може бути $x=2$. Перевіркою встановлюємо, що це дійсно так.

Відповідь: $x=2$.

132. Вказівка. Для розв'язання задачі досить провести шість серединних перпендикулярів $\left(C_4^2=6\right)$ до відрізків A_iA_j $(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$. А далі просто вибрати ті лінії, що насправді розділяють потрібні області декартової площини.

133. Вказівка. Якщо зобразити графік функції $y=(x-m)(x-n)$, то при додатних k більший корінь рівняння $(x-m)(x-n)=k$ буде більший за $max\{m,n\}$, а тому залишається перебрати три варіанти: $m=n=1$; $m=1$; $n=2$; $m=n=2$.

Відповідь: 2; $1+\sqrt{2}$; $1+\sqrt{3}$; $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

134. Вказівка. Легко зрозуміти, що числа $6n$ та $9n$ повинні бути тризначними, а число $13n$ – чотиризначним, тому $77 \leqslant n \leqslant 111$. Скориставшись ознакою подільності на 9, знаходимо, що $n=81$. При цьому $6n=468$, $9n=729$, $13n=1053$.

Відповідь: $n=81$.

135. З властивостей вписаного кола випливає процес відновлення $\triangle ABC$:

1) Будуємо пряму $h=MH$, на якій лежить висота AH трикутника;
2) Проводимо пряму $a=BC$, перпендикулярно до прямої h через точку H. На ній лежить сторона BC трикутника ABC.
3) Будуємо коло ω, що проходить через точки M і Q та дотикається до прямої a. Це буде коло, вписане в $\triangle ABC$;
4) Через центр O цього кола то точку Q проводимо пряму $l=OQ$, на якій лежить бісектриса $\triangle ABC$;
5) Вершина A трикутника визначається точкою перетину прямих h і l: $A=h \cap l$;
6) З вершини A проводимо дотичні до кола ω, перетин яких з прямою a і визначає інші вершини B і C трикутника ABC.

§4. ДЕСЯТИЙ КЛАС

1. а) $x_1 + x_2 = -a - 1$, $x_1 x_2 = 1$. Якщо $x_1 < 0$ і $x_2 < 0$, то $x_1 x_2 > 0$; $x_1 + x_2 = -a - 1 < 0$, $D = (a+1)^2 - 4 \geqslant 0$, звідки $a > 1$.
Перше твердження істинне, коли $a > 1$.
б) Це твердження істинне, коли $D = (a-2)^2 - 16 \geqslant 0$, звідки $a^2 - 4a - 12 \leqslant 0$ і $-2 \leqslant a \leqslant 6$. Таким чином, при $-2 \leqslant a \leqslant 1$ твердження б) істинне, а твердження а) — хибне.
При $a > 6$ твердження а) істинне, а твердження б) — хибне. Відповідь: $a \in [-2;\ 1] \cup (6;\ \infty)$.

2. Нехай $x \vdots p$. Тоді $x = kp$ і $p(kp + y) = kpy \Rightarrow y = \dfrac{kp}{k-1}$.
Оскільки k та $k-1$ взаємно прості, то $p \vdots k-1$. Отже, маємо:
1) $k - 1 = 1 \Rightarrow k = 2 y = 2p$, $x = 2p$;
2) $k - 1 = -1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow y = 0$, $x = 0$;
3) $k - 1 = p \Rightarrow k = p + 1 \Rightarrow y = p + 1$, $x = p(p+1)$;
4) $k - 1 = -p \Rightarrow k = 1 - p \Rightarrow y = p - 1$, $x = p(1 - p)$.
Враховуючи, що x та y симетричні в рівнянні, маємо відповідь: $(2p, 2p)$; $(0, 0)$; $(p+1, p(p+1))$; $(p(p+1), p+1)$; $(p-1, p(1-p))$; $(p(1-p), p-1)$.

3. При приклеюванні одного кубика "зникає" парна кількість граней (скільки у кубика, стільки у фігури). Тому площа поверхні склеєної фігури відрізняється на парне число від суми площ всіх граней її кубиків і може бути тільки парною. Площу, що дорівнює 1997, одержати не можна. Відповідь: не можна.

4. $$\underbrace{111\ldots1}_{2k} - \underbrace{222\ldots2}_{k} = \underbrace{111\ldots1}_{2k} - \underbrace{111\ldots1}_{k} - \underbrace{111\ldots1}_{k} = \underbrace{111\ldots1}_{k} \times$$
$$\times \underbrace{000\ldots0}_{k} - \underbrace{111\ldots1}_{k} = \underbrace{111\ldots1}_{k} \cdot 10^k - \underbrace{111\ldots1}_{k} = \underbrace{111\ldots1}_{k}(10^k - 1) =$$
$$= \underbrace{111\ldots1}_{k} \cdot \underbrace{999\ldots9}_{k} = = \underbrace{111\ldots1}_{k} \cdot 9 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{k} = \underbrace{(333\ldots3)^2}_{k}.$$

5. Оскільки b — двоцифрове число, то число A можна подати в такому виді:
а) $A = a \cdot 100 + b = 98a + (2a + b)$; б) $A = 105a - (5a - b)$.

а) Якщо $2a+b$ ділиться на 7, то й A ділиться на 7. (98 ділиться на 7). Навпаки, якщо A ділиться на 7, то число $2a+b=A-98a$ теж ділиться на 7.

б) Цей випадок доводиться аналогічно.

6. Якщо такі степені існують, то більший з них має бути хоча б тризначним числом, тому якщо m і n — шукані і $m>n$, то $m\geqslant 4$.

Оскільки $4^1=4$, $4^2=16$ і $4^3=64$, то при $n=1, 2, 3$ жодна з пар чисел 4^4 і 4^1, 4^2 і 4^4, 4^4 і 4^3 шуканої властивості не має. Звідси випливає, що $m>4$ і $n>4$.

В зв'язку з цим маємо: $4^m=100a+b$, $4^n=100c+b$, звідки $4^m-4^n=100(a-c)=100k$; $4^n(4^{m-n}-1)=100k$; $4^{n-1}(4^{n-m}-1)=25k$. Оскільки ліва частина має ділитись на 25, то число $4^{m-n}-1=25d$. (1)

$4^{m-n}-1=(2^{m-n}-1)(2^{m-n}+1)$, тому (1) набуває виду

$(2^{m-n}-1)(2^{m-n}+1)=25d$. (2)

Степені двійки закінчуються на 2, 4, 6, 8, тому коли $2^{m-n}-1$ ділиться на 5, то $2^{m-n}=...6$. При цьому $2^{m-n}+1=...7$ і це число на 5 не ділиться. Якщо $2^{m-n}+1$ ділиться на 5, то $2^{m-n}=...4$, але тоді $2^{m-n}-1=...3$.

Отже, із чисел $2^{m-n}-1$ і $2^{m-n}+1$ тільки одне може ділитись на 5, і для того, щоб мало місце співвідношення (2), потрібно, щоб одне з них ділилось на 25. $2^{10}=1024$, тому $(2^{10}-1)\cdot(2^{10}+1)=1023\cdot 1025=25d$, при цьому $m-n=10$.

Можна довести, що коли $m_1=m+p$, $n_1=n+p$ і $m-n=10$, то для степенів m_1 і n_1 теж одержимо числа, які закінчуються двома однаковими цифрами.

7. Оскільки $1+9+8+3=21$, то дане число ділиться на 3, але не ділиться на 9.

Припустимо, що існують такі натуральні числа M і N, що $M^2+N^2=101010...10$.

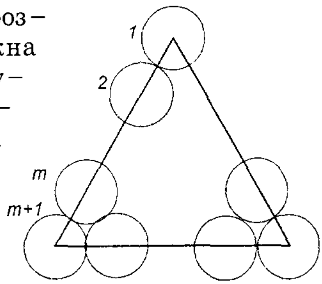
1) Якщо $M=3m$ і $N=3n$, то $M^2+N^2=9(m^2+n^2)$, тобто дане число ділиться на 9, що неможливо.

2) Якщо $M=3m\pm 1$ (число не ділиться на 3), а $N=3n$, то $M^2+N^2=9m^2+3n^2\pm 6m+1$, тобто дане число не ділиться на 3, що суперечить попередньому.

3) Якщо $M=3m\pm 1$, $N=3n\pm 1$, то $M^2+N^2=9m^2+9n^2\pm 6m\pm$ $\pm 6n+2$. Це число теж не ділиться на 3 (чому?).

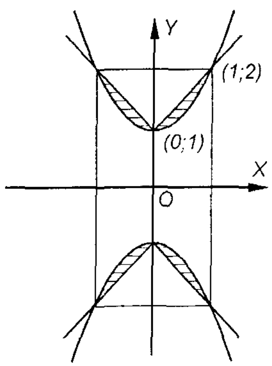
Отже, згаданий в задачі запис неможливий.

8. Мається на увазі, що кульки розкладені щільно, тобто кожна кулька дотикаються до всіх сусідніх. В такому випадку число кульок в сусідніх рядках відрізняється на 1. Якщо із кульок набору виклали трикутник з m рядків, то в $m+1$-му рядку їх буде $30+33=63$. Використавши формулу для суми членів арифметичної прогресії з різницею 1, одержимо: $n = \frac{1+63}{2} \cdot 63 - 33 = 1983$.



9. *1)* Кладемо на кожну шальку по два пакети. Якщо їх вага різна, то "штампуємо" важчі і легші (наприклад, записуємо на важчих букви "в", а на легших – "л"). *2)* Зважуймо важчі, і на важчому з них робимо помітку "$\dot{в}$". *3)* Зважуємо легші, і на важчому з них робимо помітку "$\dot{л}$". Розкладаємо пакети в такому порядку: "$\dot{в}$", "в", "$\dot{л}$", "л". *4)* Зважуємо пакети "в" і "$\dot{л}$". Якщо пакет "в" важчий, ніж "$\dot{л}$", то вказаний вище порядок буде шуканим, а якщо ні, то шуканим буде такий порядок: "$\dot{в}$", "$\dot{л}$", "в", "л".
При першому зважуванні шальки можуть і зрівноважитись. Тоді *2)* Зважують пакети першої шальки і роблять на них позначки "в" і "л". *3)* Зважують пакети другої шальки і роблять на них позначки "$\dot{в}$" і "$\dot{л}$". Розкладають пакети в такому порядку: "в", "$\dot{в}$", "л", "$\dot{л}$". *4)* Зважують пакети "в" і "$\dot{в}$". Якщо пакет "в" важчий, то порядок "в", "$\dot{в}$", "$\dot{л}$", "л". В іншому ж випадку порядок пакетів буде такий: "$\dot{в}$", "в", "л", "$\dot{л}$".
Можливі і інші варіанти, але мінімальне число зважувань — 4.

10. Легко бачити, що обидві фігури, кожна, з яких визначається однією з даних нерівностей, симетричні відносно кожної координатної осі (покажіть це!). В зв'язку з цим можна розглянути фігуру, яка визначаються даною системою і розміщена в першій



чверті, тобто фігуру, для якої $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$,

$$\begin{cases} y \le x+1, \\ y \ge x^2+1. \end{cases}$$

Шукана фігура складатиметься з чотирьох параболічних сегментів, які на малюнку заштриховані.

11. $2x^2-3x=2x\sqrt{x^2-3x}+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-2x\sqrt{x^2-3x}+x^2-3x=1 \Rightarrow (x-\sqrt{x^2-3x})^2=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \pm 2x+1-x^2+3x=0 \Rightarrow 3x \pm 2x=-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=-\frac{1}{5}$ або $x=-1$. $x=-1$ — сторонній корінь.

Відповідь: $x=-\frac{1}{5}$.

12. Оскільки максимальна сума цифр двозначного числа дорівнює 18, то найменшим з шуканих чисел буде 82. Однак, пара чисел 82–99 не задовольняє умови задачі, тому кожне з шуканих чисел буде більшим від 82, а отже, $a \geqslant 8$, $c \geqslant 8$, $\overline{ab}=10a+b$, $\overline{cd}=10c+d$,

$$\begin{cases} 100-\overline{ab}=c+d, \\ 100-\overline{cd}=a+b, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100-10a-b=c+d, \\ 100-10c-d=a+b, \end{cases} \Rightarrow \qquad (1)$$

$\Rightarrow 10(a-c)+(b-d)=(a-c)+(b-d)$, $9(a-c)=0$, $a=c$.

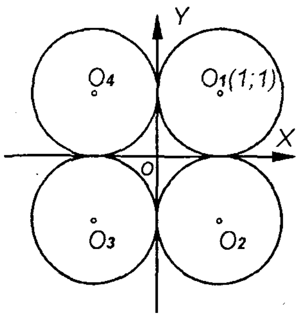
Отже, $a=c=8$, або $a=c=9$.

З другого боку, після почленного додавання рівнянь системи (1) одержимо: $200-20a-(b+d)=2a+(b+d)$, $100-11a=b+d$. При $a=9$ маємо: $b+d=1$, тому $1/b=1$, $d=0$ або $2/b=0$, $d=1$. При $a=8$ $b+d=12$, а отже, $3/b=3$, $d=9$, $4/b=4$, $d=8$, $5/b=5$, $d=7$, ..., $9/b=9$, $d=3$. Таким чином, одержуємо 9 пар шуканих чисел, а саме: 1) 91–90 і 90–91; 2) 89–83 і 83–89; 3) 88–84 і 84–88; 4) 87–85 і 85–87; 5) 86–86.

13. Оскільки $y \geqslant 0$, $z>0$, $10-x>0$, то $x<10$, тобто $x=0,1,2,\ldots,9$; $y+\frac{1}{z}=\frac{1}{10-x}$, тому $y+\frac{1}{z}=\frac{1}{10};\frac{1}{9};\frac{1}{8};\ldots;1$.

При $x=0$ маємо: $y+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}$, тому $y=0$, $z=10$. Розглянувши останні 9 значень x, одержимо всі розв'язки, а саме: $(0,0,10)$, $(1,0,9)$, $(2,0,8)$, ..., $(9,0,1)$.

14. Легко бачити, що шукана множина точок (фігура) симетрична відносно координатних осей і відносно початку координат. В зв'язку з цим досить відшукати ту частину фігури, яка належть першій чверті і використати згадану симетрію.



Для першої чверті маємо:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 \leq 0. \end{cases}$$

Остання нерівність набуває виду $(x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 1$, а нею визначаються замкнений круг з центром в точці $(1;1)$ і радіусом $r=1$. Отже, шуканою фігурою буде об'єднання чотирьох кругів з центром в точках $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$ і радіусом $r=1$.

15.
$$1986x+1985x^2+\ldots+2x^{1985}+x^{1986}=S,$$
$$(1986x+1985x^2+\ldots+2x^{1985}+x^{1986})x=Sx,$$
$$Sx-S=(x^2+x^3+\ldots+x^{1986}+x^{1987})-1986x=$$
$$=\frac{x^{1988}-x^2}{x-1}-1986x=\frac{x^{1988}-1987x^2+1986x}{x-1}.$$
$$S=\frac{x^{1988}-1987x^2+1986x}{(x-1)^2}.$$

16. Позначимо $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=f(x)$. Тоді $|f(x_1)|=|x_1^n+$ $+a_1x_1^{n-1}+\ldots+a_n|=0$, якщо x_1 — корінь даного рівняння. Оскільки $|a+b| \geqslant |a|-|b|$, то $|x_1^n+a_1x_1^{n-1}+\ldots+a_n| \geqslant$

$$\geqslant |x_1^n|-|a_1x_1^{n-1}+a_1x_1^{n-2}+\ldots+a_n|. \qquad (1)$$

Оскільки $|a+b| \leqslant |a|+|b|$, то $|a_1x_1^{n-1}+a_1x_1^{n-2}+\ldots+a_n| \leqslant$ $\leqslant |a_1|\,|x_1|^{n-1}+|a_2|\,|x_1|^{n-2}+\ldots+|a_n| \leqslant 1985\cdot(|x_1|^{n-1}+$

$$+|x_1|^{n-2}+\ldots+1)=1985\cdot\frac{|x_1|^n-1}{|x_1|-1}<1985\frac{|x_1|^n}{|x_1|-1}>0.$$

Використавши (1), одержимо: $0 \geqslant |x_1|^n-$

$$-\frac{1985|x_1|^n}{|x_1|-1}=\frac{|x_1|^n(|x_1|-1986)}{|x_1|-1}.$$ Оскільки $\frac{1985\cdot|x_1|^n}{|x_1|-1}>0$,

то $|x_1|-1>0$, а отже, $|x_1|-1986<0$, тому $|x_1|<1986$.

17. Нехай A_i — числа, про які говориться в задачі. Оскільки вони утворюються з чисел 1, 2, 3, ..., 1985, 1986, то для кожного з них сума цифр буде однією і тією ж. Якщо $A_i = m_1 m_2 ... m_n$, де m_i — взаємно прості ($i = 1,2,...$), то для випадку, коли $A_i = B_i^2$ кожен із співмножників має бути парним степенем натурального числа, тобто $m_1 = p_1^{2k_1}$, $m_2 = p_2^{2k_2}$, ... Якщо ж виявиться, що число A_i ділиться на просте число q, але не ділиться на число q^2, то воно не буде квадратом натурального числа.

Підрахуємо суму цифр одного з чисел A_i, наприклад, числа $A_{1986} = 1\ 2\ 3\ 4\ ...\ 1985\ 1986$.

1) Знайдемо суму цифр чисел в межах від 1 до 90. Для зручності подальших підрахунків запишемо всі ці числа у вигляді такої таблиці:

00	10	20	...	90
01	11	21	...	91
02	12	22	...	92
...	...	...	...	...
09	19	29	...	99

$$45+10+45+20+45+...+90+45=\frac{45+135}{2}\cdot 10=900.$$

2) Для чисел від 100 до 199 сума цифр в других і третіх стовпцях дорівнюватиме 900, а сума цифр, які стоять в перших стовпцях дорівнює 100 (тобто сума цифр дорівнюватиме $900+100$). Для кожної наступної сотні сума цифр збільшуються на 100 і для чисел 900–999 сума цифр дорівнюватиме $900+9\cdot 100=1800$. Для чисел від 1 до 999 сума цифр дорівнює $\frac{900+1800}{2}\cdot 10=13500$.

3) Для чисел від 1000 до 1999 сума цифр, які стоять в 2-х, 3-х і 4-х стовпцях, буде дорівнювати 1350, а сума цифр, які стоять в 1-х стовпцях, дорівнюватиме 1000, тому сума цифр всіх чисел від 1 до 1999 буде дорівнювати $13500\cdot 2+1000=28000$. Якщо від цього числа відняти суму цифр чисел від 1987 до 1999 (вона дорівнює 313), то одержимо 27687. $2+7+6+8+7=30$. Це число ділиться на 3, але не ділиться на 9, тому жодне з чисел A_i не є квадратом цілого числа.

18. $y^2=2x$ (1), $2y=x^2-10x+12$ (2), $2y=(x^2-12x+36)+2x-24$, $(x-6)^2+2x-2y-24=0$. Використавши (1), одержимо: $(x-6)^2+(y^2-2y+1)-25=0$, або $(x-6)^2+(y-1)^2=5^2$ (3). Останнє рівняння одержалось як наслідок із системи (1), (2) без піднесень до степеня і без добування коренів, тому кожен розв'язок цієї системи буде розв'язком рівняння (3) (але не навпаки). Звідси випливає, що всі спільні точки даних парабол належать колу з центром в точці (6;1) і радіусом $r=5$.

В тому, що дані параболи перетинаються в 4-х точках, найпростіше переконатись, побудувавши їх графіки.

19. $(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)=1-\frac{1}{2}\sin 2x$,

$$(\sin x+\cos x)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)=1-\frac{1}{2}\sin 2x,$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)(\sin x+\cos x-1)=0, 1-\frac{1}{2}\sin 2x\neq 0, \text{ тому}$$

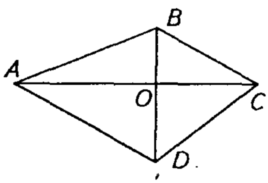
$$\sin x+\cos x=1,$$

$$\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1,\ 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1,$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1,\ x+\frac{\pi}{4}=(-1)^k\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

При $k=2n$, $x=2\pi n$, при $k=2n+1$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$.

20. 1) Нехай $a>0$, $b>0$, $c>0$ і $d>0$. Розглянемо чотирикутник із перпендикулярними діагоналями AC і BD і точкою $O=AC\cap BD$. Точки A, B, C і D виберемо так, щоб $AO=a$, $BO=b$, $CO=c$ і $DO=d$.



Тоді $AB=\sqrt{a^2+b^2}$, $BC=\sqrt{b^2+c^2}$, $CD=\sqrt{c^2+d^2}$, $AD=\sqrt{a^2+d^2}$.

$S_{\Delta ABC}\leq\frac{1}{2}AB\cdot BC$; $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}(a+c)b$; $\frac{1}{2}(a+c)b\leq$

$\leq\frac{1}{2}AB\cdot BC\Rightarrow(a+c)b\leq\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}$.

Аналогічно з $\triangle ACD$: $(a+c)d\leq\sqrt{a^2+d^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$.

2) Якщо хоч одне із чисел a, b, c і d від'ємне, то нерівність може тільки підсилитись.

21. Оскільки число 1987 непарне, то існує клітинка, центром якої є центр симетрії даної таблиці. Для кожної іншої клітинки існує клітинка, симетрична з нею відносно центра таблиці. Якщо перший гравець хоче домогтись вказаного в задачі результату, то своїм першим ходом він має записати в центральну клітинку число (-1), а після кожного ходу другого гравця йому слід записувати число протилежного знаку в клітинку, симетричну відносно центра таблиці із клітинкою "супротивника". Якщо, наприклад, другий гравець своїм першим ходом записує число $(+1)$ в клітинку 1-го стовпця, то перший гравець записує число (-1) в симетричну з нею клітинку 1987-го стовпця. Після цього обміну ходів в кожному із згаданих стовпців залишиться по 1986 клітинок, тому в першому стовпцеві буде $993+1$ число $(+1)$ і 993 числа (-1), тобто добуток чисел буде дорівнюватиме -1. В 1987-у стовпцеві буде 994 клітинки з числами (-1) і 993 — з числами $(+1)$. Добуток всіх чисел дорівнює $(+1)$. Таким чином, в тому рядкові чи в тій діагоналі, де перший запис робить 1-й гравець, добуток чисел дорівнює $(+1)$. Сюди відносяться, перш за все, обидві діагоналі, той рядок і той стовпець, які містять центральну клітинку (всього 4). В останніх рядках і стовпцях буде 1986 з додатними добутками і 1986 — з від'ємними. $1986+4=1990$.

22. Оскільки рівняння є однорідним, то коли (kx, ky, kz) є його розв'язком, то (x, y, z) теж є розв'язком цього рівняння. Отже, коли дане рівняння має ненульовий розв'язок, то існує і такий розв'язок, що числа x, y і z не мають спільного множника. Ліва частина рівняння ділиться на 2, тому $z=2k$ і рівняння набирає виду $6x^3+12y^3+1986\cdot 2\cdot xyk=8\cdot 1987\cdot k^3$ або $3x^3+6y^3+$ $+1986xyk=1987\cdot 4k^3$. Звідси випливає, що $x=2l$, тому $24l^3+6y^3+1986\cdot 2lyk=1987\cdot 4k^3$, $12l^3+3y^2+1986lyk=$ $=1987\cdot 2k^3 \Rightarrow y=2m \Rightarrow 12l^3+24m^3+1986\cdot 2\cdot lmk=$ $=1987\cdot 2k^3$, $6l^3+12m^3+1986klm=1987\cdot k^3$.

Таким чином, $x=2l$, $z=2k$, $y=2m$, тобто x, y і z мають спільний множник, що суперечить встановленому вище. Рівняння має *лише нульовий розвязок.*

23. $(tg\ 9^\circ + tg\ 81^\circ) - (tg\ 27^\circ + tg\ 63^\circ) = \dfrac{tg^2 9^\circ + 1}{tg\ 9^\circ} - \dfrac{tg^2 27^\circ + 1}{tg\ 27^\circ} =$

$$= \frac{1}{\cos^2 9^\circ \ \dfrac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ}} - \frac{1}{\cos^2 27^\circ \ \dfrac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ}} =$$

$$= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ} = 4.$$

24. $-2 \leqslant 2\sin 3x \leqslant 2$, тому $2\sin 3x - 4 \leqslant 0$, а отже

$$2x - 3x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 1.$$

25. а) $\sin x \geq 0$; $\dfrac{4 \sin x}{(x-3)^2} + \sin x = 0$, $\sin x\left(\dfrac{4}{(x-3)^2} + 1\right) = 0$,

$$\frac{4}{(x-3)^2} + 1 \neq 0 \ \Rightarrow \ \sin x = 0 \ \Rightarrow \ x = k\pi \ (k \in Z).$$

б) $\sin x < 0$; $\dfrac{4 \sin x}{(x-3)^2} - \sin x = 0$, $\sin x\left(\dfrac{4}{(x-3)^2} - 1\right) = 0.$

Якщо $\dfrac{4}{(x-3)^2} - 1 = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, ($x_1 = 1$ радіан, $x_2 = 5$ радіан). $\sin x_1 = \sin 1 > 0$, що суперечить вказаному вище, $\sin x_2 = \sin 5 < 0$, отже $x_2 = 5$ є розв'язком рівняння. Відповідь: $\{5;\ k\pi, k \in Z\}$.

26. $\dfrac{a^2}{b^2+c^2} + \dfrac{b^2}{c^2+a^2} + \dfrac{c^2}{a^2+b^2} = \left(1 + \dfrac{a^2}{b^2+c^2}\right) +$

$$+\left(1 + \frac{b^2}{c^2+a^2}\right) + \left(1 + \frac{c^2}{a^2+b^2}\right) - 3 = \left(a^2+b^2+c^2\right) \times$$

$$\times\left(\frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} + \frac{1}{b^2+a^2}\right) - 3 = \frac{1}{2}\left(\left(a^2+b^2\right) +\right.$$

$$\left. + \left(b^2+c^2\right) + \left(c^2+a^2\right)\right)\left(\frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} + \frac{1}{b^2+a^2}\right) -$$

$$-3 = \frac{9}{2} \cdot \frac{\left(a^2+b^2\right) + \left(b^2+c^2\right) + \left(c^2+a^2\right)}{3} \times$$

$$\times \frac{\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{b^2+a^2}}{3}-3 \geq$$

$$\geq \frac{9}{2}\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(b^2+c^2\right)\cdot\left(c^2+a^2\right)}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{1}{b^2+c^2}\cdot\frac{1}{c^2+a^2}\cdot\frac{1}{b^2+a^2}}-3=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.$$

27. Оскільки для будь–яких невідємних чисел a і b $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, то $1+x_1 \geq 2\sqrt{x_1}$, $1+x_2 \geq 2\sqrt{x_2}$, ..., $1+x_{1989} \geqslant 2\sqrt{x_{1989}}$. Помноживши почленно ліві і праві частини одержаних нерівностей і прийнявши до уваги, що вони додатні, одержимо:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{1989}) \geqslant 2^{1989}\sqrt{x_1\cdot x_2\ldots x_{1989}} = 2^{1989}.$$

28. **1-й спосіб:**

$$\underbrace{111\ldots1}_{k}\,\underbrace{555\ldots5}_{k-1}\,6=\underbrace{111\ldots1}_{k}\,\underbrace{555\ldots5}_{k}+1=\frac{\overbrace{999\ldots9}^{k}}{9}\cdot10^k+$$

$$+5\cdot\frac{\overbrace{999\ldots9}^{k}}{9}+1=\frac{10^k-1}{9}\cdot10^k+5\cdot\frac{10^k-1}{9}+1=$$

$$=\frac{10^{2k}+4\cdot10^k+4}{9}=\left(\frac{10^k+2}{3}\right)^2.$$

2-й спосіб:

$$\underbrace{111\ldots1}_{k}\,\underbrace{555\ldots5}_{k}+1=10^{2k-1}+10^{2k-2}+\ldots+10^k+5\cdot\underbrace{111\ldots1}_{k}+1=$$

$$=10^{2k-1}+\ldots+10^k+5\left(10^{k-1}+10^{k-2}+\ldots+10^1+10^0\right)+1.$$

Маємо суми членів двох геометричних прогресій із знаменником $q=10$.

$$10^{2k-1}+10^{2k-2}+\ldots+10^k=\frac{10^{2k-1}\cdot10-10^k}{10-1}=\frac{10^{2k}-10^k}{9};$$

$$10^{k-1}+10^{k-2}+\ldots+10^1+10^0=\frac{10^k-1}{9};$$

$$\frac{10^{2k}-10^k}{9}+5\cdot\frac{10^k-1}{9}+1=\left(\frac{10^k+2}{3}\right)^2.$$

29. Нехай l – шукане число, а $13m_1+75n_1$, $13m_2+75n_2$ і $13m_3+75n_3$ — шукані подання. Із умови задачі випливає, що $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq m_1$, $n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq n_1$.

Нехай, для певності, $m_1<m_2<m_3$.

Із рівності $13m_1+75n_1=13m_2+75n_2$ маємо, що $13(m_2-m_1)=$ $=75(n_1-n_2)$. Оскільки $m_2-m_1>0$, то $n_1>n_2$. З того, що числа 13 і 75 взаємно прості, випливає, що $m_2-m_1=75k_1$, причому $k_1 \geqslant 1$. Із співвідношення $m_2=m_1+75k_1$ випливає, що $m_2 \geqslant 76$ $(m_1 \geqslant 1)$.

Із рівності $13(m_3-m_2)=75(n_2-n_3)$ випливає, що $n_2>n_3$ і $m_3-m_2=75k_2$, або $m_3=m_2+75k_2$. Оскільки $k_2 \geqslant 1$, то $m_3=m_2+75k_2 \geqslant 151$.

Таким чином, одержуємо: $m_1 \geqslant 1$, $m_2 \geqslant 76$, $m_3 \geqslant 151$.

Оскільки числа n_1-n_2, n_2-n_3 і n_1-n_3 додатні і діляться на 13, то аналогічно до попереднього одержимо: $n_1 \geqslant 27$, $n_2 \geqslant 14$, $n_3 \geqslant 1$.

За умовою задачі число l має бути найменшим, тому 1) $m_1=1$, $n_1=27$; 2) $m_2=76$, $n_2=14$ і 3) $m_3=151$, $n_3=1$.

Шуканим буде число 2038.

30. Для доведення твердження досить показати, що існує хоча б одне число, яке на певному кроці повторення операції A стане спільним дільником чисельника і знаменника одержаного при цьому дробу.

1) Встановимо, чи може цим дільником бути число 2. Для цього використаємо співвідношення $m=2m_1+1$, $n=2n_1+1$, де $m_1=0, 1, 2, \ldots$, $n_1=0, 1, 2, \ldots$ і m_1, n_1 одночасно не дорівнюють нулеві.

$$\frac{m}{n}=\frac{2m_1+1}{2n_1+1}\xrightarrow{A}\frac{4m_1^2+4m_1+3}{2n_1+2}=\frac{4m_2+3}{2n_2}\xrightarrow{A}$$

$$\xrightarrow{A}\frac{16m_2^2+24m_2+11}{2n_2+1}=\frac{8m_3+11}{2n_2+1}\xrightarrow{A}$$

$$\xrightarrow{A}\frac{64m_3^2+16\cdot 11m_3+123}{2n_2+2}=\frac{16m_4+123}{2n_3} \text{ і т.д.}$$

Оскільки чисельник весь час залишається непарним, то число 2 не може бути спільним дільником чисельника і знаменника.

2) Перевіримо число 3: $m=3m_1+1$ або $m=3n_1+2$; $n=3n_1+1$ або $n=3n_1+2$ (n_1, $m_1=0,1,2,\ldots$, m_1 і n_1 одночасно не дорівнюють 0).

