О. П. Зеленяк

Решение задач по планиметрии

Технология
алгоритмического подхода
на основе задач-теорем

Моделирование
в среде Turbo Pascal

ДМК издательство
торгово-издательский дом DiaSoft

Москва • Санкт-Петербург • Киев
2008

ББК 32.973.2
УДК 681.3. 06(075)
359

Зеленяк О. П.

359 Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Моделирование в среде Turbo Pascal / О. П. Зеленяк. — Киев, Москва: ДиаСофтЮП, ДМК Пресс, 2008. — 336 с.

ISBN 5-93772-189-6
ISBN 5-94074-422-2

В книге предлагается четкая, проверенная многолетней практикой система обучения решению задач по планиметрии – эффективная технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Все задачи снабжены решениями, которые сравниваются, анализируются и обобщаются. Особое внимание уделено культуре чертежей и вычислений, логике и способам решений, отбору и систематизации зада ч.

Отличительная особенность пособия – наличие материалов, предназначенных для интегрированного изучения математики и информатики.

Издание предназначено для учащихся, абитуриентов, студентов педвузов, учителей.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

заведующий кафедрой математики Кировоградского государственного педагогического университета, доктор физико-математических наук, профессор **Волков Ю. И.**

заведующая кафедрой прикладной математики Харьковского государственного политехнического университета, доктор технических наук, профессор **Курпа Л. В.**

ББК 32.973.2
УДК 681.3. 06(075)

Предисловие

"Я прошу всех беспристрастно посмотреть на следующие темы, занимающие большое место в школьной математике: I. Задачи на построение циркулем и линейкой. II. Свойства "традиционных" фигур, таких, как треугольники, четырехугольники, окружности и системы окружностей … – все это со всеми изощрениями, накопленными поколениями "геометров" и преподавателей в поисках подходящих экзаменационных задач… ни с чем подобным человек никогда в жизни не столкнется… надо учить принципам и только им! (***Ж. Дьедонне***).

"И все-таки что-то мешает мне признать правоту этих слов. Само понятие "образование" более сложно. Оно состоит не только в приобретении знаний и навыков, но и в тренировке мышления. На протяжении, по-видимому, двух столетий (а, может быть, и больше) задачи на бассейны, задачи на построение, задачи на треугольники и преобразования тригонометрических формул выполняли великую роль – они давали пищу для ума, приучали к точности и аккуратности, учили рассуждать, искать истину, преодолевать трудности, испытывать разные пути к цели, учили достигать ее. Они одаривали радостью успеха и ощущением красоты. В конечном счете, они моделировали творчество. Чем заменить все это? И стоит ли? … Тренировать мышление можно лишь на конкретных, "частных" задачах, а не на "общих" принципах…" (***В.М. Тихомиров***).

"В школе большую пользу для развития фантазии приносит решение геометрических задач. Это должны быть настоящие задачи, требующие, чтобы ученик сам придумал решение, подыскал построение. Интересно, что именно это занятие встречает общее несочувствие. Стараются устранить в школе решение задач. Существует странный взгляд, отделяющий геометрию от решения задач, как два различных предмета. Предполагают, что можно знать первый из них, не владея вторым. Или стараясь облегчить работу учеников, издают для них готовые решения задач, правила и шаблоны для такого решения, настолько же вредные, как планы для писания сочинений на заданные темы" (*из доклада первого ректора КПИ* ***В.Л. Кирпичева*** *"Значение фантазии для инженеров"*, 1903 *год*).

"Планиметрия представляет собой замкнутую модель науки, внутри которой можно бесконечно совершенствоваться. Она дает большие возможности для развития творческого, интеллектуального. Особая роль элементарной геометрии по отношению к серьезной науке, причем не только математической, состоит также в том, что она является неисчерпаемым источником интересных и оригинальных идей, облегчает поиск решения самых различных научных и технических проблем … *Сегодня геометрия является одним из немногих экологически чистых продуктов, потребляемых в образовании* ... Представляется полезным выделить некоторое множество задач (будем называть их опорными), в которых формулируется некий факт, достаточно часто используемый в задачах, либо иллюстрируется какой-либо метод или прием решения задач" (***И.Ф. Шарыгин***).

Предоставляем читателю продолжить поиск истины. Приведенные выше пары противоречивых высказываний заставляют серьезно задуматься.

Но что является бесспорным сегодня? Это то, что роль геометрии как учебного предмета в школе недооценивается. Его потенциал огромен.

На контрольной работе, экзамене требуется решить задачу и получить верный ответ, а не формулировать тот или иной принцип.

Как научиться решать задачи по планиметрии?

Прежде всего необходимо систематизировать и обобщить знания по предмету. Одним из проверенных практикой эффективных методов обучения является *алгоритмический метод*, который предполагает обязательный объем начальных сведений. Здесь уместна аналогия с шахматами. Много ли комбинаций составит шахматист, сверяющий ходы фигур по справочнику?

Как сообщить обязательный объем начальных сведений?

Во-первых, их нужно выделить. Так в литературе появились термины: опорные, базисные задачи, *задачи-теоремы*. Это задачи, которые часто и эффективно используются при решении других задач наряду с главными теоремами геометрии: Пифагора, косинусов, синусов и др. В книге выделено 25 задач-теорем. Во-вторых, задачи-теоремы нужно выучить наизусть. Только после этого и большого количества самостоятельно решенных задач можно говорить о начале приобретения собственного опыта и формирования геометрической интуиции.

Основываясь на практическом опыте, можно утверждать, что ***знаний и умений применения выделенных задач-теорем достаточно для решения планиметрических задач, взятых из школьных учебников, практики вступительных экзаменов в вузы и большинства олимпиадных задач.***

Материалы гл. 1 заимствованы из учебников [5] и [6]. В гл. 2 рассмотрены "азбучные" сведения курса. Без их знания систематизация невозможна.

Задачи-теоремы приведены в гл. 3. Гл. 4 содержит сто примеров их применения и практические советы. Большинство задач-примеров взято из популярных сборников [1] и [2] (читатель может совершенствовать отбор и систематизацию).

В гл. 5 рассмотрены основные методы решения планиметрических задач.

Содержимое гл. 6 – попытка приоткрыть процесс поиска решения геометрической задачи. Там же показан поиск различных решений одной задачи и поиск общей идеи решения разных задач. В гл. 7 содержатся более трудные задачи, при решении которых комбинировано применяются несколько задач-теорем.

Гл. 8 посвящена координатам, векторам и множествам точек плоскости.

В гл. 9 приведены примеры моделирования на планиметрическом материале.

Предполагается, что читатель знаком с основами программирования в среде Turbo Pascal, изучать которые изолированно от решения "непоставленных" задач малоэффективно. Задачи математики, физики, химии, биологии и др., в процессе решения которых необходимо пройти путь от постановки задачи и представления данных до получения и анализа результатов, интегрируют знания учащихся по информатике и другим предметам.

Все главы книги можно использовать и в процессе изучения планиметрии.

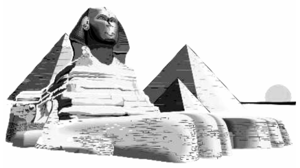
Это пособие – не решебник! Плодящиеся под девизом "Новому термину – "новое" качество" решебники предоставили новый вид работы – *критический анализ содержащихся в них решений*. В настоящем пособии уделено особое внимание культуре чертежей и вычислений, логике и способам решений, отбору и систематизации задач.

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

1.1. Краткий исторический очерк

Геометрия возникла из практических потребностей людей. При изготовлении орудий труда, строительстве жилищ у человека появилась необходимость определять форму и размеры предметов. Дошедшие до нас памятники материальной культуры и многочисленные письменные документы древности свидетельствуют о том, что уже около 4000 лет тому назад жители Древнего Египта и Вавилона обладали значительным запасом геометрических сведений.



Например, египетские пирамиды (гробницы фараонов) отличаются удивительной правильностью формы. Одно из самых грандиозных сооружений древности – пирамида Хеопса – имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с высотой 150 м и боковым ребром 220 м. Ясно, что руководить их строительством могли лишь люди, располагавшие геометрическими знаниями.

В древнеегипетских папирусах, относящихся к 2000 – 1700 гг. до н.э., содержится решение ряда геометрических задач, причем некоторые из них решены безукоризненно. Вот одно из таких решений. "Сделать усеченную пирамиду (в папирусе она изображена в виде трапеции), если известно: 6 – высота, 4 – внизу, 2 – наверху. Поступай, как следует: возвысь в квадрат 4, что дает 16, удвой 4, что дает 8; далее возвысь в квадрат 2, что дает 4. К 16 прибавь 8 и 4, что даст 28. Далее возьми 1/3 от 6, что дает 2; далее возьми 28 дважды, что дает 56. Это есть 56. То, что хотели найти, – правильно". Если обозначить стороны оснований и высоту через a, b, H, то предложенное древнеегипетским математиком решение может быть записано с помощью формулы: $V = (a^2 + ab + b^2) \cdot \dfrac{H}{3}$. Эта формула выражает совершенно точный способ вычисления объема усеченной пирамиды с квадратными основаниями.

Заслуги в деле дальнейшего накопления и систематизации геометрических сведений принадлежат ученым Древней Греции.

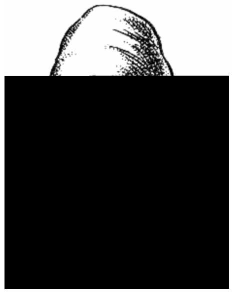
Первые доказательства геометрических фактов связывают с именем ***Фалеса Милетского*** (639 – 548 гг. до н.э.). Ему приписывается доказательство признаков равенства треугольников, доказательство теоремы о равных отрезках, отсекаемых на двух прямых параллельными прямыми, и др.

Автором доказательств многих теорем называют ***Пифагора*** (564 – 473 гг. до н.э.). Впрочем, знаменитая "теорема Пифагора" была известна задолго до него. Остается неустановленным, кто впервые доказал эту теорему и какое доказательство было дано самим Пифагором (американский любитель математики Е. Лумис собрал и напечатал 367 различных доказательств этой замечательной теоремы – фундаментального соотношения евклидовой геометрии).

Пифагору приписывают доказательство теоремы о сумме внутренних углов треугольника, открытие правильных многогранников. Правильный звездчатый пятиугольник (пифагорейская звезда) был у пифагорейцев священным знаком, символом здоровья и радости, а также паролем. Пифагор ввел общеизвестный теперь дедуктивный метод. Пифагорейцы преобразовали давно известные практические правила в научные положения, обоснованные точными доказательствами. Главным содержанием пифагорейской математики есть учение о числе. Они первыми ввели четные и нечетные числа, простые и составные числа, дали несколько классификаций натуральных чисел.

В V и IV вв. до н.э. были предприняты попытки последовательного изложения геометрического материала в виде ряда утверждений, подкрепленных доказательствами (Пифагор, Демокрит,

Гиппократ Хиосский, Платон, Аристотель). ***Платоном*** и особенно ***Аристотелем*** была создана теория доказательств и разработаны общие принципы дедуктивного построения науки.



Первые работы по систематизации геометрии до нас не дошли: все они были забыты после появления в Александрии знаменитых "Начал" ***Евклида*** (около 300 г. до н.э.). Последовательность и строгость изложения сделали это произведение источником геометрических знаний во многих странах мира в течение более двух тысячелетий. Опираясь на созданные постулаты и аксиомы, используя законы формальной логики, Евклид доказывает 465 утверждений в 13 книгах. Его постулаты по существу представляют собой правила построений с помощью идеальной линейки и идеального циркуля. Под решением задачи понимаются такие построения. Для Евклида найти площадь или объем означало *построить циркулем и линейкой* квадрат или куб, равный данной фигуре. "Начала" завершались построениями пяти правильных многогранников, вписанных в сферу данного радиуса и исследованием полученных несоизмеримых величин.

Наиболее известен пятый постулат Евклида о параллельных прямых. Математики считали, что Евклид ошибся и, что его можно доказать как теорему. Много и настойчиво над тайной этого постулата рассуждал К.Ф. Гаусс. В 1826 г. Н.И. Лобачевский доказал логическую независимость пятого постулата от других постулатов и аксиом Евклида и то, что его нельзя доказать на их основе. Оказалось, что Евклид не ошибся. Евклид блестяще решил и методическое задание потому, что он писал научное пособие для учащихся своей школы, которое стало пособием для поколений учеников. До недавнего времени почти все школьные учебники геометрии были во многом сходны с "Началами".

Аксиоматическое построение геометрии оказало глубокое влияние на мыслителей всех времен. Подобное изложение, как идеальный образец изложения научных теорий, использовали позже И. Ньютон в своей основополагающей работе "Математические начала натуральной философии", Б. Спиноза, излагая основы этики.

Величайший математик древности ***Архимед*** (287 – 212 гг. до н.э.) углубил и дополнил теоретические положения Евклида. Архимед творил в "золотой век" геометрии, занимаясь вычислением площадей и объемов фигур. Решая многочисленные задачи,

он прокладывал новые пути в математике. Среди открытий ученого отметим глубокую разработку вопросов, связанных с измерением длины окружности и площади круга, с вычислением объемов фигур, в том числе цилиндра и шара. Архимед завещал на надгробном камне изобразить шар, вписанный в цилиндр. Доказательство того, что объем этого шара составляет 2/3 объема цилиндра, явилось одним из его научных открытий.

Архимед погиб как патриот, защищая родной город Сиракузы от нападения римлян. Известно, что с помощью системы зеркал он на расстоянии полета стрелы сжигал римские корабли. Как инженер, ученый решал задачи строительной механики и кораблестроения. Архимед открыл закон обратно пропорциональной зависимости между силой и плечом рычага, закон про тело, погруженное в жидкость и др.

Современник Архимеда, ***Аполлоний Пергский***, написал обстоятельный трактат о конических сечениях: эллипсах, гиперболах и параболах. Несколько позже, во II в. до н.э. ***Гиппарх*** составил первую таблицу хорд, она заменяла применяющиеся сейчас таблицы синусов. Ряд работ, посвященных правилам вычислений в геометрии, появляется в I и II вв. до н.э. Так, в книге ***Герона*** из Александрии "Метрика" даны правила вычисления площадей и объемов. Таблица хорд, составленная математиком и астрономом Птолемеем, содержала длины хорд для углов от 0^o до 180^o с шагом $0{,}5^o$.

После гибели рабовладельческих государств древности, в средние века, центр передовой науки перемещается в страны Востока – в Среднюю Азию, арабские страны, Индию. В области математики арабы использовали достижения ученых Индии, Китая и труды античных авторов. К концу IX в. на арабский язык были переведены творения Евклида, Архимеда, Аполлония и др. В XII в. в связи с крестовыми походами в Европе возникает интерес к ма-

тематической культуре арабов. Бурное развитие техники, начавшееся в странах Западной Европы в XVI – XVII вв., привело к не менее значительным результатам в математике.

Но влияние "Начал" Евклида было столь фундаментальным, что никаких других формулировок геометрии не было предложено до Декарта. ***Рене Декарт*** (1596 – 1650), французский философ, математик, физик, физиолог, в своей "Геометрии" впервые ввел в математику переменные величины. Он рассматривал линии на плоскости как графики функций. У Декарта отрезки равносильны по свойствам действительным числам, которые выступали как отношения длин отрезков к единичному. Тем самым Декарт заложил основы *аналитической геометрии* плоскости. Он создал метод прямолинейных координат, что позволило выразить геометрические задачи алгебраически, вымостив путь к изучению высших плоских кривых и ньютоновскому анализу. Координаты резко повысили вычислительные возможности, соединив две великие области математики.

С именем Декарта связаны такие понятия, как координаты, произведение, парабола, лист, овал и др.

Переменные величины окончательно укоренились в математике благодаря работам ***Исаака Ньютона*** (1643 – 1727, Англия) и ***Готфрида Вильгельма Лейбница*** (1646 – 1716, Германия), завершивших создание основ дифференциального и интегрального исчисления. Математические открытия Декарта, Ньютона и Лейбница стали подлинной революцией в этой науке. С помощью новых разделов математики было легко найдено решение многих геометрических задач: о проведении касательной к произвольной кривой, о вычислении площадей и объемов различных фигур.

С XVII в. трудами французских ученых ***Дезарга*** и ***Паскаля*** положено начало новому направлению в геометрии, получившему в дальнейшем наименование *проективной геометрии*. Полутора столетиями позднее их соотечественник ***Гаспар Монж*** разработал метод изображения фигур с помощью ортогонального проектирования на две плоскости. Работы Монжа послужили основой технического черчения и *начертательной геометрии*.

С XVIII в. в России начинают печататься учебники и научные труды по геометрии. Разделы, посвященные геометрии, имелись в первом русском учебнике математики – "Арифметика" Л.Ф. Магницкого, вышедшем в 1703 г.

В России многие годы творил выдающийся ученый ***Леонард Эйлер*** (1707 – 1783). XVIII столетие вошло в историю как "эпоха Просвещения". Если до него были еще возможны такие всеобъемлющие гении, как Леонардо да Винчи или Г.В. Лейбниц, вобравшие в себя все накопленные человечеством знания, то, начиная с этого столетия, появляется все больше и больше ученых-специалистов, досконально владеющих отдельными научными дисциплинами. Но Эйлер воплотил научное сознание своего времени. Он является автором первостепенной важности открытий в различных разделах математического анализа, теории чисел, геометрии и механике. Почти во всех областях математики и ее приложений встречается имя Эйлера: теоремы Эйлера, тождества Эйлера, эйлеровские постоянные, углы, функции, интегралы, формулы, уравнения, подстановки. Один из наиболее известных геометрических результатов Эйлера также вошел в историю математики под его именем. Во всяком выпуклом многограннике сумма числа вершин B и числа граней Γ на две единицы больше числа его ребер P: $B + \Gamma - P = 2$. В элементарной геометрии известны окружность Эйлера, прямая Эйлера и т.д.

Эйлеру принадлежат более 886 научных трудов. Статистические подсчеты показывают, что он в среднем делал одно открытие в неделю. По случаю 200-летия со дня рождения ученого в Швейцарии начато издание полного собрания его сочинений. Оно должно состоять из 72 больших томов по 600 страниц каждый.

Ученый прекрасно знал лучших писателей древнего мира, историю, языки (в том числе и русский), ботанику, химию, физику, анатомию, медицину. Своими знаниями он поражал специалистов из этих областей знаний. Эйлер с увлечением слушал музыку и написал трактат по математической теории музыки.

Благодаря исследованиям Эйлера и Монжа в XVIII в. возникает метод изучения свойств геометрических фигур, основанный на применении производной, – *дифференциальная геометрия*.

В XIX в. в связи с задачами геометрии, механики и физики возникает *векторное исчисление*, близкое к современному, изложение которого принадлежит *Дж. В. Гиббсу* (1839 – 1903, США).

В разностороннем творчестве ***Карла Фридриха Гаусса*** (1777 – 1855) органично сочетались исследования по теоретической и прикладной математике. Его работы оказали большое влияние на все дальнейшее развитие высшей алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории притяжения, классической теории электричества и магнетизма, геодезии, многих отраслей теоретической астрономии. После Декарта появилась возможность получать новые геометрические объекты, решая связанные с ними алгебраические уравнения. Так, Гаусс, уже вооруженный алгебраическими средствами, помимо общих методов решения уравнений вида $x^n - 1 = 0$ установил связь между ними и построением правильных многоугольников. Он впервые, после греческих геометров, сделал значительный шаг вперед в этом вопросе, а именно: нашел все значения n, для которых правильный n-угольник можно построить циркулем и линейкой (если n – простое, то оно должно быть вида $n = 2^{2^k} + 1$); в частности решив в квадратных радикалах уравнение $x^{17} - 1 = 0$, Гаусс дал построение циркулем и линейкой правильного 17-угольника. Эти работы были выполнены в 1796 году, когда Гауссу было около 19 лет.

Изучение формы земной поверхности потребовало общего геометрического метода для исследования поверхностей. Теория поверхностей ученого послужила образцом для создания n-мерной римановой геометрии. Гаусс ввел криволинейные координаты произвольного вида. Его научное наследие вплоть до второй мировой войны тщательно изучалось Геттингенским ученым обществом и было издано в 11 томах. Очевидно, что Гаусс пришел к мысли о возможности неевклидовой геометрии в 1818 г. Опасение, что эти идеи не будут поняты, и, по-видимому, недостаточное сознание их научной важности были причиной того, что ученый их не разрабатывал далее и не публиковал.

К публикации Н. И. Лобачевского о неевклидовой геометрии Гаусс отнесся с большим вниманием, но своей оценки этого открытия так и не опубликовал.

К середине XIX в. русские ученые не только поднялись до уровня, достигнутого передовыми математиками Западной Европы, но и сделали ряд выдающихся открытий.

Особое место здесь принадлежит русскому математику ***Н.И. Лобачевскому*** (1792 – 1856), создавшему неевклидову геометрию. Безрезультатность попыток доказательства пятого постулата Евклида привела выдающихся ученых (Н. Лобачевский, Я. Больяи, К. Гаусс) к предположению о возможности существования теоретической системы, в которой вместо пятого постулата взято противоречащее ему высказывание. Вначале вопрос ставился чисто логически: наглядное истолкование и практические применения новой системы были отодвинуты на второй план.