а) $$\frac{m}{n}=\frac{3m_1+1}{3n_1+1}\xrightarrow{A}\frac{9m_1^2+6m_1+3}{3n_1+2}=\frac{3m_2}{3n_1+2}\xrightarrow{A}$$

$$\xrightarrow{A}\frac{9m_2^2+2}{3n_1+3}=\frac{9m_2^2+2}{3n_2}\xrightarrow{A}$$

$$\xrightarrow{A}\frac{81m_2^4+18\cdot 2m_2^2+6}{3n_2+1}=\frac{3m_3}{3n_2+1}\xrightarrow{A}$$

$$\xrightarrow{A}\frac{9m_3^2+2}{3n_2+2}\xrightarrow{A}\frac{81m_3^4+18\cdot 2m_3^2+6}{3n_2+3}=\frac{3m_4}{3n_3};$$

б) $$\frac{m}{n}=\frac{3m_1+1}{3n_1+2}\xrightarrow{A}\frac{9m_1^2+6m_1+3}{3n_1+3}=\frac{3m_2}{3n_2};$$

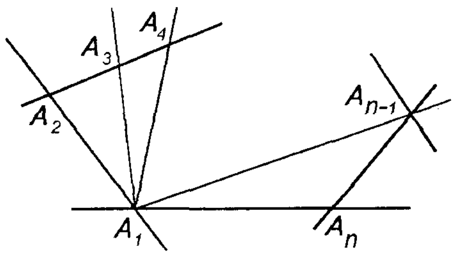
в) $$\frac{m}{n}=\frac{3m_1+2}{3n_1+1}\xrightarrow{A}\frac{9m_1^2+12m_1+6}{3n_1+2}=\frac{3m_2}{3n_1+2}$$

і приходимо до випадку а) (дивись 1-й крок);

г) $$\frac{m}{n}=\frac{3m_1+2}{3n_1+2}\xrightarrow{A}\frac{9m_1^2+12m_1+6}{3n_1+3}=\frac{3m_2}{3n_2}.$$

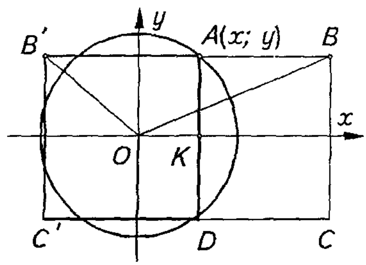
Таким чином, одержуємо скоротний дріб.

31. Нехай A_1, A_2, ..., A_n — дані точки. Виходячи із означення опуклого многокутника, потрібно показати, що відносно кожної з прямих A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 всі останні вершини лежать по один бік від неї.



Оскільки число точок скінченне, то існують такі дві з них (наприклад, A_1 і A_n), що всі інші належать одній півплощині з межею A_1A_n. З умови задачі випливає також, що ніякі 3 точки з числа даних не належать одній прямій (чому?). В зв'язку з цим пряма A_1A_n не містить жодної іншої даної точки. Це ж має місце і для кожного променя A_1A_2, A_1A_3, ..., A_1A_{n-1}, а отже всі ці промені різні і утворюють різні кути з променем A_1A_n. Нехай $\angle A_nA_1A_2 > \angle A_nA_1A_3 > \ldots > \angle A_nA_1A_{n-1}$. За аксіомою про відкладання кутів в одній півплощині промінь A_1A_{n-1} *проходить між сторонами* кута $A_nA_1A_{n-2}$, промінь A_1A_{n-2} — між сторонами кута $A_nA_1A_{n-3}$ і т.д.; нарешті, промінь A_1A_3 проходить між сторонами кута $A_nA_1A_2$. Звідси випливає, що всі точки A_3, A_4, ..., A_{n-1}, A_n лежать по один бік від прямої A_1A_2. Це ж саме має місце для кожної прямої A_2A_3, A_3A_4, ..., A_{n-1}, A_n. Дійсно, якщо б, наприклад, точки A_1 і A_4 належали різним півплощинам з межею A_2A_3, то чотирикутник $A_1A_2A_3A_4$ не був би опуклим, що суперечить умові задачі.

32. Нехай $ABCD$ — один з даних квадратів. Якщо $AB'C'D$ — теж квадрат, то $OB > OB'$ (доведіть!). Виберемо систему координат так, як вказано на малюнку. Тоді, якщо $A(x;\ y)$, то $B(x+2y;\ y)$ і



$OB = \sqrt{x^2 + 5y^2 + 4xy}.$

Оскільки $y^2 = 1 - x^2$ (дивись $\triangle OAK$), то

$$OB = 5 + 4x\sqrt{1 - x^2} - 4x^2 = (d(x))^2.$$

$$(d^2(x))' = \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}\left(1 - 2x^2 - 2x\sqrt{1 - x^2}\right) = 0.$$

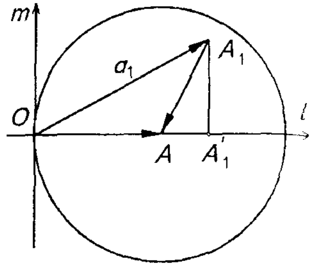
$$1 - 2x^2 = 2x\sqrt{1 - x^2};\ (1)$$

$8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$; при $t = x^2$ одержуємо $8t^2 - 8t + 1 = 0$, звідки

$t_1 = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}$; $t_2 = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$. Рівняння $8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$ одержалось з рівняння (1) шляхом піднесення останнього до квадрату, тому міг появитися сторонній корінь. Дійсно (перевірте !) корінь t_2 не задовольняє рівняння (1). Отже,

$$x_1 = \sqrt{t_1} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2};\quad d = \sqrt{5 + 4x\sqrt{1 - x^2} - 4x^2} = 1 + \sqrt{2}.$$

33. **Означення.** Нехай задано вісь, вектор $\overline{AB}$ і проекції A_1 і B_1 точок A і B на цю вісь. Якщо вектор $\overline{A_1B_1}$ співнапрямлений з віссю, то довжину відрізка A_1B_1 називають проекцією вектора $\overline{AB}$ на цю вісь (це число



інколи називають алгебраїчною проекцією вектора на вісь, а вектор $\overline{A_1B_1}$ — геометричною проекцією). Якщо ж $\overline{A_1B_1}$ і вісь мають протилежні напрямки, то проекцією називають число $-A_1B_1$.

Віднесемо всі дані вектори до спільного початку 0. Нехай $\overline{OA_1} = \overline{a_1}$, $\overline{OA_2} = \overline{a_2}$, ..., $\overline{OA_{10}} = \overline{a_{10}}$, і

$\overline{a_1} + \overline{a_2} + \ldots + \overline{a_{10}} = \overline{OA}$. Покажемо, що вісь l напрямку вектора OA задовольняє умові задачі. За правилом трикутника додавання векторів

$$\overline{A_1A} = \overline{a_2} + \overline{a_3} + \ldots + \overline{a_{10}}, \quad \overline{A_2A} = \overline{a_1} + \overline{a_3} + \overline{a_4} + \ldots + \overline{a_{10}},$$

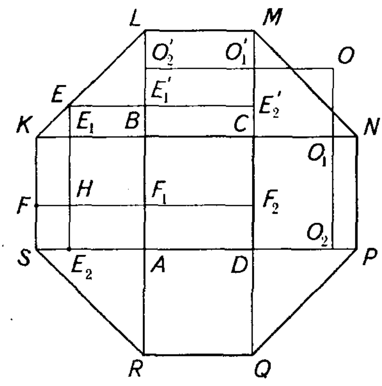
$$\overline{A_3A} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_4} + \overline{a_5} + \ldots + \overline{a_{10}}, \ldots,$$

$$\overline{A_{10}A} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3} + \ldots + \overline{a_9}.$$

За умовою задачі $|\overline{A_1A}| < |\overline{OA}|$, $|\overline{A_2A}| < |\overline{OA}|, \ldots, |\overline{A_{10}A}| < |\overline{OA}|$ тобто $|\overline{AA_i}| < |\overline{OA}|$, де $i = 1, 2, 3, \ldots, 10$. Звідси випливає, що всі точки A_i є внутрішніми точками круга $(A, |\overline{OA}|)$ і тому належать відкритій півплощині, яка визначаються межею m і точкою A (коли говорять "проекція", то мають на увазі ортогональну, тому коли m — проектуюча для даного випадку пряма, то $m \perp OA$).

В зв'язку з цим всі вектори $\overline{OA_1^1}, \overline{OA_2^1}, \ldots, \overline{OA_{10}^1}$, які є геометричними проекціями даних, співнапрямлені з віссю l, а отже всі проекції даних векторів є додатними числами ($A_iA_i' \parallel m$, тому точка A_i' належить променеві OA). Для того, щоб проекція вектора $\overline{OA_k}$ була від'ємною, потрібно, щоб точка A_k' ($k = 1, 2, \ldots, 10$) належала півплощині, доповняльній до згаданої вище, але тоді $|\overline{A_kA}| > |\overline{OA}|$, що суперечить умові задачі.

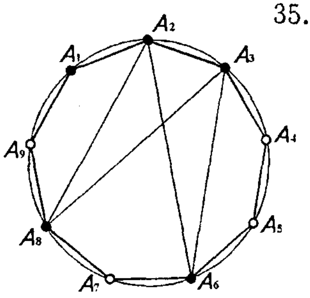
34. Нехай $ABCD$ — даний квадрат. Розглянемо такі точки K, L, M, N, P, Q, R і S, для яких $AS=AR=BK=BL=CM=$ $=CN=DP=DQ=1$, і многокутник $KLMNPQRS$. Покажемо, що він є шуканою множиною. Для цього досить показати, що кожна точка цього многокутника має дану властивість, а довільна точка, яка йому не належить, цієї властивості не має.



Для точки F маємо: $FF_1+FF_2+FK+FS=4$

Для точки E одержимо: $EE_1+EE_2+EE_1'+EE_2'=(KE_1+E_1B)+$ $+(EE_1'+E_1E_2')=(KE_1+E_1B)+(KE_1+EE_1')+E_1E_2+E_1'E_2'=4.$

Для внутрішньої точки H згаданого вище плоского многокутника $HE_1+HE_2+F_1H+HF_2<4$, а для зовнішньої точки O сума відстаней від даних прямих більша від 4.



35. Задача ускладнюється, коли індекси різнокольорових вершин відрізняються мінімально.

Нехай 5 вершин пофарбовано в чорний колір.

1) Вершини трикутників мають один колір.

а) Якщо всі чорні вершини розмістити підряд, або підряд розмістити хоча б 4 з них, то такі трикутники існують. Дійсно, якщо це вершини A_1, A_2, A_3 і A_4, то $\triangle A_1A_2A_3=\triangle A_2A_3A_4$;

б) Три вершини розміщені підряд (див. мал.). $\triangle A_8A_2A_3=\triangle A_6A_3A_2$. Тут можливі ще такі варіанти: в першому випадку

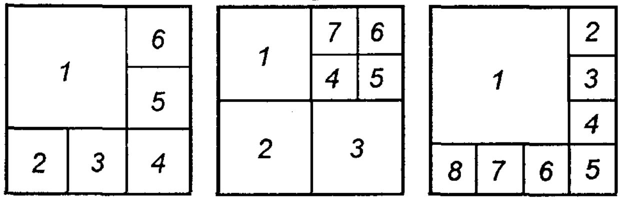
$\triangle A_2A_3A_5=\triangle A_6A_5A_3$, а в другому — $\triangle A_1A_5A_7=\triangle A_2A_7A_3$;

в) Дві вершини розміщені підряд: $\triangle A_8A_1A_2=\triangle A_4A_1A_2$; дві пари вершин розміщені підряд: $\triangle A_4A_5A_7=\triangle A_1A_2A_4$ (розгляньте інші варіанти для цього випадку);

г) Немає двох суміжних чорних вершин: таке розміщення неможливе, оскільки A_1 і A_9 суміжні вершини.

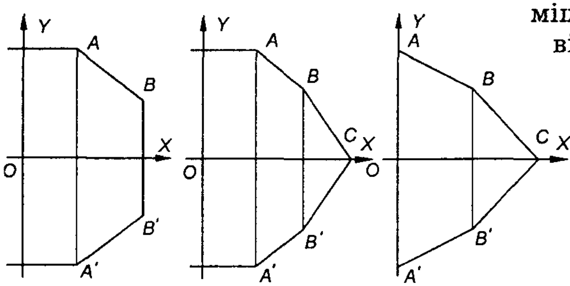
2) Всі вершини одного трикутника чорні, другого — білі. Покажіть, що в кожному із випадків а), б) і в) такі трикутники існують.

36. Всі натуральні числа $m>2$ можна розбити на три такі класи: $3n$, $3n+1$, $3n+2$. Оскільки сторони квадратів, які одержуються при розбитті даного, мають бути паралельними до його сторін, то розбиття на 2,3 і 5 квадратів неможливе (переконайтесь в цьому!). Якщо $m=n^2$, то розбиття можливі (чому?). Розіб'ємо даний квадрат на 6, 7 і 8 квадратів:



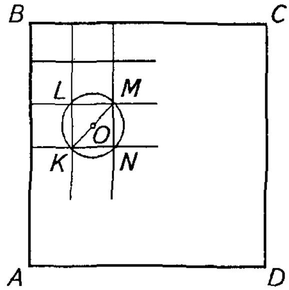
В кожному класі наступне число більше від попереднього на 3. Щоб встановити, до якого класу відноситься певне конкретне число, досить поділити його на 3 і подивитись на остачу (вона може дорівнювати 0.1 або 2). Число $m=9=3\cdot3$. Розіб'ємо один із квадратів першого розбиття на 4 квадрати і одержимо $m=6-1+4=6+3=9$. Оскільки $10=3\cdot3+1$, то використаємо друге розбиття і один з його квадратів теж розіб'ємо на 4 квадрати. Після цього одержимо $m=7-1+4=10$ квадратів. $11=9+2$, тому беремо третє розбиття і одержуємо $8-1+4=11$ квадратів. Продовжуючи аналогічно, одержимо всі останні розбиття.

37. Розглянемо ту частину даного многокутника, яка розміщена по один бік відносно однієї з координатних осей, наприклад, праворуч від осі ординат. Можливі такі випадки: (див. мал.).

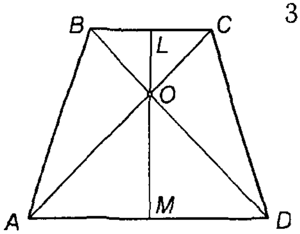


В кожному з них прямими типу AA' даний многокутник розбивається на многокутники (до їх складу можуть входити тільки прямокутник, трапеція або трикутник), площа кожного з яких буде цілим числом. Дійсно, для прямокутника, довжини його сторін будуть цілими числами, для тралеції цю властивість матимуть її основи і висота і т.д.

38. Нехай $ABCD$ — даний квадрат. Розіб'ємо його на 25 рівних квадратів. Тоді існуватиме хоч один квадрат, якому належать 3-и точки. Нехай це буде $KLMN$. Його діагональ $KM = \frac{1}{5}AC = \frac{\sqrt{2}}{5} \approx \frac{1{,}414}{5} = 0{,}2829$ (з надлишком). Оскільки $\frac{2}{7} \approx 0{,}28571$, то кругові,



центром якого є середина O відрізка KM, належать всі точки квадрата $KLMN$, а отже і згадані вище 3-и точки.



39. Нехай $ABCD$ — дана трапеція, $AD=b=10$ см, $BC=a=8$ см, $AC\triangle BD$ і $AC\cap BD=0$.

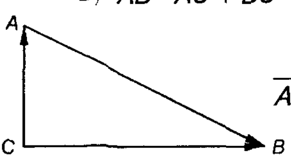
За відомою задачею $\angle BAD=\angle CDA$, звідки зразу випливає, що $AO=OD$ і $BO=OC$ (покажіть це). Якщо $OM\triangle AD$ і $OL\triangle BC$, то $K\in OM$ (чому?). Оскільки $\angle AOD=\angle BOC=90^\circ$, то $OM=MD=5$ (см) і $OL=BL=4$ (см) $\Rightarrow LM=h=9$ (см).

$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2}h = 81 \text{ (см}^2\text{)}.$$

40. 1) $\angle ACB = 90^\circ$, $\overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA} = \overline{CB} + \overline{AC}$,

$\overline{AB}\cdot\overline{AB} = \overline{AB}\cdot\overline{CB} + \overline{AB}\cdot\overline{AC} + \overline{CA}\cdot\overline{CB}$, бо $\overline{CA}\cdot\overline{CB} = 0$.

2) $\overline{AB}\cdot\overline{AC} + \overline{BC}\cdot\overline{BA} + \overline{CA}\cdot\overline{CB} = \overline{AB}\cdot\overline{AB}$.



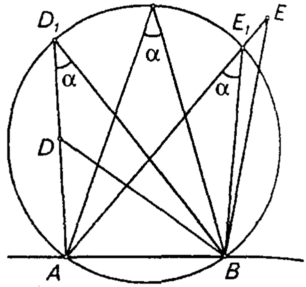
Покажемо, що $\angle ACB=90^\circ$.

$\overline{AB}\left(\overline{AC} - \overline{AB}\right) + \overline{BC}\left(\overline{BA} + \overline{AC}\right) = 0$,

$\overline{AB}\cdot\overline{BC} + \overline{BC}\cdot\overline{BC} = 0$, $\overline{BC}\left(\overline{AB} + \overline{BC}\right) = 0$,

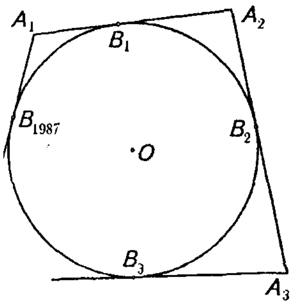
$\overline{BC}\cdot\overline{AC} = 0$, отже, $\angle ACB = 90^\circ$.

41. Оскільки число точок скінченне, то існують такі дві точки A і B, що всі інші дані точки належать одній півплощині з межею AB. З числа цих точок виберемо таку (назвемо її C), щоб кут ACB був найменшим (або одг;им із найменших, оскільки їх може бути декілька). Покажемо, що всі останні дані точки будуть належати кругові j, описаному навколо трикутника ABC (точніше, тій його частині, яка належить згаданій вище півплощині).



Якщо точка D така, що $\angle ADB > \angle ABC = a$, то (дивись малюнок) вона є внутрішньою точкою круга. Дійсно, якщо б вона належала колу, то $\angle ADB = a$, а якщо б вона не належала кругу, то $\angle ADB < a$ (як для точки E) і тому ця точка не належала б до числа даних.

42. 1-й спосіб. Нехай такий многокутник $A_1A_2A_3...A_{1987}$ існує і його сторони дотикаються до вписаного кола в точках $B_1, B_2, B_3, ..., B_{1987}$



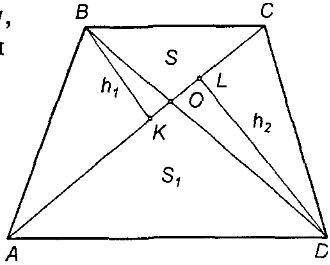
Якщо $A_1A_2 = 1$, $A_2A_3 = 2$, $A_3A_4 = 3$, ..., $A_{1987}A_1 = 1987$, то $A_1B_1 < 1$, $B_1A_2 < 1$. Оскільки $A_2B_1 = A_2B_2$ і $A_2A_3 = 2$, то $B_2A_3 > 1$. З того, що $A_3B_3 = A_3B_2$ і $A_3A_4 = 3$, випливає, що $B_3A_4 = A_2B_2 + 1 > 1$. Оскільки $A_4B_4 = A_4B_3$, а $A_4A_5 = A_4B_3 + 1$, то $B_4A_5 = A_3B_3 + 1 > 1$.

Продовжуючи ці міркування, приходимо до висновку, що $B_{1987}A_1 > 1$, і оскільки $A_1B_{1987} = A_1B_1 < 1$, то одержуємо протиріччя, звідки випливає, що згаданий в задачі многокутник не існує.

2-й спосіб. $A_1A_2 = A_1B_1 + B_1A_2$, $A_2A_3 = A_2B_2 + B_2A_3$, $A_3A_4 = A_3B_3 + B_3A_4$, $A_1A_2 + A_3A_4 > A_2A_3$, тобто довжина кожної сторони описаного многокутника менша від суми довжин суміжних з нею сторін. В нашому ж випадку $A_{1987}A_1 = 1987$, $A_{1986}A_{1987} = 1986$, $A_1A_2 = 1$, тобто $A_{1987}A_1 = A_{1986}A_{1987} + A_1A_2$, що суперечить попередньому.

43. Дивись задачу 39 цього параграфа.

44. Нехай $AD=b$, $BC=a$, $AC\cap BD=0$. Оскільки $\triangle AOD \backsim \triangle COB$, $S_{AOD}:S_{BOC}=b^2:a^2>1$, тобто $S_{AOD}>S_{BOC}$. З тієї ж подібності випливає, що $AO>OC$ і тому $S_{ABO}>S_{BCO}$. Легко бачити (доведіть!), що $S_{ABO}=S_{CDO}$. Якщо $BK\perp AC$, $DL\perp AC$, $BK=h_1$ і $DL=h_2$, то $h_1<h_2$ (чому?).



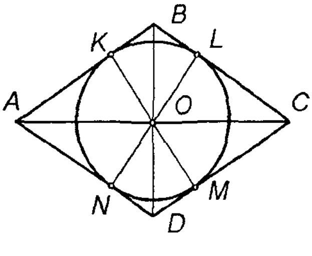
Оскільки $S_{AOD}=\frac{1}{2}AO\cdot h_2$, а $S_{ABO}=\frac{1}{2}AO\cdot h_1$, то $S_{AOD}>S_{AOB}$, тому $S_{AOD}>S_{AOB}>S_{BCO}=S$. Виразимо через a, b і S площі трикутників AOD і AOB. Нехай $S_{AOD}=S_1$.

Оскільки $S_1:S=b^2:a^2$, то $S_1=S\frac{b^2}{a^2}$; оскільки

$S:S_1=h_1{}^2:h_2{}^2$, то $h_1=h_2\sqrt{\frac{S}{S_1}}$, тому

$$S_{ABO}=\frac{1}{2}AO\cdot h_1=\left(\frac{1}{2}AO\cdot h_2\right)\sqrt{\frac{S}{S_1}}=\frac{b}{a}S.$$

45. Нехай $ABCD$ — даний ромб і $AC\cap BD=0$. Опустимо з точки O перпендикуляри OK, OL, OM і ON на прямі AB, BC, CD і DA. Легко бачити, що точки K, L, M і N належать сторонам ромба і $OK=OL=OM=ON$, тобто коло (O,OK) є вписаним в ромб. Позначимо $AO=a$, $\angle BAD=a$.



Оскільки $\angle BAO=\frac{\alpha}{2}$, то

$$OB=a\cdot tg\frac{\alpha}{2},\quad OK=a\cdot sin\frac{\alpha}{2},$$

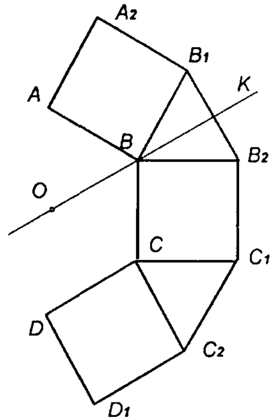
$$S_{ABCD}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot AO\cdot OB=2a^2\cdot tg\frac{\alpha}{2};$$

$$S_{\text{круга}}=\pi\cdot OK^2=\pi\cdot\alpha^2 sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$2a^2tg\frac{\alpha}{2}=2\pi\cdot a^2\cdot sin^2\frac{\alpha}{2}\Rightarrow sin\,\alpha=\frac{2}{\pi}\Rightarrow\alpha=arcsin\frac{2}{\pi}.$$

Отже, $\angle BAD=arcsin\frac{2}{\pi}$, $\angle ABC=\pi-arcsin\frac{2}{\pi}$.

46. Нехай $ABC...$ – даний n – кутник, $A_2B_1B_2C_1C_2...A_1$–вказаний в задачі правильний $2n$–кутник. За відомою формулою



$$\angle ABC = \frac{180°(n-2)}{n} = 180° - \frac{360°}{n} <$$

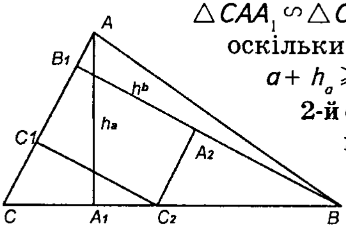
$<180°$. Розглянемо пряму OB, і таку її точку K, що B лежить між O і K. Легко бачити, що $\angle ABO = \angle OBC < 90°$. Оскільки кути OBA і ABK суміжні, то $\angle ABK > 90°$. З того, що $A_2B_1 \parallel AB$, випливає, що точки B_1 і K належать одній півплощині з межею OB і оскільки $\angle ABB_1 = 90°$, то промінь BB_1 проходить між сторонами кута ABK. Аналогічно доводимо, що промінь BB_2 проходить між сторонами кута CBK, а звідси випливає, що точки B_1 і B_2 лежать по різні боки від прямої OK і $\angle B_1BB_2 = \angle B_1BK + \angle KBB_2$. $\angle B_1BK = \angle ABK - \angle ABB_1 = (180° - \angle ABO) -$

$$-90° = 90° - \left(90° - \frac{180°}{n}\right) = \angle B_2BK, \text{ отже, } \angle B_1BB_2 = \frac{360°}{n}.$$

За умовою задачі $B_1B_2 = B_1A_2 = BB_1 = BB_2$, тому $\angle B_1BB_2 = 60°$,

отже $\dfrac{360°}{n} = 60°$ і $n = 6$.

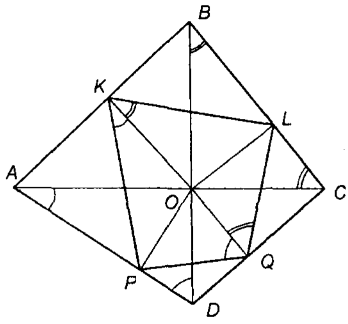
47. **1-й спосіб.** Нехай ABC — даний трикутник, $AA_1 = h_a$ і $BB_1 = h_b$; $h_a = b \sin \angle C$, $h_b = a \sin \angle C$, причому $h_a = b$ і $h_b = a$ тоді і тільки тоді, коли $\angle C = 90°$. Легко бачити, що $\triangle CAA_1 \backsim \triangle CBB_1$ і $h_a < h_b$. $h_a - h_b = (b-a)\sin \angle C$, і оскільки $0 < \sin < C \leqslant 1$, то $h_a - h_b \geqslant b - a$, звідки $a + h_a \geqslant b + h_b$.



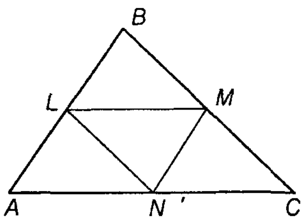
2-й спосіб. Відкладемо на промeневі BB_1 відрізок BA_2 довжиною h_a і через точку A_2 проведемо $A_2C_2 \parallel AC$. Легко бачити, що $\triangle BA_2C_2 = \triangle AA_1C$ і $BC_2 = AC = b$. Якщо $C_2C_1 \parallel BB_1$, то $C_1C_2 = B_1A_2 = h_b - h_a$.

Оскільки $CC_2 = CB - C_2B = a - b$, то із прямокутного трикутника CC_1C_2 маємо: $a - b > h_b - h_a$, тобто $a + h_a > b + h_b$. Якщо $\angle C = 90°$, то $b = h_a$ і $a = h_b$, а отже, $a + h_a = b + h_b$.

48. Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник, $AC \cap BD = 0$ і K, L, P і Q — ортогональні проекції точки O має прямі AB, BC, CD, і AC. Оскільки трикутники AOB, BOC, COD і DOA прямокутні, то точки K, L, P і Q належать відрізкам AB, BC, CD і DA. Навколо кожного із чотирикутників $OKBL$, $OLCQ$, $OQDP$ і $OPAK$ можна описати коло з діаметрами OB, OC, OD і OA (чому?). В зв'язку з цим $\angle OKP = \angle OAP$, $\angle OQP = \angle ODP$, $\angle OKL = \angle OBL$ і $\angle OQL = \angle OCL$. Додавши почленно ліві і праві частини останніх рівностей, одержимо: $(\angle OKP + \angle OKL) + (\angle OQP + \angle OQL) = (\angle OAP + \angle ODP) + (\angle OBL + \angle OCL)$. За умовою задачі $\angle OAP + \angle ODP = \angle OBL + \angle OCL = 90°$, а $\angle OKP + \angle OKL = \angle PKL$ і $\angle OQP + \angle OQL = \angle PQL$, Отже, $\angle PKL + \angle PQL = 180°$. Звідси і випливає, що навколо чотирикутника $KLQP$ можна описати коло. Доведіть останнє твердження.



49. Нехай $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Позначимо $BL = x \cdot c$, тоді $AL = (1-x)c$. За теоремою про пропорційні відрізки маємо: $BM = x \cdot a$, $MC = (1-x)a$, $AN = x \cdot b$ і $CN = (1-x)b$.



$$S_{\Delta MLN} = \frac{1}{2} S_{ALMN} = \frac{1}{2} AL \cdot AN \cdot \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(1-x)\, cxb \sin\alpha =$$

$$= \left(\frac{1}{2} bc \sin\alpha\right) x(1-x) = S_{\Delta ABC} \cdot x(1-x).$$

Площа трикутника LMN буде найбільшою при максимальному значенні числа $x(x-1)$.

Оскільки $x + (1-x) = 1 = const$, то це матиме місце, коли $x = 1 - x$, тобто коли $x = \frac{1}{2}$.

При цьому $AL = LB$, $BM = MC$ і $CN = NA$, а $S_{\Delta LMN} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$.

50. **1-й спосіб.** Застосувавши формули

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),\quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$

отримаємо рівняння $\cos^3 2x + 2\cos^2 2x + 4\cos 2x = 0$,
або $\cos 2x(\cos^2 2x + 2\cos 2x + 4) = 0$.
Оскільки $\cos^2 2x + 2\cos 2x + 4 = (\cos 2x + 1)^2 + 3 \neq 0$, то маємо рівняння $\cos 2x = 0$, звідки $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in Z$.

2-й спосіб. Застосувавши формули $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, прийдемо до рівняння
$8\cos^6 x - 4\cos^4 x + 6\cos^2 x - 3 = 0$.
Позначимо $y = \cos^2 x$. Тоді рівняння перепишеться так:
$8y^3 - 4y^2 + 6y - 3 = 0$, $4y^2(2y-1) + 3(2y-1) = 0$, $(2y-1)(4y^2+3) = 0$.
Оскільки $4y^2 + 3 \neq 0$, то маємо рівняння $2y - 1 = 0$, звідки $y = \frac{1}{2}$. Повертаючись до змінної x, будемо мати

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = 0,$$ звідки

$$x = \frac{\pi}{4}(2n+1),\quad n \in Z.$$

51. Дискримінант квадратного тричлена
$D = (a+1)^2 - 4(a+1) = a^2 - 2a - 3$.
Розглянемо можливі випадки:
а) $D<0$, тобто $-1<a<3$. Розв'язком нерівності є всі дійсні числа, зокрема і такі, що $|x|<1$;
б) $D=0$, тобто $a=-1$ або $a=3$. У випадку $a=-1$ розв'язок нерівності $(-\infty;0)\cup(0;+\infty) \not\ni [-1;1]$, тобто $a=-1$ умову задачі не задовольняє. При $a=3$ розв'язок нерівності $(-\infty;2)\cup(2;+\infty) \ni [-1;1]$, тобто $a=3$ умову задачі задовольняє;
в) $D>0$, тобто $a<-1$ або $a>3$. У випадку $a<-1$ розв'язок нерівності

$$\left(-\infty; \frac{-a-1-\sqrt{D}}{2}\right) \cup \left(\frac{-a-1+\sqrt{D}}{2}; +\infty\right) \not\ni [-1;1].$$

При $a>3$ розв'язок нерівності

$$\left(-\infty; \frac{a+1-\sqrt{D}}{2}\right) \cup \left(\frac{a+1+\sqrt{D}}{2}; +\infty\right) \ni [-1;1].$$

Таким чином, шуканими є значення параметра $a>-1$.

52. Якщо $a=0$, то рівняння набуває вигляду $bx+c=0$. Це рівняння не має дійсних коренів, якщо $b=0$, $c\neq 0$. З умови $a+b+c<0$ дістанемо, що $c<0$.
При $a\neq 0$ маємо квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$. За умовою задачі дискримінант цього рівняння $b^2-4ac<0$. Припустимо, що $a>0$. Тоді маємо систему нерівностей

$$\begin{cases} a+b+c<0, \\ b^2-4ac<0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 4a^2+4ab+4ac<0, \\ b^2-4ac<0, \end{cases}$$

звідки $4a^2+4ab+b^2=(2a+b)^2<0$ що неможливо.
Отже, залишається єдина можливість $a<0$. З нерівності

$b^2-4ac<0$ випливає, що $ac>\dfrac{b^2}{4}\geq 0$ тобто $c<0$.

53. Нехай x, y, z — шукані числа. За умовою задачі можемо записати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x=(y-z)^2, \\ y=(x-z)^2, \\ z=(x-y)^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=(x-y)(2z-x-y), \\ y=(x-z)^2, \\ z=(x-y)^2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(1+x+y-2z)=0, \\ y=(x-z)^2, \\ z=(x-y)^2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0, \\ y=(x-z)^2, \\ z=(x-y)^2. \end{cases} \\ \begin{cases} 1+x+y-2z=0, \\ y=(x-z)^2, \\ z=(x-y)^2. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y, \\ y^2=y, \\ z=0. \end{cases} \\ \begin{cases} z=\dfrac{x+y+1}{2}, \\ y=\left(x-\dfrac{x+y+1}{2}\right)^2, \\ \dfrac{x+y+1}{2}=(x-y)^2. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y, \\ y(y-1) = 0, \\ z = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} z = \dfrac{x+y+1}{2}, \\ 4y = x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y, \\ x + y + 1 = 2x^2 - 4xy + 2y^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язком першої системи сукупності будуть трійки чисел: (0;0;0) і (1;1;0). Розглянемо другу систему сукупності. Можна виконати такі рівносильні перетворення:

$$\begin{cases} z = \dfrac{x+y+1}{2}, \\ 2y - x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 1 = 0, \\ 4xy + x + y + 1 - 2x^2 - 2y^2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{x+y+1}{2}, \\ x(x-1) = 0, \\ y = 1 - x. \end{cases}$$

Отже, розв'язки системи — трійки чисел (0;1;1) і (1;0;1). Таким чином, шукані числа — три нулі або дві одиниці і нуль.

54. Вказівка. Нерівність $|\sin x| > |\cos x|$ рівносильна нерівності $\sin^2 x > \cos^2 x$.

55. $x^2 - 3xy + 2y^2 = y^2 - 2xy + x^2 + y^2 - yx = (y-x)^2 + y(y-x) = (y-x)(2y-x)$, тому маємо рівняння $(y-x)(2y-x) = 3$. Оскільки $3 = 1\cdot 3 = 3\cdot 1 = (-1)(-3) = (-3)(-1)$, то останнє рівняння рівносильне сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y - x = 1, \\ 2y - x = 3. \end{cases} \\ \begin{cases} y - x = 3, \\ 2y - x = 1. \end{cases} \\ \begin{cases} y - x = -1, \\ 2y - x = -3. \end{cases} \\ \begin{cases} y - x = -3, \\ 2y - x = -1. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases} \\ \begin{cases} x = -5, \\ y = -2. \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = -2. \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5, \\ y = 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким чином, дане рівняння має чотири розв'язки в цілих числах: (1;2), (−1;−2), (5;2), (−5;−2).

56. Оскільки $\cos^3 x\cdot\cos 3x-\sin^3 x\sin 3x=\cos 3x\cos x\times$ $\times\cos^2 x-\sin 3x\sin x\sin^2 x=\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 2x)\cos^2 x-$ $-\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)(1-\cos^2 x)=((\cos 4x+\cos 2x+\cos 2x-$ $-\cos 4x)\cdot\cos^2 x-\cos 2x+\cos 4x)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot(2\cos 2x\cos^2 x-$ $-\cos 2x+\cos 4x)=\frac{1}{2}(\cos 2x\cdot(2\cos^2 x-1)+\cos 4x)=$ $=\frac{1}{2}(\cos^2 2x+\cos 4x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}+\cos 4x\right)=$ $=\frac{1}{4}(3\cos 4x+1)$, то $\frac{1}{4}(3\cos 4x+1)>\frac{5}{8}$, тобто $\cos 4x>\frac{1}{2}$, звідки $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}<x<\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$; $k\in Z$.

57. Оскільки нерівність $|f(x)|\geqslant g(x)$ рівносильна сукупності нерівностей $g(x)\leqslant f(x)$ або $g(x)\leqslant -f(x)$, то задана нерівність рівносильна сукупності

$$\left[\begin{array}{l}2x^2+x-a-8\le x^2+2x-2a-4,\\ 2x^2+x-a-8\le -x^2-2x+2a+4.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x+a-4\le 0,\\ x^2+x-a-4\le 0.\end{array}\right.$$

Розглянемо першу нерівність сукупності. Оскільки старший коефіцієнт додатний, то нерівність може мати розв'язки тільки тоді, коли дискримінант тричлена невід'ємний. Дискримінант $D_1=1-4(a-4)\geqslant 0$, якщо $a\le\frac{17}{4}$. Розв'язком нерівності є проміжок

$$\left[\frac{1-\sqrt{17-4a}}{2};\frac{1+\sqrt{17-4a}}{2}\right]\equiv A_1.$$

Аналогічно, для другої нерівності сукупності дискримінант $D_2=1+4(a+4)\geqslant 0$, якщо $a\ge -\frac{17}{4}$. Отже, якщо $a<-\frac{17}{4}$, то нерівність розв'язків не має, а при

$a \geq -\dfrac{17}{4}$ розвязком є проміжок

$$\left[\frac{-1-\sqrt{17+4a}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{17+4a}}{2}\right] \equiv A_2.$$

Таким чином, якщо $a < -\dfrac{17}{4}$, то $x \in A_1$, якщо $a > \dfrac{17}{4}$, то $x \in A_2$, якщо $-\dfrac{17}{4} \leq a \leq \dfrac{17}{4}$, то $x \in A_1 \cup A_2$.

58. Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, крім $x = \pm 1$. Якщо $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0)$, то

$$y = \frac{x^3 - x}{1 + x} = \frac{x(x^2 - 1)}{x + 1} = x(x - 1).$$

При $x \in |0;1) \cup (1; +\infty)$: $y = \dfrac{x^3 - x}{1 - x} = -x(x+1)$.

Побудуйте графік самостійно.

59. Оскільки $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$, то рівняння набуває вигляду

$$\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2(a+1) = 0.$$

Позначивши $y = \sin 2x$, маємо квадратне рівняння $y^2 - 2y - 2(a+1) = 0$. Його дискримінант $D = 4 + 8(a+1) = 12 + 8a$. Розглянемо три випадки:

1) $a < -\dfrac{3}{2}$, тоді квадратне рівняння, а, отже, і вихідне рівняння, розв'язків немає;

2) $a = -\dfrac{3}{2}$ квадратне рівняння мас єдиний розв'язок $y = 1$. Отже, $\sin 2x = 1$, звідки $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$;

3) $a > -\dfrac{3}{2}$, тоді квадратне рівняння має два дійсних корені: $y_1 = 1 - \sqrt{3 + 2a}$, $y_2 = 1 + \sqrt{3 + 2a}$, причому $y_2 > 1$, тому рівняння $\sin 2x = y_2$ розв'язків немає. Рівняння $\sin 2x = y_1$ матиме розв'язки, якщо $|y_1| \leqslant 1$, тобто $\left|1 - \sqrt{3 + 2a}\right| \leq 1$. Звідси маємо систему нерівностей

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{3 + 2a} \geq -1, \\ 1 - \sqrt{3 + 2a} \leq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3 + 2a} \leq 2, \\ \sqrt{3 + 2a} \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2a \leq 4, \\ a \geq -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Отже, $-\frac{3}{2} < a \le \frac{1}{2}$.

Якщо $a = \frac{1}{2}$, то $y_1 = -1$. Розвязком рівняння $\sin 2x = -1$ є $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

При $-\frac{3}{2} < a < \frac{1}{2}$ одержимо рівняння $\sin 2x = 1 - \sqrt{3 + 2a}$, звідки $x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\left(1 - \sqrt{3 + 2a}\right) + \frac{\pi k}{2}$.

Таким чином, якщо $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ — рівняння розв'язків не має;

при $a = -\frac{3}{2}$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; якщо $-\frac{3}{2} < a < \frac{1}{2}$, то $x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\left(1 - \sqrt{3 + 2a}\right) + \frac{\pi k}{2}$;

при $a = \frac{1}{2}$ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

60. **1-й спосіб.** Позначимо: $A = \frac{10^{1990} + 1}{10^{1991} + 1}$; $B = \frac{10^{1991} + 1}{10^{1992} + 1}$; $x = 10^{1990} > 0$ і розглянемо різницю

$$A - B = \frac{x + 1}{10x + 1} - \frac{10x + 1}{100x + 1} = \frac{81x}{(10x + 1)(100x + 1)} > 0.$$

2-й спосіб. Використовуючи ті самі позначення і враховуючи, що $A > 0$, $B > 0$, розглянемо відношення

$$\frac{A}{B} = \frac{(x + 1)(100x + 1)}{(10x + 1)^2} = \frac{100x^2 + 101x + 1}{(10x + 1)^2} > \frac{(10x + 1)^2}{(10x + 1)^2} = 1.$$

3-й спосіб. Будемо порівнювати $A - 1$ і $B - 1$. Маємо:

$$A - 1 = \frac{x + 1}{10x + 1} - 1 = -\frac{9x}{10x + 1} < 0,$$

$$B - 1 = \frac{10x + 1}{100x + 1} - 1 = -\frac{90x}{100x + 1} = -\frac{9x}{10x + 0{,}1} < 0.$$

Оскільки $10x + 1 > 10x + 0{,}1$, то $\frac{1}{10x + 1} < \frac{1}{10x + 0{,}1}$.

Отже, $A - 1 > B - 1$, звідки $A > B$.

61. Оскільки ліва частина нерівності набуває тільки додатних значень, то при $a<0$ розв'язками нерівності будуть всі дійсні числа. Розглянемо випадок $a \geqslant 0$. Ліву частину нерівності можна перетворити таким чином: $\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-$ $-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)=(\sin^2 + \cos^2 x)^2 \ \ 3\sin^2 x\cdot\cos^2 x=$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x = 1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x.$$

Отже, маємо нерівність

$$\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x \ge a \Rightarrow 5+3\cos 4x \ge 8a \Rightarrow \cos 4x \ge \frac{8a-5}{3}.$$

Якщо $\frac{8a-5}{3}<-1$, тобто $a<\frac{1}{4}$, то розв'язком нерівності будуть всі дійсні числа. Якщо $-1 \le \frac{8a-5}{3} \le 1$, тобто $\frac{1}{4} \le a \le 1$, то розв'язки нерівності знаходяться в проміжках

$$-\frac{1}{4}\arccos\frac{8a-5}{3}+\frac{\pi n}{2} \le x \le \frac{1}{4}\arccos\frac{8a-5}{3}+\frac{\pi n}{2};\quad n \in Z.$$

Якщо $a>1$, то нерівність розв'язків не має.

62. Помноживши ліву і праву частини кожного рівняння системи на 2, прийдемо до рівносильної системи

$$\begin{cases} 2x^2-2yz=2a, \\ 2y^2-2xz=2b, \\ 2z^2-2xy=2c. \end{cases}$$

Додавши рівняння системи, отримаємо, як наслідок, наступне рівняння: $2x^2-2yz+2y^2-2xz+2z^2-2xy=$ $=2(a+b+c)$. Оскільки $2x^2-2yz+2y^2-2xz+2z^2-2xy=$ $=x^2-2xy+y^2+x^2-2xz+z^2+y^2+z^2-2yz=(x-y)^2+(x-z)^2+$ $+(y-z)^2$, то рівняння набуде вигляду
$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=2(a+b+c)$.

Ліва частина цього рівняння набуває тільки невід'ємних значень, а права — тільки від'ємних, тому останнє рівняння, а, отже, і дана система рівнянь, дійсних розв'язків не має.

63. Перетворивши праву частину

$$\frac{\cos 20^\circ \cos 30^\circ}{\cos^2 10^\circ}=\frac{\cos 50^\circ+\cos 10^\circ}{2\cos^2 10^\circ}=\frac{\sin 40^\circ+\cos 10^\circ}{2\cos^2 10^\circ}=$$

$$=\frac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ+\cos 10^\circ}{2\cos^2 10^\circ}=$$

$$=\frac{4\sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ+\cos 10^\circ}{2\cos^2 10^\circ}=\frac{4\cos 80^\circ \cos 20^\circ+1}{2\cos 10^\circ}=$$

$$=\frac{2\cos 100^\circ+2}{2\cos 10^\circ}=\frac{\cos 100^\circ+1}{\cos 10^\circ}=\frac{1-\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}=$$

$$=\frac{2\sin^2 40^\circ}{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ}=\frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}=tg 40^\circ,$$

дістанемо рівняння $tg\,x=tg\,40^\circ$, звідки $x=40^\circ+180^\circ n$, $n\in Z$.

64. **1-й спосіб.** Оскільки $x\neq 0$, то поділивши обидві частини рівняння на x, отримаємо $x+\frac{1}{x}=2\sin y$.

Позначимо $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $g(y)=2\sin y$. Очевидно, що $-2\leqslant g(y)\leqslant 2$. Якщо $x>0$, то $f(x)\geqslant 2$, а при $x<0$ $f(x)\leqslant -2$. Отже, при $x>0$ одержуємо $f(x)\geqslant 2$ і $g(y)\leqslant 2$, а при $x<0$ — $f(x)\leqslant -2$ і $g(y)\geqslant -2$. Таким чином, приходимо до сукупності двох систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+\frac{1}{x}=2,\\ \sin y=1.\end{cases}\\ \begin{cases}x+\frac{1}{x}=-2,\\ \sin y=-1.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi k, \quad k\in Z.\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1,\\ y=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \quad n\in Z.\end{cases}\end{array}\right.$$

Графіком є всі точки площини, координати яких

$$\left(-1;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z\right),\ \left(1;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z\right).$$

2-й спосіб. Розглянемо дане рівняння як квадратне відносно x: $x^2-2\sin y\cdot x+1=0$. Його дискримінант $D=4\sin^2 y-4=4(\sin^2 y-1)$. Оскільки $\sin^2 y\leqslant 1$, то $D\leqslant 0$ і дійсні корені існують тільки у випадку $D=0$, тобто коли $\sin^2 y=1$. Якщо $\sin y=-1$, то рівняння $x^2+2x+1=0$ має дійсний корінь $x=-1$. Отже, розв'язок вихідного рівняння

$\left(-1; -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$. Якщо $\sin y=1$, то рівняння $x^2-2x+1=0$ має дійсний корінь $x=1$. Отже, розв'язок вихідного рівняння $\left(-1; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, де $n,k\in Z$.

3-й спосіб. Дане рівняння перепишемо так: $(x-\sin y)^2+\cos^2 y=0$. Звідси маємо рівносильну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x-\sin y=0, \\ \cos y=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sin y=0, \\ \sin y=\pm 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1, \\ \sin y=-1. \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ \sin y=1. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1, \\ y=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z. \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отже, графіком є всі точки площини, координати яких $\left(-1;-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z\right)$, $\left(1;\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z\right)$.

65. Оскільки $x\neq -1$, то, поділивши обидві частини рівняння на $x+1$, будемо мати: $y^2-x^2-4=$

$$=\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2+1-1}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{1}{x+1}= x-1+\frac{1}{x+1}$$

Права частина отриманого рівняння буде цілим числом, якщо $\frac{1}{x+1}$ — ціле, а це можливо тільки при $x=0$ і $x=-2$. Якщо $x=0$, то рівняння набуває вигляду $y^2-4=0$, звідки $y=\pm 2$. Отже, маємо два розв'язки $(0; -2)$ і $(0; 2)$. Якщо $x=-2$, то знову матимемо рівняння $y^2-4=0$ і отримаємо ще два розв'язки $(-2;-2)$ і $(-2;2)$. Таким чином, рівняння має чотири розвязки в цілих числах.

66. Позначивши $z = \cos\dfrac{x+y}{2}$, отримаємо квадратне рівняння $4z^2 - 4\cos\dfrac{x-y}{2}\cdot z + 1 = 0$. Дискримінант рівняння $D = \left(4\cos\dfrac{x-y}{2}\right)^2 - 4\cdot 4 = 16\cos^2\dfrac{x-y}{2} - 16 = 16\left(\cos^2\dfrac{x-y}{2} - 1\right) \le 0$, оскільки $\cos^2\dfrac{x-y}{2} \le 1$. Розв'язуючи рівняння $4z^2+4z+1=0$ і $4z^2-4z+1=0$, знаходимо, що $z = -\dfrac{1}{2}$ і $z = \dfrac{1}{2}$.

Отже, маємо сукупність двох систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = -1, \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = -\dfrac{1}{2}. \end{cases} \\ \begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = 1, \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z, \\ \dfrac{x+y}{2} = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z. \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = 2\pi m, \quad m \in Z, \\ \dfrac{x-y}{2} = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi l, \quad l \in Z, \end{cases} \end{array}\right.$$

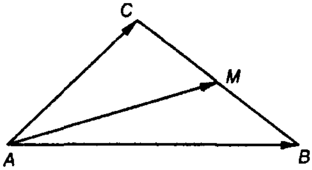
звідки знаходимо розв'язки:

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + \pi + 2\pi(k+n), \\ y = \pm\dfrac{2\pi}{3} - \pi + 2\pi(k-n). \end{cases}; \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi(l+m), \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi(l+m). \end{cases} (k, n, m, l \in Z)$$

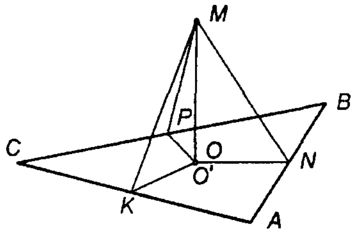
67. Нехай A, B, C і D — дані точки, a — шукана площина, точки A і B знаходяться по один бік від неї. Оскільки ці точки рівновіддалені від a, то $AB \parallel a$ і $CD \parallel a$.

В зв'язку з цим шукана площина проходить через середину відрізка, кінці якого належать прямим AB і CD, і буде паралельною до кожної з них. Даними точками визначаються ще дві пари мимобіжних прямих — AC і BD, AD і BC, — кожною з яких визначається ще одна шукана площина. Отже, задача має три розв'язки.

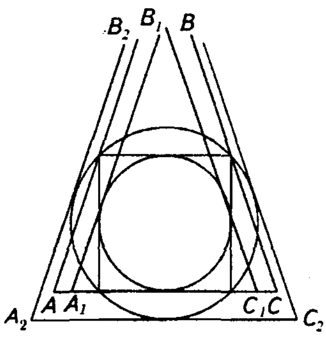
68. Якщо ввести векторну базу $\overline{AC}=\bar{b}$ і $\overline{AB}=\bar{c}$, то $\overline{AM}=\frac{1}{2}(\bar{b}+\bar{c})\Rightarrow$ $\Rightarrow AM^2=\frac{1}{4}\left(b^2+c^2+2\overline{bc}\right)$. За теоремою косинусів $a^2=b^2+c^2-2\overline{bc}$, тому $AM^2=m_a^{\,2}=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$.



69. Нехай в даному трикутнику $OA=OB=OC=R$. Якщо $MN\perp AB$, $MK\perp AC$ і $MP\perp BC$, то за умовою задачі $MN=MK=MP=R$. Опустимо на площину ABC перпендикуляр MO'. Оскіль $\angle MO'N=\angle MO'K= =\angle MO'P=90^\circ$, то $O'N=O'K=O'P\Rightarrow O'\equiv O$. Оскільки $ON\perp OB$ і $ON\perp OB$ і $MN\perp AB$, то $\angle MNO$ — лінійний кут двогранного кута між площинами MAB і ABC. З прямокутного трикутника MON знаходимо, що



$$\cos\angle MNO=\frac{ON}{MN}=\frac{r}{R}=\frac{R}{2R}=\frac{1}{2}.$$ Отже, $\angle MNO=60^\circ$.

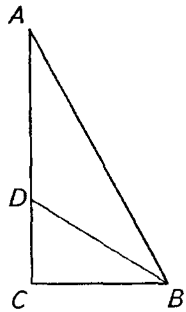


70. Нехай в трикутник ABC вписано квадрат із стороною a.

Побудуємо вписане і описане кола квадрата та проведемо до них дотичні, паралельні до сторін трикутника ABC. Утворюються трикутники $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$, подібні до даного трикутника. Якщо r_1, r, r_2 — радіуси вписаних кіл трикутників $A_1B_1C_1$, ABC і $A_2B_2C_2$, то $r_1<r<r_2$. Оскільки $r_1=\frac{a}{2}$, $r_2=\frac{\sqrt{2}a}{2}$, то з нерівності $\frac{a}{2}<r$ дістанемо $a<2r$. Аналогічно з

71. Нехай a і b — дані мимобіжні прямі, M — дана точка. Якщо M належить a або b, то шуканих прямих можна побудувати безліч. Припустимо, що точка M не належить ні одній з даних прямих і l — пряма, яка проходить через точку M і перетинає прямі a і b. Розглянемо площини α і b, що містять точку M та прямі a і b відповідно. Пряма l належить як площині a, так і площині b. Площини a і b не паралельні, оскільки мають спільну точку M; зрозуміло також, що вони не співпадають. Тому площини a і b перетинаються по деякій прямій d. Якщо пряма d не паралельна ні прямій a, ні прямій b, то вона є шуканою, тобто $d \equiv l$; в протилежному випадку шуканої прямої не існує. Таким чином, не через будь-яку точку простору можна провести пряму, яка перетинає дві мимобіжні прямі.

72. Нехай у трикутнику ABC $AB=c$, $BD = \frac{c\sqrt{3}}{3}$ — бісектриса кута B. Позначимо $\angle ABC = 2\alpha$. Тоді $\angle BAD = \angle BAC = 90^\circ - 2\alpha$, $\angle ADB = 180^\circ - (\angle BAD + \angle ABD) = 90^\circ + \alpha$. Розглянемо $\triangle ABD$. За теоремою синусів



$$\frac{AB}{\sin\angle ADB} = \frac{BD}{\sin\angle BAD},$$

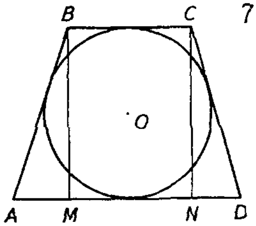
$$\frac{c}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{c\sqrt{3}}{3\sin(90^\circ - 2\alpha)}, \quad \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3\cos 2\alpha},$$

$$2\sqrt{3}\cos^2\alpha - \cos\alpha - \sqrt{3} = 0, \qquad \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$ або

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Оскільки $0 < \alpha < 45^\circ$, то умову задачі задовольняє $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, звідки $\alpha = 30^\circ$. Отже $\angle ABC = 60^\circ$.

Катети трикутника:

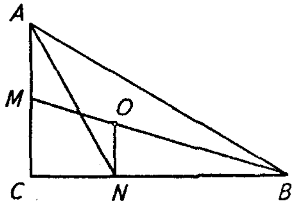
$$BC = c \cdot \cos 60^\circ = \frac{c}{2}; \; AC = c \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$



73. Нехай $ABCD$ — дана трапеція ($AB=CD$). Тоді $AD+BC=AB+CD=2AB$. Проведемо висоти BM і CN. Трикутники AMB і DNC рівні (чому?). Отже, $MA = ND = \dfrac{AD - BC}{2}$. З прямокутного трикутника BMA маємо:

$$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(AD + BC)^2 - \frac{1}{4}(AD - BC)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{AD + BC - AD + BC}{2} \cdot \frac{AD + BC + AD - BC}{2}} = \sqrt{AD \cdot BC}.$$



74. Нехай в трикутнику ABC AN — бісектриса кута A. BM — медіана, O — точка перетину медіан, $ON \triangle BC$. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника $\dfrac{CN}{NB} = \dfrac{AC}{AB}$, а за властивістю медіан $\dfrac{MO}{OB} = \dfrac{1}{2}$.. Оскільки $ON \triangle BC$ і $AC \triangle BC$, то $ON \| AC$. За теоремою про пропорційні відрізки $CN{:}NB=MO{:}OB=1{:}2$. Отже, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{2} = \sin\angle ABC$, звідки $\angle ABC=30^\circ$, $\angle CAB=60^\circ$.

75. Оскільки шукаються натуральні розв'язки, то $x \leqslant 100$, $y \geqslant 1$ і пара $(100;1)$ — очевидний розвязок рівняння. Зробимо заміну $x=100-a$, $y=1+b$, тоді рівняння набуде вигляду $19a=93b$. Звідси випливає, що b ділиться на 19, тобто $b=19k$, де k— натуральне число. Отже, $a=93k$, $x=100-93k$, $y=1+19k$. Числа x і y будуть натуральними тільки для $k=0;1$. Тому маємо два розв'язки $(100;1)$ і $(7;20)$.

76. 1) Різниця $\dfrac{a^6}{b^2}+\dfrac{b^6}{a^2}-a^4-b^4=\dfrac{1}{a^2b^2}\left(a^8+b^8-a^6b^2-a^2b^6\right)=$

$$= \frac{1}{a^2b^2}\left(a^2 - b^2\right)\left(a^6 - b^6\right) = \frac{1}{a^2b^2}\left(a^2 - b^2\right)^2\left(a^4 + a^2b^2 + b^4\right) \geq 0.$$

Отже, $\dfrac{a^6}{b^2} + \dfrac{b^6}{a^2} \geq a^4 + b^4$.

Друга нерівність доводиться аналогічно.

76. 1) Різниця $\frac{a^6}{b^2}+\frac{b^6}{a^2}-a^4-b^4=\frac{1}{a^2b^2}\left(a^8+b^8-a^6b^2-a^2b^6\right)=$

$$=\frac{1}{a^2b^2}\left(a^2-b^2\right)\left(a^6-b^6\right)=\frac{1}{a^2b^2}\left(a^2-b^2\right)^2\left(a^4+a^2b^2+b^4\right)\geq 0.$$

Отже, $\frac{a^6}{b^2}+\frac{b^6}{a^2}\geq a^4+b^4$.

Друга нерівність доводиться аналогічно.

77. За теоремою Вієта $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$, тому $p+q=x_1x_2-x_1-x_2=x_1(x_2-1)-x_2+1-1=x_1(x_2-1)-(x_2-1)-1=1993$.

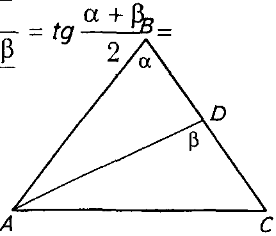
Отже, $(x_1-1)(x_2-1)=1994$. Оскільки $1994=1\cdot1994=2\cdot997$, то маємо сукупність двох систем

$$\begin{cases}x_1-1=1,\\x_2-1=1994\end{cases}\text{ або }\begin{cases}x_1-1=2,\\x_2-1=997,\end{cases}$$

звідки $\begin{cases}x_1=2,\\x_2=1995,\end{cases}$ або $\begin{cases}x_1=3,\\x_2=998.\end{cases}$

78. Перетворивши ліву частину рівності і врахувавши, що $a+b+g=180^\circ$, матимемо:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=tg\frac{\alpha+\beta}{2}=$$



$=tg\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)=ctg\frac{\gamma}{2}$. Оскільки $ctg\frac{\gamma}{2}=\frac{\sin\gamma}{1-\cos\gamma}\ (\gamma\neq 2\pi r)$, то рівність набуває вигляду $\sin 2g=0$, звідки $g=90^\circ n$, $n\in Z$. Умову задачі задовольняє $g=90^\circ$.

79. Нехай в трикутнику ABC $\angle ABC=a$, AD — бісектриса кута BAC, $BC=a$, $\angle ADC=b$. Вказівка. Розглянути трикутники ADC і ADB, застосувати теорему синусів (попередньо обчисливши кути трикутників), та врахувати, що $BD+DC=a$.

80. Доведемо твердження методом математичної індукції.

а) При $n=5$ маємо $4^5>5^4$, бо $1024>625$. Нерівність справедлива.

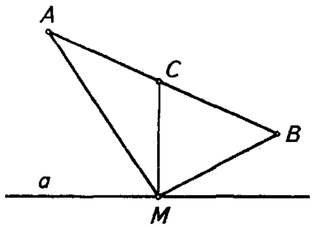
б) Припустимо, що при $n=k$ $(k>5)$ нерівність має місце, тобто $4^k>k^4$. Доведемо, що тоді $4^{k+1}>(k+1)^4$, тобто

81. Поклавши у формулі $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$ $tg\alpha=x$, $tg\,\beta=y$, дістанемо, що $tg(arctg\,x-arctg\,y=\dfrac{x-y}{1+xy}$, звідки

$arctg\dfrac{x-y}{1+xy}=arctg\,x-arctg\,y.$

Отже, $arctg\dfrac{1}{n^2+n+1}=arctg\dfrac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}=arctg(n+1)-$ $-arctgn$. Тоді $S_n=(arctg\,2-arctg\,1)+\ldots+(arctg(n+1)-$ $-arctg\,n)=arctg(n+1)-arctg\,1=arctg\dfrac{n}{n+2}$.

82. Нехай C — середина відрізка AB, M — шукана точка. Тоді за формулою для квадрата довжини медіани



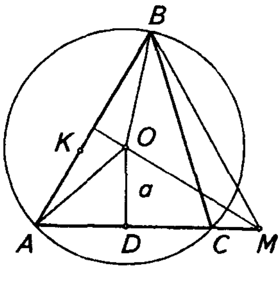
$CM^2=\dfrac{1}{4}(2AM^2+2BM^2-AB^2)=$

$=\dfrac{1}{2}(AM^2+BM^2)-\dfrac{1}{4}AB^2.$

Звідси знаходимо, що

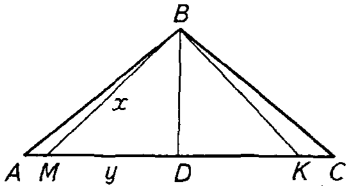
$AM^2+BM^2=2CM^2+\dfrac{1}{2}AB^2$. Оскільки AB — стала величина, то AM^2+BM^2 досягає найменшого значення, коли найменшою є медіана MC трикутника AMB. Отже, шуканою буде проекція точки C на пряму a.

83. Нехай в трикутнику ABC $\angle A=60^\circ$, $AK=\dfrac{AC}{2}$, $OD=a$. Візьмемо на промені AC таку точку M, що $AM=AB$. Оскільки $\angle A=60^\circ$, $\angle M=\angle B$, то трикутник ABM — правильний і бісектриса кута AMB проходить через точку O — центр описаного навколо трикутника ABC кола (чому?). Точка D — середина AC, тому $BK=DM$. З прямокутного трикутника ODM знаходимо, що $DM=OD\cdot tg\,60^\circ=a\sqrt{3}$. Отже, $BK=\sqrt{3}\cdot a$.



84. Нехай в трикутнику ABC $AB=BC=a$, $\angle MBK=90^\circ$,

$$\frac{1}{AM}=\frac{1}{MK}+\frac{1}{MC}. \qquad (1)$$



Проведемо висоту BD і позначимо $MB=x$, $MD=y$. Трикутники MDB і MBK подібні (чому?), тому $\frac{MK}{MB}=\frac{MB}{MD}$, звідки $MK=\frac{x^2}{y}$.