Н. И. Лобачевский заменил пятый постулат следующей аксиомой: *через точку С, не принадлежащую прямой АВ, в плоскости АВС проходит бесконечное множество прямых, не пересекающихся с АВ.* Все остальные постулаты и аксиомы Евклида ученый принял за истинные. Если бы пятый постулат вытекал из этих предложений, то, приняв противоречившее ему предложение, Лобачевский должен был получить противоречие при дальнейших рассуждениях. Но никакого противоречия с остальными девятью аксиомами не получилось в многочисленных теоремах и формулах, доказанных Лобачевским на основе его аксиомы. Более того, предложения, доказанные Лобачевским, составили стройную систему, не уступавшую "Началам" Евклида ни в полноте охвата свойств геометрических фигур, ни в логическом изложении этих свойств. Аксиома, теоремы, основанные на ней, поразили своей необычностью современников великого ученого, так и не сумевших оценить глубины и значения открытия.

Однако вскоре после смерти "Коперника геометрии" его идеи получили всеобщее признание.

Значение открытия состоит не только в том, что оно положило конец попыткам доказательства пятого постулата. Создание новой геометрии показало, что геометрия Евклида не единственно возможное представление о пространстве, представление, которое, по мнению философов-идеалистов, является у человека врожденным,

доопытным. Появление второй логически возможной схемы пространства поставило перед учеными вопрос: какая из этих схем точнее отражает свойства реального, физического пространства в его малых участках (например, в пределах земной поверхности) и в грандиозных глубинах космоса? Если в одной фразе постараться выразить коренное отличие современной геометрии от той, элементы которой мы изучаем в школьном курсе, то можно сказать так. Раньше была одна геометрия – геометрия одного-единственного трехмерного евклидова пространства, она изучала фигуры в этом пространстве; теперь геометрия охватывает "геометрии" бесконечного множества разных воображаемых пространств, она изучает свойства самих этих пространств и фигур в них.

Исследования Лобачевского привлекли внимание ученых мира (Э. Бельтрами, Б. Риман, Г. Вейль, Ф. Клейн) к вопросам основания геометрии, т.е. поставили проблему создания такой системы основных понятий и аксиом, которая была бы логически безупречной. В самом конце XIX в. немецкий ученый ***Д. Гильберт*** предложил систему основных понятий и аксиом, свободную от логических недостатков. Он дал полную с современной точки зрения систему аксиом евклидовой геометрии, которая обладает свойствами полноты, непротиворечивости и независимости.

Математические знания неуклонно растут. Результаты научных исследований находят теоретические и практические применения. Так, дифференциальная геометрия, топология и алгебра составляют базис современной физики, а *интегральная геометрия* лежит в основе рентгеновской томографии. В проектировании и производстве находят применение *вычислительная и комбинаторная геометрия*. В них рассматриваются проблемы *геометрического моделирования*. Это робототехника, распознавание образов, проектирование микросхем, базы данных, машинная графика, раскрой материалов и т.д. Математические структуры и результаты – универсальны, не зависящие от конкретных объектов. Далекие от реальности абстрактные математические результаты стоят за развитием различных теорий.

Основное внешнее влияние на математику оказывает *компьютерная наука*. Утверждается, что все, что связано с этой областью, будет иметь центральное значение для математики на протяжении будущего столетия или всего развития нашей цивилизации.

1.2. Про геометрию

Каждый человек имеет наглядное понятие о пространстве, о телах, о фигурах. Но в геометрии свойства фигур изучаются в отвлеченном (абстрактном) виде и с логической строгостью.

Своеобразие геометрии, выделяющее её среди других разделов математики, да и всех наук вообще, и заключается в неразрывном органическом соединении живого воображения со строгой логикой. Геометрия в своей сути и есть пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой.

Во всяком подлинно геометрическом предложении, будь то аксиома, теорема или определение, неразрывно присутствуют эти два элемента: наглядная картина и строгая формулировка, строгий логический вывод. Там, где нет одной из этих двух сторон, нет и подлинной геометрии.

Наглядность, воображение принадлежат больше искусству, строгая логика – привилегия науки. Сухость точного вывода и живость наглядной картины – "лёд и пламень не столь различны меж собой". Так её и надо изучать, соединяя живость воображения с логикой, наглядные картины со строгими формулировками и доказательствами.

Поэтому основное правило состоит в том, что, встречаясь с определением, теоремой или задачей, нужно прежде всего представить и понять их содержание: представить наглядно, нарисовать или, ещё лучше, хотя и труднее, вообразить то, о чём идёт речь, и одновременно понять, как это точно выражается.

Ничего не старайтесь заучить, не нарисовав, не вообразив того, о чём идёт речь, не поняв, как это наглядное представление выражается в формулировке определения, теоремы или задачи.

Приступая к изучению доказательства теоремы или к решению задачи, следуйте такому принципу: старайтесь видеть – нарисовать, сообразить – и одновременно следить за логикой рассуждения; карандаш должен набрасывать или аккуратно рисовать соответствующие картинки и тут же выписывать кратко в словах и формулах основные этапы рассуждения.

Геометрия возникла из практических задач, ее предложения выражают реальные факты и находят многочисленные применения. В конечном счёте в основе всей техники так или иначе лежит геометрия, потому что она появляется всюду, где нужна хотя бы

малейшая точность в определении формы и размеров. И технику, и инженеру, и квалифицированному рабочему геометрическое воображение необходимо, как геометру или архитектору.

При всем реальном значении геометрии каждому понятно, что ни в природе, ни в технике нет ни отрезков без всякой ширины, ни бесконечных прямых, ни точек без всяких размеров. Идеальные геометрические фигуры существуют только в нашем представлении.

Как же сложилось такое представление и зачем оно нужно?

Путь формирования геометрических представлений и понятий был очень долгим. Он длился тысячелетия и не завершен. Понятия геометрии продолжают изменяться. Проследить даже в общих чертах этот путь здесь мы не можем. Сделаем только самые общие пояснения.

Можно указать две основные причины того, что сложились и утвердились идеальные геометрические представления.

Первую причину легко понять из примера проведения отрезка. Землемеры в Древнем Египте втыкали в землю два колышка и протягивали между ними веревку. Но колышки можно взять потоньше, а вместо веревки – тонкую нить. И не видно, почему нельзя уточнять это дальше.

Таким образом, первая причина состоит в том, что практика и наглядное представление всегда показывали и показывают возможность сделать формы тел и геометрическое построение более точными. Так, представляя себе продолжение отрезка прямой, мы не видим принципиальных ему границ, и возникает представление о неограниченно продолженной прямой.

Неточности связаны с особенностями материала реальных тел, с теми или иными условиями. Но все это является посторонним и случайным по отношению к существу самих геометрических построений. Поэтому эти построения выступают в принципе как неограниченно уточняемые, так же как форма и размеры тела представляются в принципе неограниченно уточняемыми.

Отсюда и возникает представление об идеальных геометрических фигурах. Рассматривается, скажем, треугольник не деревянный, не железный, никакой другой, а треугольник вообще и, значит, идеальный треугольник.

Вторая причина того, что это представление сложилось и утвердилось, тесно связанная с первой, заключается в том, что точное рассуждение требует идеально точно определенного предмета. Для того чтобы делать выводы, чтобы решать практические задачи, нужны четкие правила. А точные правила требуют точных понятий, тем более точных понятий требует точная теория. В этом вторая причина утверждения идеальных понятий геометрии. Продолжающееся и теперь уточнение геометрических понятий неразрывно связано с уточнением математических рассуждений – определений и доказательств. А точная теория нужна в конечном счете для применения в науке и технике, так же как в точной работе нужен хороший точный инструмент.

Математика, в частности геометрия, и представляет собой могущественный инструмент познания природы и создания техники.

Подведем итог. Идеальные геометрические понятия возникают в результате отвлечения от всего внешнего и случайного для самих пространственных отношений и форм. Это отвлечение закрепляется в выводах геометрии, которой нужна прочная логическая структура, как нужна прочная структура хорошей машине.

Наука, поднимаясь к абстракциям, не удаляется от истины, а приближается к ней, проникая в природу точнее и глубже.

Глава 2

ВАЖНЫЕ ПОНЯТИЯ ПЛАНИМЕТРИИ

2.1. Логическое строение курса геометрии

Логически строгий курс геометрии строится следующим образом:

1. Перечисляются ***основные геометрические понятия***, которые вводятся без определений (*точка*, *прямая*, *плоскость*, *расстояние* от одной точки до другой).
2. С их помощью даются ***определения*** всех остальных геометрических понятий.
3. Формулируются ***аксиомы***.
4. На основе аксиом и определений все дальнейшие ***геометрические предложения*** доказываются.

Пользуются также *правилами логики*, изучаемыми в алгебре, *свойствами действительных чисел* и *свойствами множеств* как известными.

Все логически строгие элементарные курсы геометрии трудны для изучения. Так, выполнение уже первого пункта программы проблематично. Еще Н. И. Лобачевский указал, что математическая наука не должна начинаться с таких "темных" понятий, какими у Евклида являются определения точки, линии, прямой линии ("Точка – это то, что не имеет частей", "линия – длина без ширины", "прямая линия – такая, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам") и т.п.

Для выполнения третьего пункта программы следует перечислить аксиомы, причем система аксиом должна обладать свойствами *полноты*, *непротиворечивости* и *независимости*. Это означает, во-первых, что с помощью этой системы можно доказать истинность или ложность любого высказывания евклидовой геометрии; во-вторых, что никакие два предложения, выведенные из данных аксиом, не могут оказаться утверждением и отрицанием одного и того же математического факта; наконец, многие аксиомы этой системы независимы, т.е. они не могут быть выведены из остальных аксиом. В середине XIX века были отмечены недостатки аксиоматики Евклида, например, замечена неполнота его системы аксиом.

Полное осуществление четвертого пункта программы потребовало бы последовательного, без пропусков, доказательства на основе аксиом всех геометрических предложений.

В действующем с 1990 г. учебнике геометрии А.В. Погорелова реализована *наглядно-аксиоматическая* форма изложения. Последовательно выдержанное дедуктивное изложение опирается на аксиоматику автора.

2.2. Измерение отрезков

Геометрия – это наука о свойствах геометрических фигур. Она возникла как практическая опытная наука. *Счет* и *измерение* – две основные операции для решения практических задач математическими методами. При счете получаются *натуральные* числа.

Свойства фигур, связанные с измерением, называются *метрическими*. В геометрии измеряют длины, площади, объемы и т.д.

Приняв какую-либо величину e за единицу измерения, можно с ее помощью измерить любую другую величину a того же рода. В результате измерения получим, что $a = xe$, где x – число. Это число x называется *числовым значением* величины a при единице измерения e. Известно, что абсолютно точное измерение невозможно.

Результаты измерений часто выражаются *рациональными* числами. Если отрезок AB содержит m отрезков, каждый из которых равен n-ой части единичного отрезка, то пишут $AB = \frac{m}{n}$. Длину отрезка можно с любой степенью точности выразить положительным рациональным числом. Но при решении задач и в теоретических исследованиях появляются отрезки, длины которых не выражаются такими числами. Например, длина диагонали квадрата не выражается никаким рациональным числом. Говорят, что диагональ квадрата *несоизмерима* с его стороной (это значит, что при измерении диагонали посредством стороны, которая безгранично делится на все более и более мелкие части, на диагонали получается остаток).

Такие действительные числа, не являющиеся рациональными, выражаются непериодическими десятичными дробями и называются *иррациональными*.

С открытием несоизмеримости отрезков началось отделение геометрии от действительности, от опыта. Ее предмет составили уже не реальные, а идеальные фигуры. Это глубокое открытие произвело громадное впечатление на пифагорейцев, которым его приписывают. Известны доказательства несоизмеримости отрезков, которые принадлежат Евклиду и Аристотелю. Рассмотрим доказательство несоизмеримости стороны квадрата и его диагонали, которое основано на свойствах четных и нечетных чисел и проводится методом от противного.

Длина диагонали единичного квадрата не выражается никаким рациональным числом.

Доказательство. По теореме Пифагора находим, что квадрат диагонали равен $1^2 + 1^2 = 2$. Предположим, что диагональ можно записать в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$. Тогда имеем: $2 = \frac{m^2}{n^2}$, откуда $m^2 = 2n^2$, а потому квадрат натурального числа m четен. Поскольку квадрат любого нечетного числа нечетен, то m должно быть четным числом, т.е. $m = 2k$. Отсюда следует, что $4k^2 = 2n^2$, откуда $2k^2 = n^2$. Это равенство показывает, что квадрат числа n четен, а потому n тоже четное число: $n = 2l$. Но тогда m и n делятся на 2, что противоречит несократимости дроби. Полученное противоречие доказывает утверждение.

В метрических задачах наиболее часто встречаются несоизмеримые отрезки, представимые в виде арифметических квадратных корней. Решая задачи, оперируют их точными значениями, а на практике используют приближенные значения с требуемой точностью.

Например, на объективе фотоаппарата указан ряд числовых значений относительных отверстий: 1; 1,4; 2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11,2; 16 (члены геометрической прогрессии со знаменателем $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} \approx 1,4$). Следовательно, с переводом диафрагмы на одно деление площадь действующего светового отверстия изменяется ровно в два раза, т.к. площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi r^2$.

Вообще, если длина одного отрезка в $\sqrt{n}$ раз больше длины другого отрезка, то отношение квадратов их длин равно $n : 1$. Например, диагональ квадрата больше его стороны в $\sqrt{2}$ раз, поэтому отношение площадей квадратов, построенных на этих отрезках, равно 2 : 1.

<u>Вывод</u>: чтобы можно было выражать числами длины любых отрезков, необходимо рассматривать иррациональные числа; при решении геометрических задач длины несоизмеримых отрезков не заменяют их приближенными значениями, а производят действия с их числовыми значениями по правилам действий над действительными числами.

2.3. Геометрические места точек

Геометрическим местом точек (г.м.т.) называется фигура, состоящая из всех точек, обладающих некоторым свойством, и не содержащая других точек.

Г.м.т. является одним из важных понятий геометрии. Оно широко используется при изучении аналитической геометрии, механики и других дисциплин. В задачах на г.м.т. естественно используется идея *движения*.

Перечислим основные г.м.т. на *плоскости*.

1. Г.м.т., удаленных от данной точки O, лежащей на той же плоскости, на одном и том же расстоянии a, есть окружность с центром O и радиусом a, т.е. Окр(O, a).

2. Г.м.т., отстоящих от данной прямой на данном расстоянии a, являются две прямые, параллельные данной прямой и расположенные по разные стороны от нее.

3. Г.м.т., одинаково удаленных от двух данных точек A и B, есть прямая, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину – серединный перпендикуляр к отрезку.

4. Г.м.т., расстояния которых от двух данных точек A и B относятся, как $m : n$, есть окружность с диаметром $PQ = \dfrac{2amn}{m^2 - n^2}$, где P и Q – точки, делящие отрезок AB ($AB = a$) в отношении $m : n$, соответственно, внутренним и внешним образом – окружность Аполлония (по имени открывшего ее греческого геометра).

5. Г.м.т., равноудаленных от сторон данного угла и находящихся во внутренней области угла, есть луч, делящий угол пополам.

6. Г.м.т., равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых, являются две прямые, делящие пополам углы, образованные данными прямыми.

7. Г.м.т., из которых данный отрезок виден под прямым углом, есть окружность, построенная на данном отрезке, как на диаметре (за исключением концов отрезка).

8. Г.м.т., из которых данный отрезок виден под данным по величине углом, являются дуги двух окружностей, проходящих через концы отрезка и вмещающих данный угол (за исключением концов отрезка).

2.4. Задачи на построение

Задачи на построение, которые решаются чаще всего с помощью *циркуля* (позволяет описать из данного центра окружность данного радиуса) *и линейки* (позволяет проводить прямые линии), – это классические задачи евклидовой геометрии.

Задача считается решенной, если указан способ построения фигуры и доказано, что в результате получена фигура с требуемыми свойствами. Полное решение сложных задач на построение состоит из четырех этапов: *анализ, построение, доказательство, исследование*. Анализ – это поиск плана решения и изготовление чертежа-наброска; построение – фактическое построение чертежа-построения; доказательство – логически необходимый этап, предполагающий доказательство правильности рассуждений; исследование – завершающий этап, на котором устанавливаются различные случаи, которые могут иметь место при построении, выясняется число решений задачи, условия существования искомой фигуры, т.е. решению придается общность и полнота.

Распространенные методы решения задач на построение используют следующие геометрические понятия: геометрическое место точек, геометрические преобразования, метрические соотношения в геометрических фигурах. В действующих школьных учебниках по геометрии представлены только простейшие задачи на построение. Но многие задачи на построение ярко раскрывают свойства геометрических фигур, демонстрируют взаимосвязь их элементов. Знание алгоритмов их решения способствует поиску решений различных геометрических задач. Задачи на построение развивают важное умение сводить одну задачу к другой, уже известной. Они учат активно применять идеи методов решения задач.

Особенностью решения задач на построение является также нахождение и последующее четкое исполнение цепочки операций с помощью фиксированного ограниченного набора инструментов (циркуля и линейки), необходимых для построения фигуры. Такую последовательность действий можно считать построением алгоритма (напомним, что любой алгоритмический язык имеет систему команд исполнителя алгоритма). Кроме того, известно, что при заданных элементах условия одна и та же задача на построение может иметь различное число решений. Следовательно, возникают альтернативные действия – перебор вариантов. Эта специфика решения задач на построение позволяет также утверждать, что они служат эффективным средством развития алгоритмической культуры.

Перечислим основные задачи на построение:

- деление отрезка на *n* равных частей (пополам);
- деление отрезка на части, пропорциональные заданным величинам;
- построение четвертого пропорционального отрезка;
- построение среднего пропорционального отрезка;
- построение некоторых несоизмеримых отрезков;
- построение угла, равного данному;
- построение биссектрисы угла;
- построение параллельной прямой;
- построение перпендикулярной прямой;
- построение треугольников (по трём сторонам, по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим к ней углам);
- построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету;
- построение описанной окружности треугольника;
- построение вписанной окружности треугольника;

- построение касательной к окружности, проходящей через данную точку вне данной окружности;
- построение общей касательной к двум данным окружностям;
- построение образа данного треугольника при осевой и центральной симметрии;
- построение образа данного треугольника при повороте вокруг заданного центра на заданный угол;
- построение образа данного треугольника при гомотетии, заданной центром и парой соответственных точек;
- построение прямой, параллельной основанию данного треугольника и делящей его площадь пополам;
- построение прямоугольника, равновеликого данному треугольнику;
- построение квадрата, равновеликого данному треугольнику;
- построение на заданном основании треугольника, равновеликого данному треугольнику;
- построение правильных выпуклых *n*-угольников при n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12.

Ниже в различном масштабе выполнено построение с помощью теоремы Фалеса отрезка, длина которого равна $\frac{2}{3}$ (рис. 1), и отрезка, длина которого равна $\sqrt{7}$: с использованием средних пропорциональных отрезков (рис. 2), теоремы Пифагора (рис. 3).

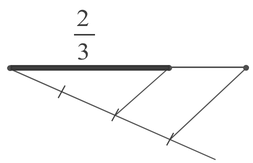


Рис. 1

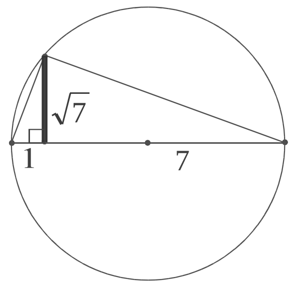


Рис. 2

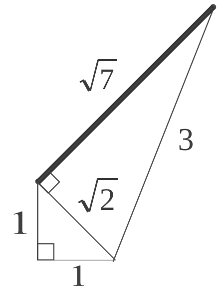


Рис. 3

<u>Вывод</u>: алгоритмы решения основных задач на построение с помощью циркуля и линейки полезно знать, чтобы использовать их в процессе поиска решений геометрических задач.

2.5. Пропорции

Пропорцией называется равенство отношений двух или нескольких пар чисел или величин: $a : b = c : d$ *или* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

Систематически пропорции начали изучать в Древней Греции. Сначала рассматривали лишь пропорции, составленные из натуральных чисел. Открытие несоизмеримости диагонали квадрата и его стороны заставило различать пропорции, составленные из чисел, и пропорции, составленные из величин. В IV в. до н.э. древнегреческий математик Евдокс дал определение пропорции, составленной из величин любой природы [33, с.261]. Это позволило применять вместо пропорций уравнения, а вместо преобразования пропорций – алгебраические преобразования.

В геометрии отношение любых двух отрезков понимают как отношение длин этих отрезков.

Два отрезка AB и CD называются пропорциональными отрезкам MN и KP, если имеет место равенство $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{MN}{KP}$.

Основные свойства пропорций.

Если $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, то $ad = bc$.

$\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$; $\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$ $(a > b)$; $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$ и т.д.

Четвертый пропорциональный отрезок.

Зная три члена пропорции $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, можно найти неизвестный член. Например, $d = \dfrac{b \cdot c}{a}$. Этот член d называется четвертым пропорциональным.

Если a, b, c, d – длины отрезков, то отрезок d можно построить с помощью теоремы о пропорциональных отрезках: *параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки*.

$OA = a$, $AB = b$, $OC = c$, $CD = d$ (рис. 4).

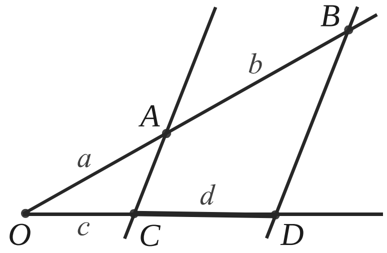


Рис. 4

Такого построения требует, например, решение задачи: *на данном основании построить треугольник, равновеликий данному треугольнику*. Высота искомого треугольника будет четвертой пропорциональной к данному основанию и к основанию и высоте данного треугольника.

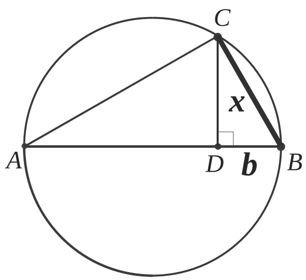
Средний пропорциональный отрезок.

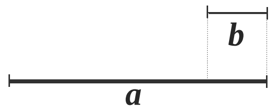
Число x есть среднее пропорциональное (*или среднее геометрическое*) *между двумя другими числами a и b, если верна пропорция*: $a : x = x : b$ ($\boldsymbol{x^2 = ab}$). Например, $4 : 6 = 6 : 9$ или $6^2 = 4 \cdot 9$.

Если a, b, x – длины отрезков, то отрезок x *можно построить* разными способами. Рассмотрим два из них, отложив отрезок b на отрезке a ($a \geq b$, $a = AB$, $b = BD$).

1) Построим на отрезке a как на диаметре окружность. Тогда <u>x – катет</u> прямоугольного треугольника с гипотенузой a и проекцией этого катета на гипотенузу b (рис. 5);

2) Построим на отрезке $a - b$ как на диаметре окружность. Тогда <u>x – отрезок касательной</u>, проведенный к ней из точки B (рис. 6), a – секущая, b – ее внешний отрезок.





$BC^2 = AB \cdot BD$

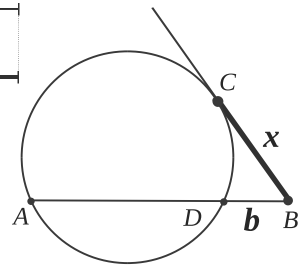


Рис. 5

Рис. 6

Подобного построения требует, например, решение задачи: *построить квадрат, равновеликий данному треугольнику*. Диагональ искомого квадрата будет средней пропорциональной длин основания и высоты данного треугольника.

Золотое сечение.

Иоганн Кеплер считал, что геометрия владеет двумя сокровищами – теоремой Пифагора и золотым сечением. И если первое можно сравнить с мерой золота, то второе – с драгоценным камнем.

Золотое сечение встречается при построении правильных многоугольников, находит применение в теории правильных многогранников. Эта замечательная пропорция, к сожалению, не рассматривается в школьном учебнике геометрии. Остановимся на ней подробнее.

В литературе золотое сечение встречается впервые в "Началах" Евклида (III в. до н.э.), но известно оно было раньше. В частности, знали о нем пифагорейцы, которые в числах и отношениях искали магическое, сверхъестественное. Позже было установлено, что эта пропорция встречается в природе и имеет определенные достоинства с эстетической точки зрения, поэтому она нашла сознательное применение в архитектуре и искусстве. Отдали дань золотому сечению также композиторы и поэты.

Говорят, что точка C производит золотое сечение отрезка AB, если $AC : AB = CB : AC$ *или* $AC^2 = AB \cdot BC$.

Из определения следует, что длина большей части есть среднее пропорциональное длин всего отрезка и его меньшей части. Другими словами, большая часть так относится к целому, как меньшая – к большей. Убедимся, что части составляют приблизительно 0,62 и 0,38 длины всего отрезка (рис. 7).

Рис. 7

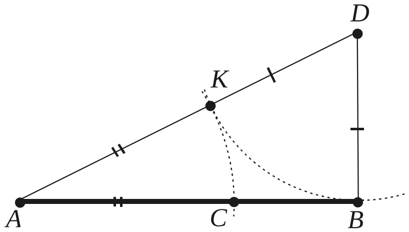
Вычислим части, считая, что $AB = a$, $AC = x$, $BC = a - x$.

Тогда $x^2 = a\,(a - x)$ или $x^2 + ax - a^2 = 0$.

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a \approx 0{,}62a\ (x > 0),\quad a - x = a - \frac{\sqrt{5}-1}{2}a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a \approx 0{,}38a.$$

Следовательно, $AC = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$, $BC = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}a$.

В геометрии золотое сечение называется также *делением отрезка в крайнем и среднем отношении*. Построим с помощью циркуля и линейки точку C, делящую отрезок AB указанным образом.



Восставим к отрезку из точки B перпендикуляр BD (рис. 8) так, что $BD = ½\,AB$. Соединив A и D, отложим $DK = DB$ и $AC = AK$.

C – искомая точка.

Действительно, если $AB = a$, $BD = ½\,a$ и по теореме Пифагора

Рис. 8

$$AD = \frac{a\sqrt{5}}{2},\ AK = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a = AC.$$

Иррациональное число $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ обозначают буквой τ. $\dfrac{1}{\tau} \approx 1{,}618$.

Заметим, что $\dfrac{1}{\tau} - \tau = 1$. Это единственное положительное число, обладающее таким свойством: $\dfrac{1}{t} - t = 1$. Оно является положительным корнем уравнения $t^2 + t - 1 = 0$.

Представления числа τ цепной дробью и выражением с вложенными радикалами содержат только единицы:

$$\tau = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}};\qquad \tau = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}.$$

Приближение числа τ последовательностью подходящих дробей $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \dots$ указывает на их связь с числами Фибоначчи. Напомним, что эта знаменитая возвратная последовательность определяется так: $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $n = 3, \dots$

Ее первые члены: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377.

Если взять три последовательных члена u_n, u_{n-1} и u_{n-2}, то числа $\frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}$ и $\frac{u_{n-1}}{u_n}$ являются подходящими дробями числа τ, причем одна из этих дробей больше τ, а другая меньше.

Например, 377 = 233 + 144, т.е. $u_n = 377$, $u_{n-1} = 233$, $u_{n-2} = 144$. $\frac{144}{233} \approx 0{,}618026$ ($\tau \approx 0{,}618034$), $\frac{233}{377} \approx 0{,}618037$, т.е. $\frac{144}{233} < \tau < \frac{233}{377}$.

Таким образом, разделить золотым сечением на целые части с хорошим приближением можно числа, являющиеся членами последовательности Фибоначчи.

Вывод: различные пропорции и их основные свойства полезно помнить, чтобы уметь находить и записывать для отрезков, принадлежащих конфигурациям геометрических фигур.

2.6. Правильные многоугольники и их части

Выпуклый многоугольник называется правильным, если у него все стороны и все углы равны.

Правильные многоугольники особенно часто встречаются в геометрических задачах, поэтому основные соотношения между их элементами важно помнить. В процессе решения рассматриваются также составные части этих фигур и зависимости между их элементами.

Основные теоремы:

- *правильный выпуклый многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности;*
- *правильные выпуклые многоугольники подобны;*
- *сумма углов выпуклого n-угольника равна* $180°(n-2)$.

Основные формулы:

$R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$, $r = \dfrac{a}{2tg\dfrac{180°}{n}}$, $\alpha = \dfrac{180°\cdot(n-2)}{n}$, где a – длина стороны, α – величина угла, r и R – величины радиусов вписанной и описанной окружностей.

Практическая задача построения правильного n-угольника M_n с помощью циркуля и линейки была поставлена еще в древности.

По правильному k-угольнику легко построить $2k$-угольник, затем $4k$-угольник и, вообще, M_n при $n = k \cdot 2^m$, $m \ge 0$. Общую задачу построения M_n достаточно решить для нечетных n.

Построения M_3, M_4, M_6 просты, так как построение M_n равносильно делению окружности на n равных дуг или построению угла в $360°/n$. Более сложные построения M_{10} и M_5 будут рассмотрены ниже. Построения M_5 и M_{15} (а вместе с ними серий для $n = 5\cdot 2^m$ и $n = 15\cdot 2^m$) привел Евклид в своих "Началах".

Прошло более двух тысячелетий, прежде чем евклидов список пополнил в 1796 г. немецкий математик К.Ф. Гаусс. Используя алгебраические идеи, он дал построение M_{17} и доказал невозможность построения с помощью только циркуля и линейки M_7 и M_9 [33, с.202]. Ученый нашел все значения n, для которых правильный n-угольник можно построить, и доказал, что если n – простое, то оно должно быть вида $n = 2^{2^k} + 1$. Ниже приведена формула, полученная выдающимся математиком для M_{17} ($17 = 2^{2^2} + 1$):

$$16\cos\frac{360°}{17} = \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{17} - 1 + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}}.$$

Описание построения M_{257} занимает у Гаусса около 50 страниц.

Рассмотрим наиболее важные метрические соотношения между элементами *правильных выпуклых n-угольников* при n = 3, 4, 5, 6, считая, что a – длина стороны, r и R – величины радиусов вписанной и описанной окружностей, S – площадь.

Правильные треугольник и четырехугольник.

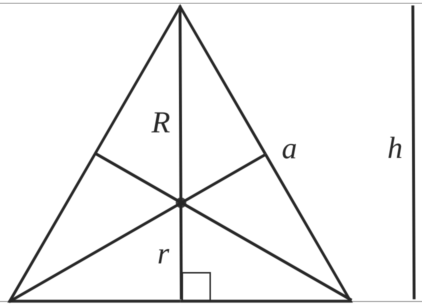
Равносторонний треугольник и квадрат, а также их половины наиболее часто встречаются в планиметрических задачах.

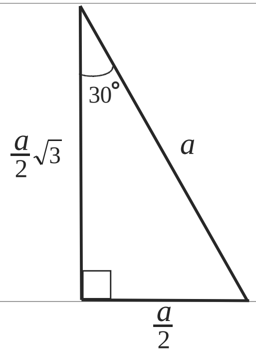
По одной из пяти величин a (сторона), h (высота), r, R, S для равностороннего треугольника полезно уметь <u>устно</u> вычислять остальные. Если $h = 2\sqrt{3}$, то $a = 4$, $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $R = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $S = 4\sqrt{3}$.

Аналогично для величин a, d (диагональ), r, R, S, связанных с квадратом. Если $S = 5$, то $a = \sqrt{5}$, $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $d = \sqrt{10}$, $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Правильный треугольник
(равносторонний треугольник
со стороной a и высотой h)

Его половина
(прямоугольный треугольник
с острыми углами 30° и 60°)





$h = r + R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $R = 2r$.

$r = \dfrac{h}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

$S = h\cdot\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

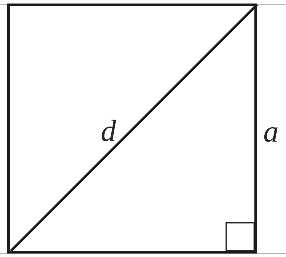
Длины сторон: a, $\dfrac{a}{2}\sqrt{3}$, $\dfrac{a}{2}$.

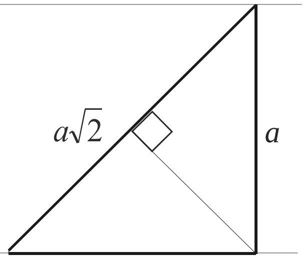
($2x$, $x\sqrt{3}$, x или 8, $4\sqrt{3}$, 4 или

$2\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{2}$ и т.п.)

Правильный четырехугольник
(квадрат со стороной a)

Его половина
(равнобедренный
прямоугольный треугольник)





Диагональ квадрата больше стороны в $\sqrt{2}$ раз: $d = a\sqrt{2}$.

$r = \dfrac{a}{2}$, $R = \dfrac{d}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

$S = a^2 = ½\, d^2$.

Половина этого треугольника является также равнобедренным прямоугольным треугольником

Правильный пятиугольник (пентагон)

Чтобы вычислить сторону правильного пятиугольника и построить его, докажем теорему для правильного десятиугольника.

Сторона правильного вписанного в окружность десятиугольника равна большему отрезку радиуса, разделенному в крайнем и среднем отношении.

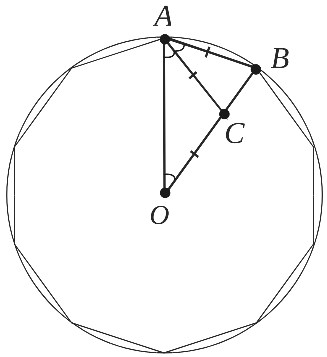


Рис. 9

Доказательство

В треугольнике AOB: $AO = BO = R$, $\angle AOB = \dfrac{360°}{10} = 36°$, $\angle A = \angle B = 72°$.

Проведем биссектрису AC угла A. Образовавшиеся треугольники ACB и ACO – равнобедренные.

Имеем: $AB = AC = OC$.

По свойству биссектрисы угла треугольника: $\dfrac{OC}{CB} = \dfrac{OA}{AB}$ или $\dfrac{OC}{CB} = \dfrac{OB}{OC}$,

$OC^2 = CB\cdot OB = AB^2$, ч.т.д.

Из теоремы следует, что сторона правильного десятиугольника определяется построением среднего пропорционального отрезка и поэтому равна $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

Сторона AD правильного пятиугольника равна удвоенной высоте h треугольника ABC, проведенной из вершины A, поэтому

$$AD = 2h = 2AB\cos 18° = (\sqrt{5}-1)\,R\cdot\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\ .$$

Применяя тригонометрию, указанную высоту можно найти без использования стороны десятиугольника, например, из прямоугольного треугольника с гипотенузой OA.

Тогда $h = OA\sin 36° = \dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\ R$.

Итак, $a_5 = \sqrt{10-2\sqrt{5}}\ \dfrac{R}{2}$, $a_{10} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

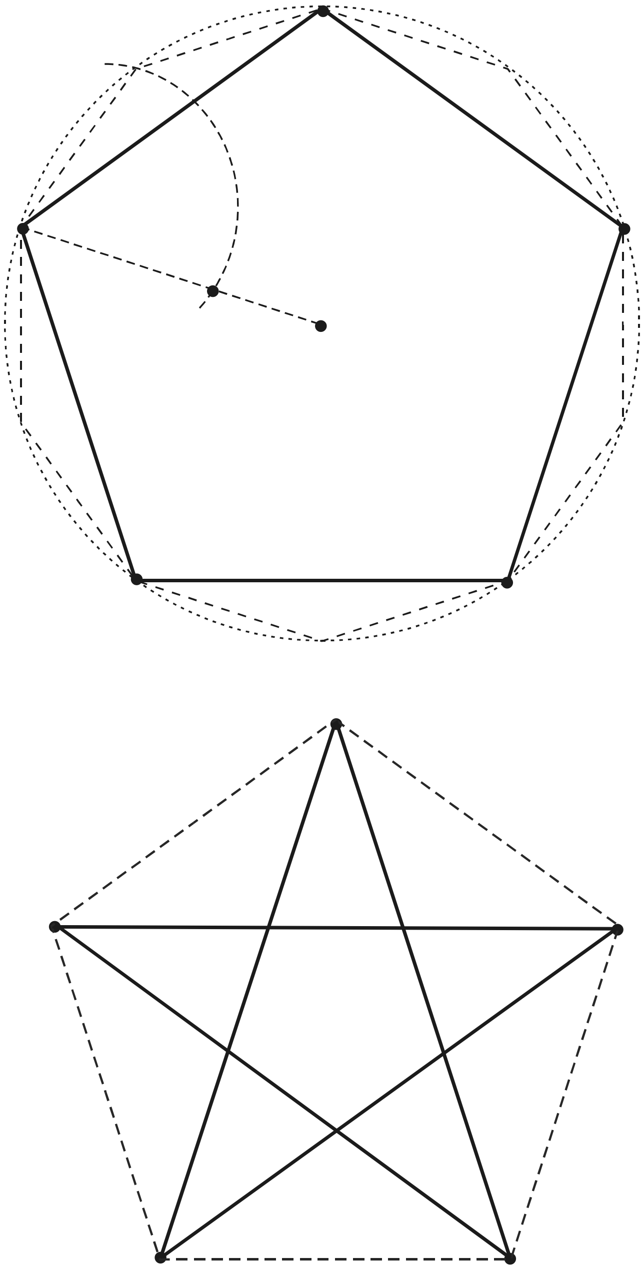


Рис. 10–11

Следовательно, для построения правильного пятиугольника необходимо разделить радиус окружности в крайнем и среднем отношении, построить правильный десятиугольник и соединить его вершины через одну (рис. 10).

Соединяя через одну вершины правильного пятиугольника, мы получим *звездчатый правильный пятиугольник* (рис. 11).

Используя дуги, стягиваемые сторонами вписанных правильных шестиугольника и десятиугольника как хордами, можно построить сторону правильного пятнадцатиугольника. Действительно, дуга, стягиваемая стороной правильного вписанного пятнадцатиугольника, равна $\frac{1}{15}$ части окружности, т.к. $\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$.

Правильный шестиугольник (гексагон)

Правильный шестиугольник полезно представлять составленным из шести правильных треугольников (рис. 12) или из трех равных ромбов (рис. 13), имеющих общую вершину. Указанные рисунки можно также считать параллельными проекциями куба на плоскость. Изображения – верные, но не являются наглядными.

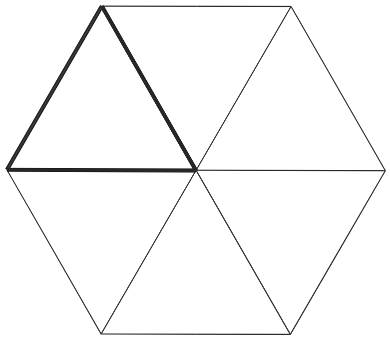


Рис. 12

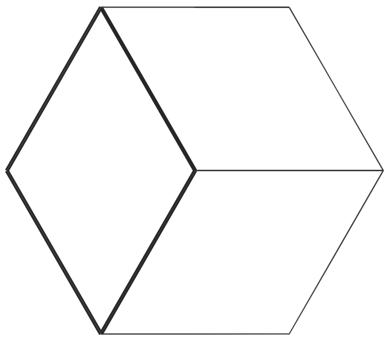
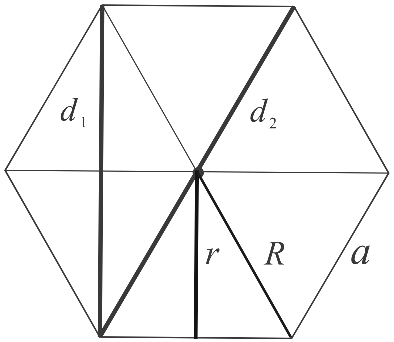


Рис. 13

С учетом сказанного ясно, что радиусы вписанной и описанной окружностей правильного шестиугольника равны соответственно высоте h и стороне a правильного треугольника, а длины его диагоналей d_1 и d_2 равны удвоенным длинам этих же отрезков. Следовательно, длины отрезков в правильном шестиугольнике выражаются через длины отрезков, связанных с более простой фигурой – правильным треугольником.

Имеем основные соотношения:



$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad R = a.$$

$$d_1 = a\sqrt{3}, \qquad d_2 = 2a.$$

$$S = 6\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}.$$

Вывод: основные соотношения между элементами правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника важно помнить наизусть и вычислять требуемые отрезки без применения тригонометрии или теоремы Пифагора.

2.7. Пифагоровы тройки

Уравнение $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$ (a, b, c – натуральные числа) называется задачей Пифагора, а тройки натуральных чисел, удовлетворяющих ему, называются *пифагоровыми тройками*.

Одно из замечательных решений этого уравнения – пифагорова тройка чисел $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Треугольник с такими сторонами иногда называют *египетским*.

Пифагорову тройку чисел, не имеющих общего делителя, большего 1, будем называть несократимой. Доказано, что тройка является несократимой тогда и только тогда, когда она с точностью до порядка первых двух чисел совпадает с тройкой чисел $2xy$, $x^2 - y^2$, $x^2 + y^2$, где x и y ($x > y$) – взаимно простые натуральные числа разной чётности. Следовательно, пифагоровых троек бесконечно много, и все они могут быть получены по указанным формулам. Вычислим с помощью приведенных выше формул четыре пифагоровых тройки:

$x = 2$	$y = 1$	$a =$ **3**	$b =$ **4**	$c =$ **5**
$x = 3$	$y = 2$	$a =$ **5**	$b =$ **12**	$c =$ **13**
$x = 4$	$y = 1$	$a =$ **15**	$b =$ **8**	$c =$ **17**
$x = 4$	$y = 3$	$a =$ **7**	$b =$ **24**	$c =$ **25**

Пифагоровы тройки имеют много интересных свойств.

Например, справедливы утверждения: а) хотя бы одно из чисел a или b кратно 3; б) хотя бы одно из чисел a или b кратно 4; в) хотя бы одно из чисел a, b или c кратно 5; г) в несократимой пифагоровой тройке c – нечётно, a и b имеют разную чётность.

Очевидно, что если (a, b, c) пифагорова тройка, то (ka, kb, kc) также будет пифагоровой тройкой ($k \in N$). Получаем наиболее употребительные тройки при решении геометрических задач:

3, 4, 5	6, 8, 10	9, 12, 15	12, 16, 20	15, 20, 25
5, 12, 13	10, 24, 26	15, 36, 39	20, 48, 52	25, 60, 65
8, 15, 17	16, 30, 34	24, 45, 51	32, 60, 68	40, 75, 85
7, 24, 25	14, 48, 50	21, 72, 75	28, 96, 100	35, 120,125

Вывод: некоторые пифагоровы тройки полезно помнить наизусть, чтобы по имеющимся двум числам из тройки находить третье ее число без применения теоремы Пифагора, а также устно находить производные тройки.

Если обобщить рассмотренное уравнение и задаться вопросом, имеет ли натуральные решения уравнение $a^n + b^n = c^n$ для любого $n > 2$, то получим знаменитую Большую теорему **П. Ферма**, которая утверждает, что это уравнение решений не имеет (1635 г.).

Как известно, сам Ферма теорему не доказал, но утверждал, что доказательство ему известно. Проблема казалась такой простой, что на протяжении 350 лет существовал стойкий интерес математиков любителей и профессионалов, которые предложили много ложных доказательств.

И только в 1993 году математический мир обошла сенсационная новость: английский математик Эндрю Вайлс полностью доказал легендарную теорему Ферма.