Висота $BD=\sqrt{MB^2-MD^2}=\sqrt{x^2-y^2}$,

$AD=DC=\sqrt{AB^2-BD^2}==\sqrt{a^2-x^2+y^2}$,

$AM=AD-MD=\sqrt{a^2-x^2+y^2}-y$,

$MC=MD+DC=y+\sqrt{a^2+y^2-x^2}$.

Підставляючи отримані вирази в задане співвідношення (1), дістанемо рівняння:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2+y^2}-y}=\frac{y}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2+y^2}+y};$$

$$\frac{\sqrt{a^2-x^2+y^2}+y-\sqrt{a^2-x^2+y^2}+y}{a^2-x^2+y^2-y^2}=\frac{y}{x^2};$$

$$\frac{2y}{a^2-x^2}=\frac{y}{x^2};\ 2x^2=a^2-x^2;\ \ 3x^2=a^2,$$

звідки $MB=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

85. Оскільки $a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, $a^2+a+1=$ $=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, то відрізки заданої довжини існують при будь-якому дійсному a. Для доведення існування трикутника досить показати, що найбільша з даних величин менша від суми двох інших.

Виявляється (перевірте!), що

при $a<0$ $\quad a^2+a+1<a^2-a+1<4a^2+3$, а

при $a\geqslant 0$ $\quad a^2-a+1\leqslant a^2+a+1<4a^2+3$.

Отже, потрібно показати, що

$$\sqrt{4a^2+3}<\sqrt{a^2-a+1}+\sqrt{a^2+a+1}.$$

Дійсно: $4a^2+3<a^2-a+1+2\sqrt{a^4+a^2+1}+a^2+a+1$,

$2a^2+1<2\sqrt{a^4+a^2+1}$, $\quad 4a^4+4a^2+1<4a^4+4a^2+4$.

Отже, потрібна нерівність виконується. За теоремою косинусів знаходимо косинус найбільшого кута:

$$\cos\varphi=-\frac{2a^2+1}{2\sqrt{a^4+a^2+1}}. \quad \text{Тоді} \quad \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a^4+a^2+1}}.$$

Площа трикутника $S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-a+1}\times$

$\times\sqrt{a^2+a+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a^4+a^2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ і не залежить від a.

86. Покладемо $x=y+\pi$ та розглянемо різницю між лівою і правою частинами нерівності:

$$\sin x-\frac{\pi^2-x^2}{\pi^2+x^2}\cdot x=\sin x+\frac{x^2-\pi^2}{x^2+\pi^2}x=\sin(y+\pi)+$$

$$+\frac{(y+\pi)^2-\pi^2}{(y+\pi)^2+\pi^2}(y+\pi)=-\sin y+y+\frac{\pi y^2}{y^2+2\pi y+2\pi^2}>0,$$

оскільки $y>0$, а при $y>0$ $\sin y<y$.

87. Оскільки $x^4-4x^3-1=(x^2-2x-1)^2-2(x+1)^2$, то дане рівняння набуває вигляду

$(x^2-(2+\sqrt{2})x-(1+\sqrt{2}))(x^2-(2-\sqrt{2})x-(1-\sqrt{2}))=0$,

звідки маємо рівносильну сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x^2-(2+\sqrt{2})x-(1+\sqrt{2})=0, \\ x^2-(2-\sqrt{2})x-(1-\sqrt{2})=0. \end{array}\right.$$

Корені першого рівняння сукупності

$$x_{1,2}=\frac{2+\sqrt{2}\pm\sqrt{10+8\sqrt{2}}}{2}.$$

Дискримінант другого рівняння

$(2-\sqrt{2})^2+4(1-\sqrt{2})=4-4\sqrt{2}+2+4-4\sqrt{2}=10-8\sqrt{2}<0$,

тому це рівняння не має дійсних коренів.

Таким чином, дане рівняння має два дійсних корені:

$$x_1=\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{10+8\sqrt{2}}}{2};\ x_2=\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{10+8\sqrt{2}}}{2}.$$

88. Поклавши $z=x^2+3x-4$, $t=2x^2-5x+3$, перепишемо рівняння у вигляді $z^3+t^3=(z+t)^3$, звідки $zt(z+t)=0$. Останнє рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{aligned} &x^2+3x-4=0,\\ &2x^2-5x+3=0,\\ &3x^2-2x-1=0.\end{aligned}\right.$$

Звідси знаходимо, що рівняння має чотири дійсних корені: $x_1=-4$; $x_2=-\dfrac{1}{3}$; $x_3=1$; $x_4=\dfrac{3}{2}$.

89. Використавши формули $tg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $|\cos\alpha|=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}$; $|\sin\alpha|=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$, будемо мати

$$tg7°30'=\frac{1-\cos 15°}{\sin 15°}=\frac{1-\sqrt{\dfrac{1+\cos 30°}{2}}}{\sqrt{\dfrac{1-\cos 30°}{2}}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}}=$$

$$=\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}-\left(2+\sqrt{3}\right)=\sqrt{8+4\sqrt{3}}-2-\sqrt{3}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}-2-\sqrt{3}=\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right).$$

90. Якщо n — парне число, то n^2 — парне число, тому остання цифра числа n^2 — парна. Якщо n — непарне число, то воно має вигляд $10a\pm1$, $10a\pm3$, $10a\pm5$. Квадрати цих чисел:

$$(10a\pm1)^2=100a^2\pm20a+1,$$
$$(10a\pm3)^2=100a^2\pm60a+9,$$
$$(10a\pm5)^2=100a^2\pm100a+25.$$

В останньому випадку у записі числа цифра десятків 2 – парна, а у двох перших випадках вона є або останньою цифрою парного числа $2a$ $(6a)$, або десять мінус ця цифра, тобто також є парною.

91. Дане рівняння рівносильне такому:

$(x-3)^2+(x-2)^2=0$, звідки $\begin{cases} x-3=0,\\ \sqrt{x}-2=0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3,\\ x=4.\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$

92. Перш за все доведемо, що сума відстаней від точки O до всіх прямих, які містять сторони правильного m–кутника, не залежить від вибору цієї точки. Справді, з'єднавши точку O з усіма вершинами A_i $(i=\overline{1,m})$ m–кутника, дістанемо:

$$S_{A_1A_2\ldots A_m} = S_{OA_1A_2} + S_{OA_2A_3} + \ldots + S_{OA_mA_1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(ah_1 + ah_2 + \ldots + ah_m\right) = \frac{1}{2}a\left(h_1 + h_2 + \ldots + h_m\right)$$

(a — довжина сторони m–кутника).

Отже, шукана сума відстаней $h_1 + h_2 + \ldots + h_m = \dfrac{2S_{A_1A_2\ldots A_m}}{a}$, тобто не залежить від вибору точки O.

Для доведення твердження задачі досить довести, що сума відстаней від точки O до "червоних" сторін правильного $2n$ – кутника дорівнює сумі відстаней від точки O до "синіх" сторін. Продовжимо окремо "червоні" та "сині" сторони. При їх перетині ми отримаємо два правильні n –кутники, які можна сумістити поворотом на кут $\dfrac{360°}{n}$ навколо центра нашого $2n$–кутника. Отже, ці n–кутники рівні. Оскільки сума відстаней від точки O до сторін "червоного" n–кутника дорівнює сумі відстаней до сторін "синього" n–кутника, то їх площі рівні.

93. Визначимо на площині декартову систему координат X_1OX_2. Нехай координати точки A_i : $\left(a_i^1; a_i^2\right)$. Симетрію відносно точки A_i можна подати у вигляді:

$\left(x_1; x_2\right) \to -\left(\left(x_1; x_2\right) - \left(a_i^1; a_i^2\right)\right) + \left(a_i^1; a_i^2\right)$.

Отже, перетворення S' буде мати вигляд:

$\left(x_1; x_2\right) \to -\left(x_1; x_2\right) + \left(b_1; b_2\right)$, де $(b_1; b_2)$ — деяка точка, що залежить від a_i.

Координати точки, яка залишаються на місці при перетворенні S, задовольняють рівняння

$(x_1; x_2) = -(x_1; x_2) + (b_1; b_2)$. Звідси

$\left(x_1; x_2\right) = \dfrac{1}{2}\left(b_1; b_2\right) = \left(\dfrac{b_1}{2}; \dfrac{b_2}{2}\right)$, причому ця точка єдина.

94. Нехай a_{ij} — число, яке стоїть в i-му рядку та j-му стовпчику нової таблиці, і нехай $a_{ij}>a_{ik}$, $j<k$.
Тоді $\forall l \geqslant i$, $m \leqslant i$, $a_{mj}>a_{lk}$, тому що елементи стовпчика монотонно спадають. Але тоді в k-му стовпчику існує не більше, ніж $i-1$ число, кожне з яких більше хоча б за одне з чисел a_{1j}, ..., a_{ij}. Отримане суперечить тому, що з самого початку числа кожного рядка монотонно зростали.

95. Просте число і 30 будуть взаємно прості, тому остача і 30 будуть взаємно прості. Перебором перевіряємо, що всі числа, менші від 30 і взаємно прості з 30, є простими, або 1.

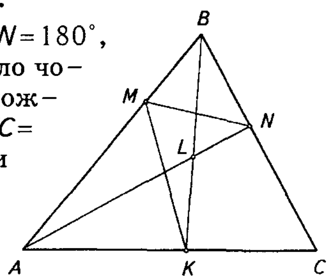
96. Підставивши в дану рівність $(-x)$, одержимо $-x(f(-x)+f(x)+2)+2f(x)=0$. Додавши цю рівність до даної, будемо мати $f(x)+f(-x)=0$. Отже, $2x+2f(-x)=0 \Leftrightarrow f(-x)=-x \Leftrightarrow f(y)=y$. Таким чином, $f(x)=x$.

97. $$a+c+e \geq \frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}+e \geq \frac{1}{2}(a+b+c+d+e)=50.$$

При $a=b=c=d=25$, $e=0$, маємо $a+c+e=50$. Таким чином, найменше можливе значення виразу $a+c+e$ дорівнює 50.

98. Нехай місто A сполучене шляхами з k містами і не сполучено з $(N-k-1)$ містами. Для того, щоб виконувалась умова задачі, від кожного з цих $(N-k-1)$ міст повинен бути хоча б один шлях до міст, сполучених з A. Маємо $N-k-1$ цих шляхів і k шляхів із міста A. Отже, загальна кількість шляхів не менша, ніж $N-k-1+k=N-1$. Якщо ми маємо одне місто, сполучене з усіма останніми, і більше шляхів немає, то маємо $N-1$ шлях. Таким чином, найменша кількість шляхів у такій країні дорівнює $N-1$.

99. Оскільки $\angle AMN+\angle ACN=180^\circ$, $\angle BMK+\angle BCK=180^\circ$, то навколо чотирикутників $AMNC$ і $BMKC$ можна описати кола. Тоді $\angle ANC=$ $=\angle AMC$, $\angle BKC=\angle BMC$, звідки $\angle LNC+\angle LKC=180^\circ$. Отже, навколо чотирикутника $CKLN$ можна описати коло.



100. 1-й спосіб. Позначимо $y=-x^2-2x$. Тоді маємо рівняння

$$\sqrt{y}+\sqrt{8+y}=4 \Rightarrow \sqrt{8+y}=4-\sqrt{y} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 8+y=16-8\sqrt{y}+y \Rightarrow 8\sqrt{y}=8 \Rightarrow \sqrt{y}=1 \Rightarrow y=1$. Отже, $-x^2-2x=1$, $x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$, $x=-1$. Перевіркою встановлюємо, що $x=-1$ — корінь рівняння.

2-й спосіб. $\sqrt{-x^2-2x}=\sqrt{1-1-x^2-2x}=\sqrt{1-(x+1)^2}\le 1$,

$\sqrt{8-x^2-2x}=\sqrt{9-(x+1)^2}\le 3$, причому рівність досягається тільки у випадку $x=-1$. Отже, $\sqrt{-x^2-2x}+\sqrt{8-x^2-2x}\le 4$. Рівність досягається при $x=-1$, тобто $x=-1$ — корінь рівняння.

101. Здійснимо поворот координатної площини навколо точки A на 90° в напрямку від точки B до точки C. При цьому точка B перейде в точку B' з цілими координатами (чому?). За умовою задачі, або $C=B'$ (тоді $\angle BAC=90^\circ$), або $C\in BB'$, $C\ne B'$. Якщо точка C — середина відрізка BB', то $\angle BCA=90^\circ$. Якщо $BC>CB'$, тоді точка C', симетрична точці C відносно середини відрізка BB' лежить на відрізку CB та має цілі координати, що суперечить умові. Якщо ж $BC<CB'$, тоді образ точки B при повороті навколо точки C на 90° у напрямку від точки B до точки A лежить всередині відрізка BA, що також суперечить умові.

102. Нехай x_1, x_2 — корені рівняння $x^2-px-1=0$, y_1, y_2 — корені рівняння $x^2-qx-1=0$. За теоремою Вієта $x_1x_2=y_1y_2=-1$. Отже, вважатимемо, що $x_1<0<x_2$, $y_1<0<y_2$ та $x_1<y_1$.

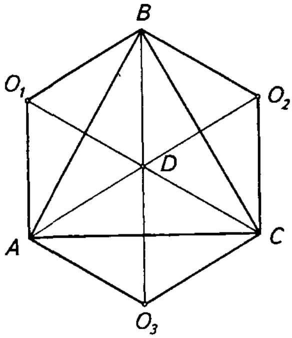
а) Нехай порядок членів прогресії x_1, y_1, y_2, x_2. Тоді $p=x_1+x_2=y_1+y_2=q$, що неможливо.

б) Нехай порядок членів прогресії x_1, y_1, x_2, y_2. Тоді $x_2-x_1=y_2-y_1$, а отже $\sqrt{p^2+4}=\sqrt{q^2+4}$, звідки випливає, що $p=-q$. З іншого боку, $y_1=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{p}{2}$,

тому $\left(\dfrac{p}{2}\right)^2+p\cdot\dfrac{p}{2}-1=0 \Rightarrow \dfrac{3p^2}{4}=1 \Rightarrow p=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Отже, маємо дві пари дійсних чисел, які задовольняють умову задачі: $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}};\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}};-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

103. а) Доведемо, що з рівності радіусів O_1D, O_2D та O_3D випливає рівність всіх радіусів. O_2CO_3D, O_3AO_1D, O_1BO_2D — ромби, а отже $O_2C \parallel O_3D \parallel AO_1$ та $O_2C = AO_1$, тобто ACO_2O_1 — паралелограм і $AC \parallel O_1O_2$, а тому $AC \perp BD$. Звідси випливає, що D — ортоцентр трикутника ABC.



$\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC$, тому кола, описані навколо $\triangle ABC$ та $\triangle BCD$, симетричні відносно BC, а отже, їх радіуси рівні.

б) Нехай рівні радіуси кіл, описаних навколо $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ та $\triangle BCD$. Кола, описані навколо $\triangle ABC$ та $\triangle ACD$ симетричні відносно AC. Отже $\angle ACD = 180^\circ - \angle ABC$. Аналогічно, $\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC$. Звідси $\angle ADB = 180^\circ - \angle ACB$, а, отже, кола, описані навколо $\triangle ABC$ та $\triangle ABD$, симетричні відносно AB і їх радіуси рівні.

104. Занумеруємо кільця ланцюга 1, 2, ..., $2k+2m$. Нехай $\varphi(i)$ — кількість срібних кілець серед кілець з номерами i, $i+1$, ..., $i+k+m-1$. Очевидно, що $|\varphi(i) - \varphi(i+1)| \leqslant 1$. Оскільки або $\varphi(1) \leqslant k$ та $\varphi(k+m+1) \geqslant k$, або $\varphi(1) \geqslant k$ та $\varphi(k+m+1) \leqslant k$, то існує $s: \varphi(s) = k$, тобто серед кілець s, $s+1$, ..., $s+m+k-1$ є k срібних та m золотих. Отже, завжди досить два розрізи.

105. Оскільки $\dfrac{m^2}{m+n} - \dfrac{n^2}{m+n} = \dfrac{m^2 - n^2}{m+n} = m - n$ – ціле число, то число $\dfrac{m^2}{m+n}$ – також ціле. Отже, $\dfrac{m^3}{m+n} = m \cdot \dfrac{m^2}{m+n}$ – ціле число.

106. Позначимо послідовно кути чотирикутника через α, β, γ, δ. Оскільки $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$, то

$sin \dfrac{\alpha+\gamma}{2} = sin\left(\pi - \dfrac{\beta+\delta}{2}\right) = sin \dfrac{\beta+\delta}{2}$. За умовою задачі $sin\alpha + sin\gamma = sin\beta + sin\delta$. Отже, $sin(\alpha+\gamma) - (sin\beta + sin\delta) =$

$$= 2\,sin\frac{\alpha+\gamma}{2} cos\frac{\alpha-\gamma}{2} - 2\,sin\frac{\beta+\delta}{2} cos\frac{\beta-\delta}{2} = 2\,sin\frac{\alpha+\gamma}{2} \times$$

$$\times\left(\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta-\delta}{2}\right) = -4\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma+\beta-\delta}{4}\times$$

$$\times\sin\frac{\alpha-\gamma-\beta+\delta}{4}=-4\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{4}\sin\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{4}=0.$$

Розглядаючи різні випадки рівності нулю одержаних множників, встановлюємо, що $\alpha+\beta=\gamma+\delta=\pi$ або $\alpha+\delta=\beta+\gamma=\pi$. Таким чином, даний чотирикутник – трапеція або паралелограм.

107. Якщо такі числа існують, то з даних рівностей випливає, що $z>0$, $y>0$, $x\geqslant 0$. У випадку $x=0$ одержуємо, що $z=1$, $y=1$. У випадку $x>0$ з умови випливає, що $x<1$, $\frac{\sqrt{2}}{2}<y<1$. Тому $\left|\frac{1-y}{1+y}\right|=\frac{1-y}{1+y}$. Отже, $y^2=\frac{1+z}{2}$, $z^2=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1+y}{2}$. Звідси випливає, що $y^2-z^2=\frac{z-y}{2}$; $(y-z)\left(y+z+\frac{1}{2}\right)=0$; $y-z=0$ або $y+z+\frac{1}{2}=0$. Випадок $y+z+\frac{1}{2}=0$ неможливий, бо $z>0$, $y>0$. Якщо $y=z$, то з рівняння $y^2=\frac{1+y}{2}$ знаходимо, що $y_1=-\frac{1}{2}$, $y_2=1$, що не задовольняє обмеженням на y. Таким чином, існує єдина трійка дійсних чисел $x=0$, $y=1$, $z=1$, яка задовольняє дані рівності. Відповідь: $x=0$, $y=1$, $z=1$.

108. Нехай у класі було x хлопчиків та y дівчаток. У кожній парі дівчина–хлопець був рівно один замріяний погляд, тому $xy=117$. Оскільки $117=1\cdot117=117\cdot1=$ $=3\cdot39=39\cdot3=9\cdot13=13\cdot9$, то умову задачі задовольняють $x=9$, $y=13$ або $x=13$, $y=9$.

Відповідь: 9 хлопців і 13 дівчат або 13 хлопців і 9 дівчат.

109. Нехай $A_1B_1C_1D_1$ і $A_2B_2C_2D_2$ – дві вказані проекції, позначені відповідно до $ABCD$. Припустимо, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Площини ABB_1A_1 та CDD_1C_1 паралельні, бо $AA_1\parallel CC_1$, $A_1B\parallel C_1D$. Аналогічно паралельними є площини ABB_2A_2 та CDD_2C_2. Але через мимобіжні прямі AB та CD паралельні площини можна

провести єдиним способом. Тому точки A, B, A_1, B_1, A_2, B_2 лежать в одній площині, і точка A_2 належить прямій A_1B_1. Аналогічно точка A_2 належить прямій A_1D_1. Отже, A_1 співпадає з A_2. Аналогічно B_1, C_1, D_1 співпадають з B_2, C_2, D_2 відповідно. Тому проекції $A_1B_1C_1D_1$ та $A_2B_2C_2D_2$ співпадають, а це суперечить умові. Отже, точки A, B, C, D лежать в одній площині. Цю площину паралельні площини ABB_1A_1 та CDD_1C_1 перетинають по паралельних прямих AB та CD. Аналогічно паралельними є прямі BC та DA. Таким чином, чотирикутник $ABCD$ – паралелограм. Відповідь: так.

110. Взявши різниці першого та другого, а також першого та третього з даних виразів, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} (x-y)(1-z)=0, \\ (x-z)(1-y)=0, \\ x+yz=6. \end{cases}$$

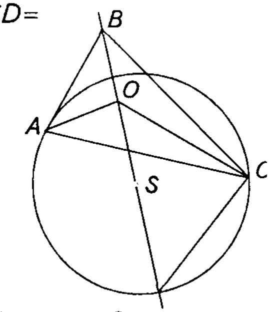
Ця система рівносильна сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0, \\ x-z=0, \\ x+yz=6, \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=0, \\ 1-y=0, \\ x+yz=6, \end{cases} \\ \begin{cases} 1-z=0, \\ x-z=0, \\ x+yz=6, \end{cases} \\ \begin{cases} 1-z=0, \\ 1-y=0, \\ x+yz=6. \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x, \\ z=x, \\ x^2+x-6=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=y, \\ y=1, \\ 1+z=6, \end{cases} \\ \begin{cases} z=1, \\ x=z, \\ 1+y=6, \end{cases} \\ \begin{cases} z=1, \\ y=1, \\ x+1=6. \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2, \\ y=2, \\ z=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3, \\ y=-3, \\ z=-3, \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=5, \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ y=5, \\ z=1, \end{cases} \\ \begin{cases} x=5, \\ y=1, \\ z=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: (2; 2; 2), (−3; −3; −3), (1; 1; 5), (1; 5; 1), (5; 1; 1).

111. Нехай O – центр кола, вписаного в $\triangle ABC$, S – центр кола, описаного навколо $\triangle AOC$. Позначимо через D точку перетину прямої BO з колом, описаним навколо

$\triangle AOC$. Тоді $\angle OCD = \angle OCA + \angle ACD = \frac{1}{2}\angle ACB + \angle AOD = \frac{1}{2}\angle ACB + \angle OAB + \angle OBA = \frac{1}{2}\angle ACB + \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle BAC + \angle ABC) = \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ$. Це означає, що OD – діаметр кола і точка S належить прямій BO.



112. З умови випливає, що $x+y \geqslant 0$. Позначимо $x+y=u$, тоді $x^2 = y + \sqrt{x+y} \Leftrightarrow x^2 = u - x + \sqrt{u} \Leftrightarrow x^2 - u + x - \sqrt{u} = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (x-\sqrt{u})(x+\sqrt{u}+1) = 0$. Звідси випливає, що $x=\sqrt{u}$ або $x=-(\sqrt{u}+1)$. У випадку $x=\sqrt{u}$ одержуємо, що $x \geqslant 0$ і $y=x^2-x$. У випадку $x=-(\sqrt{u}+1)$ одержуємо, що $x \leqslant -1$ і $y=x^2+x+1$. Неважко перевірити, що в обох випадках умова задачі виконується. Таким чином, шукана множина точок складається з частини параболи $y=x^2+x+1$, розташованої у півплощині $x \leqslant -1$, та частини параболи $y=x^2-x$, розташованої у півплощині $x \geqslant 0$. Побудову виконайте самостійно.

113. Розглянемо, наприклад, послідовність $a_n=(n!)^3$, $n \geqslant 1$. При $k \geqslant 2$ члени послідовності $b_n = a_n + k$, починаючи з $n=k$, всі діляться на k, а отже послідовність b_n містить лише скінченну кількість простих чисел. При $k=1$, $n \geqslant 2$ $b_n = (n!)^3 + 1 = (n!+1)((n!)^2 - n! + 1)$ – складені числа. При $k=0$, $n \geqslant 2$ відсутність простих чисел у послідовності $b_n = (n!)^3$ очевидна. Відповідь: так.

114. Легко побудувати потрібну систему доріг з (n^2-1) ділянок (наприклад, взяти дві «горизонтальні» ділянки і одну «вертикальну» сторону квадрата), довжиною $(n^2-1)\cdot 10$ км. Якщо ж в системі доріг більше ніж (n^2-1) ділянок, то існує замкнений маршрут, що проходить по різних містах, і вилучивши одну з ділянок цього маршруту, ми отримуємо систему доріг з меншою кількістю ділянок і таку, що все це задовольняє умову задачі. Отже, найменша можлива довжина шуканої системи доріг дорівнює $(n^2-1)\cdot 10$ км. Доведення існування замкненого маршруту проведіть самостійно.

115. Піднісши ліву і праву чатини рівності до квадрату, одержимо:

$$3z^2-2y-6z-5=2x-y^2+z^2-7-$$

$$-2\sqrt{(2x-y^2+z^2-7)(2y-x^2+z^2-12)}+2y-x^2+z^2-12;$$

$$z^2-6z+x^2-2x+y^2-4y+14+$$

$$+2\sqrt{(2x-y^2+z^2-7)(2y-x^2+z^2-12)}=0;$$

$$(z-3)^2+(x-1)^2+(y-2)^2+$$

$$+2\sqrt{(2x-y^2+z^2-7)(2y-x^2+z^2-12)}=0.$$

Оскільки кожний із доданків невід'ємний, то всі вони повинні дорівнювати нулю. Перші три доданки перетворюються в нуль, якщо $z=3$, $x=1$, $y=2$. Перевіркою встановлюємо, що для цих значень четвертий доданок також дорівнює нулю.

Відповідь: $x=1$, $y=2$, $z=3$.

116. Нехай було x курей та y індиків. Індиками себе вважають $\frac{x}{10}$ курей та $\frac{9y}{10}$ індиків. За умовою задачі маємо, що $\frac{x}{10}+\frac{9y}{10}=\frac{1}{5}(x+y)$, звідки $x=7y$. Отже, $\frac{7y}{10}+\frac{9y}{10}=\frac{1}{5}(x+y)$; $\frac{16y}{10}=\frac{1}{5}(x+y)$; $y=\frac{1}{8}(x+y)$.

Відповідь: індики складають восьму частину всього пташника.

117. Нехай O – точка перетину прямих AA_1 та BB_1. З подібності трикутників OAC та OA_1C_1 випливає, що пряма CC_1 також проходить через точку O, причому остання лежить всередині трикутника $A_1B_1C_1$. Площі подібних трикутників ABC та $A_1B_1C_1$ відносяться як $a:b$. Отже, їх лінійні розміри відносяться як $\sqrt{a}:\sqrt{b}$. Нехай P_1 – точка перетину відрізків A_1B_1 та PQ. Маємо, що $PO=\sqrt{\frac{a}{b}}P_1O$, тому площі трикутників PB_1O та P_1B_1O

відносяться як $\sqrt{a} : \sqrt{b}$. Провівши аналогічні міркування для трикутників QB_1O, QC_1O, RC_1O, RA_1O, PA_1O, прийдемо до висновку, що площі трикутників PQR та $A_1B_1C_1$ відносяться як $\sqrt{a} : \sqrt{b}$. Отже, перша з цих площ дорівнює $b\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{ab}$.

Відповідь: $\sqrt{ab}$.

118. З умови задачі випливає, що сума записаних чисел дорівнює їх кількості, тобто $a_0+a_1+\ldots+a_{10}=11\,(*)$. Крім того, $a_0+a_1+\ldots+a_{10}=0\cdot a_0+1\cdot a_1+\ldots+10\cdot a_{10}$, звідки $a_0=a_2+2a_3+\ldots+9a_{10}\,(**)$. Розгляд випадків $a_0=0$, $a_0=1$, $a_0=2$ показує, що вони не задовольняють умову задачі. Нехай $a_0=k\geqslant 3$, тоді $a_k\geqslant 1$. З умови $(**)$ випливає, що $k\geqslant (k-1)a_k$, $a_k \le 1+\frac{1}{k-1} < 2$, звідки $a_k=1$. Знову з $(**)$ одержуємо, що $a_2+2a_3+\ldots+(k-2)a_{k-1}+ka_{k+1}+\ldots+9a_{10}= =a_0-(k-1)a_k=1$, звідки $a_2=1$, $a_3=\ldots=a_{k-1}=0$, $a_{k+1}=\ldots=a_{10}=0$. Одиниця зустрічається двічі, отже, $a_1=2$. З умови $(*)$ одержуємо рівність $k+2+1+1=11$, звідки $k=7$. Одержуємо послідовність чисел: 7, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, яка задовольняє умову задачі.

Відповідь: 7, 2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0.

119. Вказівка. Встановіть, що $f(t)=\frac{16}{t^4}+\frac{16}{t^2}+2$, тоді

$$f(y)+f(z)=4\left(\frac{2}{y^2z^2}-1\right)^2,$$ де $y=\sin x$, $z=\cos x$.

Звідси одержується потрібна оцінка.

120. Вказівка. Скористайтесь формулами пониження степеня та перетворення добутку в алгебраїчну суму.

Відповідь: $x=\frac{\pi(2k+1)}{n(n+1)}$, $k\in Z$, $n\in N$.

121. а) $a(n)a(n+1)=(n^2+n+1)(n^2+3n+3)=n^4+4n^3+6n^2+4n+1+ +n^2+2n+1+1=(n+1)^4+(n+1)^2+1=a((n+1)^2)$, тобто $a(n)a(n+1)$ належить S.

б) Візьмемо довільні $n=k>2001$. Тоді $a(n)a(k)=(a(n))^2$. Але числа з S не можуть бути точними квадратами, бо $n^2<a(n)=n^2+n+1<n^2+2n+2-1=(n+1)^2$.

Отже, число $a(n)a(k)$ не належить S.

122. Згідно з нерівністю Коші, маємо:

$$a^2+\frac{e^4}{4}\geq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{e^4}{4}}=ae, \qquad b^2+\frac{e^4}{4}\geq 2\sqrt{b^2\cdot\frac{e^4}{4}}=be,$$

$$c^2+\frac{e^4}{4}\geq 2\sqrt{c^2\cdot\frac{e^4}{4}}=ce, \qquad d^2+\frac{e^4}{4}\geq 2\sqrt{d^2\cdot\frac{e^4}{4}}=de.$$

Додавши ці чотири нерівності, одержимо:

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ae+be+ce+de=(a+b+c+d)e,$$

що й треба було довести.

123. Проведемо діагональ CE. Нехай $\angle BAE=\alpha$, тоді $\angle BCE=180^\circ-\alpha$, а $\angle ECQ=\alpha$. Оскільки $AB\parallel PQ$, тоді $\angle BAE+\angle EPQ=180^\circ$. Звідси $\angle EPQ=180^\circ-\alpha$. Отже, $\angle EPQ+\angle ECQ=180^\circ$, тобто точки P, Q, C, E лежать на одному колі. Звідси випливає, що $\angle EPQ=\angle PCQ$, тобто $\angle AED=\angle BCD$. А звідси випливає, що $AD=BD$.

124. Припустимо, що можна всі вершини 2001–кутника перефарбувати за декілька кроків у білий колір. Нехай, для певності, на початку процесу вершину A_1 було пофарбовано у чорний колір. Припустимо, що вершина A_k правильного 2001–кутника a_k разів обиралася "центральною" для описаних кроків. Помічаємо, що після кожного кроку кількість чорних вершин змінюється на 1 або на 3 (БЧБ $\Rightarrow$ЧБЧ, ЧЧЧ $\Rightarrow$БББ, БЧЧ $\Rightarrow$ ЧББ, ЧЧБ $\Rightarrow$ББЧ), а тому число $S=a_1+a_2+\ldots+a_{2001}$ – загальна кількість кроків – має бути непарною. З іншого боку, $S=(a_1+a_2+a_3)+$ $+(a_4+a_5+a_6)+\ldots+(a_{1999}+a_{2000}+a_{2001})$, причому кожна з сум $S_1=a_1+a_2+a_3$, $S_2=a_4+a_5+a_6$, ..., $S_{667}=a_{1999}+a_{2000}+a_{2001}$, є числом парним (оскільки S_1 – кількість разів, що змінювала колір вершина A_2, S_2 – кількість разів, що змінювала колір вершина A_5, ..., S_{667} – кількість разів, що змінювала колір вершина A_{2000}). Отримали протиріччя (число S – одночасно непарне і парне).

Відповідь: неможливо.

125. Шукаємо n у вигляді $n=2k+1$. Тоді $(2k+1)^{2k+1}+(2k+1)^{2k+1}=$ $=(2k+1+2k+2)((2k+1)^{2k}-\ldots+(2k+2)^{2k})=(4k+3)((2k+1)^{2k}-$ $-\ldots+(2k+2)^{2k})$. Якщо $4k+3=2003$, тобто $k=500$, то потрібна властивість виконується. Отже, число $n=2\cdot500+1=1001$.

Відповідь: так.

126. Нехай α – корінь першого рівняння, тобто $a\alpha^2+b\alpha+b=0$. Якщо β – корінь другого рівняння, то $a\beta^2+a\beta+b=0$. Оскільки $\beta=1/\alpha$, то маємо, що $b\alpha^2+a\alpha+a=0$. Таким чином, $a\alpha^2+b\alpha+b-b\alpha^2-a\alpha-a=0$, тобто $\alpha^2-\alpha-1=0$.

Отже, $\alpha_1=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$, $\alpha_2=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$. Тоді

$$\beta_1=\frac{3}{1-\sqrt5}=-\frac{\sqrt5+1}{2},\quad \beta_2=\frac{2}{1+\sqrt5}=\frac{\sqrt5-1}{2}.$$

Відповідь: $\dfrac{1-\sqrt5}{2}$, $\dfrac{-1-\sqrt5}{2}$; $\dfrac{\sqrt5+1}{2}$, $\dfrac{\sqrt5-1}{2}$.

127. Вказівка. Доведіть, що точки A, B, C і F лежать на одному колі. Далі $\angle ABF=\angle ACF=\varphi$, звідси $\angle BCL=2\varphi$, а $\angle CBL=90^\circ-\varphi$.

128. Маємо:

$$(abc+xyz)\left(\frac{1}{ay}+\frac{1}{bz}+\frac{1}{cx}\right)=\frac{bc}{y}+\frac{ac}{z}+\frac{ab}{x}+\frac{xz}{a}+\frac{xy}{b}+\frac{yz}{c}=$$

$$=\frac{(1-y)c}{y}+\frac{y(1-c)}{c}+\frac{a(1-z)}{z}+\frac{z(1-a)}{a}+\frac{(1-x)b}{x}+\frac{x(1-b)}{b}=$$

$$=\frac{c}{y}-c+\frac{y}{c}-y+\frac{a}{z}-a+\frac{z}{a}-z+\frac{b}{x}-b+\frac{x}{b}-x=$$

$$=\left(\frac{c}{y}+\frac{y}{c}\right)+\left(\frac{a}{z}+\frac{z}{a}\right)+\left(\frac{b}{x}+\frac{x}{b}\right)-(c+y+a+z+b+x)=$$

$$=\left(\frac{a}{z}+\frac{z}{a}\right)+\left(\frac{b}{x}+\frac{x}{b}\right)+\left(\frac{c}{y}+\frac{y}{c}\right)-3.$$

Оскільки $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}\ge 2$ для $m,n>0$, то

$$= \left(\frac{a}{z} + \frac{z}{a}\right) + \left(\frac{b}{x} + \frac{x}{b}\right) + \left(\frac{c}{y} + \frac{y}{c}\right) - 3 \geq 2 + 2 + 2 - 3,$$

що й треба було довести.

129. Вказівка. Застосуйте метод від супротивного і одержіть протиріччя.

130. Нехай $A=a^2+a$, $B=a^3+2a$ – раціональні числа. Тоді $B=a(A+3)-A$. Оскільки рівняння $a^2+a+3=0$ не має дійсних коренів ($D=-11<0$), то $A\neq-3$. Отже, $a = \frac{A+B}{A+3}$ – число раціональне, що й треба було довести.

131. Оскільки числа m, n і k є непарними, то $mn^3=4x^2+2003\equiv$ $\equiv-1(mod\,4)$, $nk^3=4y^2-2005\equiv-1(mod\,4)$, $km^3=4z^2+2007\equiv$ $\equiv-1(mod\,4)$, x, y, $z\in N$. Тоді $(mnk)^4=(mn^3)(nk^3)(km^3)\equiv$ $\equiv-1(mod\,4)$, що неможливо.

132. Для нецілих x вихідне рівняння рівносильне рівнянню $x[x]=2004$. Нехай $n=[x]$, $\alpha=\{x\}$, $\alpha\in(0;1)$. Тоді рівняння набуде вигляду $n(n+\alpha)=2004$. Якщо $n\geqslant0$, то з нерівності $n^2<2004$ випливає, що $n<44$. Проте при $n<44$ добуток $n(n+\alpha)<n(n+1)<44\cdot45=1980<2004$. Отже, $n=-m$, $m\in N$. А тоді маємо рівність $m(m-\alpha)=2004$, звідки одержуємо такі оцінки: $m(m-1)<m(m-\alpha)=2004<m^2$. таким чином, з необхідністю $m=-[x]=45$. Залишається тільки зауважити, що число $x = -\frac{2004}{45} = -44\frac{24}{45}$ дійсно задовольняє умову задачі.

Відповідь: $x = -44\frac{24}{45}$.

133. З умови задачі випливає, що трикутник ABC – гостро-кутний. Нехай H – точка перетину висот AA_1, BB_1, CC_1 трикутника ABC. Якщо $k=AA_1\cap MN$, то $NK=KM$. Проведемо висоту NL трикутника NCM. Тоді $NL\parallel AA_1$, і, за теоремою Фалеса, $CL=LA_1=A_1M$. Нехай $F=CC_1\cap NL$, $E=CC_1\cap NM$. Оскільки $MN\parallel AB$ і $AH{:}HK=2{:}1$, то $C_1H{:}HE=$ $=2{:}1$. Далі, якщо $h_c=CC_1$, то

$$CE = EC_1 = \frac{1}{2}h_c, \quad HE = \frac{1}{3}EC_1 = \frac{1}{6}h_c, \qquad HC_1 = \frac{1}{3}h_c.$$

Таким чином $CH = \frac{2}{3}h_c$, $CF = FH = \frac{1}{3}h_c$, оскільки точка F – середина CH. Враховуючи, що $CH:CC_1 = 2:3 = CA_1:CM$. Отже, $CM_1 \perp CB$, і з того, що $C_1M = MC = MB$, одержуємо, $\angle ABC = 45^\circ$.

Відповідь: $\angle ABC = 45^\circ$.

134. Спочатку доведемо, що для $u>0$, $v>0$ справджується нерівність

$$\frac{u^3}{v} + \frac{v^3}{u} \geq \frac{(u+v)^2}{2}.$$

Дійсно, з очевидної нерівності

$$(u^2-v^2)^2 + (u-v)^2(u^2+uv+v^2) \geqslant 0$$

випливає, що $2u^4 + 2v^4 \geqslant uv(u+v)^2$. Звідки одержується потрібна нерівність. Отже, з урахуванням доведеної вище нерівності, матимемо:

$$\left(\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x}\right) + \left(\frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{y}\right) + \left(\frac{z^3}{x} + \frac{x^3}{z}\right) \geq$$

$$\geq \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(y+z)^2}{2} + \frac{(z+x)^2}{2} = \frac{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2}{2} =$$

$$= \frac{(1-z)^2 + (1-x)^2 + (1-y)^2}{2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2(x+y+z)}{2} =$$

$$= \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 1}{2},$$ що й треба було довести.

135. Доведемо, що існує тільки два розфарбування, котрі задовольняють умову задачі, а саме, коли всі непарні числа сині, а парні – жовті, і навпаки. Припустимо, що існують числа n і $n+2$, які пофарбовано у різні кольори. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що n – синє число, а $n+2$ – жовте. Візьмемо таке жовте число $m_1 > n+2$, що $s_1 = m_1 + 1$ – синє, а також таке жовте число $m_2 > m_1$, що $s_2 = m_2 + 1$ – синє число. Далі виберемо число $m_i > m_{i-1}$ так, щоб число $s_{i+1} > m_i + 1$, що число $m_{i+1} = s_{i+1} + 1$ – жовте (тут $i=3, 5, 7, \ldots, 2001$). Оскільки чисел кожного кольору безліч, то таке завжди можна здійснити. Розглянемо набір із 2003 синіх чисел

$n<s_1<s_2<s_3<\ldots<s_{2002}$, сума елементів якого становить $S=n+(m_1+1)+(m_2+1)+((m_3+1)+1)+\ldots+((m_{2001}+1)+s_{2002})$ і є числом синім. Розглянемо також і набір із 2003 жовтих чисел $n+2<m_1<m_2<m_3<\ldots<m_{2002}$, сума якого дорівнює жовтому числу $M=(n+2)+m_1+m_2+$ $+(m_3+(s_4+1))+\ldots+(m_{2001}+(s_{2002}+1))$. Але, оскільки, як нескладно бачити, $S=M$, то ми одержали суперечність. Таким чином всі числа одної парності обов'язково є одноколірними, а різної парності – різноколірними. Отже, числа 1 і 2004 є різноколірними, тобто число 2004 – жовте.

Відповідь: 2004 – пофарбоване у жовтий колір.

136. Нехай $x=x_0$ – розв'язок рівняння. Тоді модуль кожного співмножника повинен дорівнювати 1. Зокрема, $|sin\, x_0|=1$, звідки $x_0=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$. Оскільки $|sin\, 2x_0|=|sin(\pi+2\pi k)|=|sin\,\pi|=0$, то ліва частина дорівнює 0, а права частина дорівнює 1. Протиріччя. Отже, рівняння не має розв'язків.

Відповідь: $\varnothing$.

137. Позначимо x^2+2x через y. Тоді маємо квадратне рівняння $y^2-5y+3=0$. Дискримінант цього рівняння додатний, тому воно має два дійсних різних корені y_1 та y_2 для яких за теоремою Вієта справедливі рівності $y_1+y_2=5$, $y_1\cdot y_2=3$. Нехай a і b – корені рівняння $x^2+2x=y_1$, α, β – корені рівняння $x^2+2x=y_2$. За теоремою Вієта маємо такі рівності: $a+b=-2$, $ab=-y_1$; $\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-y_2$. Звідси випливає, що $(a+b)^2+(\alpha+\beta)^2=8$, тобто $a^2+2ab+b^2+\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=8$, звідки шукана сума квадратів коренів $a^2+b^2+\alpha^2+\beta^2=8-2(ab+\alpha\beta)=8-2(-y_1-$ $-y_2)=8+2(y_1+y_2)=8+2\cdot 5=18$.

Відповідь: 18.

138. Запишемо рівняння у вигляді $\sqrt{4x^2-1}=1-\sqrt{4x-1}$, звідки одержимо рівносильну систему нерівностей

$$\begin{cases}4x^2-1\ge 0,\\ 4x-1\ge 0,\\ \sqrt{4x-1}\le 1,\end{cases}\quad \begin{cases}(x-1/2)(x+1/2)\ge 0,\\ x\ge 1/4,\\ x\le 1/2.\end{cases}$$

Звідси одержуємо, що $x=1/2$.

Відповідь: $x=1/2$.

139. Вказівка. Скористайтесь нерівностями

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2} \quad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0) \text{ та } |\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|.$$

Відповідь: $\sqrt{2}$.

140. Вказівка. Запишіть рівняння у вигляді

$$9\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 + \sin^3 x + \frac{15}{4} = 0.$$

Відповідь: $\varnothing$.

141. Вказівка. Рівняння рівносильне мішаній системі

$$\begin{cases} y \ge 1, \\ |x| \ge 1, \\ y = |x| - 2\sqrt{|x|}. \end{cases}$$

142. Маємо:

$$y=x(x+3)(x+1)(x+2)=(x^2+3x)(x^2+3x+2)=(x^2+3x)^2+$$
$$+2(x^2+3x)+1-1=(x^2+3x+1)^2-1 \geqslant -1.$$

Оскільки квадратне рівняння $x^2+3x+1=0$ має два дійсні різні корені, то це найменше значення досягається.

Відповідь: -1.

143. Вказівка. Методом математичної індукції доведіть, що $x_{2n-1}=n$, $x_{2n}=n-1$, $n \in N$.

Відповідь: $x_{2005}=1003$.

144. Позначимо шукану суму через S. Тоді матимемо, що $S=1+(1+1)\cdot 2+(1+2)\cdot 2^2+\ldots+(1+99)\cdot 2^{99}=(1+2+2^2+\ldots+2^{99})+$ $+2(1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\ldots+99\cdot 2^{98})=2^{100}-1+2(S-100\cdot 2^{99})$.

Звідси знаходимо шукану суму.

Відповідь: $S=1+99\cdot 2^{100}$.

145. Вказівка. Виділяючи квадрат двочленів, одержимо рівносильну нерівність

$$(6m-5)^2+(6n-5)^2 \geqslant 50,$$

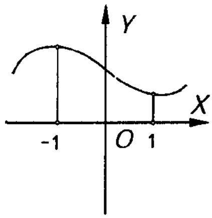
яка виконується для всіх натуральних m і n, крім $m=n=1$, що й треба було довести.

§5. ОДИНАДЦЯТИЙ КЛАС

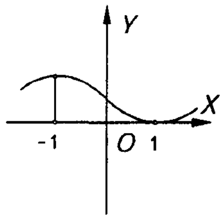
1. Розглянемо функцію $y=x^5-5x-2a$, визначену на $R=(-\infty;\infty)$.

Похідна $y'=5(x^4-1)$ перетворюється в нуль при $x=\pm1$. В точці $x=-1$ функція досягає максимуму: $y_{max}=4-2a$, а в точці $x=1$ — мінімуму: $y_{min}=-4-2a$. Зобразимо схематично графік функції при різних значеннях параметра a:

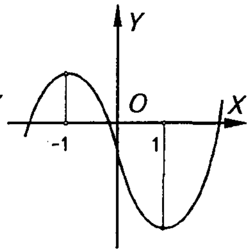
1) $a<-2$



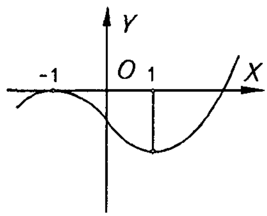
2) $a=-2$



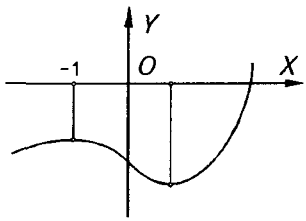
3) $-2<a<2$



4) $a=2$



5) $a>2$



Отже, рівняння $x^5=5x+2a$ має один корінь при $a<-2$ і $a>2$, два різних корені при $a=-2$ і $a=2$ (причому один з коренів кратний), три корені при $-2<a<2$.

2. Нехай $x=n$ — цілий корінь рівняння. Тоді $n^4-pn^3+q=0$, звідки $q=n^3(p-n)$. Оскільки q — просте число, то $n=\pm1$. Розглянемо ці випадки.

1) $n=1$. Тоді $q=p-1$. Числа p і q мають різну парність. Але серед парних чисел є тільки два простих: -2 і 2. Отже, маємо дві можливості: $p=3$, $q=2$ або $p=-2$, $q=-3$.

2) $n=-1$. Тоді $q=-p+1$, звідки випливає, що $p=2$, $q=-3$ або $p=-3$, $q=2$.

3. Дане рівняння запишемо у вигляді

$$(2^x - \sin y)^2 + \cos^2 y = 0.$$

Сума невід'ємних чисел дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли кожне з них дорівнює нулю. Тому рівняння

рівносильне системі $\begin{cases} \cos y = 0, \\ 2^x - \sin y = 0. \end{cases}$

Оскільки $\cos y = 0$, то $\sin y = \pm 1$. Якщо $\sin y = -1$, то рівняння $2^x + 1 = 0$ не має розв'язків, а при $\sin y = 1$ знаходимо, що $x = 0$.

Отже, розв'язки рівняння $\begin{cases} x = 0, \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z. \end{cases}$

4. Якщо одне з чисел a чи b дорівнює нулю, то рівняння зводиться до лінійного і має дійсний корінь. Припустимо, що a і b відмінні від нуля. Тоді рівняння рівносильне квадратному рівнянню

$x^2 - (1 + a^2 + b^2)x + a^2 = 0$. Дискримінант цього рівняння $D = (1 + a^2 + b^2)^2 - 4a^2 = (1 - a^2)^2 + b^2 + 2b^2 + 2a^2b^2 > 0$, тому воно має дійсні корені.

5. Оскільки $x^2 - 3x + 7 = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{19}{4} > 0$, то нерівність

$\dfrac{\log_3(x^2 - 3x + 7)}{\log_3(3x + 2)} < 1$ рівносильна системам:

$$\begin{cases} 3x + 2 > 0, \\ 3x + 2 \neq 1, \\ \log_3(3x + 2) < 0, \\ \log_3 \dfrac{x^2 - 3x + 7}{3x + 2} > 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 3x + 2 > 0, \\ 3x + 2 \neq 1, \\ \log_3(3x + 2) > 0, \\ \log_3 \dfrac{x^2 - 3x + 7}{3x + 2} < 0 \end{cases}$$

Звідси маємо, що $-\dfrac{2}{3} < x < -\dfrac{1}{3}$ або $1 < x < 5$.

Розглянемо тепер нерівність $x^2 + (5 - 2a)x - 10a \leqslant 0$. Для квадратного рівняння $x^2 + (5 - 2a)x - 10a = 0$ дискримінант $D = (2a + 5)^2$, отже його корені $x = -5$ і $x = 2a$. При $a = -\dfrac{5}{2}$ нерівність має єдиний розв'язок $x = -5$, тому в цьому випадку жодний розв'язок першої нерівності не є розв'язком другої.

Якщо $a > -\frac{5}{2}$, то квадратна нерівність має розв'язок $-5 \leqslant x \leqslant 2a$, тому довільний розв'язок першої нерівності буде розв'язком другої, якщо $2a \geqslant 5$, тобто $a \geqslant 2{,}5$.

Якщо $a < -\frac{5}{2}$, то квадратна нерівність має розв'язок $2a \leqslant x \leqslant -5$, отже, жодний розв'язок першої нерівності не буде розв'язком другої. Таким чином, довільний розв'язок першої нерівності буде також розв'язком другої при $a \geqslant 2{,}5$.

6. Нехай даним є число $N = \overline{abcdef} = 10^5a + 10^4b + 10^3c + {}$ $+ 10^2d + 10e + f$. Розглянемо число $M = \overline{bcdefa} = 10^5b + {}$ $+ 10^4c + 10^3d + 10^2e + 10f + a$. Доведемо, що коли N ділиться на одне з чисел 7,11, 13,37, то і M буде мати той самий дільник. Для цього розглянемо різницю $N - M = 99999a - 90000b - 9000c - 900d - 90e - 9f$, звідси $M = N + 90000b + 9000c + 900d + 90e + 9f - 99999a = N + {}$ $+ 9(10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f)99999a = N + 9(10^5a + 10^4b + {}$ $+ 10^3c + 10^2d + 10e + f - 10^5a) - 99999a = 10N - 999999a$. Через те, що 999999 ділиться на 7, 11, 13, 37, а за умовою задачі число N ділиться на одне з цих чисел, то і число M буде мати той самий дільник.

7. Оскільки $\cos x \leqslant 1$ і $1 + \sin^2 ax \geqslant 1$, то рівняння рівносильне системі рівнянь $\begin{cases} \sin \alpha x = 0, \\ \cos x = 1. \end{cases}$ Звідси знаходимо, що $\begin{cases} \alpha x = \pi n,\ n \in Z, \\ x = 2\pi m,\ m \in Z. \end{cases}$

Отже, рівняння ма єдиний розв'язок $x = 0$ при будь-якому ірраціональному a.

8. Нехай шукане число $N = \overline{abc}$. За умовою $N^2 = (a+b+c)^5$, звідки $N = (a+b+c)^2\sqrt{a+b+c}$. Отже, якщо таке число N існує, то сума його цифр $a+b+c$ повинна бути точним квадратом деякого натурального числа. Через те, що N — трицифрове число, то $100 \leqslant N < 1000$. Тоді $5 < 10^{2/5} \leq a + b + c = N^{2/5} < 1000^{2/5} < 16$.

Між 5 і 16 є лише один точний квадрат, тому $a+b+c=9$, $N=234$.

9. Позначивши $\frac{2^x}{2^x+1}=y$, будемо мати квадратне рівняння $y^2+ay+(a-1)=0$. Його корені $y_1=-1$, $y_2=1-a$. Рівняння $\frac{2^x}{2^x+1}=-1$ дійсних розв'язків не має, а рівняння $\frac{2^x}{2^x+1}=1-a$ має єдиний розв'язок $x=log_2\frac{1-a}{a}$, якщо $0<a<1$. Таким чином, дане рівняння має єдиний розвязок при $0<a<1$.

10. Нехай S — відстань між пунктами, x — власна швидкість катера, y — швидкість течії річки. Тоді швидкість руху першого катера $x+y$, другого $-(x-y)$, плота — y. Нехай в момент прибуття першого катера в пункт B пліт знаходиться в точці C, а другий катер — в точці D. Оскільки час руху першого катера з пункту A в пункт B $t=\frac{S}{x+y}$, то відстань плота до пункту A $AC=\frac{Sy}{x+y}$. Відстань плота до другого катера $CD=AB-$

$$-(AC+BD)=S-\left(\frac{Sy}{x+y}+\frac{S(x-y)}{x+y}\right)=\frac{Sy}{x+y}=AC.$$

Таким чином, в момент прибуття першого катера в пункт B, пліт знаходиться на однаковій відстані від пункту A і другого катера.

11. Віднявши від першого рівняння системи друге рівняння, прийдемо до сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}z-x=0,\\1986xy+z^2+x=0,\\1986xz+y^2+y+1=0.\end{cases}\\\begin{cases}1986y-x-z+1=0,\\1986xy+z^2+x=0,\\1986xz+y^2+y+1=0.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}z=x,\\1986xy+x^2+x=0,\\1986x^2+(y+1/2)^2+3/4=0.\end{cases}\\\begin{cases}1986xy-zx-x^2+x=0,\\1986xy+z^2+x=0,\\1986xz+y^2+y+1=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Перша система сукупності дійсних розв'язків не має, оскільки при дійсних значеннях змінних

$$1986x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0.$$

В другій системі сукупності також віднімемо від першого рівняння друге. Отримаємо рівносильну систему рівнянь

$$\begin{cases} z^2+zx+x^2=0, \\ 1986xy+z^2+x=0, \\ 1986xz+y^2+y+1=0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+z)^2=xz, \\ 1986xy+z^2+x=0, \\ 1986(x+z)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0. \end{cases}$$

яка не має дійсних розв'язків.

12. Відомо, що число ділиться на 3 або на 9 тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на ці числа. Цю ознаку в загальній формі можна сформулювати так: якщо $\overline{a_1a_2a_3...a_m}$ число, де кожне a_i $(i=1,2,3,...,m)$ означає не окрему цифру, а групу цифр, що стоять у цьому числі підряд, то це число ділиться на 3 або 9 тоді і тільки тоді, коли сума чисел $a_1+a_2+a_3+...+a_m$ ділиться відповідно на 3 або 9. Це випливає з того, що $\overline{a_1a_2a_3...a_m}=a_1\cdot 10^{n_1}+a_2\cdot 10^{n_2}+...+a_{m-1}\cdot 10^{n_{m-1}}+a_m$, а 10^k при діленні на 3 або 9 да в остачі 1. Отже, ми можемо твердити, що число, про яке йдеться в задачі, ділиться на 3 або 9 тоді і тільки тоді, коли відповідно на 3 або 9 ділиться число $1+2+...+1985=$ $=\frac{1985(1+1985)}{2}=1985\cdot 993$. Отриманий добуток ділиться на 3, але не ділиться на 9. Очевидно, що кожне число, яке ділиться на 3 і є точним квадратом, повинно ділитися на 9. Тому, записати підряд всі натуральні числа від 1 до 1985 в такому порядку, щоб утворене число було точним квадратом, неможливо.

13. Віднявши від першого рівняння системи друге і додавши ці рівняння, прийдемо до системи

$$\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2-x-y+1)=0,\\ x^3+y^3+x^2+y^2+x+y+2=0,\end{cases}$$

рівносильної сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=0,\\ x^3+y^3+x^2+y^2+x+y+2=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+xy+y^2-x-y+1=0,\\ x^3+y^3+x^2+y^2+x+y+2=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Перша система має дійсний розв'язок $(-1;-1)$. Позначивши $x+y=a$, $xy=b$, другу систему перепишемо так:

$$\begin{cases}a^2-b-a+1=0,\\ a(a^2-3b)+(a^2-2b)+a+2=0.\end{cases} \text{ або } \begin{cases}b=a^2-a+1,\\ a^2(1-a)=0.\end{cases}$$

Розв'язки цієї системи $\begin{cases}a=0,\\ b=1.\end{cases}$ $\begin{cases}a=1,\\ b=1.\end{cases}$ Повернувшись до змінних x і y отримаємо системи:

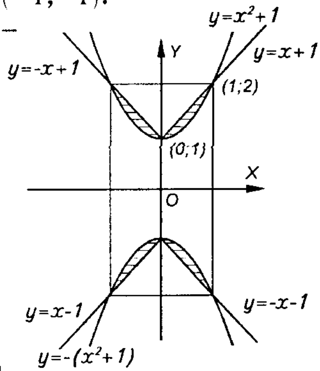
$$\begin{cases}x+y=0,\\ xy=1\end{cases} \text{ або } \begin{cases}x+y=1,\\ xy=1,\end{cases}$$

які не мають дійсних розв'язків. Отже, дана система ма єдиний дійсний розв'язок $(-1;-1)$.

14. Дана система нерівностей рівносильна сукупності систем:

$$\begin{cases}x\ge 0,\\ y>0,\\ y-x\le 1,\\ y\ge x^2+1\end{cases} \text{ або } \begin{cases}x\le 0,\\ y>0,\\ x+y\le 1,\\ y\ge x^2+1\end{cases}$$

$$\text{або } \begin{cases}x\le 0,\\ y<0,\\ x-y\le 1,\\ -y\ge x^2+1\end{cases} \text{ або } \begin{cases}x\ge 0,\\ y<0,\\ -x-y\le 1,\\ -y\ge x^2+1.\end{cases}$$



Зобразимо дану фігуру на малюнку.
Внаслідок симетрії, площа фігури

$$S=4\int_0^1(x+1-x^2-1)dx=4\int_0^1(x-x^2)dx=\frac{2}{3} \text{ (кв.од.)}.$$

15. Маємо: $x_{n+1}=x_n{}^2-2x_n+2=(x_n-1)^2+1$.
Звідси: $x_{n+1}=(x_1-1)^{2^n}+1$. При $n=9$ будемо мати, що $x_{10}=(x_1-1)^{2^9}+1=(x_1-1)^{512}+1$.
За умовою задачі повинно бутити $x_{10}=x_1$, тобто $(x_1-1)^{512}+1=x_1$. Отже, $x_1=1$ або $x_1=2$.

16. Припустимо, що $a\neq 1$. Тоді $a^{xy}=(bc)^y$;
$a^{xyz}=(b^y)^z\cdot(c^z)^y=(ac)^z\cdot(ab)^y$. Звідси $a^{xyz-x-y-z}=a^2$, тобто $xyz-x-y-z=2$.

17. Число $x=\dfrac{2}{7}$ не є коренем рівняння. Тому, поділивши рівняння на $\sqrt[n]{(2x-7)^2}$ дістанемо рівняння, рівносильне даному: $\sqrt[n]{\left(\dfrac{2x+7}{2x-7}\right)^2}-4\cdot\sqrt[n]{\dfrac{2x+7}{2x-7}}+4=0$. Це квадратне рівняння відносно $\sqrt[n]{\dfrac{2x+7}{2x-7}}$. Розв'язавши його, одержимо, $\sqrt[n]{\dfrac{2x+7}{2x-7}}=2$, звідки $x=\dfrac{7(2^n+1)}{2(2^n-1)}$.

18. Покладемо $x=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}$. Тоді $(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})x=1$.
Звідси $(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})^2=\dfrac{1}{x^2}=\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}=x-3\sqrt[3]{6}$,
$3\sqrt[3]{9}=x-\dfrac{1}{x^2}$; $162x^6=\left(x^3-1\right)^3$.
Многочлен $x^9-165x^6+3x^3-1$ — шуканий.

19. Маємо: $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{a^2+1+1}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$.
Оскільки $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ при $x>0$, то $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+2}}\geq 2$.

20. Якщо всі три числа чи яка-небудь пара чисел рівні, то нерівність очевидна.
Розглянемо випадок, коли a, b, c — різні. Тоді хоч одна з різниць $b-a$, $c-b$, $a-c$ — від'ємна. Нехай, наприклад, $a-c<0$. Тоді $\dfrac{c+ac}{a+ac}-\dfrac{c}{a}=\dfrac{c(a-c)}{a+ac}<0$,

$$\text{тобто } \frac{c+ac}{a+ac} < \frac{c}{a}.$$

Далі, оскільки a, b, c додатні, то

$$\frac{c+ac}{a+ac} < \frac{a+b+ab}{b+ab} < 1+\frac{a}{b};$$

$$\frac{b+bc}{c+bc} < \frac{b+c+bc}{c+bc} < 1+\frac{b}{c}.$$

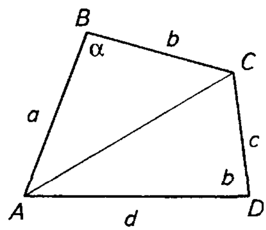
Додавши три останніх нерівності, отримаємо потрібну нерівність.

21. Маємо: $5^{2n-1}\cdot 2^{n+1}+3^{n+1}\cdot 2^{2n-1}=\frac{1}{10}(4\cdot 50^n+15\cdot 12^n)=$ $=\frac{1}{10}|4(50^n-12^n)+19\cdot 12^n|$. Оскільки $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+$ $+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})$, то різниця 50^n-12^n кратна 19 і доданок $19\cdot 12^n$ також кратний 19. Отже, дане число кратне 19.

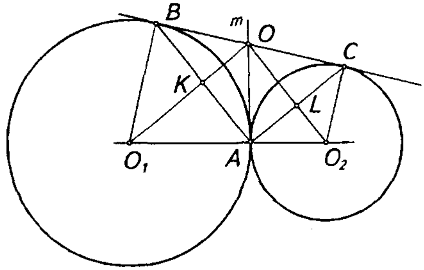
22. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ при $x>0$ і натуральних n. Похідна $f'(x)$ перетворюються в нуль при $x=n$, і в цій точці функція досягає максимуму, причому $f_{max}=\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Отже, $\frac{x^n}{e^x}\le\left(\frac{n}{e}\right)^n$, що й треба було довести.

23. Маємо очевидні нерівності $1\le\frac{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n}\le$ $\le\frac{n+n^2+n^3+\ldots+n^n}{n^n}=\frac{n(n^n-1)}{n^n(n-1)}$, звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n}=1$.

24. Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник. За умовою задачі $\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}cd\sin\beta=\frac{1}{2}(ab+cd)$, звідки $ab(\sin a-1)=cd(1-\sin b)$. Оскільки чотирикутник опуклий, то $0^\circ<a<180^\circ$, $0^\circ<b<180^\circ$, а отже $0<\sin a\leqslant 1$, $0<\sin b\leqslant 1$. Якщо $\sin a<1$, то $1-\sin b<0$, тобто $\sin b>1$, що неможливо. Отже, $\sin a=\sin b=1$, тому $a=b=90^\circ$ і точки B і D належать колу діаметра AC.