Этот математический результат настолько мощный, что воспринимается лишь очень узким кругом специалистов. Вместе с тем, существует много глубоких результатов, полученных в процессе доказательства теоремы Ферма, которые оказывают влияние на современную математику. "Никто в математическом мире не может сомневаться в том, что последняя теорема Ферма и гипотеза Римана имеют большое значение" [31].

2.8. Данные и произвольные элементы в задаче

При решении всех геометрических задач нужно безошибочно различать данные и произвольные элементы фигуры. Если задана окружность, то это значит, что заданы положение ее центра и длина радиуса. Центр зафиксирован и неподвижен. Если даны две пересекающиеся окружности, то кроме радиусов и центров окружностей следует считать известными линию центров этих окружностей, положения точек пересечения окружностей, положения и длины отрезков, соединяющих любую пару из указанных четырех точек и др. Если в заданном треугольнике требуется провести отрезок параллельно одной из его сторон, то положение и длина такого отрезка являются неопределенными. Если задан треугольник, то его следует считать треугольником общего вида, т.е. разносторонним. Известны лишь те величины углов и длины сторон, которые заданы в условии задачи.

Обычно геометрическая задача считается *определенной*, т.е. данных, содержащихся в ее условии, достаточно, чтобы однозначно понимать условие. Но необходимо принципиально помнить, что существуют *вариантные задачи*. Это значит, что набор данных в условии такой задачи допускает несколько вариантов (чаще два или три) расположения, построения фигур или их элементов.

Во-первых, условие может не определять фиксированного расположения точек и фигур. Так, известно, что положение центра описанной окружности треугольника зависит от вида треугольника по углам; точка касания окружности и прямой не определяет однозначно полуплоскость, содержащую центр этой окружности; касающиеся окружности не определяют способ касания, который может быть внутренним или внешним и т.п. Во-вторых, в условиях некоторых задач может не уточняться, какие отрезки (углы, дуги и т.д.) равны. Например, сказано, что точка C делит отрезок AB на части, длины которых n и m, но не известно, AC или BC равняется m; сказано, что основания трапеции n и m, но не известно, большее или меньшее основание трапеции равно m; сказано, что треугольник равнобедренный, но не известно, какие две его стороны равны между собой и т.п.

<u>Вывод</u>: необходимо тщательно и всесторонне анализировать условие задачи, чтобы не допустить его ложной интерпретации и рассмотреть все возможные варианты решения.

2.9. Чертеж и дополнительные построения

Решение большинства геометрических задач начинается с чертежа. В процессе решения задачи чертеж-набросок (его надо учиться хорошо делать от руки) может несколько раз заменяться более наглядным и правильным. Не исключено, что анализ полученного решения задачи потребует окончательной переделки чертежа. В итоге, он может существенно отличаться от первоначального, если, например, будет установлено, что треугольник является правильным, хорда служит диаметром окружности и т.п.

Процесс изготовления чертежа в сложной задаче напоминает процесс последовательного уточнения алгоритма в программировании и по понятным причинам остается за рамками учебных пособий, в которых приводятся окончательные чертежи. Нагляднее было бы изображение всех этапов решения (подобные изображения строят при изучении преобразований графиков функций, сечений многогранников и т.п.). Современные программные средства позволяют при этом обойтись без программирования (браузер ACDSee автоматически создает гипертекстовые страницы, содержащие требуемым образом расположенные рисунки (Activities/Create/HTML), позволяет просматривать рисунки как слайды (Tools/Slide Show); в пакете динамической геометрии DG (dghelp@ukr.net) можно автоматически воспроизводить пошаговое построение чертежа и т.п.).

Но более важно принимать активное, а не пассивное участие в подобном творческом процессе: самостоятельно решать задачи, участвовать в обсуждении решений и конструировать свой личный опыт (без которого нельзя увидеть окружность, не содержащуюся в условии). Вероятно, в этом одна из главных причин, по которой ранее видеотехника, а сегодня новейшие информационные технологии (обширные архивы задач в сети Internet, программы-тренажеры, гипертекстовые документы, мультимедиа-проекторы и т.д.) не могут полноценно заменить объяснение учителя, который не только транслирует информацию.

В предыдущем пункте говорилось о данных в условии задачи. Вернемся к одному из примеров. Задан треугольник. Ясно, что кроме его собственных элементов (вершин и сторон) следует считать определенными также медианы, высоты, биссектрисы, точки их пересечения, положения центров вписанной и описанной окружностей и т.п. Какие из этих объектов изображать на чертеже? Все зависит от опыта и навыков решения задач. Однозначных рекомендаций нет. Приходится искать компромисс между наглядностью и сложностью чертежа. Так, не обязательно изображать окружность, если она фигурирует в задаче (можно ограничиться изображением радиуса или обойтись даже без него); не обязательно изображать все объекты на одном чертеже (можно использовать выносные чертежи) и т.п.

Вместе с тем, существуют *стандартные приемы дополнительных построений*, которые часто применяются. Приведем некоторые из них, используя простую классификацию двух видов: разбиение фигур и дополнение фигур.

Разбиение

- Проведение перпендикуляров, высот осей симметрии с целью получения прямоугольных треугольников и применения теоремы Пифагора, тригонометрии или подобия (проведение радиусов окружности в точки касания, высот в трапеции, получение углов, стороны которых соответственно перпендикулярны и т.п.).
- Проведение в многоугольнике отрезка, параллельного одной из его сторон с целью применения подобия (в частности проведение средней линии, если в условии задана середина отрезка).
- Проведение в трапеции отрезка, параллельного одной из ее боковых сторон или диагоналей с целью получения треугольника и параллелограмма и применения свойств этих фигур.

Дополнение

- Построение параллелограмма, если задана медиана треугольника с целью применения свойств параллелограмма.
- Построение вспомогательной фигуры (например, окружности с целью применения свойств хорд, касательных и углов).
- Построение симметричной фигуры относительно прямой, содержащей какую-либо сторону многоугольника, т.к. часто фигуру полезно не только представлять как часть другой фигуры, но и видеть ее на чертеже (применяются также центральная симметрия, поворот, гомотетия).

Нестандартные дополнительные построения – один из самых эффективных приемов решения задач.

<u>Вывод</u>: дополнительные (вспомогательные) построения – это существенный этап решения геометрических задач; стандартные приемы таких построений необходимо запоминать, а нестандартные – приобретать с опытом.

2.10. Прямые и обратные теоремы. Необходимые и достаточные условия

Теоремы часто формулируют в виде условных предложений: "Если …, то …". Например, "Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник есть параллелограмм". Подобные предложения записывают кратко так: **A ⇒ B**. Читается: из A следует B. A называется *условием*, B – *заключением*. Рассмотрим теперь предложение **B ⇒ A**, в котором заключение превратилось в условие, а условие – в заключение. В нашем примере получим: "Если четырехугольник есть параллелограмм, то его противоположные стороны попарно равны". Эта теорема является *обратной* к первой теореме. Предложением, обратным к предложению **A ⇒ B,** называется предложение **B ⇒ A**.

Не всякая теорема имеет обратную. Например, теорему о вертикальных углах можно сформулировать так: "Если углы вертикальные, то они равны". Обратная ей теорема была бы такой: "Если углы равны, то они вертикальные". А это, конечно, неверно.

В тех случаях, когда верны оба предложения: **A ⇒ B** и **B ⇒ A,** говорят, что условия A и B *равносильны*, и пишут **A ⇔ B**. Читается: A равносильно B.

Рассмотренные отношения словами выражают многими способами; некоторые из них указаны в следующей таблице:

A ⇒ B	а) если верно A, то верно и B,
	б) B есть следствие A,
	в) A есть *достаточное* условие для B,
	г) B есть *необходимое* условие для A.
A ⇔ B	а) предложения A и B равносильны,
	б) A верно *тогда и только тогда*, когда верно B,
	в) A есть *необходимое* и *достаточное* условие для B.

Необходимое условие – всякое условие, без выполнения которого данное утверждение неверно (чтобы четырехугольник был квадратом, необходимо, чтобы его диагонали были перпендикулярны). *Достаточное* условие – всякое условие, из которого следует, что утверждение справедливо (если стороны четырехугольника равны, то такой четырехугольник – параллелограмм). *Необходимые и достаточные* условия называют еще необходимыми и достаточными *признаками*.

Глава 3

ЗАДАЧИ-ТЕОРЕМЫ

В десятом классе начинается изучение стереометрии. Усложняются чертежи, необходимо пространственное воображение, и, безусловно, должны быть прочные навыки решения задач по планиметрии. В достаточной ли степени подготовлены учащиеся?

К сожалению, практика убеждает в обратном. Темы по планиметрии изучались изолированно (ухудшению положения дел способствует сокращение числа часов на изучение математики в школе), а простые задачи, как правило, лишь иллюстрировали применение теоремы, изученной на уроке.

Но обучение решению задач – неотъемлемая составная часть изучения геометрии. В процессе решения задач тренируется мышление, закрепляются теоретические знания и вырабатываются навыки их применения.

Как научиться решать задачи по планиметрии?

Прежде всего необходимо систематизировать и обобщить знания по предмету. Одним из проверенных практикой эффективных методов обучения является *алгоритмический метод*, который предполагает *обязательный объем начальных сведений*. Здесь уместна аналогия с шахматами. Много ли комбинаций составит шахматист, сверяющий ходы фигур по справочнику? В задачах, как и в шахматных этюдах, раскрываются логические и динамические отношения, которые даны во взаимосвязи: свойства фиксированной конфигурации геометрических фигур, возможные дополнительные построения, осуществимые геометрические преобразования. Именно сознательное усвоение основных, исследование и обнаружение существующих связей и отношений влечет выбор метода решения задачи.

Как сообщить обязательный объем начальных сведений?

Во-первых, такие сведения нужно выделить. В литературе появились термины: *задачи-теоремы*, *опорные*, *базисные*, *ключевые*

задачи и т.п. Это задачи, которые часто и эффективно используются при решении других задач наряду с главными теоремами геометрии: теоремой Пифагора, теоремой косинусов, теоремой синусов и др. Предпочтительнее термин *задачи-теоремы*, т.к. одни из них являются теоремами в действующем школьном учебнике, а другие – задачами. В другом учебнике их роли могут поменяться. При построении курса геометрии в него включаются, в основном, теоремы, необходимые для развития и изучения теории. Их количество ограничено, разделение предложений на теоремы и задачи относительно и условно.

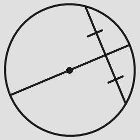
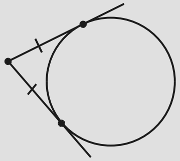
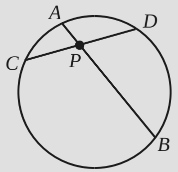
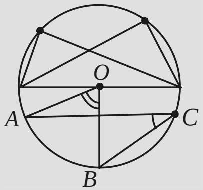
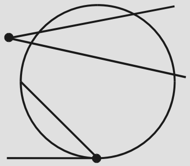
Выделим* 25 *задач-теорем и в следующей главе рассмотрим примеры, в которых применение той или иной задачи-теоремы целесообразно и дает главную идею решения (большинство задач-примеров взято из популярных сборников [1] и [2]). Тем не менее, подборка условная, потому что планиметрические задачи можно решать, применяя различные идеи, методы и приемы.

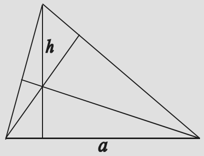
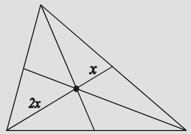
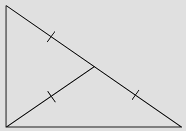
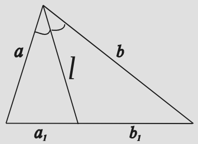
Во-вторых, задачи-теоремы нужно выучить наизусть. Только после этого и большого количества самостоятельно решенных задач можно говорить о начале приобретения собственного опыта и формирования геометрической интуиции, которую развить гораздо труднее, чем заучить готовые решения и доказательства.

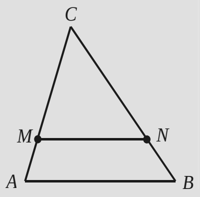
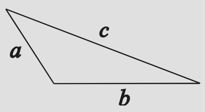
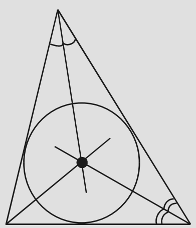
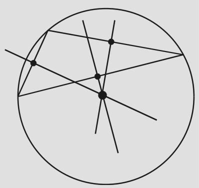
И еще два важных замечания.

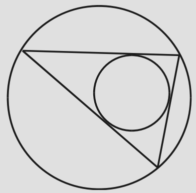
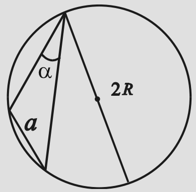
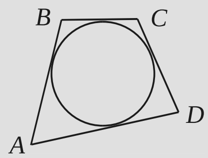
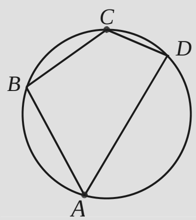
Из включенных в набор задач-теорем можно получать другие. Например, из двух свойств логарифмов $\log_a x^p = p\log_a x$, $\log_{a^q} x = \frac{1}{q}\log_a x$ вытекает формула: $\log_{a^q} x^p = \frac{p}{q}\log_a x$ ($x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$). Аналогично и в геометрии. Утверждения: всякая хорда окружности есть среднее пропорциональное между диаметром и ее проекцией на диаметр, который проходит через один из концов хорды и $2R = \frac{bc}{h_a}$ (формула Брахмагупты), – вытекают уже из двух задач-теорем (4 и 23, 6 и 14 соответственно).

Основываясь на практическом опыте, можно утверждать, что *знаний и умений применения выделенных задач-теорем достаточно для решения планиметрических задач, взятых из школьных учебников, практики вступительных экзаменов в высшие учебные заведения и большинства олимпиадных задач*.

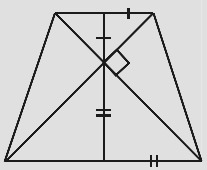
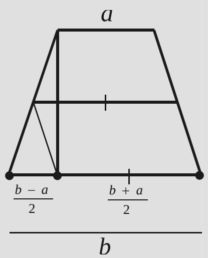
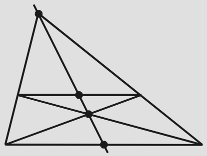
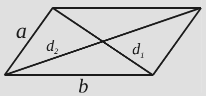
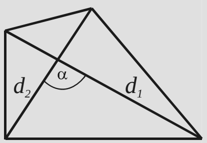
Окружность (*хорды, касательные, углы*)		
	1	Диаметр окружности, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей. Верно и обратное утверждение.
	2	Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны.
	3	Если AB и CD хорды окружности, пересекающиеся в точке P, то $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.
	4	Угол, вписанный в окружность, измеряется половиной угловой величины дуги, на которую он опирается. *Следствие*: вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны. *Замечательное свойство окружности.* Вписанные углы, опирающиеся на половину окружности (диаметр), прямые.
	5	Угол, вершина которого вне (внутри) круга, измеряется полуразностью (полусуммой) дуг, находящихся между его сторонами (и их продолжениями за вершину угла). Угол, образованный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, находящейся между его сторонами.

Треугольник (*высоты, медианы, биссектриса*)		
	6	Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке (ортоцентре). Если известны стороны треугольника a, b и c, то $h = \dfrac{2S}{a}$ или $a = \dfrac{2S}{h}$, где h – высота, проведенная к стороне a, S – площадь треугольника, определяемая по формуле Герона.
	7	Медианы треугольника пересекаются в одной точке (центре тяжести) и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины. $m_a = \sqrt{\dfrac{b^2}{2} + \dfrac{c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}}$.
	8	Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два равнобедренных треугольника, а длина её равна половине гипотенузы. Верно и обратное утверждение.
	9	Биссектриса l угла треугольника делит его противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам, т.е. $a : b = a_1 : b_1$. $l = \sqrt{ab - a_1 b_1}$.

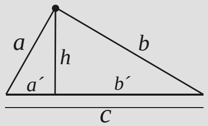
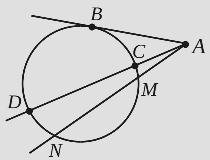
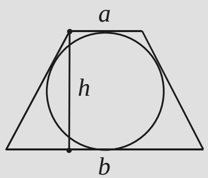
	10	Если прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его сторону AC в точке M, а сторону BC в точке N, то треугольники ABC и MNC подобны. *Следствие*: $CM : MA = CN : NB$.
	11	*Определение вида треугольника.* В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, и, наоборот. Пусть a, b, c – стороны треугольника, причем c – наибольшая сторона. $c^2 > a^2 + b^2$: треугольник – тупоугольный; $c^2 = a^2 + b^2$: треугольник – прямоугольный; $c^2 < a^2 + b^2$: треугольник – остроугольный.
Окружность и треугольник		
	12	Во всякий треугольник можно вписать единственную окружность. Её центром является точка пересечения биссектрис углов треугольника. *Биссектриса угла есть г.м.т., расположенных внутри угла и одинаково удаленных от его сторон.*
	13	Около всякого треугольника можно описать единственную окружность. Её центром является точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника. *Серединный перпендикуляр к отрезку есть г.м.т., равноудаленных от концов отрезка.*

	14	Радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника находят по формулам: $r = \frac{S}{p}$, $R = \frac{abc}{4S}$. a, b, c – длины сторон, S – площадь треугольника, p – его полупериметр. *Следствие*: в прямоугольном треугольнике с гипотенузой c: $r = \frac{a+b-c}{2}$, $R = \frac{c}{2}$.
	15	*Следствие из теоремы синусов.* Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего ей угла равно диаметру описанной окружности, т.е. $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ или $a = 2R \sin \alpha$.
Окружность и четырехугольник		
	16	Для того чтобы в четырехугольник можно было **вписать** окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы длин его противолежащих сторон были равны. $AB + CD = BC + AD$.
	17	Для того чтобы около четырехугольника можно было **описать** окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его противолежащих углов была равна 180°. $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.

Четырехугольник

	18	Если диагонали равнобочной трапеции взаимно перпендикулярны, то длина ее высоты равна длине средней линии, а площадь равна квадрату высоты трапеции, т.е. $S = h^2$.
	19	Если основания равнобочной трапеции равны a и b ($a < b$), то ее высота делит основание b на части $\dfrac{b-a}{2}$ и $\dfrac{b+a}{2}$. Большая из этих частей равна средней линии трапеции.
	20	*Замечательное свойство трапеции.* Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений её боковых сторон, проходит через середины оснований трапеции.
	21	*Следствие из теоремы косинусов.* Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, т.е. $d_1^2 + d_2^2 = 2\,(a^2 + b^2)$.
	22	Площадь любого четырехугольника равна половине произведения диагоналей, умноженному на синус угла между ними. $S = ½\, d_1 d_2 \sin \alpha$. *Следствие*: площадь четырехугольника, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, равна половине произведения диагоналей. $S = ½\, d_1 d_2$.

Средние пропорциональные отрезки

	23	Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобных исходному. Если в этих треугольниках взять соответствующие линейные элементы x, y, z, то $x^2 + y^2 = z^2$. Пусть a и b – катеты, h – высота, проведенная к гипотенузе c прямоугольного треугольника, a' и b' – проекции катетов на гипотенузу. Тогда $a^2 = a' \cdot c$; $b^2 = b' \cdot c$; $h^2 = a' \cdot b'$. *Следствие*: $h = \dfrac{ab}{c}$.
	24	Из точки A, взятой вне окружности, проведены к ней касательная AB и две секущие, пересекающие окружность в точках C и D, M и N соответственно. Тогда $AB^2 = AC \cdot AD$. *Следствие*: $AC \cdot AD = AM \cdot AN$.
	25	Высота описанной равнобочной трапеции есть среднее пропорциональное ее оснований, т.е. $h = \sqrt{a \cdot b}$ или $h^2 = ab$.

Глава 4

ПРИМЕНЕНИЕ ЗАДАЧ-ТЕОРЕМ

4.1. Практические советы

Следование практическим советам и приемам вычислений, приведенным ниже, может способствовать развитию техники и поиску рациональных решений геометрических задач.

◈ ***Помните наизусть***:

Пифагоровы тройки: 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17; 7, 24, 25.

Соотношения в правильных многоугольниках (см. 2.6).

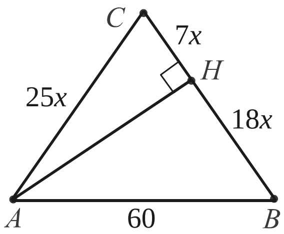
Квадраты натуральных чисел от 11 до 20, способы возведения в квадрат чисел, оканчивающихся цифрой 5, и умножения на 11.

Признаки делимости на 2, 5, 3, 9.

Формулы $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ ($\cos 120° = -½$).

◈ ***Рационально применяйте формулы в процессе вычислений***

Правую часть одной из формул для вычисления площади треугольника можно записать $\frac{ah}{2}$, $\frac{a}{2}\cdot h$, $a\cdot\frac{h}{2}$ и читать тремя способами: полупроизведение основания на высоту, произведение половины основания на высоту или основания на половину высоты. Тремя способами рационально и вычислять. Например, при $a = 13$, $h = 14$ лучше выбрать последний. Если произведение – результат промежуточный, то перемножать не обязательно, так как при последующих вычислениях возможно сокращение.



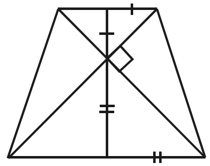
Найти площадь равнобедренного треугольника, основание которого равно 60, а высота, проведенная к боковой стороне, делит ее в отношении 7 : 18, считая от вершины.

Из прямоугольных треугольников ACH и ABH: $AH = 24x$, $AB = 30x$ (тройки 7, 24, 25 и 3, 4, 5, умноженная на 6). Имеем $30x = 60$ или $x = 2$. $S_{ABC} = 12x \cdot 25x = 12 \cdot 100 = 1200$.

◈ ***Учитесь геометрически интерпретировать формулы и приемы вычислений, перенося их на фигуры***

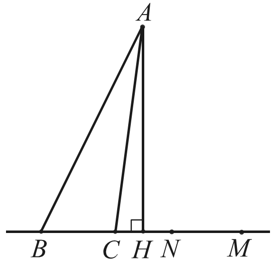
(вспомните геометрические доказательства теоремы Пифагора, формулы сокращенного умножения $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и т.п.).

Докажите, что если диагонали равнобочной трапеции взаимно перпендикулярны, то $S = h^2$, где S – площадь, h – высота трапеции.



Прочитаем применяемую теорему так: площадь трапеции равна произведению суммы половин ее оснований на высоту. Но сумма половин оснований данной трапеции очевидно равна ее высоте, поэтому $S = h \cdot h = h^2$.

При решении ряда задач полезным оказывается утверждение, вытекающее из теоремы Пифагора и свойства транзитивности: *разность квадратов двух наклонных, проведенных из одной точки к прямой, равна разности квадратов их проекций*.



Действительно, $AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2$, так как $AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2 = AH^2$.

В конфигурациях, содержащих окружности, медиану треугольника и т.п., разности квадратов заменяют подходящими произведениями отрезков, используя симметричные точки как вспомогательные.

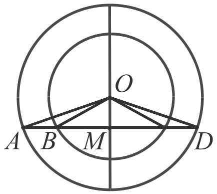
$BH^2 - CH^2 = (BH - CH)(BH + CH) = BC \cdot BN = MN \cdot MC = MN \cdot BN = BC \cdot MC$ (точки M и N симметричны точкам B и C относительно точки H).

Переходя к примерам, обратим внимание на то, что взаимосвязанное, интегрированное применение формул сокращенного умножения с геометрическими преобразованиями аналогично их применению в процессе преобразования тригонометрических выражений (например, разность квадратов $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ можно заменить на $\cos 2\alpha$, $1 - 2\sin^2\alpha$, $2\cos^2\alpha - 1$, $(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)$, $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$ и т.п.).

(№860) Из одной точки A проведены к данной прямой перпендикуляр и две наклонные. Найдите длину перпендикуляра, если наклонные равны 41 и 50, а их проекции на данную прямую относятся как 3 : 10.

$50^2 - 41^2 = (10x)^2 - (3x)^2$, $91 \cdot 9 = 13x \cdot 7x$, $x = 3$ ($x > 0$). Искомая длина суть: $\sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{32 \cdot 50} = \sqrt{16 \cdot 25 \cdot 4} = 4 \cdot 5 \cdot 2 = 40$.

Докажите, что $AB \cdot BD = R^2 - r^2$, где R и r – радиусы концентрических окружностей.



Пусть O – общий центр заданных окружностей, $OA = OD = R$, $OB = r$. Проведем диаметр перпендикулярно хорде AD. $R^2 - r^2 = OD^2 - OB^2 = DM^2 - BM^2 = (DM - BM)(DM + BM) = (AM - BM) \cdot DB = AB \cdot BD$, ч.т.д.

Если подобные преобразования оказываются громоздкими, то лучше использовать переменные для обозначения величин. Так, отрезок можно обозначить через $2x$, угол – через 2α, когда в решении используются их половины и т.п. Вообще, рациональный выбор обозначений может существенно упростить не только вычисления, но и решение задачи.

◈ *Вычислять каждую величину в формуле не обязательно*

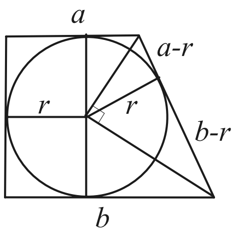
Нередко рациональнее найти произведение, отношение или сумму нескольких величин.

(№1914) Периметр ромба равен 48, а сумма длин диагоналей равна 26. Найдите площадь ромба.

Обозначим диагонали ромба через $2x$ и $2y$. Тогда его площадь равна $2xy$. По условию $2x + 2y = 26$. $x + y = 13$, $x^2 + 2xy + y^2 = 13^2$. Отсюда $2xy = 13^2 - (x^2 + y^2) = 13^2 - 12^2 = 25$, т.к. $x^2 + y^2$ – квадрат стороны ромба, равной четверти его периметра.

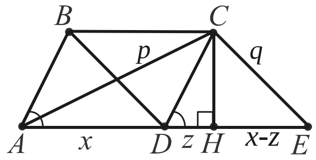
Итак, величины x и y, содержащиеся в расчетной формуле, отдельно не вычислялись.

Докажите, что площадь S описанной прямоугольной трапеции равна произведению ее оснований a и b.



Сначала убедимся в том, что $r = \dfrac{ab}{a+b}$, где r – радиус вписанной окружности. В прямоугольном треугольнике, гипотенузой которого служит большая боковая сторона, проекции катетов на гипотенузу равны $a - r$, $b - r$, высота, проведенная к гипотенузе, – r. По известной формуле $r^2 = (a - r)(b - r)$. Отсюда $r\,(a + b) = ab$, ч.т.д. Полученное равенство равносильно доказываемому. Его левая часть выражает площадь трапеции – произведение половины высоты (радиуса) на сумму оснований.

Найдите площадь S параллелограмма, если его диагонали равны p и q ($p > q$), а острый угол равен α.



Пусть $AC = p$, $BD = q$, $\angle A = \alpha$. Проведем $CE \parallel BD$, $CH \perp AD$ и введем обозначения $AD = x$, $DH = z$, $HE = x - z$. Тогда $S = AD \cdot CH = xz\,\mathrm{tg}\alpha = ¼\,\mathrm{tg}\alpha\,(4xz) = ¼\,\mathrm{tg}\alpha((x + z)^2 - (x - z)^2) = ¼\,\mathrm{tg}\alpha\,(p^2 - q^2)$, так как разность квадратов проекций AH и HE равна разности квадратов наклонных AC и CE.

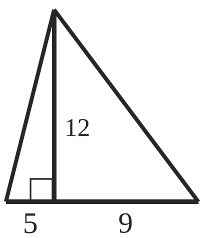
◈ *Используйте арифметические подходы*

Алгебраизация и компьютеризация преподавания математики – неизбежные и позитивные процессы, но не следует забывать о богатстве и единстве идей математического образования. Арифметические подходы, связывающие способы вычислений над элементами числовых множеств и свойства геометрических фигур, безусловно, применимы в планиметрии.

Так, *использование подобия*, *расчеты в частях* могут уменьшить количество вычислений или существенно упростить их; уменьшить число вспомогательных переменных, либо исключить их вообще.

Поясним это на соответствующих задачах. У тех, кто не знаком с приемами рациональных вычислений, решения могут вызвать определенные трудности, хотя вычисления в них *не требуют даже применения микрокалькулятора*.

Высота треугольника равна 48. Ее основание делит сторону на отрезки 20 и 36. Вычислите диаметр описанной окружности.



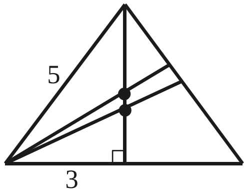
Все числа в условии кратны 4, поэтому решим задачу для соответственного подобного треугольника, используя набор числовых данных: 12, 5, 9. Найдем боковые стороны, применяя пифагоровы тройки 5, 12, 13 и 3, 4, 5 (умноженную на 3). Их длины равны 13 и 15.

Диаметр описанной окружности равен частному длины стороны треугольника и синуса противолежащего ей угла. Имеем: 15 **:** 12/13 = 15 · 13/12 = 65/4.

Учитывая коэффициент подобия, равный 4, окончательно получим: 65/4 · 4 = 65.

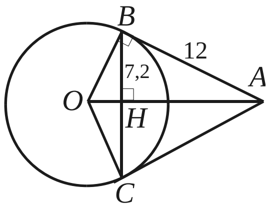
В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 60, а периметр 192. Вычислите расстояние между точками пересечения его медиан и биссектрис.

Уменьшим заданные числа в 12 раз. Полупериметр и половина основания треугольника суть: 16 : 2 = 8 и 8 – 5 = 3. Тогда высота (медиана и биссектриса), проведенная к его основанию, равна 4.



Концы искомого отрезка принадлежат высоте, проведенной к основанию, поэтому найдем его длину как разность длин частей высоты, применяя свойство биссектрисы (отношение 3 : 5 или 3/8 от высоты), свойство медиан (отношение 1 : 2 или 1/3 от высоты) и учитывая коэффициент подобия, равный 12. $\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{3}\right)\cdot 4\cdot 12 = 2.$

(№10.034) Из одной точки проведены к окружности две касательные. Длина каждой касательной равна 12, а расстояние между точками касания равно 14,4. Определите радиус окружности.



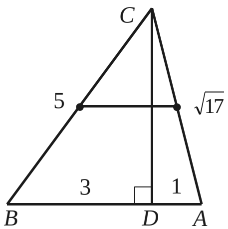
$BH = BC : 2$, поэтому $BH = 7{,}2$. Заметим, что $12 : 7{,}2 = 5 : 3$. Отсюда следует, что стороны прямоугольного треугольника ABH пропорциональны числам 3, 4, 5.

В подобном ему треугольнике ABO стороны также пропорциональны указанным числам. Значит, катет AB содержит 4 части, а катет OB содержит 3 части. $OB = 12 : 4 \cdot 3 = 9$.

◈ *Внимательно изучайте числовые данные*

Вместе с аккуратно выполненным чертежом, числовые данные зачастую помогают упростить или отыскать решение.

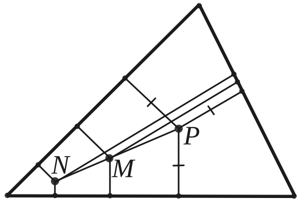
В треугольнике ABC $AB = 4$, $AC = \sqrt{17}$, $BC = 5$, $AD = 1$, $D \in AB$. Найдите расстояние между центрами описанных окружностей треугольников DBC и ADC.



$D \in AB$, значит $BD = 4 – 1 = 3$. Т. к. $BC = 5$, то предположим, что длины сторон треугольника DBC образуют пифагорову тройку 3, 4, 5. Равенство $4^2 + 1^2 = 17$ истинно для длин сторон треугольника ADC. Значит, $DC \perp AB$.

Центры окружностей, описанных около прямоугольных треугольников – середины их гипотенуз. Таким образом, искомое расстояние найдем как среднюю линию треугольника ABC. ½ $AB = 4 : 2 = 2$.

(№ 3550). Внутри треугольника имеются две точки. Расстояния от одной из них до сторон треугольника равны 1, 3 и 15, а от другой (в том же порядке) – 4, 5 и 11. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник (см. 91).



Пусть N и M – данные точки. Построим точку P так, чтобы M была серединой отрезка NP.

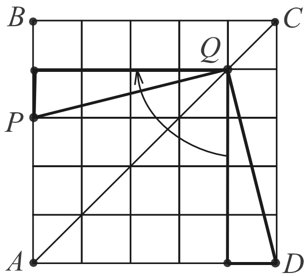
В трех образовавшихся прямоугольных трапециях с общей боковой стороной NP данные расстояния (взятые парами из троек: 1 и 4, 3 и 5, 15 и 11) будут длинами одного из оснований и средней линии. Вычислим вторые основания трапеций:

$2 \cdot 4 – 1 = 7$; $2 \cdot 5 – 3 = 7$; $2 \cdot 11 – 15 = 7$.

Точки M, N, P расположены внутри треугольника, следовательно, P – центр вписанной в него окружности и ее радиус равен 7.

В двух следующих задачах, кроме числовых данных, существенную роль играет чертеж.

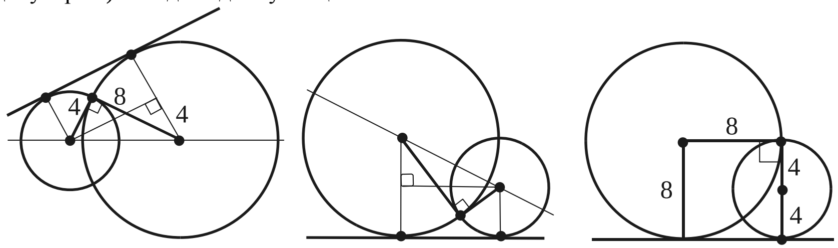
Дан квадрат $ABCD$. На стороне AB и на диагонали AC взяты соответственно точки P и Q так, что $AP : PB = 3 : 2$, $AQ : QC = 4 : 1$. Найдите величины углов треугольника PQD.



Разобьем квадрат $ABCD$ на 25 малых квадратов. В силу условия точки P и Q служат их вершинами.

Один из выделенных на рисунке прямоугольных треугольников получается из другого с помощью поворота на 90° с центром Q. Значит, эти треугольники равны и Δ PQD – равнобедренный и прямоугольный. Величины его углов суть: 45°, 45°, 90°.

(№10.216) Две окружности, радиусы которых 4 и 8, пересекаются под прямым углом (радиусы, проведенные в одну из точек пересечения, взаимно перпендикулярны). Найдите длину общей касательной.



Стандартный чертеж (слева) приведет к стандартным вычислениям. Последовательно находим: квадрат расстояния между центрами: $4^2 + 8^2 = 80$; разность радиусов: $8 - 4 = 4$; опустив перпендикуляр из центра меньшей окружности на радиус большей, отрезок, параллельный и равный искомому: $\sqrt{80-16} = 8$.

Но если чертеж повернуть (в центре) и незначительно изменить (справа), то вычисления не понадобятся.

◈ *Глубоко изучайте текст задачи, анализируйте решение*

Известно, что основные функции в обучении выполняют задачи вполне *определенные*. Однако необходимо помнить, что задачи можно классифицировать как *неопределенные*, *переопределенные*, *противоречивые*, *вариантные*.

Неопределенные – это задачи либо с неполным составом условия, в которых отсутствуют некоторые данные, необходимые для решения задачи, либо с несформированным условием, в которых имеются все данные, но вопрос задачи лишь подразумевается.

В треугольнике одна сторона имеет длину 8, а другая 10. Найдите длину третьей стороны.

Найдите площадь трапеции, основания которой равны 8 и 10.

Переопределенные – это задачи с избыточным условием, в которых имеются лишние данные, не используемые в решении, а лишь маскирующие необходимые для решения задачи данные.

Найдите площадь прямоугольника по стороне a, диагонали d и углу α между диагоналями.

Найдите площадь прямоугольного треугольника с катетами 9, 40 и гипотенузой 41.

Найдите периметр прямоугольника, если длины его сторон равны 1,2 и 3,4, а площадь равна 4,08.

В первой задаче для вычисления площади достаточно любой пары данных из приведенных трех. Решения второй и третьей задач не используют значения длины гипотенузы и площади прямоугольника, но для полноты решения не лишне убедиться, что данные не противоречивы, т.е. $9^2 + 40^2 = 41^2$ и $1{,}2 \cdot 3{,}4 = 4{,}08$.

Противоречивые – это задачи, условие которых содержит противоречие между данными.

Найдите периметр прямоугольника, если длины его сторон равны 1,2 и 3,4, а площадь равна 5,6.

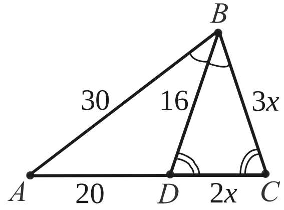
Найдите площадь треугольника со сторонами 3, 4 и 8.

Отрезок BD является биссектрисой треугольника ABC. Найдите DC, если $AB = 30$, $AD = 20$, $BD = 16$ и $\angle BDC = \angle C$.

Первая задача противоречива, т.к. площадь прямоугольника равна 4,08 (см. выше).

Длины сторон во второй задаче не удовлетворяют известному неравенству треугольника: $8 < 3 + 4$ – ложно.

Противоречие между данными в третьей задаче обнаружим, вычислив, например, коэффициент пропорциональности x двумя различными способами, и получив при этом разные ответы.



$DB = BC$ (по условию $\angle BDC = \angle C$), $BC = 3x$, $DC = 2x$ ($BC : DC = 30 : 20$). Отсюда $3x = 16$, $x = 5\frac{1}{3}$. С другой стороны, по формуле для квадрата биссектрисы BD: $16^2 = 30 \cdot 3x - 20 \cdot 2x$. Значит, $50x = 16^2$, $x = \frac{256}{50} = 5\frac{3}{25}$. $5\frac{1}{3} \neq 5\frac{3}{25}$ – противоречие.

Ясно, что и смоделировать данную конфигурацию невозможно. Зафиксировав, например, треугольник ABD, мы достроим затем треугольник BDC так, что либо отрезок BC будет равным отрезку BD, либо угол CBD будет равным углу DBA. Найдите самостоятельно длину биссектрисы BD, не противоречащую данным.

Вариантные – это задачи, условие и данные которых не определяют геометрическую конфигурацию однозначно (см. 2.8).

Стороны параллелограмма равны 3 и 5, а высота 4. Найдите его площадь.

Стороны параллелограмма равны 4 и 5, а высота 3. Найдите его площадь.

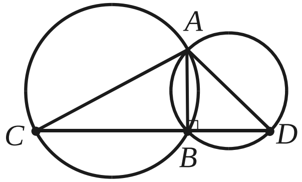
Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равна 5π, а длина его основания равна 3. Найдите площадь треугольника.

В первой задаче параллелограмм определяется однозначно, т.к. высота может быть проведена только к меньшей стороне, поэтому его площадь равна 12. Во второй задаче возможны два варианта и площадь параллелограмма равна 12 или 15. В третьей задаче найдем диаметр окружности, равный 5, и заметим, что существует два равнобедренных треугольника, вписанных в данную окружность и построенных на ее хорде, равной 3, как на основании.

◈ *Пытайтесь переформулировать условие задачи*

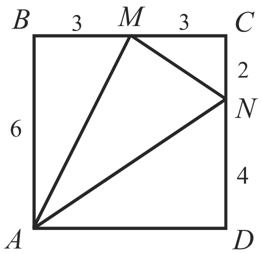
Речь идет не о формализации задачи (которую требуют задачи с практическим содержанием или многие задачи по информатике), а о другой, равносильной ее формулировке, с целью догадаться, как найти решение. Так, утверждение о доказательстве принадлежности трех точек X, Y, Z одной прямой можно переформулировать: а) доказать, что угол ZYX – развернутый (см. 92); б) доказать, что углы BYX и CYZ – вертикальные (см. 17.3) и т.п.

(№330) Две окружности пересекаются в точках A и B, AC и AD – их диаметры. Докажите, что точки C, D и B лежат на одной прямой.



Переформулируем условие: доказать, что $\angle CBD$ – развернутый. Проведя хорду AB, получаем прямые углы: $\angle CBA = \angle DBA = 90^\circ$ (замечательное свойство окружности). Значит, $\angle CBD = 180^\circ$ и точка B лежит на прямой CD, ч. т. д.

$ABCD$ квадрат со стороной 6 см. Точка M – середина стороны BC. $N \in CD$, $CN : ND = 1 : 2$. Найдите площадь треугольника AMN.



Стороны треугольника AMN – иррациональные числа, поэтому применять формулу Герона для вычисления его площади нерационально. Переформулируем условие: найти разность площадей квадрата и трех прямоугольных треугольников, гипотенузами которых служат стороны треугольника AMN.

Очевидная и равносильная формулировка значительно упрощает вычисления:

$$S_{AMN} = 6 \cdot 6 - ½\,(3 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 6) = 6 \cdot (6 - ½\,(3 + 1 + 4)) = 12.$$

Следует запомнить идею решения этой задачи, которая применяется и в некоторых доказательствах.

Докажите, что на координатной плоскости нельзя расположить равносторонний треугольник так, чтобы все его вершины имели целочисленные координаты.

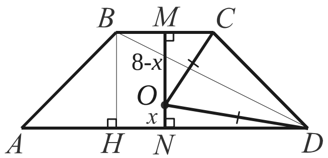
Предположив противное и рассматривая прямоугольник $ABCD$ (см. рис. к предыдущей задаче), стороны которого проходят через вершины правильного треугольника AMN, получим противоречие, т.к. S_{ABCD}, S_{ABM}, S_{MCN}, S_{AND} – рациональные числа, AM^2 – целое число ($AM^2 = AB^2 + BM^2$), а величина $¼\,AM^2\sqrt{3}$ – иррациональна.

◈ *Убеждайтесь в правдоподобности полученного ответа*

Вычислительные ошибки нередко приводят к заведомо ложным ответам, поэтому, решив задачу, обязательно проверяйте ответ различными способами. Имея резерв времени, можно заменить полученной величиной одну из данных, и считая затем одну из известных величин неизвестной, решить полученную новую задачу. Это надёжный способ самоконтроля. В противном случае, можно ограничиться анализом ответа, сопоставляя данные и искомые величины, дополняя или разбивая конфигурацию фигур, чтобы убедиться в его правдоподобности. Так, площадь треугольника можно сравнить с площадью содержащего его прямоугольника, длину перпендикуляра – с длиной наклонной и т.п.

Но не всякий "ложный" ответ можно считать вычислительной ошибкой. Получив, например, отрицательное число под корнем при вычислении площади треугольника по формуле Герона, можно прийти к выводу, что такой треугольник не существует; получив отрицательную длину отрезка – о неверном взаимном расположении точек на прямой и т.п.

(№10.003, № 1673) В равнобочной трапеции даны основания 21, 9 и высота 8. Найдите радиус описанного круга.