25. Оскільки O_1BCO_2 — прямокутна трапеція (чому?), то для обчислення її площі потрібно знайти $O_1B=r_1$, $O_2C=r_2$ і $BC=h$.



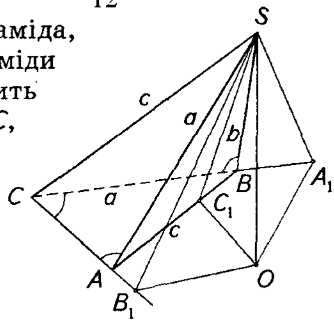
Якщо m — спільна внутрішня дотична даних кіл і $O=BC\cap m$, $OB=OA=OC$, тому точка O є центром кола, описаного навколо трикутника ABC, і $\angle BAC=90^\circ$. Оскільки $AB=8$ і $AC=6$, то $BC=10$ і $OA=5$. Легко бачити, що $O_1O\perp AB$ і $AK=KB=4$ $\Rightarrow$ $OK=3$. Із прямокутного трикутника O_1AO $AO^2=O_1O\cdot KO\Rightarrow$

$$\Rightarrow O_1O=\frac{25}{3} \Rightarrow O_1A=r_1=\sqrt{O_1O^2-OA^2}=\frac{20}{3}.$$

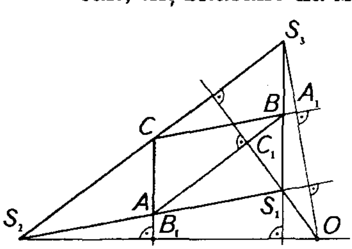
Аналогічно знаходимо

$$O_2C=r_2=\frac{15}{4}\Rightarrow S_{O_1BCO_2}=\frac{r_1+r_2}{2}\cdot h=52\frac{1}{12}.$$

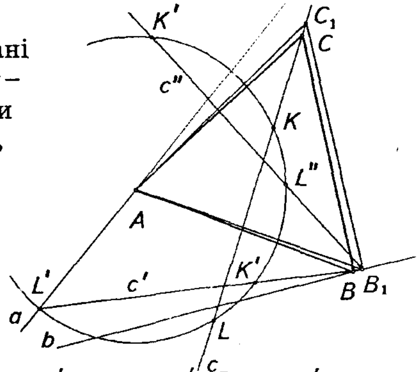
26. Нехай $SABC$ — шукана піраміда, $\angle ACB>90^\circ$ і SO — висота піраміди (те, що точка O не належить плоскому трикутнику ABC, буде показано нижче). Якщо $OC_1\perp AB$, $OA_1\perp BC$ і $OB_1\perp AC$, то за теоремою про три перпендикуляри $SC_1\perp AB$, $SA_1\perp BC$ і $SD_1\perp AC$.



Побудуємо розгортку поверхні піраміди $SABC$, “розрізавши” її по ребрах SA, BC, AC і повернувши бічні грані навколо прямих AB, BC і AC до співпадання їх площин з площиною ABC так, як вказано на малюнку (переконайтесь, що інше розміщення трикутників S_1AB, S_2AC і S_3BC відносно трикутника ABC неможливе!). Легко бачити, що $S_3C\parallel AB$, $S_1B\parallel AC$ і $S_1A\parallel BC$, тому для трикутника $S_1S_2S_3$ точка O є точкою перетину прямих, які містять його висоти, а тому ця точка не



належить його внутрішній області. Звідси зразу випливає, що точка S_1 лежить між точками O і C_1, тому $S_1C_1 < OC_1$, що неможливо, оскільки в трикутнику SOC_1 SC_1 — гіпотенуза, а OC_1 — катет. Таким чином, піраміду вказаним в задачі способом утворити не можна.

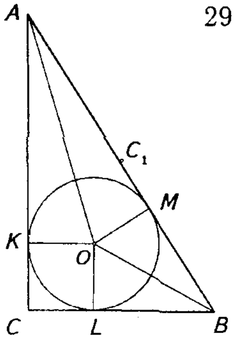


27. Нехай a, b і c — дані прямі і $\triangle ABC$ — шуканий. Якщо не задати жодної з його вершин, то задача буде неозначеною. Нехай $A \in a$ і ця точка є вершиною шуканого трикутника. Розглянемо поворот навколо точки A на орієнтований кут CAB. При цьому $C \to C' \equiv B$, $c \to c'$, $B = b \cap c'$.
Пряму c' будуємо так:
1) *Будуємо точки K і L перетину прямої c з колом* $(A;r)$; 2) Будуємо точки K' і L', які є образами точок K і L при згаданому повороті ($K' = (A;r) \cap (K,r)$, $L' = (A;r) \cap (L;r)$), і одержуємо пряму $K'L' = c'$.
Якщо використати поворот на орієнтований кут з величиною $+60^\circ$, то одержимо ще один трикутник AB_1C_1. Якщо кут між прямими b і c дорівнює 60° і точка A рівновіддалена від цих прямих, то пряма c' співпадає з b і один із шуканих трикутників буде симетричний відносно прямої AD ($D = b \cap c$). Якщо ж $\angle(b,c) = 60^\circ$ і точка A не рівновіддалена від b і c, то $c' \parallel b$ і задача матиме лише один розв'язок.
Дослідження в інших випадках взаємного розміщення даних прямих проведіть самостійно.

28. Нехай $\triangle ABC$ — даний, a, b і c — довжини його сторін, а h_a, h_b і h_c — довжини висот. За умовою задачі $b = aq$, $c = aq^2$, $h_b = h_a + d$, $h_c = h_a + 2d$. Оскільки $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2S_{\triangle ABC}$,

то $\dfrac{a}{b} = \dfrac{h_b}{h_a}$ і $\dfrac{b}{c} = \dfrac{h_c}{h_b}$, звідки $\dfrac{a}{aq} = \dfrac{h_a + d}{h_a}$ і $\dfrac{aq}{aq^2} = \dfrac{h_a + 2d}{h_a + d}$,

отже $\dfrac{h_a + d}{h_a} = \dfrac{h_a + 2d}{h_a + d}$, звідки $d = 0$, $a = b = c$.



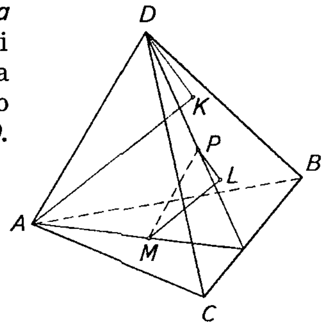
29. Нехай в трикутнику ABC $\angle ACB=90^\circ$, $AC_1=C_1B$; K, L, M — точки дотику. Відомо, що $CC_1 = \frac{1}{2}AB$, тому $AB=c=30$ (см).

1-й спосіб. Якщо O — центр вписаного кола, то легко бачити, що $CKOL$ — квадрат з площею в 16 см^2, $\triangle KOA=\triangle MOA$, $\triangle LOB=\triangle MOB$, тому площа многокутника $OKABLO$ дорівнює подвоєній площі трикутника AOB.

2-й спосіб. $BM=BL=a-r$, $AM=AK=b-r$, $AB=AM+BM=a+b-2r$, тому $a+b=c+2r=38$ (см).

$$S = r\cdot\frac{a+b+c}{2} = 136\ \left(\text{см}^2\right).$$

30. Побудуємо точки, симетричні з точкою M відносно прямих, яким належать сторони даного кута, і використаємо задачу № 25 цього параграфу.



31. Нехай $P\in BCD$, $MP\parallel AD$, $AD=a$ і $MP=x$. Опустимо з точок A і M перпендикуляри AK і ML на площину BCD і з'єднаємо точку M з точками C, B і D. Оскільки $\triangle ADK \backsim \triangle MPL$, то

$$\frac{MP}{AD}=\frac{ML}{AK}=\frac{x}{a},$$ звідки

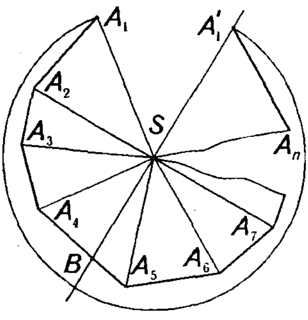
$$ML=\frac{x}{a}\cdot AK;$$

$$V_{ABCD}=V=\frac{1}{3}\cdot AK\cdot S_{\Delta BCD};$$

$$V_{MBCD}=\frac{1}{3}ML\cdot S_{\Delta BCD}=\left(\frac{1}{3}AK\cdot S_{\Delta BCD}\right)\frac{x}{a}=V\cdot\frac{x}{a}.$$

Аналогічно одержуємо: $V_{MACD}=V\cdot\frac{y}{b}$; $V_{MABD}=V\cdot\frac{z}{c}$.

Оскільки $V_{MBCD}+V_{MACD}+V_{MABD}=V$, то $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

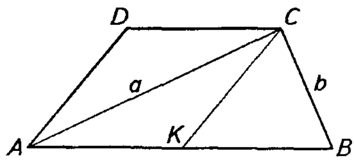


32. Нехай $SA_1A_2...A_n$ — дана піраміда і SA_1 — найдовше ребро. Розглянемо розгортку бічної поверхні піраміди, «розрізавши» її по цьому ребру. Оскільки $\angle A_1SA_2 + \angle A_2SA_3 + ... + \angle A_nSA_1' > 180°$, то існуватимуть такі дві суміжні вершини з числа $A_1, A_2, ..., A_n$, які належать різним півплощинам з межею $A_1'S$ (може, звичайно, трапитись і так, що якась з цих вершин належатиме прямій $A_1'S$). Нехай це будуть вершини A_4 і A_5. За аксіомою про розбиття прямою площини на дві півплощини відрізок A_4A_5 перетне пряму $A_1'S$ (нехай в точці B). Позначимо $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4B = a$ і $BA_5 + A_5A_6 + ... + A_NA_1' = b$. Оскільки $A_1S < a + BS$, а $A_1'S + SB < b$, то

$$2SA_1 = SA_1 + SA_1' < a + b = P_{A_1A_2...A_n}.$$

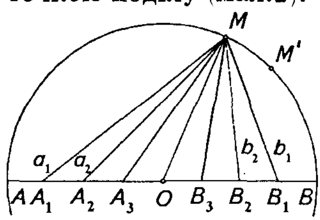
33. Якщо $AK = KB$, то $AKCD$ — паралелограм, тому $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ACK} = S_{\triangle BCK}$. Оскільки $KC = AD = KA = KB$, то $\angle ACB = 90°$, тому

$$S_{ABCD} = \frac{3}{4}ab \text{ (кв.од.)}$$

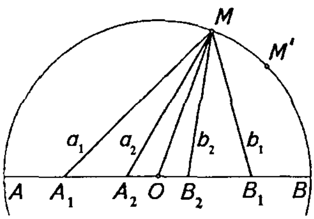


34. Якщо $n = 2m$, то число точок поділу буде непарним і дорівнюватиме $2m - 1$. При цьому одна з точок поділу співпадатиме з центром O даного кола (мал.1).

Якщо ж $n = 2m + 1$, то число точок поділу буде парним і дорівнюватиме $2m$. В цьому випадку точка O не буде точкою поділу (мал.2).



мал.1



мал.2

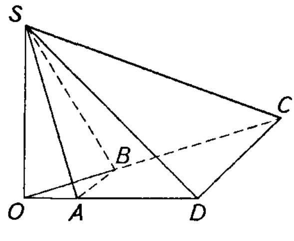
У першому випадку на кожному з радіусів OA і OB буде по $m-1$ точці поділу, а в другому – по m точок. Нехай $MA_i=a_i$, $MB_i=b_i$ $(i=1,2,3,\ldots)$. Використаємо співвідношення: $m_a^2=\frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)$, де a,b,c — довжини сторін трикутника ABC, а m_a — довжина медіани, проведеної з вершини A.

Для трикутників A_1MB_1, A_2MB_2, ..., $A_{m-1}MB_{m-1}$ (1-й випадок) і медіани $OM=r$ одержимо: $4r^2=2a_1^{\,2}+2b_1^{\,2}-A_1B_1^{\,2}=$ $=2a_2^{\,2}+2b_2^{\,2}-A_2B_2^{\,2}=\ldots=2a_{m-1}^2+2b_{m-1}^2-A_{m-1}B_{m-1}^2$, звідки $a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+\ldots+a_{m-1}^2+b_{m-1}^2=2(m-1)r^2+$ $+\frac{1}{2}\left(A_1B_1^2+A_2B_2^2+\ldots+A_{m-1}B_{m-1}^2\right)$. Для точки M' кола одержимо

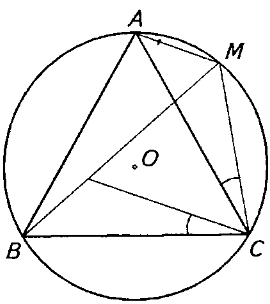
$$a_1'^2+b_1'^2+a_2'^2+b_2'^2+\ldots+a_{m-1}'^2+b_{m-1}'^2=2(m-1)r^2+$$
$$+\frac{1}{2}\left(A_1B_1^2+A_2B_2^2+\ldots+A_{m-1}B_{m-1}^2\right)=a_1^2+b_1^2+\ldots+a_{m-1}^2+b_{m-1}^2.$$

Для другого випадку одержимо такий самий результат.

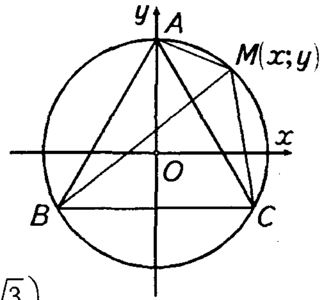
35. Існує. Досить через основу O перпендикуляра, опущеного з точки S на площину, провести два промені, на них вибрати точки A,B,C і D так, щоб вони були вершинами чотирикутника, і ці точки з'єднати з точкою S. Піраміда $SABCD$ буде шуканою.



36. 1-й спосіб. Нехай ABC — даний трикутник і M — довільна точка описаного кола. Якщо $MK=MC$, то $KC=CM$ і $\angle KCM=60^\circ$. Крім того, $\angle BCK=60^\circ-\angle KCA$, тому $\triangle BCK=\triangle ACM$ і $BK=MA$. Отже $MB=MA+MC$ (1). Із $\triangle ABM$ маємо: $AM^2+BM^2-AM\cdot BM=$ $=1$ (2). Із $\triangle BCM$ маємо: BM^2+MC^2- $-BM\cdot MC=1$ (3). Додавши (2) і (3), одержимо: $MA^2+2BM^2+MC^2-$ $-BM(AM+MC)=2$. Використавши (1), одержимо: $MA^2+MB^2+MC^2=2$.



2-й спосіб.



Виберемо прямокутну декартову систему координат так, щоб її початком був центр кола, описаного навколо даного трикутника, а вісь ординат пройшла через точку O (тоді $OX \parallel BC$). Оскільки в такому випадку

$A\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, $C\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, то

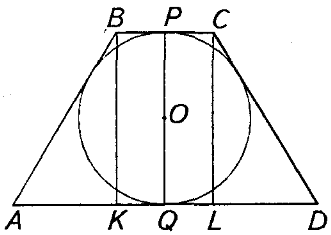
$MA^2+MB^2+MC^2=$

$$=\left(x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)+\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\right)+$$

$$+\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\right)=\left(x^2+y^2\right)\cdot 3+1.$$

Оскільки $x^2+y^2=OA^2=\frac{1}{3}$, то $MA^2+MB^2+MC^2=2$.

37. Нехай $ABCD$ — дана трапеція і $AD>BC$. Висотами BK і CL вона розіб'ється на два рівні трикутники ABK і DCL і прямокутник $BCLK$, тому при обертанні навколо прямої AD одержимо два рівні конуси і циліндр, з яких складатиметься тіло, об'єм V якого нас цікавить. Легко бачити, що радіуси основ згаданих конусів і циліндра



мають довжини $2r=2$. $V=2V_к+V_ц=\frac{2}{3}\pi\cdot 4AK+\pi\cdot 4KL$.

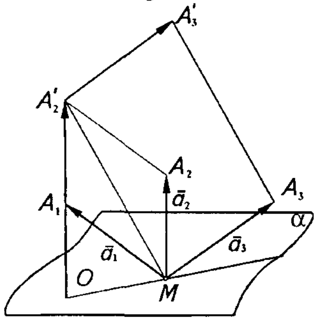
Знайдемо AK і KL. Якщо $AD=a$ і $BC=b=KL$, то за властивістю описаного чотирикутника $2AB=a+b=2AK+2b$, звідки $AB=AK+b$. Із $\triangle ABK$ маємо: $AB^2=AK^2+4$, тому $AK^2+2AK\cdot b+b^2=AK^2+4$, звідки

$$AK=\frac{4-b^2}{2b}\cdot V=\frac{8}{3}\pi\cdot\frac{4-b^2}{2b}+4\pi b=8\pi\left(\frac{2+b^2}{3b}\right),$$

де b — змінна величина, від якої залежить об'єм одержаного тіла обертання.

$$V' = 8\pi\frac{b^2-2}{3b^2} = 0, \text{ звідки } b=\sqrt{2} \text{ і } V_{min} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}.$$

38. Якщо немає площини, до якої були б паралельні прямі, що містять дані вектори, то такі вектори називають некомпланарними.



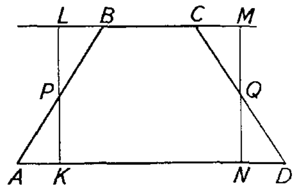
Нехай a — така площина, що кінці всіх даних векторів розміщені по один бік від неї. Піддамо вектор $\bar{a}_2$ паралельному перенесенню, яке задається вектором $\bar{a}_1$. При цьому $M \to A_1$ і $A_2 \to A_2'$, а $\overline{A_1A_2'} = \bar{a}_2$. Оскільки $A_1A_2' \| MA_2$, то пряма A_1A_2' перетинає площину a. Нехай $A_1A_2' \cap a = 0$. З того, що точки A_1 і A_2 лежать по один бік від площини a, випливає, що ці точки належать одній півплощині з межею OM (мається на увазі площина MA_1A_2). Таким чином, вектор OA_1 співнапрямлений з вектором MA_2, а отже співнапрямленими є також вектори $\overline{OA_1}$ і $\overline{A_1A_2'}$. Звідси робимо висновок, що точка A_1 лежить між точками O і A_2' і що точки A_1 і A_2' лежать по один бік від площини a. Аналогічно доводимо, що коли $\overline{A_2'A_3'} = \overline{MA_3} = \bar{a}_3$ і т.д., то всі точки $A_1, A_2', A_3', \ldots, A_n'$ лежать по один бік від площини a. Оскільки при цьому $\overline{MA_n'} = \overline{MA_1} + \overline{A_1A_2'} + \overline{A_2'A_3'} + \ldots + \overline{A_{n-1}'A_n'} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \ldots + \bar{a}_n = \bar{0}$, то точки M і A_n' співпадають, що суперечить одержаному вище результату.

39. Покладемо $1986 = a$ і $4a = 2p$, $(p = 2a)$.

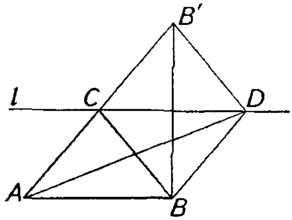
1) Для квадрата із стороною a одержимо: $S = a^2 = 1986^2$ (см²) і $2p = 4a = 4\cdot 1986$ (см).

2) Якщо розглянути прямокутник із сторонами b і c і площею $S = a^2$, то $b+c > 2a$, тобто для нього $2p_1 > 2p = 4a$. Дійсно, якщо покласти $b = a+x$ і $c = a-y$, де $x>0$, $y>0$. то $(a+x)(a-y) = a^2$, звідки $a(x-y) = xy > 0$, отже $x-y>0$, тому $2(a+x)+2(a-y) = 2(2a+(x-y)) > 4a$.

3) Покажемо, прямокутник із площею a^2 має периметр, менший від периметра рівнобічної трапеції з тією ж площею. Через середини P і Q бічних сторін трапеції проведемо $KL \perp AD$ і $MN \perp AD$. При



цьому $KN = \dfrac{AD + BC}{2}$ і площі прямокутника і трапеції рівні. Оскільки $AB > KL$, то периметр прямокутника менший від периметра трапеції. На основі 2) $2AB + BC + AD > 4a$.

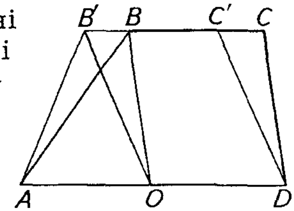


4) Покажемо, що із всіх трикутників, які мають спільну сторону і рівні площі, найменший периметр має рівнобедрений.

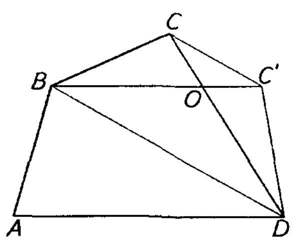
Якщо $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD}$, то точки C і D рівновіддалені від прямої AB і $CD \parallel AB$.

Якщо точка B' симетрична з B відносно прямої CD і $AC = BC$, то $C \in AB'$ і $AC + CB = AB'$. Для точки D маємо: $AD + BD = AD + DB' > AB'$.

5) Якщо трапеції мають рівні основи і рівні висоти (а отже і рівні площі), то найменший периметр має рівнобічна трапеція.



Нехай $AB' = C'D$, а $B'C' = BC$. Якщо через точку B провести $BO \parallel CD$, то $AO = AD - BC = AD - B'C'$, тому $B'O \parallel C'D$ і $AB' = B'O$. Крім того, $BO \parallel CD$, тому $BO = CD$. На основі 4) периметр нерівнобічної трапеції більший від периметра рівнобічної.



6) Покажемо, що периметр довільного опуклого чотирикутника з площею $S = a^2$, більший від $4a$.

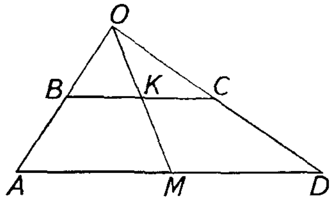
Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник. Якщо $CC' \parallel BD$ і $BC' \parallel AD$, то $S_{\triangle BCO} = S_{\triangle DC'O}$, тому $S_{ABCD} = S_{ABC'D}$. Якщо $BC = C'D$, то $CD = BC'$ і $2p_{ABCD} = 2p_{ABC'D} > 4a$ (дивись 3).

Якщо ж $BC \neq C' D$, то периметр трапеції $ABC'D$ більший від периметра, рівнобічної трапеції з такими ж основами і висотою, тобто теж більший від $4a$.

Висновок. Для квадрата із стороною $a=1986$ см маємо: $S=1986^2$ (см^2) і $2p=4\cdot1986$ (см).

Для всякого іншого опуклого чотирикутника з площею $S=1986^2$ (см^2) $2p>4\cdot1986$ (см).

40. Нехай $BK=KC$, $AM=MD$ і $O=AB\cap CD$. Оскільки $\angle A+\angle D=90^\circ$, то $\angle AOD=90^\circ$. Тоді $KO = BK = \dfrac{b}{2}$ і $MO = AM = \dfrac{a}{2}$.



Оскільки $K\in OM$ (доведіть це, використавши гомотетію з центром O і відповідними відрізками BC і AD), то

$KM=OM-OK=\dfrac{a-b}{2}$.

41. Кожна з команд має 29 суперників, тому на будь-який момент часу вона мусить зіграти від 0 до 29 ігор. Щоб усі 30 команд зіграли попарно різні кількості ігор на певний час, треба, щоб були реалізовані всі ці 30 варіантів (від 0 до 29 ігор). Тоді команда, що зіграла 0 ігор, не грала з тою командою, що зіграла 29 ігор. Але ж остання грала з усіма командами ! Протиріччя доводить твердження задачі.

42. Треба знайти найменше натуральне число q, для якого знайдеться таке число $p\in\{0,1,2,\ldots,q\}$, що матиме місце нерівність $0{,}4 < \dfrac{p}{q} < 0{,}5$. Очевидне, що $\dfrac{2}{5} < \dfrac{3}{7} < \dfrac{1}{2}$.

Це означає, що q може дорівнювати 7. Менші значення q відкидаються при перевірці.

Відповідь: $q=7$.

43. З рівняння видно, що $4-x^2\geqslant0$ та $x^4-16\geqslant0$. Звідси $\begin{cases} x^2 \le 4, \\ x^2 \ge 4 \end{cases}$. Отже, $|x|^2=4$. Але $x \ge -\dfrac{1}{4}$, тому $x=2$.

Підставимо це значення в дане рівняння і одержимо, що $3+\sqrt{y^2-3}=-y+5$.

Звідси випливає, що

$$\begin{cases} y^2 - 3 \ge 0, \\ y \le 2, \\ y^2 - 3 = (2 - y)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -\infty < y \le -\sqrt{3}, \\ \sqrt{3} \le y \le 2. \end{array}\right. \\ y = \dfrac{7}{4}. \end{cases}$$

Відповідь: $x=2$, $y = \dfrac{7}{4}$.

44. Обмеження на параметр a і змінну x визначаються системою нерівностей $\begin{cases} a > 0, a \ne 1, \\ 2a > x > 0. \end{cases}$

При цьому одержуємо, що $log_a(2a-x)-2+log_a x=0$ або $log_a|(2a-x)x|=2 \Rightarrow x^2-2ax+a^2=0$. Отже, $x=a$.
Відповідь: при $a>0$, $a\ne1$, $x=a$.

45. Позначимо $x\left(\sqrt{x^2+2}+1\right)=f(x)$.

Тоді $(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x+3}+1\right)=f(x+1)$.

Задане рівняння набирає вигляду $f(x)=-f(x+1)$. Зрозуміло, що $f(x)$ непарна строго зростаюча функція. Тоді $f(x)=f(-x-1)$, звідки $x=-x-1$.
Відповідь: $x=-0{,}5$.

46. Проведемо заміну $y=\pi-x$ і одержимо рівняння $sin^{1991}y+cos^{1991}y=1$.

Якщо $sin\,y<0$ або $cos\,y<0$, то з останнього рівняння маємо, що $cos^{1991}y=1-sin^{1991}y>1$ або $sin^{1991}y=1-cos^{1991}y>1$, що неможливо. Якщо ж $sin\,y\in(0;1)$ і $cos\,y\in(0;1)$, то $sin^{1991}y+cos^{1991}y<sin^2y+cos^2y=1$, що теж суперечить умові. Залишаються лише дві можливості: $sin\,y=0$, $cos\,y=1$ або $sin\,y=1$, $cos y=0$. Повертаючись до змінної x, маємо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} sin\,x = 0, \\ cos\,x = -1 \end{cases} \text{або} \begin{cases} sin\,x = 1, \\ cos\,x = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $\left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi r, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi r, \text{ де } r \in Z. \end{array}\right.$

47. Очевидно, що $x>0$. Розкривши дужки в лівій частині, одержуємо $1+x^2+x^4+\ldots+x^{18}=10x^9$. Останнє рівняння ділимо почленно на x^9.

Одержуємо $x^{-9}+x^{-7}+\ldots+x^{-1}+x^1+\ldots+x^9=10$.

Згрупувавши доданки, маємо рівняння: $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+$

$$+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+\left(x^7+\frac{1}{x^7}\right)+\left(x^9+\frac{1}{x^9}\right)=10.$$

Для будь-якого $a>0$ має місце нерівність $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$, причому рівність досягається тільки при $a=1$.

Звідси випливає, що для $x>0$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\ldots+\left(x^9+\frac{1}{x^9}\right)\geq 2\cdot 5=10.$$

Отже, рівність досягається лише при $x=1$.

Відповідь: $x=1$.

48. Позначимо $\sqrt{x-1}=y$. Тоді задане рівняння набуває вигляду $\sqrt{y^2+4-4y}+\sqrt{y^2+9-6y}=1$, звідки $|y-2|+|y-3|=1$, а отже, $2\leqslant y\leqslant 3$. Повертаючись до змінної x, маємо, що $2\leq\sqrt{x-1}\leq 3$, звідки $5\leqslant x\leqslant 10$.

Відповідь: $x\in|5;10|$.

49. Очевидно, що $x\neq p+2pr$, $r\in Z$, бо в супротивному випадку ліва частина рівняння була б цілим числом. Тому $\cos\dfrac{x}{2}\neq 0$, що дозволяє провести такі перетворення:

$$\cos x-\cos 2x+\cos 3x-\ldots-\cos 100x=\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\times$$

$$\times\left[2\cos\frac{x}{2}\cos x-2\cos\frac{x}{2}\cos 2x+\ldots-2\cos\frac{x}{2}\cos 100x\right]=$$

$$=\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\left[\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{5x}{2}+\right.$$

$$+\cos\frac{7x}{2}-\ldots-\cos\frac{199x}{2}-\cos\frac{201x}{2}\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\left[\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{201x}{2}\right]=\frac{1}{2}-\frac{\cos\frac{201x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}.$$

Одержуємо рівняння $\frac{1}{2}-\frac{\cos\frac{201x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}$, звідки

$$\cos\frac{201x}{2}=0\text{ . Отже, }\frac{201x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi r;$$

$$x=\frac{\pi}{201}+\frac{2\pi r}{201},\ r\in Z.$$

Відповідь: $x=\frac{\pi}{201}+\frac{2\pi r}{201}$, $r\in Z$.

50. Від даного рівняння перейдемо до такого:
$(17x-54)(yzt+y+t)=-(17zt+17)$.
Звідси одразу випливає, що $17x-54<0$, отже, $x\leqslant 3$.
Вихідне рівняння можна також записати у вигляді
$(17xy-54y+17)(zt+1)=(54-17x)t$.
Звідси маємо: $(17x-54)y+17>0$. Якщо остання нерівність вірна для деякого натурального y, то тим більше вона виконується при $y=1$, тобто $17x-54+17>0$.
Звідси $x>\frac{37}{17}$.
При натуральному x останнє веде до нерівності $x\geqslant 3$.
Таким чином, $x=3$.
Підставимо у вихідне рівняння $x=3$ і запишемо його у вигляді $(17-3y)(zt+1)=3t$.
Враховуючи, що z, y, t — натуральні числа, з останньої рівності одержуємо нерівність $0<17-3y<3$, звідки $y=5$.
Враховуючи, що $x=3$, $y=5$, вихідне рівняння подамо у вигляді $(2z-3)t+2=0$, звідки $2z-3<0$, отже, $z=1$. Тепер легко встановити, що $t=2$.
Відповідь: $x=3$, $y=5$, $z=1$, $t=2$.

51. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$\left(z-\frac{x+y}{2}\right)^2+7\left(\frac{y}{2}+\frac{x}{14}\right)^2+\frac{5}{7}x^2=1.$$ Звідси $5x^2<7$,

тобто $x\in\left[-\sqrt{\frac{7}{5}};\sqrt{\frac{7}{5}}\right]$, отже, $x\geq-\sqrt{\frac{7}{5}}$.

Мінімальне можливе значення $x=-\sqrt{\frac{7}{5}}$. При цьому значенні x заданому рівнянню задовольняють

$$y=-\frac{x}{7}=\frac{1}{\sqrt{35}};\quad z=\frac{x+y}{2}=-\frac{3}{\sqrt{35}}.$$

Відповідь: $x=-\sqrt{\frac{7}{5}}$.

52. Якщо пара чисел (x,y) — розв'язок рівняння $x^2+y^2=n$, то пара $(x+y,\ x-y)$ — розв'язок рівняння $x^2+y^2=2n$. Якщо (x,y) — розв'язок рівняння $x^2+y^2=2n$, то $\left(\frac{x+y}{2};\ \frac{x-y}{2}\right)$ — розв'язок рівняння $x^2+y^2=n$. При цьому числа $\frac{x+y}{2}$ та $\frac{x-y}{2}$ цілі, тому що числа x та y парні або непарні одночасно.