Если обозначить ON через x, а OM через $8 - x$ (M и N – середины оснований, O – центр), то применяя теорему Пифагора и учитывая, что $OC = OD$ как радиусы, получим:

$$\left(\frac{9}{2}\right)^2 + (8-x)^2 = \left(\frac{21}{2}\right)^2 + x^2,\ 64 - 16x = \left(\frac{21}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2,\ x = -\frac{13}{16},$$

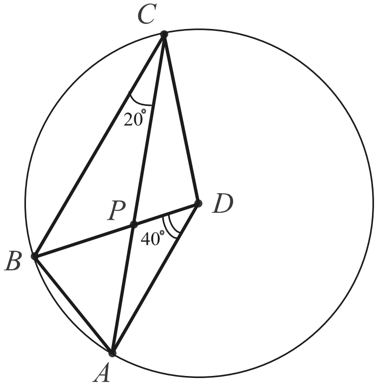
т.е. $ON < 0$. Отсюда следует сделать вывод, что точка N лежит между точками M и O. Действительно, $AH = 6$, $AB = 10$; $DH = 15$, $DB = 17$. В треугольнике ABD стороны равны 10, 17, 21 и он – тупоугольный, так как $21^2 > 17^2 + 10^2$.

◈ *Помните о вспомогательной окружности*

Окружность может быть задана явно или неявно. Для всякого треугольника вписанная и описанная окружности существуют и определяются единственным образом. Для произвольного четырехугольника аналогичное утверждение неверно. Существование окружностей здесь нужно доказывать с помощью необходимых и достаточных условий (задачи-теоремы 16, 17). *Поиск окружности*, как вспомогательной фигуры, может быть связан с дополнительными построениями. На введении в рассмотрение такой окружности основан один из наиболее эффективных методов решения сложных планиметрических задач (см. 5.3).

Если окружность используется в решении, то в первую очередь тщательно и всесторонне изучайте связанные с ней углы, а также отрезки пересекающихся хорд, касательных, секущих и т.п.

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle BCA = 20^\circ$, $\angle BAC = 35^\circ$, $\angle BDC = 70^\circ$, $\angle BDA = 40^\circ$. Найдите углы между диагоналями этого четырехугольника.



Изучив числовые данные, заметим, что отношение градусных мер углов в двух парах равно 1 : 2.

Рассмотрим описанную окружность треугольника ABC как вспомогательную. Она существует и единственна. Из свойств вписанных и центральных углов и числовых данных следует, что D – центр этой окружности (!).

Используя теперь полученную конфигурацию, находим из равнобедренного треугольника ACD (AD и CD равные радиусы):

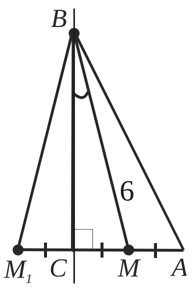
$\angle CAD = \angle DCA = (180^\circ - 40^\circ - 70^\circ) : 2 = 35^\circ$.

Из ΔAPD ($P = AC \cap BD$): $\angle APD = 180^\circ - 40^\circ - 35^\circ = 105^\circ$.

Итак, искомые углы равны 105° и 75°.

◈ *Не забывайте о дополнительных построениях*

Рассмотрим примеры на *дополнение* и *разбиение* (см. 2.9).



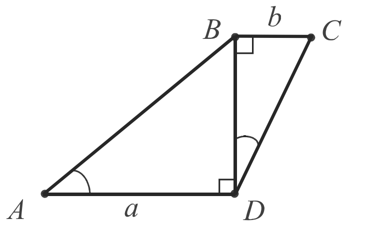
В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C медиана BM равна 6, $\angle MBC = 15^\circ$. Найдите площадь треугольника ABC.

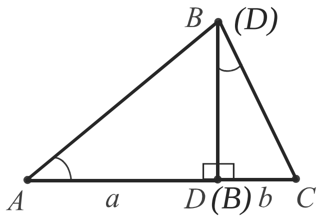
Дополним рисунок, построив треугольник BCM_1, симметричный треугольнику BCM относительно прямой, содержащей катет BC.

$MA = CM = CM_1$, поэтому треугольники BCM_1, BCM, BMA с общей высотой BC – равновеликие.

Имеем: $S_{ABC} = S_{MBM_1} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin(2 \cdot 15^\circ) = 9$.

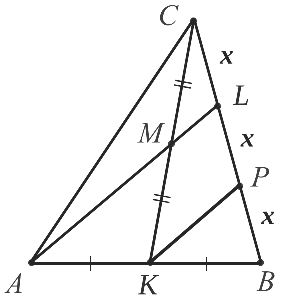
В трапеции меньшая диагональ перпендикулярна основаниям, а сумма ее острых углов равна 90°. Определите боковые стороны трапеции, если основания равны a и b [24, с.133].





Рассматривая *равносоставленные фигуры* – данную трапецию и прямоугольный треугольник, искомые боковые стороны трапеции найдем по формулам для катетов как среднепропорциональных отрезков (задача-теорема 23): $AB = \sqrt{a(a+b)}$, $BC = \sqrt{b(a+b)}$.

Площадь треугольника ABC равна 12. Точка L расположена на стороне BC так, что прямая AL проходит через середину M медианы CK. Чему равны площади треугольников ABL и CML?



Проведем $KP \parallel AL$. Т. к. K и M – середины AB и CK, то KP и ML будут средними линиями треугольников ABL и CKP.

Отсюда $CL = LP = PB$, $BL : BC = 2 : 3$.

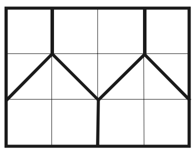
Значит, $S_{ABL} = \frac{2}{3} S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$.

$S_{CML} = \frac{1}{4} S_{CKP} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} S_{CBK} = \dfrac{1}{6}(\frac{1}{2} S_{ABC}) =$

$= 1/12\ S_{ABC} = 12/12 = 1$.

Примечание. Умелое использование дополнительных построений и пропорциональных отрезков в некоторых случаях избавляет от применения избранных теорем геометрии: Чевы, Менелая, Жергонна, Ван-Обеля и др.

Разбиение фигуры на части может дать основную идею решения. Известны интересные задачи и головоломки, связанные с разбиениями (разрезаниями) геометрических фигур.



В прямоугольнике 3 x 4 расположены 6 точек. Доказать, что найдется пара точек, удаленных одна от другой, не более чем на $\sqrt{5}$.

Испытывая различные разбиения прямоугольника на 5 частей, сделаем его так, как показано на рисунке. Из 6 данных точек по крайней мере две окажутся в одной из частей по принципу Дирихле (5.8).

Легко видеть, что при таком разбиении наибольшее расстояние между точками одной фигуры равно $\sqrt{5}$.

◈ *Применяйте особые методы доказательства*

Доказательство от противного.

(№ 784). На сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах построены четыре круга. Докажите, что они покрывают весь четырехугольник.

Пусть внутри четырехугольника существует точка, не принадлежащая ни одному из четырех кругов. Тогда его стороны будут видны из этой точки под острыми углами (см. задачу-теорему 4). Но это невозможно, так как сумма всех четырех углов равна 360°.

Принцип Дирихле (см. раздел 5.8).

Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.

Каждый из меньших треугольников не может накрывать более одной вершины данного равностороннего треугольника.

Правило крайнего.

Рассмотрение "крайних" объектов (ближайшей точки, угловой точки, вырожденной окружности) и крайних значений (наименьшей стороны, наибольшего числа, равенства в неравенстве, предельного случая) может подсказать идею решения и быть полезным на всех стадиях решения задачи (см. 68.2).

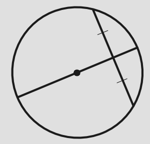
Докажите, что произведение любых двух сторон треугольника не больше произведения его периметра на радиус вписанной окружности, т.е. $ab \le Pr$.

Начнем с равенства, предположив, что $ab = Pr$. Вспомним, что произведения содержатся в различных формулах для вычисления площади треугольника, а именно: $S = ½\, ab \sin \alpha$ и $S = ½\, Pr$. Значит, $ab = Pr$, если $\sin \alpha = 1$ ($\alpha = 90°$). Но $\sin \alpha \le 1$ для произвольных значений α, поэтому верно неравенство $ab \le Pr$, ч. т. д.

◈ И, наконец, главное: *"Повторение – мать учения"*

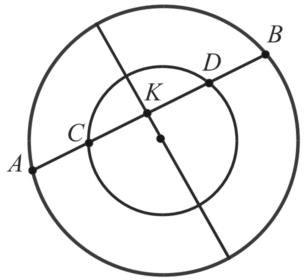
Это говорили еще древние греки. Успешное обучение невозможно без правильно организованного повторения ранее изученного. В геометрии каждый шаг вперед основывается на ранее полученных знаниях.

4.2. Применение задач-теорем

	1	***Диаметр окружности, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей. Верно и обратное утверждение.***

1.1. (№ 260). Доказать, что если пересечь два концентрических круга секущей, то части секущей, лежащие между окружностями, равны между собой.

Доказательство



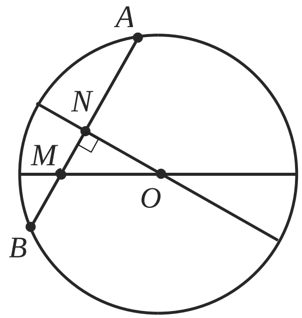
Пусть секущая пересекает данные окружности в точках A, C, D, B так, что точки C и D лежат между точками A и B.

Требуется доказать, что $AC = BD$.

Проведем диаметр большей окружности перпендикулярно хорде AB и пересекающий ее в точке K. Он содержит диаметр меньшей окружности, перпендикулярный хорде CD. По задаче-теореме $AK = BK$ и $CK = DK$. Вычитая почленно эти равенства, получим: $AK – CK = BK – DK$, т.е. $AC = BD$, что и требовалось доказать.

1.2. (№10.322). В окружности с центром O проведена хорда AB, пересекающая диаметр в точке M и составляющая с диаметром угол, равный 60º. Найти OM, если AM = 10 см, а BM = 4 см.

Решение



По условию $\angle\, NMO$ = 60º. Проведем диаметр, перпендикулярный хорде AB и пересекающий ее в точке N.

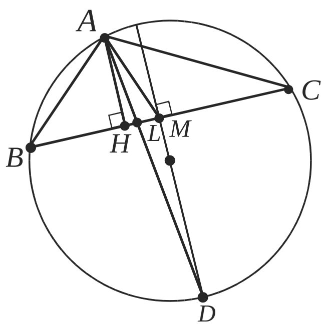
Тогда $AN = BN$ = (10 + 4) : 2 = 7 (см), NM = 7 – 4 = 3 (см).

В треугольнике MON: $\angle\, ONM$ = 90º, $\angle\, NOM$ = 30º, $MO = 2\, MN = 2 \cdot 3 = 6$ (см).

Ответ: 6 см.

1.3. (№825). Докажите, что в любом неравнобедренном треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

Доказательство



Окружность не задана в условии задачи явно. Но она существует потому, что около всякого треугольника можно описать единственную окружность.

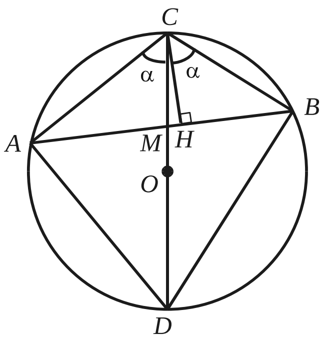
Пусть *AH*, *AL* и *AM* соответственно высота, биссектриса и медиана треугольника *ABC*.

Проведем диаметр его описанной окружности перпендикулярно хорде *BC*. Он делит эту хорду и стягиваемые ею дуги пополам. Следовательно, диаметру принадлежит точка *M*, а один из его концов совпадает с точкой *D*, в которой биссектриса угла *A* пересекает окружность ($\angle BAD = \angle CAD$).

Таким образом, точки *H* и *M* – проекции концов отрезка *AD* на сторону *BC*, что и доказывает утверждение.

1.4. (№10.379). Высота и медиана треугольника, проведенные внутри него из одной его вершины, различны и образуют равные углы со сторонами, выходящими из той же вершины. Определите радиус описанной окружности, если медиана равна *m*.

Решение



Пусть *CH* – высота, *CM* – медиана, $CM = m$. Введем обозначения $\angle ACM = \angle HCB = \alpha$, $\angle MCH = \beta$. Продлив *CM* до пересечения с окружностью в точке *D*, соединим эту точку с точками *A* и *B*. Вписанные углы *CDB* и *CAB* равны, т. к. опираются на одну и ту же дугу *CB*.

Тогда в $\triangle CDB$: $\angle DCB = \alpha + \beta$, $\angle CDB = \angle CAB = \angle CAH = 90^\circ - \alpha - \beta$. Сумма этих двух углов треугольника

равна 90º, поэтому третий его угол *CBD* – прямой, а *CD* – диаметр описанной окружности треугольника *CBD*, т.е. $O \in CD$.

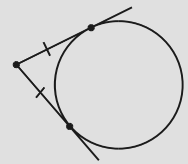
Докажем, что точки *O* и *M* совпадают.

Так как $AM = MB$, то диаметр *CD* проходит через середину хорды *AB*. Следовательно, он перпендикулярен ей.

Но по условию задачи $CH \perp AB$, *CM* и *CH* – различные отрезки. Это возможно лишь при условии, что *AB* – диаметр.

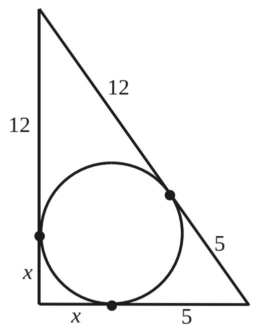
Значит, $\triangle ACB$ – прямоугольный и $MC = MB = MA = m$.

Ответ: *m*.

	2	***Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны.***

2.1. (№10.001). В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см. Найти катеты треугольника.

Решение



Так как окружность вписана и отрезки касательных, проведенных к ней из одной точки, равны, то имеем три пары равных отрезков по 5 см, 12 см и *x* см. Тогда по теореме Пифагора $(x + 5)^2 + (x + 12)^2 = 17^2$ или $2x^2 + 34x + 169 - 289 = 0$.

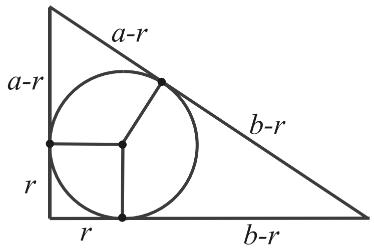
Квадратное уравнение $x^2 + 17x - 60 = 0$ имеет положительный корень $x = 3$.

Имеем: 3 + 5 = 8 (см), 3 + 12 = 15 (см).

Ответ: 8 см, 15 см.

2.2. (№ 321). Пусть *r* – радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами *a*, *b* и гипотенузой *c*. Доказать, что $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

Доказательство

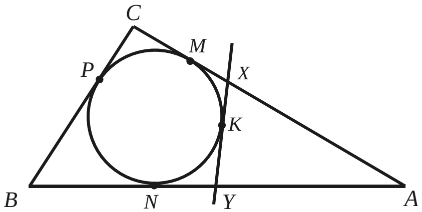


Если r – радиус вписанной окружности, то отрезки катетов, с концами в вершинах острых углов, равны $a - r$ и $b - r$.

Два таких отрезка составляют гипотенузу, т. е. $c = a - r + b - r$, $2r = a + b - c$, $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, что и требовалось доказать.

2.3. (№10.373). В треугольник со сторонами 6 см, 10 см и 12 см вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две бóльшие стороны. Найти периметр отсеченного треугольника.

Решение



Пусть $BC = 6$ см, $AC = 10$ см, $AB = 12$ см. Заметим, что C – тупой угол, т. к. $12^2 > 6^2 + 10^2$.

Проведем касательную к окружности, пересекающую две большие стороны треугольника в точках X, Y, и обозначим точки касания M, N, P и K.

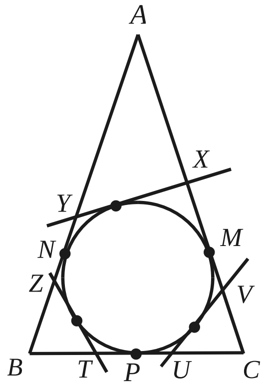
Учитывая равенство пар отрезков касательных, проведенных к окружности из точек X и Y, заметим, что $P_{AXY} = AM + AN = 2\ AM$ ($AM = AN$ и $XY = XK + KY = XM + YN$).

Но $AM + AN = (10 + 12) - 6 = 16$ (см), потому что $CM = CP$ и $BN = BP$, а $BP + PC = BC = 6$ см.

Ответ: 16 см.

2.4. (№10.363). В равнобедренный треугольник с основанием 12 см вписана окружность, и к ней проведены три касательных так, что они отсекают от данного треугольника три малых треугольника. Сумма периметров малых треугольников равна 48 см. Найти боковую сторону данного треугольника.

Решение



Пусть $AB = AC$, $BC = 12$ см. Введем обозначения: M, N, P – точки касания, X, Y, Z, T, U, V – точки пересечения касательных со сторонами треугольника.

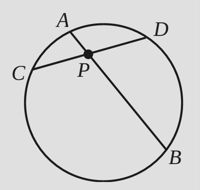
$P_{AXY} = AM + AN$ (см. задачу 2.3).

Аналогично определяем, что $P_{BZT} = BN + BP$, а $P_{CUV} = CP + CM$.

Имеем: $P_{AXY} + P_{BZT} + P_{CUV} = AM + AN + BN + BP + CP + CM = AC + BC + AB = P_{ABC}$, т.е. сумма периметров трех малых треугольников равна периметру данного треугольника.

Из условия: $2\ AB + 12 = 48$. Отсюда $AB = 18$ см.

Ответ: 18 см.



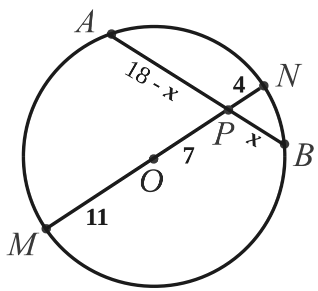
3

Если AB и CD хорды окружности, пересекающиеся в точке P, то

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP.$$

3.1. (№10.017). Точка P удалена на 7 см от центра окружности радиуса 11 см. Через эту точку проведена хорда длиной 18 см. Каковы длины отрезков, на которые делится хорда точкой P?

Решение



Пусть $AB = 18$ см, $BP = x$ см, $AP = (18 - x)$ см.

Проведем диаметр MN через точку P.

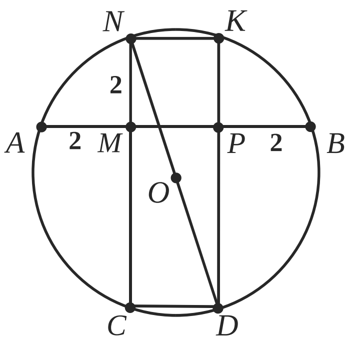
По свойству пересекающихся хорд: $AP \cdot BP = NP \cdot MP$.

Имеем: $(18 - x) \cdot x = 4 \cdot (11 + 7)$ или $x^2 - 18x + 72 = 0$. Отсюда $x = 6$, $x = 12$. Легко видеть, что оба корня имеют геометрический смысл.

Ответ: 6 см и 12 см.

3.2. (№10.239). Найти радиус круга, в сегмент которого, соответствующий хорде длиной 6 см, вписан квадрат со стороной 2 см.

<u>*Решение*</u>



Пусть $MKNP$ – данный квадрат, вписанный в меньший сегмент круга, $MN = MP = 2$ см, $AB = 6$ см.

Построим прямоугольник $KNCD$ и отметим, что его диагональ ND является диаметром окружности. Очевидно, что $AM = ½\,(AB – NK) = 2$ см. Значит, отрезки AM и MN пересекающихся хорд AB и NC равны.

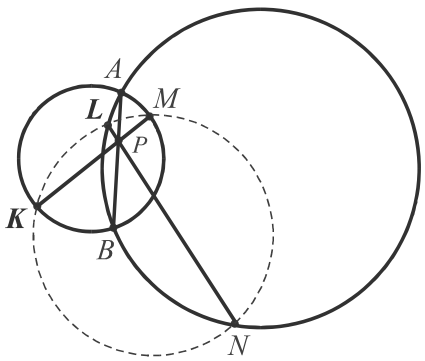
Из этого следует, что равны сами хорды: $NC = AB = 6$ см.

По теореме Пифагора $ND = \sqrt{2^2+6^2} = 2\sqrt{10}$ (см). $ON = \sqrt{10}$ см.

Ответ: $\sqrt{10}$ см.

3.3. (№811). Через точку P, лежащую на общей хорде двух пересекающихся окружностей, проведены хорда KM первой окружности и хорда LN второй окружности. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ – вписанный.

<u>*Доказательство*</u>



По задаче-теореме для пересекающихся хорд первой окружности $AP \cdot PB = KP \cdot PM$.

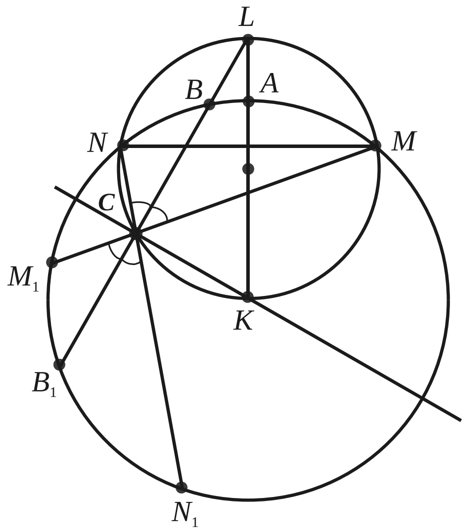
Аналогично, для второй окружности: $AP \cdot PB = LP \cdot PN$.

Значит, $KP \cdot PM = LP \cdot PN$ $\left(\dfrac{KP}{LP} = \dfrac{PN}{PM},\ \triangle KLP \sim \triangle MPN\right)$, т. е. хорды KM и LN разных окружностей служат пересекающимися хордами третьей окружности, в которую и вписан четырехугольник $KLMN$.

3.4. (№ 1397). Дана окружность с диаметром KL. Вторая окружность с центром в точке K пересекает первую окружность в точках M и N, а диаметр KL – в точке A. На дуге AN, не содержащей точки M, взята точка B, отличная от точек A и N. Луч LB пересекает первую окружность в точке C.

Известно, что $CN = a$, $CM = b$. Найдите BC.

<u>*Решение*</u>



Продлив отрезки CB, CN, CM за точку C до пересечения со второй окружностью в точках B_1, N_1, M_1, получим пересекающиеся хорды, и по задаче-теореме запишем равенства $BC \cdot BC_1 = NC \cdot NC_1 = MC \cdot MC_1$ (1).

Но длины отрезков BC_1, NC_1, MC_1 пока неизвестны.

$\angle KCL = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр, а т.к. K – центр, то прямая CK содержит диаметр второй окружности. Значит, $CK \perp BB_1$ и по задаче-теореме 1 диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам, т.е. $BC = BC_1$.

Далее рассмотрим восемь углов при вершине C.

$\angle NCL = \angle MCL = \angle N_1CB_1 = \angle M_1CB_1$.

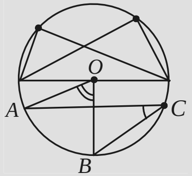
Действительно, первые два угла равны как вписанные, опирающиеся на равные дуги NL и ML первой окружности ($MN \perp KL$), а остальные углы являются соответственно вертикальными для них. Ясно, что остальные четыре угла также равны между собой.

Отсюда следует, что CK – ось симметрии, а пары точек, расположенные на второй окружности, B и B_1, N и M_1, M и N_1 – симметричны относительно этой прямой, т.е. $CN = CM_1 = a$, $CM = CN_1 = b$.

Равенство (1) примет вид: $BC^2 = NC \cdot NC_1 = NC \cdot CM = a \cdot b$.

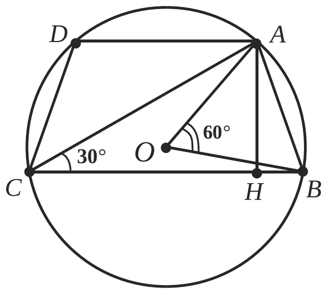
Следовательно, $BC = \sqrt{ab}$.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

	4	***Угол, вписанный в окружность, измеряется половиной угловой величины дуги, на которую он опирается.*** ***Следствие: вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны;*** ***Замечательное свойство окружности.*** ***Вписанные углы, опирающиеся на половину окружности (диаметр), прямые.***

4.1. (№10.148). Найти площадь равнобочной трапеции, если её высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 60º.

<u>*Решение*</u>



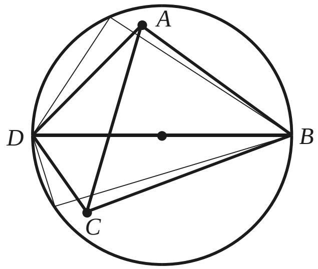
Пусть в заданной трапеции $ABCD$: $AB = CD$, $AH \perp CB$, $AH = h$, O – центр описанной окружности, $\angle AOB = 60°$.

Проведем диагональ AC. Вписанный угол ACB измеряется половиной дуги AB, на которую он опирается, или половиной соответствующего центрального угла AOB, $\angle ACB = 30º = \angle ACH$.

Из $\triangle ACH$: $CH = h\sqrt{3}$. Известно, что в равнобедренной трапеции отрезок CH равен средней линии, поэтому $S_{ABCD} = AH \cdot CH = h \cdot h \cdot \sqrt{3}$. *Ответ*: $h^2\sqrt{3}$.

4.2. Доказать, что если у четырехугольника $ABCD$ углы A и C тупые, то $AC < BD$.

<u>*Доказательство*</u>

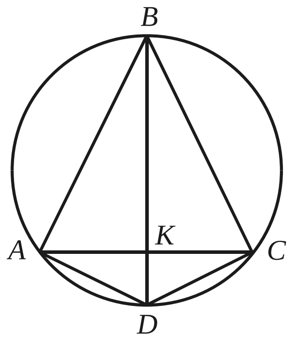


Построим на BD как на диаметре окружность. По замечательному свойству окружности все углы, опирающиеся на диаметр с вершинами на окружности (за исключением точек B и D), прямые.

Поскольку углы A и C – тупые, то точки A и C находятся внутри окружности, т.е. $AC < BD$, ч.т.д.

4.3. (№10.281). В окружность вписан четырехугольник с углами 120º, 90º, 60º, 90º и площадью $9\sqrt{3}$ см^2. Найти радиус окружности, если диагонали четырехугольника перпендикулярны.

<u>*Решение*</u>



Пусть в заданном четырехугольнике $ABCD$: $\angle A = \angle C = 90º$, $\angle B = 60º$, $\angle D = 120º$, $BD \perp AC$, $K = AC \cap BD$.

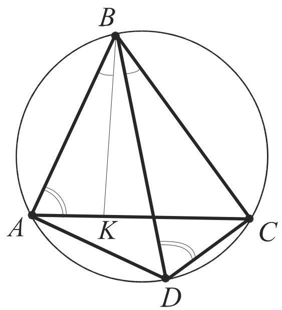
Из замечательного свойства окружности следует, что BD – диаметр. Но по условию $BD \perp AC$. Значит, BD принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AC, поэтому треугольники BCD и BAD симметричны оносительно прямой BD и равновелики. Имеем: $S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Далее заметим, что $\angle ABD = 60º : 2 = 30º$, $\angle ADB = 60º$, т.е. $\triangle ABD$ – это половина правильного треугольника, стороной которого служит BD, а площадь равна 2 S_{ABD} или S_{ABCD}. Из формулы для площади правильного треугольника ($\frac{BD^2\sqrt{3}}{4}$) находим:

$BD^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot 9\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 36$, т.е. $BD = 6$ см. $\frac{BD}{2} = 3$ см. *Ответ*: 3 см.

4.4. (№1413. *Теорема Птолемея*). Докажите, что если четырехугольник вписан в окружность, то сумма произведений длин двух пар его противоположных сторон равна произведению длин его диагоналей.

<u>*Доказательство*</u>



Требуется доказать, что во вписанном четырехугольнике $ABCD$:

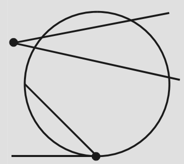
$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Проведем отрезок BK так, чтобы углы ABK и CBD были равны. Кроме того, заметим, что вписанные углы BAK и BDC, опирающиеся на одну и ту же дугу BC, равны, поэтому $\triangle BAK \sim \triangle BDC$.

Аналогично, $\triangle BAD \sim \triangle BKC$. Углы ABD и CBK содержат построенные равные углы и общий угол KBD, а углы ADB и KCB (или ACB) – вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AB.

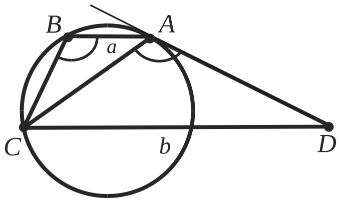
Из подобия треугольников следуют пропорции и равносильные им равенства: $AK \cdot BD = AB \cdot CD$, $KC \cdot BD = AD \cdot BC$.

Сложив их, получим $BD\,(AK + KC) = AB \cdot CD + AD \cdot BC$, ч.т.д.

	5	***Угол, вершина которого вне (внутри) круга, измеряется полуразностью (полусуммой) дуг, находящихся между его сторонами (и их продолжениями за вершину угла).*** ***Угол, образованный касательной и хордой, равен половине дуги, находящейся между его сторонами.***

5.1. (№1497). В трапеции $ABCD$ основание $AB = a$, основание $CD = b$ $(a < b)$. Окружность, проходящая через вершины A, B и C, касается стороны AD. Найти диагональ AC.

Решение



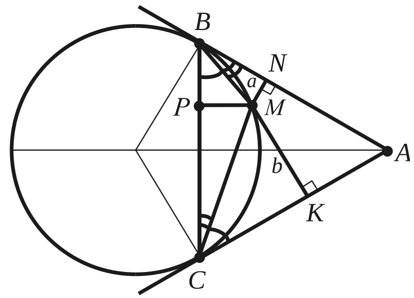
Прежде всего заметим, что вписанный угол CBA и угол между касательной AD и хордой AC измеряются половиной одной и той же дуги AC. Отсюда $\angle CAD = \angle CBA$. Кроме того, $\angle CAB = \angle ACD$. Значит, $\triangle ABC \sim \triangle ADC$ и верна пропорция: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{CD}$ или $\dfrac{a}{AC} = \dfrac{AC}{b}$.

Имеем: $AC^2 = ab$.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

5.2. (№1384). Из точки A, лежащей вне окружности, проведены к этой окружности две касательные. Расстояния от точки M, лежащей на меньшей дуге окружности, до касательных равны a и b. Найдите расстояние от точки M до прямой BC, где B и C – точки касания.

Решение



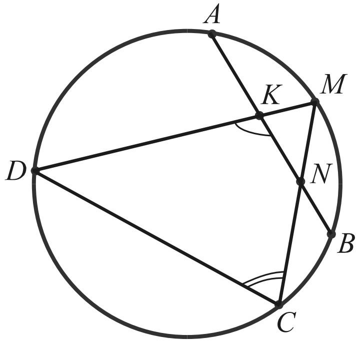
Пусть $MN = a$, $MK = b$, MP – искомое расстояние. Проведем хорды окружности BM и CM.

Идея решения будет основана на равенстве пар углов: MBP, MCK и MCP, NBM. В каждой из них есть вписанный угол и угол, образованный касательной и хордой, измеряющиеся половинами дуг MC и MB соответственно. Из этого вытекает подобие пар прямоугольных треугольников MBP, MCK и MCP, NBM и пропорции: $\dfrac{MP}{MK} = \dfrac{BM}{CM}$, $\dfrac{MN}{MP} = \dfrac{BM}{CM}$. Значит, по свойству транзитивности $\dfrac{MP}{MK} = \dfrac{MN}{MP}$. $MP^2 = MK \cdot MN = ab$ или $MP = \sqrt{ab}$.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

5.3. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. M – середина дуги AB. N и K – соответственные точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB. Доказать, что четырехугольник $CDKN$ – вписанный.

Доказательство



Вычислим сумму противолежащих углов четырехугольника $CDKN$, например, вписанного угла C и угла K с вершиной внутри круга.

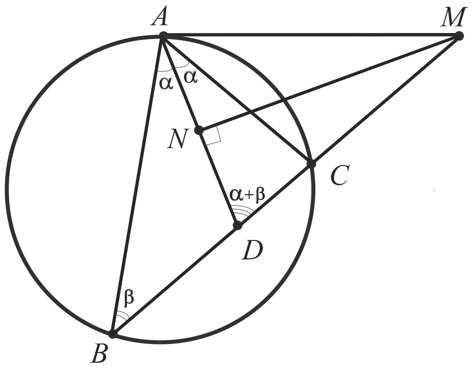
По задаче-теореме угол C измеряется половиной дуги DAM, а угол K – полусуммой дуг AM и DCB.

Воспользовавшись условием, заменим дугу AM равной ей дугой MB. Тогда угол K будет измеряться половиной дуги MBD. Но дуги MBD и DAM составляют окружность.

Следовательно, сумма их величин равна 360°, а углов C и K – 180°, что и доказывает утверждение.

5.4. В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Серединный перпендикуляр, проведенный к AD, пересекает прямую BC в точке M. Доказать, что AM – касательная к описанной окружности треугольника ABC.

Доказательство

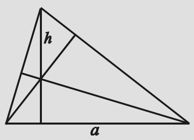


Пусть $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Тогда $\angle ADC = \alpha + \beta$ по теореме о внешнем угле для треугольника ABD.

MN – серединный перпендикуляр к AD по условию. Значит, $\triangle ADM$ – равнобедренный и $\angle DAM = \angle ADM = \alpha + \beta$. Но часть угла DAM, угол DAC, равен α, значит $\angle CAM = \beta$.

Обратим внимание на то, что вписанный угол B также равен β. Следовательно, равный ему угол CAM образован хордой и касательной прямой (оба эти угла измеряются половиной дуги AC), т.е. AM – касательная.

	6	***Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке. Если стороны треугольника a, b, c, то*** $h = \dfrac{2S}{a}$ $\left(a = \dfrac{2S}{h}\right)$***, где h – высота, проведенная к стороне a, S – площадь.***

6.1. (№10.032). В треугольнике известны длины двух сторон 6 см и 3 см. Найти длину третьей стороны, если полусумма высот, проведенных к данным сторонам, равна третьей высоте.

Решение

Если $a = 6$ см, $b = 3$см, h_a, h_b и h_c – высоты треугольника, то из условия задачи имеем: $h_a + h_b = 2h_c$.

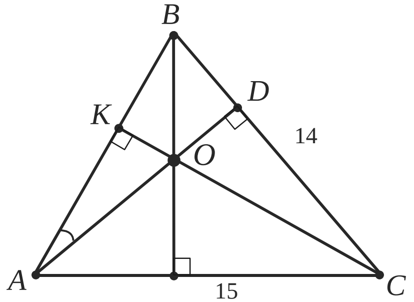
Так как $h_a = \dfrac{2S}{6}$, $h_b = \dfrac{2S}{3}$, то $\dfrac{2S}{6} + \dfrac{2S}{3} = 2\dfrac{2S}{c}$, где c – неизвестная третья сторона, S – площадь треугольника.

Отсюда $\dfrac{2}{c} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{c} = \dfrac{1}{2}$, $c = 4$ см.

Ответ: 4 см.

6.2. (№10.390). В треугольнике ABC: $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см. Требуется найти расстояние от точки пересечения его высот до вершины A.

Решение



Пусть O – ортоцентр треугольника. Требуется найти AO.

Вычислим площадь S треугольника ABC по формуле Герона: $\sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8} = 7 \cdot 3 \cdot 4$ (см^2). Далее найдем высоты AD и CK.

$$AD = \frac{2S}{BC} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4}{14} = 12 \text{(см)}.$$

$$CK = \frac{2S}{AB} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4}{13} = \frac{168}{13} \text{ (см)}.$$

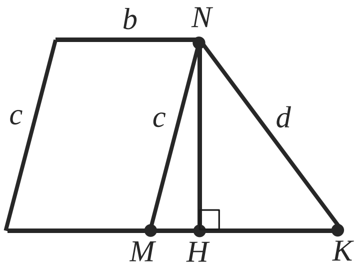
Имеем из $\Delta\, ACK$: $AK = \sqrt{15^2 - (168/13)^2} = \dfrac{1}{13}\sqrt{195^2 - 168^2} = \dfrac{1}{13}\sqrt{27 \cdot 363} = \dfrac{1}{13}\sqrt{9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 121} = \dfrac{99}{13}$(см).

$\Delta\, AOK \sim \Delta\, ABD$ (прямоугольные треугольники с общим острым углом), поэтому $\dfrac{12}{13} = \dfrac{99}{13 \cdot OA}$, $12 \cdot OA = 99$, $OA = \dfrac{33}{4}$ (см).

Ответ: 8,25 см.

6.3. (№10.370). Большая из параллельных сторон трапеции равна a, меньшая равна b, непараллельные равны c и d. Найти площадь трапеции (см. стр. 187).

Решение



Проведем в данной трапеции высоту NH и отрезок MN параллельно меньшей боковой стороне.

Тогда $MN = c$, $MK = a - b$.

Из $\triangle MNK$: $NH = \dfrac{2S_{MNK}}{MK}$.

Для нахождения площади трапеции запишем формулу

$$S = \frac{a+b}{2}\cdot\frac{2S_{MNK}}{a-b} = \frac{a+b}{a-b}\cdot S_{MNK}.$$

Площадь треугольника найдем по формуле Герона, записанной в равносильном виде: $S = \dfrac{1}{4}\sqrt{P(P-2a)\cdot(P-2b)\cdot(P-2c)}$, где P – периметр треугольника. В нашем случае: $P_{MNK} = a - b + c + d$,

$$S_{MNK} = \frac{1}{4}\sqrt{(a-b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)(b-a+c+d)}.$$

Ответ. $\dfrac{a+b}{4(a-b)}\sqrt{(a-b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)(b-a+c+d)}$.

6.4. (№10.416). Определить площадь треугольника по трем его высотам h_a, h_b, h_c.

Решение

Обозначим соответственные стороны треугольника a, b, c, его полупериметр – p, площадь – S.

Идея решения задачи заключается в составлении уравнения по формуле Герона $S^2 = p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)$ с использованием неизвестной величины S.

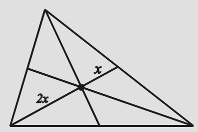
$$a = \frac{2S}{h_a},\quad b = \frac{2S}{h_b},\quad c = \frac{2S}{h_c},\quad p = S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right);$$

$p - a = S\left(\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}\right) - \dfrac{2S}{h_a} = S\left(\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}-\dfrac{1}{h_a}\right)$. Аналогично находим: $p - b = S\left(\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_c}-\dfrac{1}{h_b}\right)$, $p - c = S\left(\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}-\dfrac{1}{h_c}\right)$.

Имеем: $S^2 = S\left(\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}\right)\cdot S\left(\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}-\dfrac{1}{h_a}\right)\cdot S\cdot\left(\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_c}-\dfrac{1}{h_b}\right)\times$ $\times S\left(\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}-\dfrac{1}{h_c}\right)$. Сократив на S^2 ($S \ne 0$), получим: $1 = S^2 \times$ $\times\left(\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}-\dfrac{1}{h_a}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_c}-\dfrac{1}{h_b}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}-\dfrac{1}{h_c}\right)$.

Ответ:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\cdot\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}}.$$



7

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{a^2}{4}}.$$

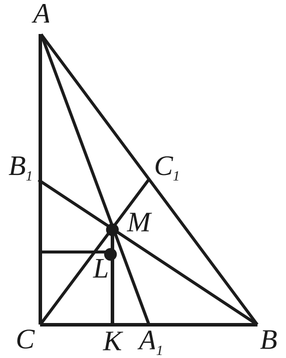
7.1. (№10.270). Найти отношение суммы квадратов всех медиан треугольника к сумме квадратов всех его сторон.

Решение

Вычислим сумму квадратов всех медиан, применяя формулу, выражающую длину медианы через стороны треугольника. Получим: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$. Из тождества легко видеть, что искомое отношение равно 3 : 4. *Ответ*: 3 : 4.

7.2. (№10.075). Катеты прямоугольного треугольника равны 9 см и 12 см. Найти расстояние между точкой пересечения его биссектрис и точкой пересечения медиан.

Решение



Пусть AC = 12 см, CB = 9 см, $\angle C = 90°$, CC_1, BB_1, AA_1 – медианы, M – центр тяжести, L – инцентр, ML – искомый отрезок.

AB = 15 см (пифагорова тройка 9, 12, 15). Тогда $AC_1 = BC_1 = CC_1 = 15/2$ см.

По свойству медиан: $CM : MC_1 = 2 : 1$, поэтому $CM = 2/3 \cdot 15/2 = 5$ (см).

Воспользуемся тем, что L – центр вписанной в прямоугольный треугольник окружности, и найдем ее радиус по известной формуле:

$CK = LK = (9 + 12 - 15) / 2 = 3$ (см), где $LK \perp BC$.

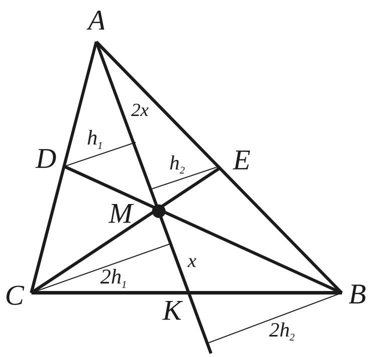
Далее: CK = 3 см, $BK = 9 - 3 = 6$ (см), значит, $BK : KC = 6 : 3 = 2 : 1$, но и $BM : MB_1 = 2 : 1$ (по свойству медиан), следовательно, $MK \parallel CB_1$, $MK \perp BC$, т.е. $L \in MK$ (точки M, L, K лежат на одной прямой). Из $\triangle CMK$: CM = 5 см, CK = 3 см. Отсюда MK = 4 см.

Имеем: $ML = MK - LK = 4 - 3 = 1$ (см).

Ответ: 1 см.

7.3. (№10.303). В треугольнике ABC проведены медианы BD и CE, M – точка их пересечения. Доказать, что треугольник BCM равновелик четырехугольнику $ADME$.

Решение



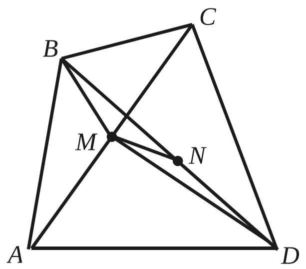
Пусть $MK = x$. Тогда $MA = 2x$. Проведем высоты h_1 и h_2 в треугольниках AMD и AME. Так как точки D и C – середины сторон AC и AB, то легко видеть, что высоты треугольников MCK и MBK соответственно равны $2h_1$ и $2h_2$. Площади треугольника BCM и четырехугольника $ADME$ запишем как суммы площадей треугольников:

$S_{ADME} = S_{ADM} + S_{AEM} = ½ \cdot 2x\,(h_1 + h_2)$;
$S_{BCM} = S_{BMK} + S_{CMK} = ½ \cdot x\,(2h_1 + 2h_2) = ½ \cdot 2x\,(h_1 + h_2)$.