Легко бачити, що відображення множини цілих розв'язків рівняння $x^2+y^2=n$ в множину цілих розв'язків рівняння $x^2+y^2=2n$ за законом $(x,y)\to(x+y,x-y)$ взаємнооднозначне, що й розв'язує задачу.

53. Якщо жодне з чисел x, y, z не дорівнює одиниці, то $x^2+y^2+z^2+xyz\geqslant 2^2+2^2+2^2+2\cdot2\cdot2=20$, причому рівність досягається лише при $x=2$, $y=2$, $z=2$. Нехай тепер $z=1$. Маємо рівняння $x^2+y^2+xy=19$. Якщо x або y не менші від 4, то $x^2+y^2+xy\geqslant 4^2+1^2+4\cdot1=21>20$.

Тому $\{x,y\}\subset\{1;\ 2;\ 3\}$. Якщо $y=1$, то $x^2+x=18$. Останнє рівняння не має розв'язків в натуральних числах. При $x=1$ ситуація аналогічна. Це означає, що $\{x,y\}\subset\{2;3\}$. Якщо $y=3$, то $x^2+3x=10$, звідки $x=2$. Аналогічно, якщо $y=2$, то $x=3$. Ми знайшли два розв'язки заданого рівняння при $z=1$. Проводячи аналогічні міркування для $x=1$ та $y=1$, одержуємо ще 4 розв'язки.

Відповідь: 7 розв'язків: $(2,2,2)$ та 6 перестановок чисел 1, 2, 3.

54. $\begin{cases} x+y=1, \\ 200\cdot 5^x = 2^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1, \\ 5^{x+2} = 2^{y-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y, \\ 5^{3-y} = 2^{y-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y, \\ 10^{y-3} = 1. \end{cases}$

Відповідь: $x=-2$, $y=3$.

55. Очевидно, що x та y мають однакові знаки, $x\neq 0$, $y\neq 0$. Якщо $x>0$, $y>0$, то з даної системи рівнянь одержуємо:

$$\begin{cases} \sqrt{x}\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)=420, \\ \sqrt{y}\left(y\sqrt{y}+x\sqrt{x}\right)=280 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=420, \\ \sqrt{y}=\dfrac{2}{3}\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{35}{27}x^2=420, \\ y=\dfrac{4}{9}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=18, \\ y=8. \end{cases}$$

Якщо $x<0$, $y<0$, то з даної системи рівнянь одержимо:

$$\begin{cases} \sqrt{-x}\left(-x\sqrt{-x}+y\sqrt{-y}\right)=420, \\ \sqrt{-y}\left(-y\sqrt{-y}+x\sqrt{-x}\right)=280 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=420, \\ \sqrt{-y}=-\dfrac{280}{420}\sqrt{-x}. \end{cases}$$

Остання система рівнянь не має розв'язків.

Відповідь: $x=18$, $y=8$.

56. $\begin{cases} \sqrt{(x+3)^2}=x+3, \\ \sqrt{(x-3)^2}=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+3|=x+3, \\ |x-3|=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\geq 0, \\ x-3\leq 0. \end{cases}$

Відповідь: $x\in[-3;3]$.

57. Зрозуміло, що $x\geqslant -1$ та $x\neq 1$. При цьому

$$\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{x-1}-x\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x+x^2}-\left(1-x+x^2\right)}{x-1}\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x+x^2}}{x-1}\geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x\geq -1, \\ \dfrac{x(2-x)}{x-1}\geq 0. \end{cases}$$

При перетвореннях використано те, що $1-x+x^2>0$ для всіх $x\in R$ та $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x+x^2}>0$ для $1+x\geqslant 0$.

Відповідь: $x\in[-1;0]\cup(1;2]$.

58. $$\sin x > \sqrt{1-\sin 2x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0, \\ \sin^2 x > 1 - \sin 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos 2x - 2\sin 2x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0, \\ \dfrac{2}{\sqrt5}\sin 2x - \dfrac{1}{\sqrt5}\cos 2x > \dfrac{1}{\sqrt5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0, \\ \sin(2x - \varphi) > \dfrac{1}{\sqrt5}, \\ tg\,\varphi = \dfrac{1}{2},\ \varphi \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(2\pi r;\ 2\pi r + \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 2x - \varphi \in (2\pi l + \varphi;\ 2\pi l + \pi - \varphi), \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt5},\ \varphi \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(2\pi r + \varphi;\ 2\pi r + \dfrac{\pi}{2}\right), \\ \varphi = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt5}. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in \left(2\pi r + \arcsin\dfrac{1}{\sqrt5};\ 2\pi r + \dfrac{\pi}{2}\right),\ r \in Z.$

59. $$\cos 20^\circ = \cos(80^\circ - 60^\circ);$$

$$1 - 2\sin^2 10^\circ = \frac{\sqrt3}{2}\sin 80^\circ + \frac{1}{2}\cos 80^\circ;$$

$$32 - 16\sqrt3\sin 80^\circ = 64\sin^2 10^\circ + 16\sin 10^\circ;$$

$$33 - 16\sqrt3\sin 80^\circ = (8\sin 10^\circ + 1)^2;$$

$$\sqrt{33 - 16\sqrt3\sin 80^\circ} = 1 + 8\sin 10^\circ.$$

60. $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=-\sqrt[3]{c}$ звідки $a+b+3\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)=-c$.

Отже, $a+b+c+3\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\left(-\sqrt[3]{c}\right)=0$,

$a+b+c=3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow(a+b+c)^3=27abc$.

61. Скористаємось методом математичної індукції. Для $n=1$ нерівність справджується. Нехай вона вірна для n. Покажемо, що вона вірна для $n+1$. Зрозуміло, що числа $\cos^2 x-\sin^2 x$ та $(\cos^2 x)^n-(\sin^2 x)^n$ мають один і той самий знак. Тому $(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^{2n} x-\sin^{2n} x)\geqslant 0$, звідки $\cos^{2(n+1)}x+\sin^{2(n+1)}x\geqslant\cos^{2n}x\cdot\sin^2x+\sin^{2n}x\cdot\cos^2x$. Враховуючи останню нерівність, маємо співвідношення:

$$\cos^{2(n+1)}x+\sin^{2(n+1)}x\geq\frac{1}{2}\left(\cos^{2(n+1)}x+\sin^{2(n+1)}x+\right.$$
$$\left.+\cos^{2n}x\cdot\sin^{2n}x+\sin^{2n}x\cdot\cos^2x\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos^{2n}x+\sin^{2n}x\right)\left(\cos^2x+\sin^2x\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos^{2n}x+\sin^{2n}x\right)\geq\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^n},$$

що й треба було довести.

62. Покажемо спочатку, що $a_n=\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ методом математичної індукції. Для $n=1$ маємо, що $a_1=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, тобто твердження вірне. Нехай воно вірне для $n=r$, тобто $a_r=\sin\frac{\pi}{2^{r+1}}$.

Тоді $$a_{r+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{r+1}}}}{2}}=\sin\frac{\pi}{2^{r+2}}.$$

Використовуючи нерівність $\sin x<x$ $(x>0)$, маємо:

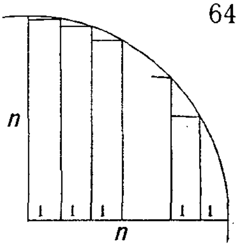
$a_1+a_2+\ldots+a_n=\sin\frac{\pi}{2^2}+\sin\frac{\pi}{2^3}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}<$

$<\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$. Але для кожного $n\in N$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots=1$, тому

$$a_1+a_2+\ldots+a_n<\frac{\pi}{2}\cdot1=\frac{\pi}{2}.$$

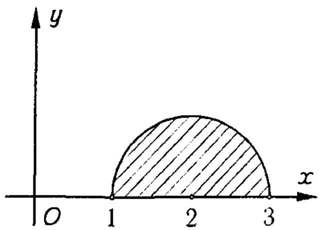
63. Для додатних a і b із рівності $a^3+b^3-a^2b-ab^2=(a-b)\times$
$\times(a^2-b^2)=(a-b)^2(a+b)$ випливає нерівність
$a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2$.
Аналогічно, $a^3+c^3 \geqslant a^2c+ac^2$, $b^3+c^3 \geqslant b^2c+bc^2$.
Додавши три останні нерівності, одержимо
$2(a^3+b^3+c^3) \geqslant a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2$.
Оскільки $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3a^2b-3ab^2-3a^2c-3ac^2-$
$-3b^2c-3bc^2-6abc$, то
$2(a+b+c)^3 \geqslant 7a^2b+7ab^2+7a^2c+7ac^2+7b^2c+7bc^2+12abc$.
Звідси випливає потрібна нерівність.



64. Цю задачу розв'яжемо графічним методом. Побудуємо чверть круга радіуса n і впишемо в утворену фігуру $n-1$ прямокутник так, як вказано на малюнку. Неважко встановити, що площа r–го стовпчика ($r \leq n-1$), починаючи зліва, дорівнює $\sqrt{n^2-r^2}$.

Сума площ стовпців менша за площу чверті круга, яка дорівнює $\frac{\pi n^2}{4}$. Звідси випливає потрібна нерівність.

65. $\int_1^3 \sqrt{4x-x^2-3}\,dx$ дорівнює площі фігури, обмеженої кривою $y=\sqrt{4x-x^2-3}$ та віссю OX (в точках з абсцисами 1 і 3 цієї кривої $y=0$). Ця фігура — півкруг з центром в точці $(2;0)$ і радіусом 1. Площа його дорівнює $\frac{\pi}{2}$.



Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

66. Є лише два простих двозначних числа з п'ятіркою. Це 53 та 59. Тому цифри 3, 5, 9 повинні зайняти три сусідніх місця. З решти шести цифр чотири цифри парні, тому якісь дві парні цифри повинні стояти поруч. З них не можна скласти простого двозначного числа.
Відповідь: не можна.

67. Запишемо нерівність у вигляді

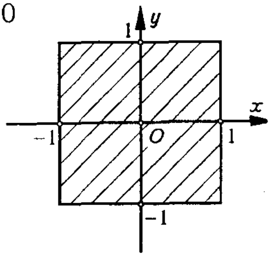
$$1-x^2+1-y^2>\sqrt{\left(1-x^2\right)^2+\left(1-y^2\right)^2}.$$

Вона рівносильна системі нерівностей

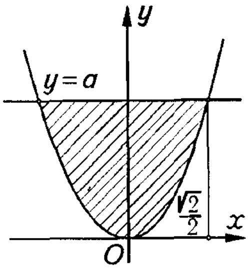
$$\begin{cases}\left(1-x^2\right)^2+2\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)+\left(1-y^2\right)^2>\left(1-x^2\right)^2+\left(1-y^2\right)^2,\\ \left(1-x^2\right)+\left(1-y^2\right)>0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)>0,\\ \left(1-x^2\right)+\left(1-y^2\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x^2>0\\ 1-y^2>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<1,\\ -1<y<1.\end{cases}$$



Множина шуканих точок — це множина внутрішніх точок плоского квадрата, зображеного на малюнку. Точки квадрата не є шуканими.



68. Мова йде про площу фігури, яка заштрихована на малюнку. Функція $y=\frac{2x^3}{3}$ є первісною для функції $f(x)=$ $=2x^2$. Тому шукана площа знаходиться з рівності

$$S=2a\sqrt{\frac{a}{2}}-\left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^3-\frac{2}{3}\left(-\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^3\right]=$$

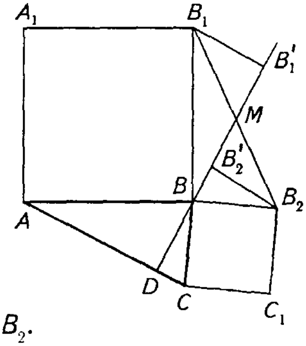
$=\frac{2\sqrt{2}}{3}a\sqrt{a}$. Розв'язуючи рівняння $\frac{2\sqrt{2}}{3}a\sqrt{a}=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, знаходимо шукане значення параметра a.
Відповідь: $a=1$.

69. Середнє арифметичне, як і середнє геометричне двох додатних чисел знаходиться між ними:

$$a\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le b\ \ (a<b).$$

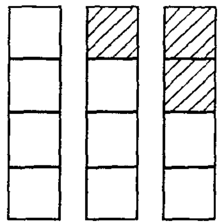
Якщо для двох сусідніх чисел $x_1\leqslant x_2$, то $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\ldots\leqslant x_{1992}\leqslant x_1$ (числа занумеровані в порядку обігу кола в напрямку $x_1\to x_2\to\ldots$).
Відповідь: усі числа дорівнюють 26.

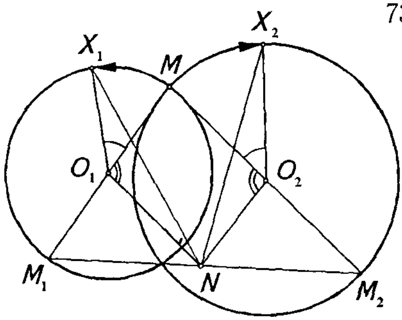
70. Нехай M — точка перетину B_1B_2 і BD, B_1' і B_2' — проекції на BD точок B_1 і B_2 відповідно. $\triangle B_2B_2'B = \triangle BDC$, $\triangle B_1B_1'B = \triangle BDA$ за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $B_1B_1' = BD = B_2B_2'$. Тоді $\triangle B_1B_1'M = \triangle B_2B_2'M$ (за другою ознакою). Звідси $B_1M = B_2M$, тобто BM — медіана трикутника BB_1B_2.



71. На діагоналі дошки $2n$ клітинок, серед яких знайдеться n різнокольорових. На них і ставимо тури.

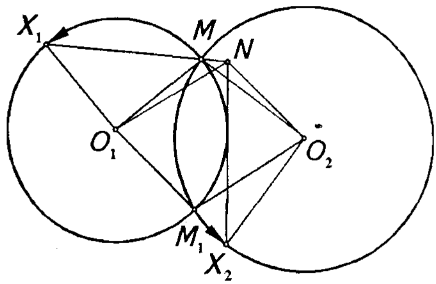
72. В кожному стовпцеві 4×1 є принаймні дві пари однокольорових клітинок. Це зрозуміло з малюнка. Всього на дошці 7 стовпців, а отже, не менше, ніж 14 таких пар. Зрозуміло, що з них не менше, ніж 7 однокольорових пар. Пара може бути розташована у стовпці шістьма способами. Тому існують дві однокольорові пари, однаково розташовані в стовпцях. Їх центри — вершини шуканого прямокутника.





73. Розглянемо спочатку випадок, коли точки X_1 і X_2 рухаються в протилежних напрямках. Нехай M_1 і M_2 — точки, діаметрально протилежні з M на першому і другому колах відповідно. Покажемо, що шукача точка N — середина відрізка M_1M_2. Зобразимо положення точок X_1 і X_2 в деякий момент часу на малюнку. Тоді $X_1N = X_2N$, бо $\triangle X_1O_1N = \triangle NO_2X_2$ за кутами X_1O_1N, X_2O_2N і прилеглими сторонами $X_1O_1 = MO_1 = NO_2$ і $O_1N = O_2M = O_2X_2$. Два випадки, коли трикутники X_1O_1N та NO_2X_2 вироджуються у відрізки, перевіряються безпосередньо.

Якщо точки X_1 і X_2 рухаються в одному напрямку, то $O_1NO_2M_1$ — паралелограм. $\triangle X_1O_1N=$ $=\triangle NO_2X_2$, тому що $X_1O_1=O_2N$, $NO_1=O_2X_2$;



$\angle X_1O_1N=\angle X_2O_2N$. Рівність останніх кутів випливає з того, що $\angle MO_1N=\angle MO_2N$, бо $\triangle O_1MN=\triangle O_2NM$ (за трьома сторонами).

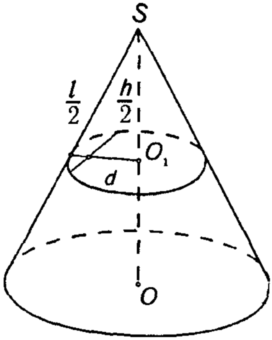
74. В момент часу t сек $(0\leqslant t\leqslant 2)$ нижній кінець драбини змістився від стіни на $2t$ м. Тоді відстань від верхнього кінця драбини до підлоги дорівнює $\sqrt{16-4t^2}=2\sqrt{4-t^2}$ (м). Отже, верхній кінець драбини опустився на $4-2\sqrt{4-t^2}$ (м). Швидкість верхнього кінця драбини $\upsilon(t)=\left(4-2\sqrt{4-t^2}\right)'=\dfrac{2t}{\sqrt{4-t^2}}$ (м/сек).

75. Нехай O — довільна точка простору, а $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{r}_4$ — радіус-вектори вершин піраміди, початок яких співпадає з точкою O. Тоді для всіх описаних в умові задачі відрізків радіус-вектором їх середин буде

вектор $$\bar{r}=\frac{1}{4}\left(\bar{r}_1+\bar{r}_2+\bar{r}_3+\bar{r}_4\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{r}_1+\bar{r}_2}{2}+\frac{\bar{r}_3+\bar{r}_4}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{r}_1+\bar{r}_4}{2}+\frac{\bar{r}_2+\bar{r}_3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{r}_1+\bar{r}_3}{2}+\frac{\bar{r}_2+\bar{r}_4}{2}\right).$$

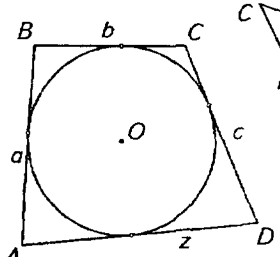
При цьому три останні вирази в цих рівностях задають радіус-вектори середин відрізків, що з'єднують середини мимобіжних ребер даної піраміди. Отже, точка перетину цих відрізків співпадає з кінцем вектора $\bar{r}$, початком якого є точка O.

76. Через задану пряму проведемо площину, паралельну до площини основи. Вона перетне конус по колу з радіусом $r = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - h^2}$, центр якого O_1 ділить відрізок SO пополам. Залишається знайти відрізок – хорду цього кола, якщо центр кола віддалений від неї на відстань d. Довжина цього відрізка дорівнює

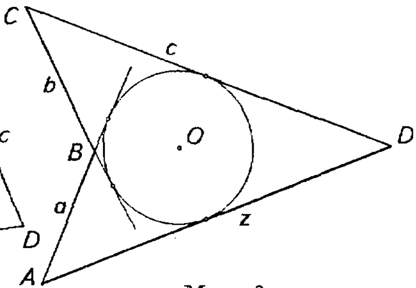


$$2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{\frac{l^2 - h^2}{4} - d^2} = \sqrt{l^2 - h^2 - 4d^2}.$$

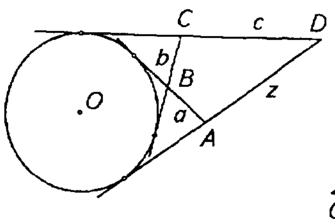
77. В площині основи піраміди є точка, відстані від якої до прямих, що містять сторони основи, рівні. Ця точка є проекцією вершини піраміди на площину основи. Слід розглянути чотири можливі випадки, які залежать від чотирикутника, що лежить в основі піраміди. Ці чотирикутники зобразимо на малюнках.



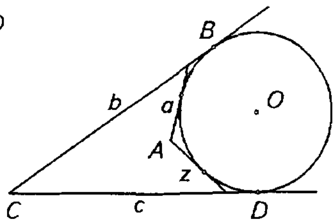
Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4

Точка O на кожному з малюнків є проекцією вершини піраміди на площину основи. Нехай $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=z$.

Використовуючи властивість дотичних, що проведені до кола з однієї точки, одержимо:

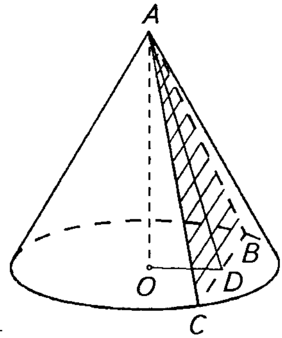
у випадках 1 (мал.1) і 2 (мал.2) $z=a+c-b$;

у випадку 3 (мал.3) $z=c+b-a$;

у випадку 4 (мал.4) $z=a+b-c$.

Зауважимо, що хоча б в одному з розглянутих випадків при будь-яких додатних a, b і c $z>0$.

78. Нехай A — вершина конуса, O — центр основи, B і C — точки перетину площини перерізу з колом основи, D — середина відрізка BC. Вісь AO перпендикулярна площині основи, $OD\perp BC$. Тому $AD\perp DC$. Нехай $AO=h$, $OC=r$ — сталі, $OD=x$ — змінна величина.



$S_{\triangle ABC}=AD\cdot CD=\sqrt{AO^2+OD^2}\times$
$\times\sqrt{OC^2-OD^2}=\sqrt{(h^2+x^2)(r^2-x^2)}=$
$=\sqrt{h^2r^2+(r^2-h^2)x^2-x^4}$. Треба знайти максимум $S_{\triangle ABC}$ при $0\leqslant x\leqslant r$. Якщо $r>h$, то він досягається при $x^2=\dfrac{r^2-h^2}{2}$, тобто $x=\sqrt{\dfrac{r^2-h^2}{2}}$. Якщо ж $r\leqslant h$, то на проміжку $[0;r^2]$ функція $f(y)=h^2r^2+(r^2-h^2)y-y^2$ спадає, максимум її досягається при $y=0$, тому й $S_{\triangle ABC}$ максимальна при $x=0$.

Відповідь: при $r>h$ $x=\sqrt{\dfrac{r^2-h^2}{2}}$; при $r\leqslant h$ переріз проходить через вісь конуса.

79. Нехай $AB=a$, $BB_1=h$ і F — середина AC. Зрозуміло, що $AC\perp BF$ і $AC\perp B_1F$. Тоді $AC\perp BFB_1$, а отже $ACB_1\perp BFB_1$. Звідси випливає, що (B_1F) є проекцією (B_1B) на ACB_1, тому BB_1F — шуканий кут. $S_{ABB_1A_1}=ah$. З другого боку,

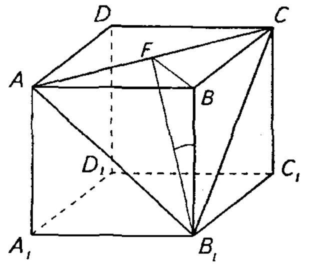
$$S_{\Delta AB_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot B_1F = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \times$$

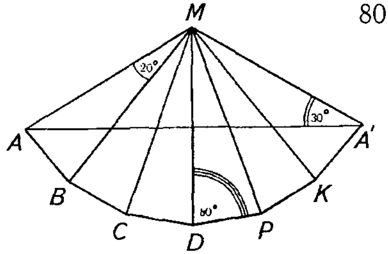
$$\times \frac{BB_1}{\cos \angle BB_1F} = \frac{ah\sqrt{2}}{2\cos \angle BB_1F}$$

Звідси $\dfrac{ah\sqrt{2}}{2\cos \angle BB_1F} = ah$, отже

$$\cos \angle BB_1F = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь: 45°.





80. Накреслимо розгортку бічної поверхні даної піраміди. Легко бачити, що $\angle AMA' = 120°$. Мінімальний шлях на розгортці зобразитися відрізком AA'. Його довжину і треба знайти. Очевидно, що

$$AM = \frac{a}{2\cos 80°};\ AA' = 2AM \cdot \cos\angle MAA' = \frac{2a \cdot \cos 30°}{2\cos 80°}.$$

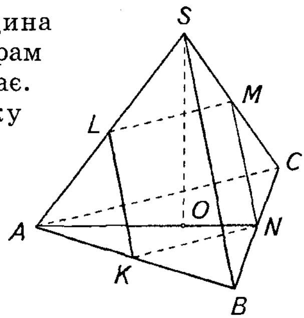
Відповідь: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2\cos 80°}$.

81. Неважко довести, що площина перерізу паралельна двом ребрам піраміди, які вона не перетинає. В позначеннях на малюнку $KN \parallel AC \parallel LM$, $KL \parallel SB \parallel MN$. Звідси

$$\frac{KL}{SB} = \frac{AL}{AB} = 1 - \frac{LB}{AB} = 1 - \frac{LM}{AC}.$$

Оскільки $KL = LM = b$, $AC = a$, то

$$\frac{b}{SB} = 1 - \frac{b}{a}.\ \text{Отже,}\ SB = \frac{ab}{a-b}.$$



Висота піраміди $H = \sqrt{\dfrac{a^2b^2}{(a-b)^2} - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{3b^2 - (a-b)^2}}{\sqrt{3}(a-b)}$,

тому $V = \dfrac{a^3\sqrt{3b^2 - (a-b)^2}}{12(a-b)}$.

82. $U_2U_0=KU_1$, $U_2=KU_1$; $U_1U_2=U_1KU_1=KU_1^2>0$, звідси $U_1\neq0$, $K>0$. Оскільки для всіх натуральних n виконується рівність $U_{n+1}=K\dfrac{U_n}{U_{n-1}}$, то маємо послідовність: $U_0=1$, $U_1=U_1$, $U_2=KU_1$, $U_3=K^2$, $U_4=\dfrac{K^2}{U_1}$, $U_5=\dfrac{K}{U_1}$, $U_6=1, U_7=U_1$. Отже, послідовність періодична з періодом 6, тобто $U_{n+6}=U_n$. За умовою $U_{1995}=100$, тобто $U_3=K^2=100$, звідки $K=10$.

83. Так, існує. Наприклад, $p(x)=x^2+1995^2$. Для цього многочлена $p'(x)=2x$ і $p(x)-1995p'(x)=x^2+1995^2-1995\cdot2x=$ $=(x-1995)^2\geqslant0$ для будь-яких значень x.

84. Поклавши $n=0$, одержимо $f(f(0))+f(0)=3$, звідки $f(0)\Box3$. Розглянемо можливі випадки:

1. $f(0)=0$. Тоді $f(f(0))+f(0)=f(0)+0=0+0=0\neq3$. Отже, цей випадок неможливий.

2. $f(0)=1$. Тоді $f(1)+1=3$, звідси $f(1)=2$. Методом математичної індукції доводимо, що в цьому випадку $f(k)=k+1$.

3. $f(0)=2$. Тоді $f(f(0))+f(0)=f(2)+2=3$, звідки $f(2)=1$. Поклавши $n=2$, дістанемо $f(f(2))+f(2)=f(1)+1=$ $=2\cdot2+3=7$, звідки $f(1)=6$.

Поклавши $n=1$, дістанемо $f(f(1))+f(1)=f(6)+6=$ $=2\cdot1+3=5$, звідки $f(6)=-1$, а це неможливо, бо множиною значень функції f є множина невід'ємних цілих чисел. Отже, цей випадок неможливий.

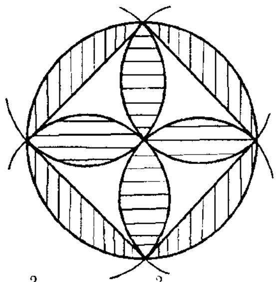
4. $f(0)=3$. Тоді $f(f(0))+f(0)=f(3)+3=2\cdot0+3=3$, звідки $f(3)=0$. Поклавши $n=3$, дістанемо $f(f(3))+f(3)=$ $=f(0)+f(3)=3+0=3\neq2\cdot3+3=9$. Отже, цей випадок неможливий.

Таким чином, $f(n)=n+1$ і $f(1995)=1996$.

85. А) Для деякого маршруту $A_1A_2A_3$ та іншої зупинки B легко отримати, що через пари зупинок (B,A_1), (B,A_2) та (B,A_3) проходить по одному окремому маршруту. Тобто, через B проходить рівно три маршрути. Аналогічні міркування із зупинкою $A_i\left(i=\overline{1,3}\right)$ та маршрутом через зупинку B показують, що через кожну із A_i проходить рівно три маршрути (один з них $A_1A_2A_3$). Отже, кількість маршрутів $3\cdot2+1=7$.

Б) Якщо $A_1A_2...A_n$ — деякий маршрут і B — ще деяка зупинка, то через B проходить n маршрутів (див.а)). Візьмемо ще один маршрут $C_1C_2...C_k$ і точку B зовні цих двох маршрутів. Тоді маршрути з B мають по одній спільній точці з $A_1A_2...A_n$ та $C_1C_2...C_k$, звідки $n=K$. Всі маршрути мають однакову кількість зупинок. Отже, $n(n-1)+1=13$, звідки $n=4$.

86. Нехай сторона квадрата дорівнює a. Тоді площа “квітки” дорівнює $4\,\omega\frac{a^2}{8}(\pi-2)=\frac{a^2}{2}(\pi-2)$. Радіус описаного кола $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, тому площа частини



круга поза квадратом дорівнює $\pi\frac{a^2}{2}-a^2=\frac{a^2}{2}(\pi-2)$.

87. Серед чисел a_1, a_2, ..., a_{1994} рівно 998 чисел не менших 997. З них хоча б одне число має один з номерів 998, 999,...,1994. Для цього числа $(n-1)a_n \geqslant 997\cdot 997=997^2$.

88. Підставивши $x=y=0$, одержимо $f(0)=0$. Для $y=0$, і $\forall x\in R$ дістанемо $f(x^2)=f(x)$. Звідси випливає, що $f(x^4)=f(x)$. Покладемо $y=-x^2$.
Тоді $0=f(x)+f(x^4)=2f(x)$. Отже, $f(x)\equiv 0$.

89. Площа трикутника $A_1B_1C_1$: $\frac{1}{2}A_1B_1\cdot A_1C_1 sin\angle A_1 \leqslant \leqslant \frac{1}{2}A_1B_1\cdot A_1C_1<\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$. Площа трикутника ABC: $S_{\Delta ABC}=\frac{1^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. Для кута a між площинами $cos\,\alpha=\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}}<\frac{\sqrt{3}\cdot 4}{8\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$, звідки $a>60^\circ$.

90. Ліву частину нерівності перепишемо у вигляді: $(1+sin\,x)x^2+cos\,x\cdot x+\frac{1}{2}$ і розглянемо цей вираз як квадратний тричлен відносно x з коефіцієнтами

$a=1+\sin x$, $b=\cos x$, $c=\frac{1}{2}$. Оскільки $\sin x \geqslant -1$, то $1+\sin x \geqslant 0$.

а) Нехай $1+\sin x>0$. Дискримінант квадратного тричлена

$$D = b^2 - 4ac = \cos^2 x - 4(1+\sin x)\cdot\frac{1}{2} = \cos^2 x - 2 \times$$
$$\times(1+\sin x) = (1-\sin^2 x) - 2(1+\sin x) = -\sin^2 x -$$
$$-2\sin x - 1 = -(\sin^2 x + 2\sin x + 1) = -(1+\sin x)^2 < 0,$$

тому $(1+\sin x)x^2 + \cos x \cdot x + \frac{1}{2} > 0$;

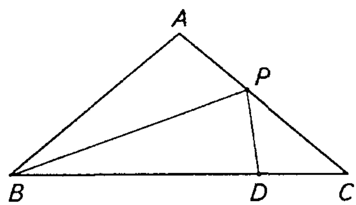
б) Випадок $1+\sin x=0$ приводить до правильної числової нерівності $\frac{1}{2} > 0$.

91. $$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 16^y = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-1} \cdot 3^{y-1} = 1, \\ 3^{x-1} \cdot 16^{y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{(x-1)^2} \cdot 3^{(x-1)(y-1)} = 1, \\ 3^{(x-1)(y-1)} \cdot 16^{(y-1)^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2} = 16^{(y-1)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4(y-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=-2(y-1), \\ x-1=2(y-1). \end{array}\right.$$

Отже, $$\left[\begin{array}{l} 2^{-2(y-1)} \cdot 3^{y-1} = 1, \\ 2^{2(y-1)} \cdot 3^{y-1} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{4}\right)^{y-1} = 1, \\ 12^{y-1} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow y = 1.$$

Відповідь: $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$

92. Візьмемо на BC точку D так, що $BP=BD$. Легко підрахувати, що $\angle APB=60^\circ$, $\angle BPD=80^\circ$, тому $\angle DPC=\angle DCP=40^\circ$ і $PD=DC$. Навколо чотирикутника $APDB$ можна описати коло, бо $\angle ABD+\angle APD=180^\circ$. Оскільки $\angle ABP=\angle DBP$, то $AP=PD$, бо вписані рівні кути спираються на рівні хорди. Звідси $AP+PB=DC+BD=BC$.



93. Нерівність перепишемо у вигляді

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+n\right)>\sqrt[n]{2}.$$

Ліву частину подамо так:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+n\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+1+\frac{1}{n+1}+1+\ldots+\frac{1}{2n-1}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n+1}+\ldots+\frac{2n}{2n-1}\right).$$

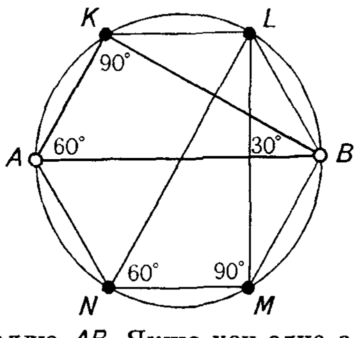
За нерівністю Коші

$$\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n+1}+\ldots+\frac{2n}{2n-1}\ge$$

$$\ge n\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\ldots\times\frac{2n}{2n-1}}=n\sqrt[n]{2}.$$

Отже, $\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n+1}+\ldots+\frac{2n}{2n-1}\right)\ge\frac{1}{n}\cdot n\sqrt[n]{2}=\sqrt[n]{2}$.

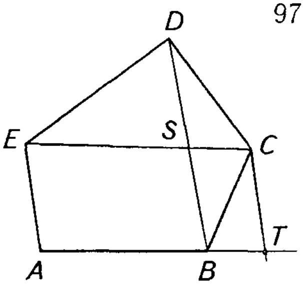
94. Розглянемо рівносторонній трикутник ABC, в якому $AB=2$. Оскільки всі точки площини пофарбовано в два кольори, то хоча б дві вершини цього трикутника є однокольоровими. Нехай, для певності, точки A і B є "білими". Побудуємо правильний шестикутник $AKLBMN$ з великою діагоналлю AB. Якщо хоч одна з точок K, L, M або N є "білою", то твердження доведено. Якщо ж всі ці точки "чорні", то маємо чотири шуканих трикутники.



95. $a_{n+1}^2+a_n^2=k^2(a_{n+1}a_n+1)$ для всіх $n\geqslant 0$, що можна довести методом математичної індукції.

96. Відповідь: починаючий гравець.

Починаючий може домогтися того, щоб було $f(0)=a_2+a_4+\ldots+a_{1996}=0$ Першим ходом він підставляє довільне число замість a_1. Далі, коли другий гравець буде замінювати коефіцієнт a з непарним індексом, перший наступним ходом ставить будь-яке число замість будь-якого коефіцієнта з непарним індексом. Коли другий обирає коефіцієнт з парним індексом, перший — аналогічно з парним. Так починаючий забезпечує собі можливість робити останню заміну серед $a_2, a_4, \ldots, a_{1996}$ і цією заміною домогтися, щоб $a_2+a_4+\ldots+a_{1996}=0$.



97. Нехай $ABCDE$ — заданий п'ятикутник. Візьмемо точку $T \in AB$ таку, що $CT \| AE$. Через S позначимо точку перетину CE і BD. Неважко довести, що S лежить всередині пятикутника, а T — зовні.

Позначимо: $AB=d$, $AE=c$ та $x=\dfrac{SC}{AB}$.

З подібності трикутників SCD та ABE маємо, що $SD=x\cdot c$. $ABSE$, $ATCE$, $BTCS$ — паралелограми, тому $SE=d$, $TC=c$, $BT=xd$. З подібності $\triangle ESD$ та $\triangle ATC$ випливає, що

$$\frac{SD}{TC}=\frac{SE}{TA} \Leftrightarrow \frac{xc}{c}=\frac{d}{d+xd} \Leftrightarrow (x+1)x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(оскільки $x>0$).

Шукане відношення $\dfrac{CE}{AB}=1+x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ і не залежить від вибору пари згаданих відрізків.

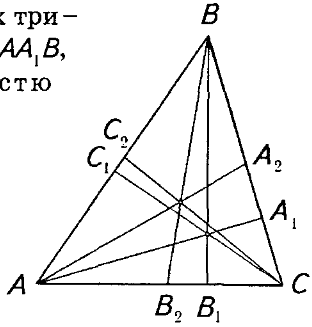
Відповідь: $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

98. Дане рівняння записуємо у вигляді

$$(x-1)(x-y)+(x-1)^2=0.$$

За умовою перший доданок невідємний, тому $x=1$, $y=1$.
Відповідь: $x=y=1$.

99. Розглянемо серію прямокутних трикутників BB_1C, ABB_1, AA_1C, AA_1B, ACC_1, CBC_1. За властивістю медіани маємо



$A_2B_1 = \dfrac{1}{2}BC$, $B_1C_2 = \dfrac{1}{2}AB$ і т.д.

$A_2B_1 + B_1C_2 + C_2A_1 + \ldots + C_1A_2 =$

$= \dfrac{1}{2}(AB+BC+AC+AB+$

$+BC+AC) = AB+BC+AC = P_{ABC}$.

100. Знайдемо точку перетину графіків. Для цього розв'яжемо рівняння $|2x-a| = 1-|1-x|$ (1).

1) Якщо $x \le \dfrac{a}{2}$, то (1) має вигляд $a-2x-x=0$, звідки $x = \dfrac{a}{3}$.

2) Якщо $\dfrac{a}{2} < x < 1$, то (1) має вигляд $2x-a=x$, звідки $x=a$.

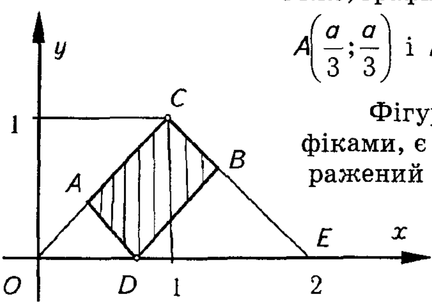
Але $a>1$, тому $x=a$, не є розв'язком.

3) Якщо $x \geqslant 1$, то (1) має вигляд $2x-a=2-x \Rightarrow x=\dfrac{a+2}{3}$.

Це значення підходить.

Отже, графіки мають дві спільні точки:

$A\left(\dfrac{a}{3}; \dfrac{a}{3}\right)$ і $B\left(\dfrac{a+2}{3}; \dfrac{4-a}{3}\right)$.



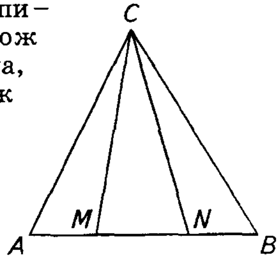
Фігура, обмежена цими графіками, є чотирикутник $ABCD$, зображений на малюнку. При цьому $C(1;1)$, $D\left(\dfrac{a}{2};0\right)$. Нехай $E(2;0)$.

$S_{ACBD} = S_{OCE} - S_{OAD} - S_{DBE}$. Отже,

$$S_{ACBD} = 1 - \frac{1}{12}a^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{4-a}{3}\right)\left(2-\frac{a}{2}\right) = 1 - \frac{1}{12}a^2 -$$

$$-\frac{1}{12}(4-a)^2 = \frac{1}{6}\left(-a^2+4a-2\right) = \frac{1}{6}\left(2-(a-2)^2\right) < \frac{1}{3}.$$

101. Позначимо через r радіус кола, описаного навколо $\triangle AMC$ (і також $\triangle BNC$). Нехай p — радіус кола, описаного навколо $\triangle ANC$ (і також $\triangle BMC$). За теоремою синусів



$$\frac{AC}{\sin\angle AMC}=\frac{BC}{\sin\angle BNC}=2r,$$

$$\frac{AC}{\sin\angle ANC}=\frac{BC}{\sin\angle BMC}=2p.$$

Звідси, оскільки $\sin\angle ANC=\sin\angle BNC$ та $\sin\angle BMC=\sin\angle AMC$, маємо $AC^2=BC^2$. Трикутник ACB рівнобедрений.

102. За умовою задачі за столом можуть бути такі трійки сусідів: БВП, ПББ, БПБ, ППБ,БПП (П — правдивий, Б — брехун). В перших трьох випадках середній учень стверджував, що два сусіди–брехуни, в останніх двох, що брехун лище один. Насправді, в перших трьох випадках у трійці було 2 брехуни, а в останніх двох – 1. Отже, всього згадувалося $18\cdot2+12=48$ брехунів. Оскільки кожен брехун згадувався 4 рази (він входить до 4 трійок), то всього брехунів було $48:4=12$.

103. Нерівність $x-\sqrt{x}\le y-\frac{1}{4}\le x+\sqrt{x}$ запишемо у вигляді $\left|x-y+\frac{1}{4}\right|\le\sqrt{x}$. Звідси випливає, що

$$\left(x-y+\frac{1}{4}\right)^2\le x,\quad x^2+y^2+\frac{1}{16}-2xy+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\leqslant x,$$

$$x^2+y^2+\frac{1}{16}-2xy-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\leqslant y,\qquad \left(x-y-\frac{1}{4}\right)^2\le y,$$

$$\left|x-y-\frac{1}{4}\right|\le\sqrt{y},\ -\sqrt{y}\leqslant x-y-\frac{1}{4}\leqslant\sqrt{y},\ y-\sqrt{y}\leqslant x-\frac{1}{4}\leqslant y+\sqrt{y}.$$

104. Дане рівняння перепишемо у вигляді

$(3tgx-ctgx)^2+5(1+sin3x)+(1-cos12x)=0,$

$(3tgx-ctgx)^2+5(1+sin3x)+2sin^2 6x=0.$

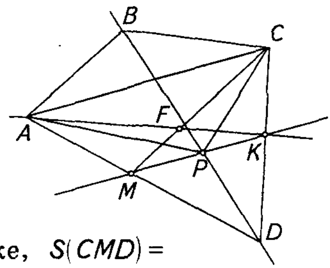
Звідси випливає, що $\begin{cases}3tgx-ctgx=0,\\1+sin3x=0,\\sin6x=0,\end{cases}$ $\begin{cases}|tgx|=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\\sin3x=-1,\\cos3x=0,\end{cases}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} tgx = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \\ tgx = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \end{array}\right. \\ 3x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z, \\ 3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in Z, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z, \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{3},\ k \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi m}{3},\ m \in Z. \end{cases}$$

Отже, $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi l,\ l \in Z, \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi l,\ l \in Z. \end{array}\right.$

Відповідь: $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

105. Нехай площа даного чотирикутника $S(ABCD) = Q$. Позначимо через F точку перетину прямих AK та CM. За умовою задачі



$S(ABCM) = S(CMD) = \dfrac{Q}{2}$,

$S(ABCK) = S(AKD) = \dfrac{Q}{2}$. Отже, $S(CMD) =$

$= S(AKD) \Rightarrow S(CFK) = S(AFM) \Rightarrow S(CKA) = S(CMA) \Rightarrow$
$\Rightarrow MK \| AC \Rightarrow S(CKA) = S(CPA) \Rightarrow S(ABCK) = S(ABCP) \Rightarrow$
$\Rightarrow S(ABCP) = \dfrac{Q}{2} \Rightarrow \dfrac{S(ABCD)}{S(ABCP)} = 2$. Відповідь: 2.

106. Нехай $f(-1) = a$. Для всіх $x \neq 0$, поклавши $y = -1$, одержуємо, що $f(x) - a = a f(x) - a f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. (1)

Якщо $a = 1$, то звідси випливає, що $f(t) = 1$ для всіх $t \neq 0$, а це суперечить тому, що рівняння $f(x) = 0{,}5$ має принаймні один корінь. Отже, $a \neq 1$. Замінивши в рівнянні (1) x на $\dfrac{1}{x}$, одержимо, що

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - a = a f\left(\frac{1}{x}\right) - a f(x). \qquad (2)$$

З рівнянь (1) та (2) легко знаходимо співвідношення $f(x)(1-2a)=a(1-2a)$. (3)

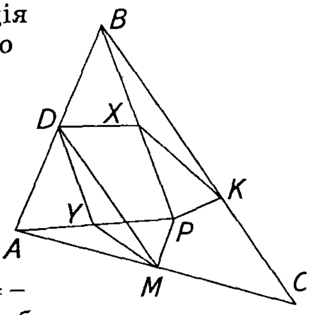
Якщо $a \neq \frac{1}{2}$, то для всіх $x \neq 0$ із рівняння (3) одержимо, що $f(x)=a$, а це суперечить умові задачі. Таким чином, $a=\frac{1}{2}$. Відповідь: $f(-1)=\frac{1}{2}$.

107. Доведемо відповідне твердження для прямокутників розміром $2^n \times 1998^2$ методом математичної індукції. Для $n=1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження вірне при $n=k$ і доведемо його для $n=k+1$. Проведемо уявну пряму ℓ, яка розбиває прямокутник P_{k+1} розміром $2^{k+1} \times 1998^2$ на два прямокутники розміром $2^k \times 1998^2$. Розглянемо спочатку всі розбивання прямокутника P_{k+1}, які містять принаймні одну фігуру, що розрізається прямою ℓ. Сукупність всіх таких розбивань розпадається на пари неспівпадаючих розбивань, котрі взаємно симетричні відносно прямої ℓ і містять парну кількість N розбивань. Всі інші розбивання прямокутника P_{k+1} породжують відповідні розбивання двох прямокутників розміром $2^k \times 1998^2$. За припущенням індукції, кожний з цих прямокутників розбивається непарним числом способів, яке позначимо через M. Таким чином, кількість способів розбивання прямокутника P_{k+1} дорівнює $N+M^2$, і є числом непарним.

108. Легко перевірити, що $x=1$ не є коренем даного рівняння. Помноживши обидві частини рівняння на $(1-x)^2$, одержимо рівняння $(1-x^3)(1-x^{11})=(1-x^7)^2$, звідки $x^3(x^4-1)^2=0$. Коренями цього рівняння є $x=0$, $x=-1$, $x=1$. Відповідь: $x=-1$, $x=0$.

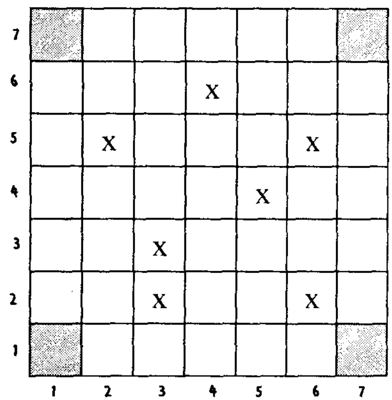
109. Дану рівність перепишемо у вигляді $sin\alpha(sin\alpha-cos\beta)+$ $+sin\beta(sin\beta-cos\alpha)=0$. Якщо $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$, то $0<\alpha<\frac{\pi}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}$. Тоді обидві різниці в останній рівності є від'ємними, від'ємною буде ліва частина рівності, і ми приходимо до суперечності. Якщо $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$, то також одержуємо суперечність (ліва частина рівності буде додатною). Отже, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

110. Припустимо, що така функція існує і розглянемо функцію $f(x)=f(x)-f(x+sinx)$, $x\in R$. За умовою задачі $f(x)\geqslant 0$ для всіх $x\in R$. Оскільки для всіх $n\in Z$ $f(\pi n)=f(\pi n)-$ $-f(\pi n+sin\pi n)=f(\pi n)-f(\pi n)=0$, то за теоремою Ферма $f'(\pi n)=0$ для всіх $n\in Z$. Отже, $f'(\pi n)-f'(\pi n)(1+cos\pi n)=-$ $f'(\pi n)cos\pi n$, звідки $f'(\pi n)=0$ для будь-якого $n\in Z$. Таким чином, рівняння $f'(x)=0$ має безліч коренів, що суперечить умові б). Відповідь: не існує.



111. Позначимо через D, Y, X середини відрізків AB, AP, BP відповідно. Нехай $MD=KD$. Тоді $MY=AY=PY$, $KX=BX=PX$, чотирикутник $PYDX-$ паралелограм. Звідси випливає, що $\triangle MDY=\triangle DKX$ (чому?) та $\angle DXK=\angle MYD$. Оскільки $\angle DXP=\angle DYP$, то $\angle PXK=\angle PYM$. Отже, $2\angle PBK=2\angle PAM$, тобто $\angle PBC=\angle PAC$.

112. Покажемо, що це можна зробити. Спочатку відмітимо 7 клітинок на шахівниці так, щоб будь-яка п'ятиклітинкова фігура даного вигляду містила принаймні одну відмічену клітинку. Наприклад, можна відмітити клітинки (2; 5), (3; 2), (3; 3), (4; 6), (5; 4), (6; 2), (6; 5) (перша цифра – номер стовпчика, друга – рядка клітинки, яку відмічаємо). Для деякого натурального m виконується рівність $199919991999=3m$ (чому?).
У відмічених клітинках запишемо числа $(-5m)$, а в інших клітинках записуємо число m. Тоді в кожній п'ятиклітинковій фігурі сума чисел дорівнюватиме $(-5m)+4m=-m<0$, або $2(-5m)+3m=-7m<0$. При цьому сума всіх записаних у клітинках чисел дорівнює $7\cdot(-5m)+38\cdot m=$ $=-35m+38m=3m=$ $=199919991999$.



113. Число $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+$ $+3n^2+3n+1=3n^3+6n=3n^2(n+2)$ буде парним тільки при парному n і, крім того, буде ділитися на 4. Число $\overline{22...2}$ також є парним, але на 4 не ділиться, тому рівність $\overline{22...2}=(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$ неможлива.

Відповідь: ні, не існує.

114. За властивостями вписаних кутів, $\angle BDA=\angle DCA$ в колі ω та $\angle DCA=\angle FKD=\angle FKA$ в описаному колі CDE. Тому $\angle BDA=\angle FKA$, $BD \parallel KF$.

115. Вказівка. Нехай $f(x)=sin1999x+sinax+sinbx\equiv 0$ для будь-якого $x\in R$. Тоді $f'(x)\equiv 0$, $f'''(x)\equiv 0$ на R. Поклавши $x=0$, одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} f'(0)=1999+a+b=0, \\ f'''(0)=1999^3+a^3+b^3=0. \end{cases}$$

Звідси знаходимо, що $a=-1999$, $b=0$ або $a=0$, $b=-1999$.

Відповідь: $a=-1999$, $b=0$; $a=0$, $b=-1999$.

116. Скориставшись нерівністю Коші, будемо мати:

$$12=xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{(xyz)^2}=3(xyz)^{\frac{2}{3}},$$

тобто $(xyz)^{2/3}\leqslant 4$.

Аналогічно, $xyz=2+x+y+z\ge 4\sqrt[4]{2xyz}$,

$$(xyz)^4\geqslant 4^4\cdot(2xyz), \text{ тобто } xyz\geqslant 8.$$

Рівність досягається тоді, коли $x=y=z=2$. Перевіркою встановлюємо, що знайдені числа – розв'язок системи.

Зауваження. Можна також скористатись теоремою Вієта для кубічного рівняння.

Відповідь: $x=y=z=2$.

117. Розглянемо також трьохелементні множини $X\backslash A_1$, $X\backslash A_2$, ..., $X\backslash A_9$. Всього існує

$$C_6^3=\frac{C!}{3!3!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=20$$

трьохелементних підмножин X, тому знайдеться трьохелементна множина $B\subset C$, $B\ne A_iC$, $B\ne X\backslash A_i$, $1\leqslant i\leqslant 9$. Пафарбувавши елементи B в один колір, а елементи $X\backslash B$ – в інший, одержимо потрібне розфарбування.

118. Запишемо дану рівність у вигляді

$$a_{n+1}a_{n-1} + a_{n+1}a_{n-1} = a_{n+1}^2 + a_{n+1}a_{n-1}.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} \text{ або } \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n-1}} \ (n \ge 2).$$

Отже, при всіх натуральних $n \geqslant 2$, маємо:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_{n-1}a_{n-2}} = \ldots = \frac{a_3}{a_2 a_1} = \frac{2000}{500 \cdot 2} = 2.$$

Таким чином, всі члени даної послідовності – натуральні числа. Для завершення доведення зазначимо, що для будь-якого натурального $n \geqslant 2$ число $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ є парним, причому

$$a_{2001} = \frac{a_{2001}}{a_{2000}} \cdot \frac{a_{2000}}{a_{1999}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = p \cdot 2^{2001} \vdots 2^{2001}.$$

119. Поклавши в даному рівнянні послідовно $y=-f(x)$ та $y=x^2$, одержимо рівності:

$$f(0)=f(x^2+f(x))-4f^2(x), \ f(x^2+f(x))=f(0)+4x^2f(x),$$

звідки випливає, що $f^2(x)=x^2f(x)$. Поклавши, $x=0$, одержуємо, що $f(0)=0$. Оскільки рівняння $f(x)=0$ має тільки один корінь, то $f(x)\neq 0$ при $x\neq 0$. Таким чином, $f(x)=x$ для всіх $x\in R$. Перевірка: $f(y+f(x))=(y+x^2)^2=$ $=y^2+2yx^2+x^4$, $f(x^2-y)+4f(x)y=(x^2-y^2)+4x^2y=x^4-2yx^2+$ $+y^2+4x^2y=y^2+2yx^2+x^4$. Функція задовольняє рівняння. Відповідь: $f(x)=x^2$.

120. Нехай d – відстань від точки A до прямої l. Проведемо у площині (α) на відстані d від прямої l пряму $m \parallel l$. Доведемо, що така пряма m є шуканою. Отже, нехай $M\in m$, а точки F та H є ортогональними проекціями на пряму l точок A та M відповідно. Якщо точки F і H збігаються, то твердження задачі є очевидним (відрізком спільного перпендикуляра буде медіана рівнобедреного трикутника AFM, яка проводиться до його основи AM). Нехай тепер точки F та H є різними. Через середину Q відрізка FH перпендикулярно до нього проведемо площину (γ). За просторовим аналогом тео-

реми Фалеса площина (γ) перетне відрізок AM саме в його середині P (для цього досить розглянути єдину пару паралельних площин, котрі містять мимобіжні прямі AF і MH; ці площини, як неважко помітити, будуть паралельними до площини(γ)). Залишається показати, що $PQ \perp AM$. Дійсно, $\triangle AFQ = \triangle MHQ$ ($\angle AFQ = \angle MHQ = 90^\circ$, $AF = MH$, $FQ = HQ$), а тому $AQ = QM$, і медіана PQ є також і висотою рівнобедреного $\triangle AQM$.

121. Вказівка. Виконавши тотожні перетворення одержіть рівність $sin(n^\circ + 45^\circ) = 1/2$, звідки $n = 105$.
Відповідь: $n = 105$.

122. Вказівка. Скориставшись теоремами синусів і косинусів доведіть, що $KL^2 - KQ^2 - QL^2 = 0$.

123. Вказівка. Оскільки $2 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$, то $0 \leqslant xy \leqslant 1$. Тому $0 \leqslant x^2y^2 \leqslant xy \leqslant 1$. Далі, застосуйте цю оцінку до лівої частини нерівності і виділіть (двічі) повний квадрат.

124. Вказівка. Нехай $[\sqrt{n}] = m$, тоді $m+1 \leqslant n+1 \leqslant m^2+2m+1$. Оскільки $(n+1) \vdots (m+1)$, то $n+1 = m^2+m$ або $n+1 = m^2+2m+1$. Для обох цих випадків твердження задачі виконується. Наприклад, якщо $n = m^2+m-1$, то $(n-1)(n-3) = (m^2+m-2)(m^2+m-4) = (m-1)(m+2)(m^2+m-4) \vdots (m+1)$, що й треба було довести.

125. Вказівка. Доведіть, що $P(x^2-x+1) = P(x^2+3x+3)$ для всіх дійсних значень x. Тоді $P(1) = P(7) = P(21) = \ldots$, тобто многочлен $P(x)$ набуває деякого значення безліч разів, а це означає, що він нульового степеня, тобто стала величина.
Відповідь: $Q(2003) = 2003$.

126. Запишемо рівняння у вигляді $\sqrt{2 - ax} = x - 2$. Оскільки ліва частина рівняння набуває тільки невід'ємних значень, то рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ 2 - ax = x^2 - 4x + 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x^2 + (a-4)x + 2 = 0. \end{cases}$$

Отже, потрібно визначити, при яких значеннях x параметра a рівняння $x^2 - (a-4)x + 2 = 0$ має тільки один дійсний корінь на проміжку $[2; +\infty)$. Графік функції $f(x) = x^2 - (a-4)x + 2$ проходить через точку $(2;0)$ тоді й тільки тоді, коли $a=1$. При цьому, очевидно, $a=1$ насправді задовольняє умову задачі, оскільки рівняння $x^2-3x+2=0$ має на проміжку $[2; +\infty)$ єдиний корінь, а саме – $x=2$. Решту значень параметра знаходимо з умови $f(2)<0$ (якщо $f(2)>0$, то потрібно проаналізувати тільки випадок, коли дискримінант рівняння дорівнює нулеві, тобто $a = 4 \pm 2\sqrt{2}$, але ж, як легко переконатися, ці значення не задовольняють умову задачі). Таким чином, $4+2(a-4)+2<0$; $2a-2<0$, тобто, $a<1$.

Відповідь: $a \in (-\infty; 1]$.

127. Вказівка. Нехай точка K середина відрізка AB, точка L – середина відрізка AC, точка O – середина відрізка MN. Тоді чотирикутник $MLNK$ є вписаним у коло з діаметром MN, причому $MN \perp KL$, $KL=1/2MN$. Легко встановити, що $\angle LOM=30^\circ$, $\angle LMO=75^\circ$, $\angle LMK=150^\circ$. Звідси одержуємо, що $\angle MAK=60^\circ$, $\angle MCB=15^\circ$.

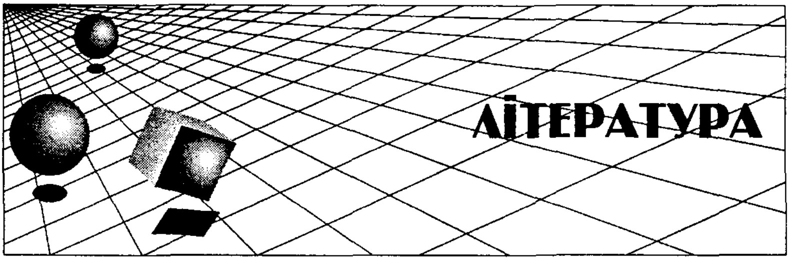
Відповідь: $\angle A=60^\circ$, $\angle B=105^\circ$, $\angle C=15^\circ$.

128. Маємо: $cos(x+y)+cos(y+z)+cos(z+x)=cos((x+y+z)-z)+$ $+cos((x+y+z)-x)+cos((x+y+z)-y)=cos(x+y+z)(cosx+$ $+cosy+cosz)+sin(x+y+z)(sinx+siny+sinz)=acos^2(x+y+z)+$ $+asin^2(x+y+z)=a(cos^2(x+y+z)+sin^2(x+y+z))=a$, що й треба було довести.

129. Оскільки $CD \perp (ADA_1)$, то $AE \perp CD$. Відповідно до умови $AE \perp A_1D$. Таким чином $AE \perp (A_1DC)$, звідки одержуємо, зокрема, що $A_1C \perp AE$. Далі, враховуючи, що $A_1C \perp AF$, одержуємо, що $A_1C \perp (AFE)$. Отже, доведено, що $EF \perp A_1C$. У площині DA_1BC прямі FE і B_1Q паралельні, оскільки вони перпендикулярні до прямої A_1C. Аналогічно встановлюється паралельність прямих AF і PQ. Цим встановлюється рівність кутів EFA та PQB_1, що й треба було довести.

130. При всіх x, $y>0$ маємо нерівність $f(x+y)>f(x)$, а тому функція f строго зростає на множині $[0; +\infty)$. Із заданої в умові задачі рівності випливає, що для цих значень змінних x та y справджується й рівність $f(xf(y))=f(yf(x))$. Звідси випливає, що $xf(y)=yf(x)$, тобто $f(x)=\dfrac{f(y)}{y}x$. Але жодна з функцій $y=kx$ $(k>0)$ не задовольняє умову задачі.

Відповідь: таких функцій не існує.



1. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975. – 112 с.
2. Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
3. Вишенський В. А. та ін. Українські математичні олімпіади. Довідник. – К.: Вища школа, 1993. – 415 с.
4. Вишенський В. А., Ядренко М. Й. Вибрані математичні задачі. – К.: Вища школа, 1974. – 80 с.
5. Вороний О.М. Кіровоградські олімпіади юних математиків (1991–2000 рр.) – Кіровоград: РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка, 2000. – 140 с.
6. Вышенский В. А. и др. Сборник задач Киевских математических олимпиад. – К.: Вища школа, 1984. – 240 с.
7. Зарубежные математические олимпиады. Под ред. И.Н. Сергеева. – М.: Наука, 1987. – 416 с.
8. Змагання юних математиків України. 2003 рік. / В.О. Борисова, О.Г. Кукуш, В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, А.Я. Оленко, В.М. Радченко, В.А. Ясінський. – Х.: Вид. група “Основа”, 2004. – 192 с. – (Серія “Бібліотека журналу “Математика в школах України””; Вип. 1–2 (13–14)).
9. Конет І. М., Паньков Г. В., Теплінський Ю. В. Хмельницькі обласні олімпіади юних математиків. – Кам’янець–Подільський: Абетка, 1998. – 207 с.
10. Конет І.М., Паньков В.Г., Радченко В.М., Теплінський Ю.В. Обласні математичні олімпіади. – Кам’янець–Подільський: Абетка, 2000. – 304 с.
11. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Задачі міжнародних математичних олім–

піад та методи їх розв'язування. – Львів: Євросвіт, 1999. – 128 с.

12. Математичні олімпіади школярів України. 1998–1999 рр. / Добосевич М.С., Лейфура В.М., Мітельман І.М., Некрашевич В.В., Радченко В.М., Теплінський О.Ю., Ясінський В.А. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2000. – 52 с.
13. Математичні олімпіади школярів України. 1999–2000 рр. / Добосевич М.С., Лейфура В.М., Мазорчук В.С., Мітельман І.М., Радченко В.М., Теплінський О.Ю., Швець В.О., Ясінський В.А. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2000. – 68 с.
14. Математичні олімпіади школярів України. 2000–2001 рр. / Добосевич М.С., Лейфура В.М., Мітельман І.М., Нагель І.П., Некрашевич В.В., Оленко А.Я., Радченко В.М., Ясінський В.А. – Кам'янець-Подільський: Абетка-НОВА, 2001. – 48 с.
15. Олімпіади з математики. / В.А. Вишенський, В.Н. Нагорний, М.О. Перестюк, В.В. Плахотник. – К.: КНУ імені Тараса Шевченка, 2003. – 163 с.
16. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч. – К.: АСК, 2004. – 344 с.
17. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями. / Довбыш Р.И., Потемкина Л.Л., Трегуб Н.Л., Лиманский В.В., Оридорога Л.Л., Кулеско Н.А. – Донецк: ООО ПКФ "БАО", 2005. – 336 с.
18. Теплінський Ю.В., Конет І.М. та ін. Розв'язування олімпіадних задач з математики. Ч.1. — Хмельницький: ОІУВ, 1991. – 124 с.
19. Теплінський Ю.В., Конет І.М. та ін. Розв'язування олімпіадних задач з математики. Ч.2. — Хмельницький: ОІУВ, 1993. – 95 с.
20. Федак І.В. Методи розв'язування олімпіадних завдань з математики (і не тільки їх). – Чернівці: Зелена Буковина, 2002. – 340 с.
21. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Вінниця: ВДПУ ім. М. Коцюбинського, 1998. – 266 с.