Полученные выражения равносильны, значит, $S_{ADME} = S_{BCM}$, что и требовалось доказать.

7.4. Доказать, что если в выпуклом четырехугольнике сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей, то этот четырехугольник параллелограмм.

Доказательство

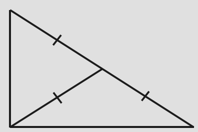


Предположим противное одному из признаков параллелограмма: пусть диагонали четырехугольника $ABCD$, пересекаясь, не делятся точкой пересечения пополам. Тогда существует отрезок MN, соединяющий их середины.

Построим треугольник BMD и вычислим его медиану MN по формуле: $4MN^2 = 2BM^2 + 2DM^2 - BD^2$ (так как M – середина AC, то BM и DM медианы треугольников ABC и ADC).

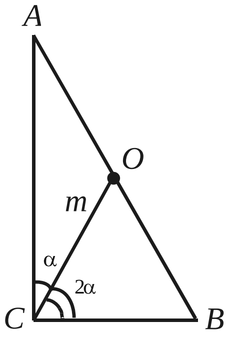
Следовательно, $4MN^2 = ½\,(2AB^2 + 2BC^2 - AC^2) + ½\,(2AD^2 + 2DC^2 - AC^2) - BD^2 = (AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2) - (AC^2 + BD^2)$. Полученная разность равна нулю по условию, поэтому $4MN^2 = 0$ или $MN = 0$, т.е. отрезок MN не существует.

Итак, предположение было неверным, а значит, утверждение задачи верно.

	8	***Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два равнобедренных треугольника, а длина её равна половине гипотенузы. Верно и обратное утверждение.***

8.1. (№10.021). Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении 1 : 2. Найти стороны треугольника.

Решение



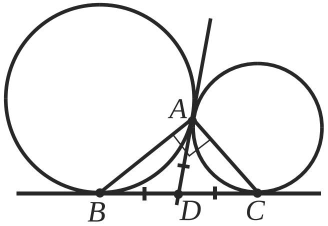
Пусть CO – медиана, проведенная к гипотенузе AB, $CO = m$. Она разбивает данный треугольник на два равнобедренных треугольника, т.е. $AO = BO = CO = m$, $AB = 2m$.

По условию медиана делит прямой угол в отношении 1 : 2, т.е. $\angle ACO = 30°$, $\angle BCO = 60°$. Следовательно, $\triangle COB$ – правильный, $CB = m$. $AC = BC \cdot \sqrt{3}$, поэтому $AC = m\sqrt{3}$.

Ответ: m, $m\sqrt{3}$, $2m$.

8.2. Две окружности касаются друг друга в точке A внешним образом. B и C – точки касания их общей внешней касательной. Доказать, что $\angle BAC = 90°$.

Доказательство

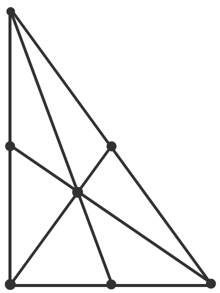


Пусть D – точка пересечения касательных. Тогда $DA = DB = DC$ или $DA = ½\ BC$. Треугольник BAC разбит на два равнобедренных треугольника.

Следовательно, по задаче-теореме $\angle BAC = 90°$, ч.т.д.

8.3. (№10.215). В прямоугольном треугольнике медианы катетов равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найти гипотенузу треугольника.

Решение



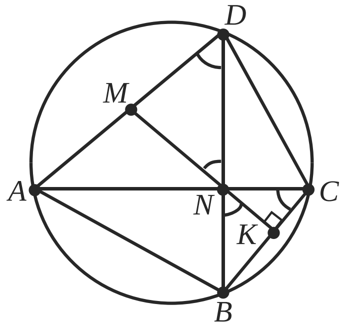
Стандартное решение сводится к системе из двух уравнений: $x^2 + 4y^2 = 52$, $y^2 + 4x^2 = 73$ ($2x$ и $2y$ – катеты треугольника).

Применим задачу-теорему. Пусть медиана, проведенная к гипотенузе, равна m. Тогда гипотенуза будет равна $2m$, ее квадрат – $4m^2$, а сумма квадратов всех сторон треугольника – $8m^2$, т.к. сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Сумма квадратов всех медиан

равна $52 + 73 + m^2$. Имеем: $\dfrac{125 + m^2}{8m^2} = \dfrac{3}{4}$ (см. задачу 7.1) или $4 \cdot 125 = 20m^2$, $5m^2 = 125$, $m = 5$ ($m > 0$), $2m = 10$. *Ответ*: 10.

8.4. $ABCD$ – вписанный четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны. Доказать, что прямая, проведенная через точку пересечения диагоналей перпендикулярно BC, делит AD пополам.

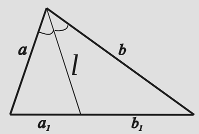
Доказательство



Пусть $N = AC \cap BD$, K – точка пересечения заданной прямой со стороной BC, M – со стороной AD.

В конфигурации имеется окружность, поэтому сначала изучим углы. Нетрудно видеть равные пары углов: ADB и ACB, DNM и BNK (первая содержит вписанные углы, опирающиеся на дугу BC, а вторая – вертикальные). Теперь заметим, что два угла из разных пар – ACB (или NCB) и BNK – дополняют угол CNK до прямого, а значит, равны. Отсюда вытекает равенство всех четырех рассмотренных углов.

Следовательно, треугольник DNM – равнобедренный и по задаче-теореме NM является медианой прямоугольного треугольника ADN, делящей AD пополам, ч.т.д.



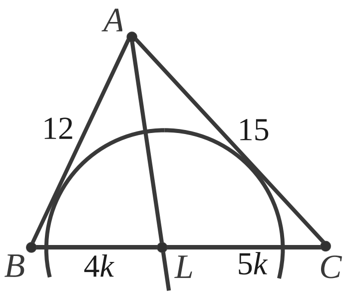
9

Биссектриса l угла треугольника делит его противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам, т.е. $b : c = b_1 : c_1$.

$$l = \sqrt{b \cdot c - b_1 \cdot c_1}.$$

9.1. (№10.013). Дан треугольник со сторонами 12 см, 15 см и 18 см. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр на большей стороне. Найти отрезки, на которые центр окружности делит большую сторону треугольника.

Решение



Пусть AB = 12 см, AC = 15 см, BC = 18 см, L – центр окружности, $L \in BC$. Так как окружность касается сторон угла A, то ее центр лежит на биссектрисе этого угла, т.е. AL – биссектриса угла треугольника.

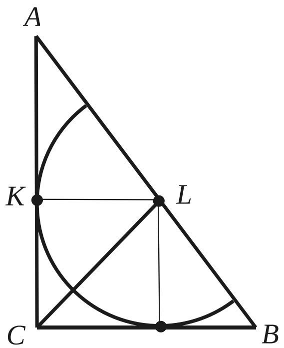
12 : 15 = 4 : 5, поэтому по свойству биссектрисы $BL = 4k$ см, $LC = 5k$ см, где $k > 0$. Имеем: $4k + 5k = 18$, $k = 2$.

Таким образом, BL = 8 см, LC = 10 см.

Ответ: 8 см, 10 см.

9.2. (№10.040). В прямоугольный треугольник вписана полуокружность так, что диаметр лежит на гипотенузе, а центр делит гипотенузу на отрезки длиной 15 см и 20 см. Найти площадь треугольника и длину вписанной полуокружности.

Решение



$\angle C = 90^\circ$, L – центр полуокружности, $L \in AB$, BL = 15 см, AL = 20 см, K – точка касания полуокружности с большим катетом. Так как полуокружность вписана, то CL – биссектриса прямого угла.

По свойству биссектрисы: $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{BL}{AL}$

или $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{15}{20} = \dfrac{3}{4}$. Если k – коэффициент пропорциональности, то $AC = 4k$, $BC = 3k$. Значит, $AB = 5k$ = 15 + 20 (см) (пифагорова тройка 3, 4, 5).

Отсюда k = 35 : 5 = 7, AC = 28 см, BC = 21 см.

$LK = \dfrac{4}{7}BC$ = 12 см – радиус полуокружности.

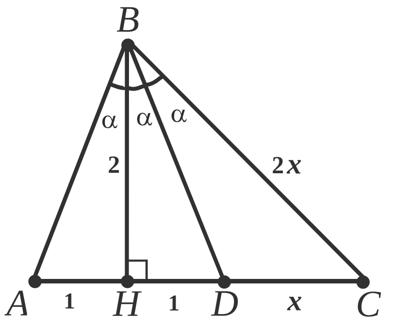
Вычислим искомые величины:

$\frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 21 = 14 \cdot 21 = 49 \cdot 6 = 294$ (см^2). $\pi \cdot LK = 12\pi$ (см).

Ответ: 294 см^2, 12π см.

9.3. (№10.421). Высота треугольника, равная 2 см, делит угол треугольника в отношении 2 : 1, а основание – на части, меньшая из которых равна 1 см. Найти площадь этого треугольника.

Решение



$BH \perp AC$, BH = 2 см, AH = 1 см. Если $\angle ABH = \alpha$, то $\angle HBC = 2\alpha$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} AC \cdot 2 = AC$.

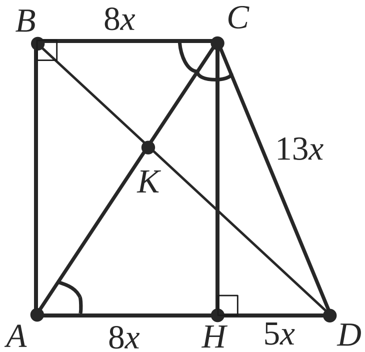
Проведем биссектрису BD. Тогда $\angle HBD = \angle DBC = \angle ABH = \alpha$, $HD = AH$ = 1 см, $DB = \sqrt{5}$ см и $BH : HD = BC : CD = 2 : 1$. Если $CD = x$ см, $BC = 2x$ см, то по формуле $BD^2 = BH \cdot BC - HD \cdot CD$ имеем: $(\sqrt{5})^2 = 2 \cdot 2x - 1 \cdot x$, $5 = 3x$, $x = 5/3$ см.

$S_{ABC} = AC = 1 + 1 + 5/3 = 11/3$ (см^2). (См. раздел 5.5).

Ответ: 11/3 см^2.

9.4. В прямоугольной трапеции меньшая диагональ служит биссектрисой тупого угла и делит другую диагональ в отношении 13 : 8. Вычислить площадь трапеции, если ее высота равна 36.

Решение



Пусть CA – биссектриса тупого угла C трапеции $ABCD$, CH – высота, CH = 36.

$CA \cap BD = K$, $DK : KB$ = 13 : 8.

Тогда $DC : CB$ = 13 : 8.

Обозначим DC через $13x$, а CB через $8x$. Углы DCA и DAC равны, т.к. каждый из них равен углу ACB. Значит, $\triangle DCA$ – равнобедренный и $DA = DC = 13x$.

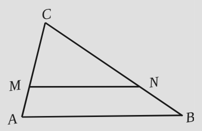
Отсюда $AH = 8x$, $DH = 5x$.

Из $\triangle DCH$: $CH = 12x$ (пифагорова тройка 5, 12, 13).

Имеем: $12x = 36$, $x = 3$, а искомая площадь трапеции равна

$(8 + 13) \cdot 3 \cdot 18 = 21 \cdot 54 = 1080 + 54 = 1134$.

Ответ: 1134.

	10	***Если прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его сторону AC в точке M, а сторону BC в точке N, то треугольники ABC и MNC подобны.*** ***Следствие: CM : MA = CN : NB.***

10.1. (№10.068). Длина основания треугольника равна 36 см. Прямая, параллельная основанию, делит площадь треугольника пополам. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между сторонами треугольника.

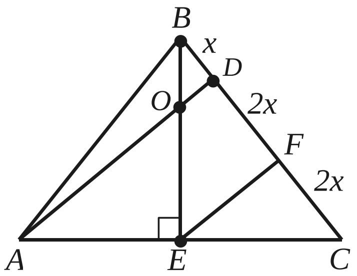
Решение

Указанная прямая отсекает треугольник, подобный данному. Из условия следует, что их площади относятся как 1 : 2. Значит, отношение соответственных линейных элементов этих треугольников, например, искомого отрезка и основания данного треугольника, равно $1 : \sqrt{2}$. Имеем: $36 : \sqrt{2}. = 18\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $18\sqrt{2}$ см.

10.2. (№10.261). В треугольнике *ABC AB = BC*. На стороне *BC* взята точка *D* так, *BD : DC* = 1 : 4. В каком отношении прямая *AD* делит высоту *BE* треугольника *ABC*, считая от вершины *B*?

Решение



Пусть $AD \cap BE = O$, $BD = x$, $DC = 4x$. Проведем $EF \parallel AD$.

EF – средняя линия $\triangle$ *CAD*, поэтому $DF = CF = 4x : 2 = 2x$.

Так как $OD \parallel EF$, то треугольники *BOD* и *BEF* подобны.

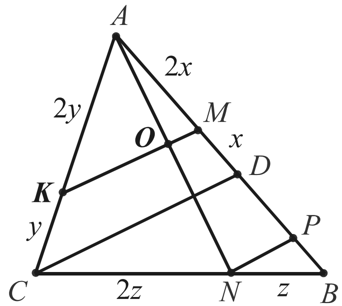
Применим следствие из задачи-теоремы:

$$\frac{BO}{OE} = \frac{BD}{DF} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 1 : 2.

10.3. (№1351). На сторонах *AB*, *BC* и *AC* треугольника *ABC* взяты соответственно точки *M*, *N* и *K* так, что *AM* : *MB* = 2 : 3, *AK* : *KC* = 2 : 1, *BN* : *NC* = 1 : 2. В каком отношении прямая *MK* делит отрезок *AN*?

Решение



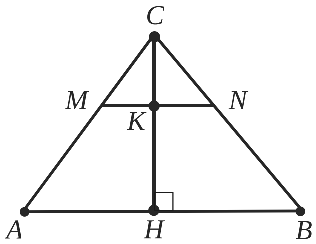
Проведем $CD \parallel KM$, $NP \parallel KM$ и введем обозначения $AM = 2x$, $MB = 3x$.

Рассуждая, как в предыдущей задаче, применяя следствие из задачи-теоремы, последовательно находим: $MD = x$, $DB = 3x - x = 2x$; $PB = ⅓\, DB = 2x/3$; $MP = MB - PB = 3x - 2x/3 = 7x/3$.

$$\frac{AO}{ON} = \frac{AM}{MP} = \frac{2x}{7x/3} = \frac{6}{7}.$$ *Ответ*: 6 : 7.

10.4. (№10.135). Основание треугольника равно 30 см, а боковые стороны 26 и 28 см. Высота разделена в отношении 2 : 3 (считая от вершины), и через точку деления проведена прямая, параллельная основанию. Определить площадь полученной при этом трапеции.

Решение



Пусть *AC* = 26 см, *BC* = 28 см, *AB* = = 30 см. Проведем высоту *CH*. *CK* : *KH* = = 2 : 3, где $MN \parallel AB$, $K = MN \cap CH$.

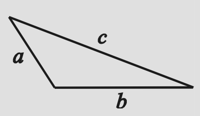
$\triangle CMN \sim \triangle CAB$. Коэффициент подобия равен 2/5. Значит, отношение площадей этих треугольников равно 4 : 25 и площадь *S* трапеции *AMNB* составляет 21/25 от площади треугольника *CAB*.

$$S = \frac{21}{25}S_{ABC} = \frac{21}{25}\sqrt{42\cdot 12\cdot 14\cdot 16} = \frac{21\cdot 4}{25}\sqrt{7\cdot 6\cdot 6\cdot 2\cdot 7\cdot 2} =$$

$$= \frac{21\cdot 42\cdot 8}{25} = \frac{42\cdot 42\cdot 16}{25\cdot 4} = \left(\frac{42\cdot 4}{10}\right)^2 = 16{,}8^2 = (17 - 0{,}2)^2 = 289 +$$

$+ 0{,}04 - 6{,}8 = 282{,}24$ (см^2).

Ответ: 282,24 см^2.

	11	***Пусть a, b, c – стороны треугольника, причем c – наибольшая его сторона.*** ***$c^2 > a^2+b^2$: треугольник – тупоугольный;*** ***$c^2 = a^2+b^2$: треугольник– прямоугольный;*** ***$c^2 < a^2+b^2$: треугольник – остроугольный.***

11.1. (№1537). Определите вид треугольника (относительно его углов), если даны три стороны или их отношения: 1) 2, 3, 4; 2) 3, 4, 5; 3) 4, 5, 6; 4) 10, 15, 18; 5) 68, 119, 170.

Решение

1) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. $4^2 > 2^2 + 3^2$, т.к. $16 > 13$.

2) $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. $5^2 = 3^2 + 4^2$, т.к. $25 = 25$.

3) $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$. $6^2 < 4^2 + 5^2$, т.к. $36 < 41$.

4) $a = 10$, $b = 15$, $c = 18$. $18^2 < 10^2 + 15^2$, т.к. $324 < 325$.

5) $a = 68$, $b = 119$, $c = 170$. $170^2 > 68^2 + 119^2$, т.к. $28900 > 18785$.

Ответ: 1) тупоугольный; 1) прямоугольный; 3) остроугольный; 4) остроугольный; 5) тупоугольный.

11.2. (№10.271). Найти площадь треугольника, если его высоты равны 12, 15 и 20.

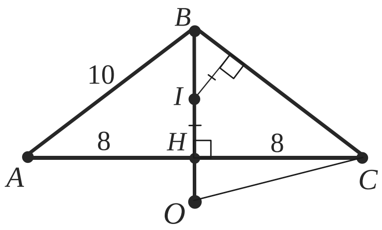
Решение

Неизвестную площадь S используем сначала как вспомогательную переменную. Выразим стороны треугольника через нее и заданные высоты: $2S/12$, $2S/15$, $2S/20$. Отношения полученных величин (3, 4, 5) равны отношению сторон треугольника. Следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, данный треугольник – прямоугольный, а две большие высоты служат его катетами, т.е. $S = ½ \cdot 15 \cdot 20 = 150$.

Ответ: 150.

11.3. (№10.009). В равнобедренном треугольнике основание равно 16 см, а боковая сторона равна 10 см. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами.

Решение



Пусть в треугольнике ABC: $AB = BC = 10$ см, $AC = 16$ см. Так как он равнобедренный, то центры окружностей, точки I, O, лежат на оси симметрии треугольника, содержащей высоту BH. OI – расстояние между центрами.

Заметим, что $16^2 > 10^2 + 10^2$, поэтому $\angle B > 90^\circ$ и точка O лежит на продолжении отрезка BH.

Очевидно, что $BH = 6$ см, $S_{ABC} = 6 \cdot 8$ (см^2).

Вычислим радиусы окружностей по известным формулам:

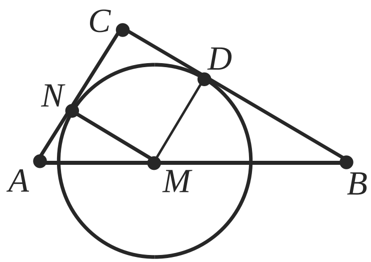
$$R = OB = \frac{10\cdot 10\cdot 16}{4\cdot 6\cdot 8} = \frac{25}{3}\ (\text{см}).\quad r = IH = \frac{6\cdot 8}{10+8} = \frac{8}{3}(\text{см}).$$

$$OI = OB - BI = OB - (BH - IH) = \frac{25}{3} + \frac{8}{3} - 6 = 5\ (\text{см}).$$

Ответ: $\frac{8}{3}$ см, $\frac{25}{3}$ см, 5 см.

11.4. (№10.209). Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26. Две меньшие стороны – касательные к окружности, центр которой лежит на большей стороне. Найти радиус окружности.

Решение

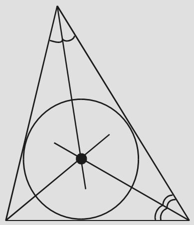


Пусть $AB = 26$, $BC = 24$, $AC = 10$, M – центр окружности, N – точка касания со стороной AC, $MN = r$ – искомый радиус.

Так как $26^2 = 24^2 + 10^2$, то данный треугольник – прямоугольный и $MNCD$ – квадрат. $MN \parallel BC$, поэтому, $\triangle AMN \sim \triangle ABC$.

Имеем: $MN = NC$, $AN = 10 - r$, $\frac{24}{10} = \frac{12}{5} = \frac{r}{10-r}$, $r = \frac{120}{17}$.

Ответ: $\frac{120}{17}$.

	12	***Во всякий треугольник можно вписать единственную окружность. Её центр – точка пересечения биссектрис углов треугольника.*** ***Биссектриса угла есть г.м.т., расположенных внутри угла и одинаково удаленных от его сторон.***

12.1. (№10.049). Точка на гипотенузе, равноудаленная от двух катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 и 40 см. Найти катеты треугольника.

Решение

Точка, равноудаленная от двух катетов, лежит на биссектрисе прямого угла. По свойству биссектрисы угла треугольника находим, что отношение катетов равно отношению отрезков гипотенузы, т.е. 30 : 40 или 3 : 4. Вспомнив, что 3, 4, 5 – пифагорова тройка, напишем уравнение $5k = 30 + 40$, где k – коэффициент пропорциональности. $k = 6 + 8 = 14$.

Следовательно, искомые катеты суть: $3k = 42$ и $4k = 56$.

Ответ: 42 и 56.

12.2. (№290). Диагонали четырехугольника делят его углы пополам. Докажите, что в такой четырехугольник можно вписать окружность.

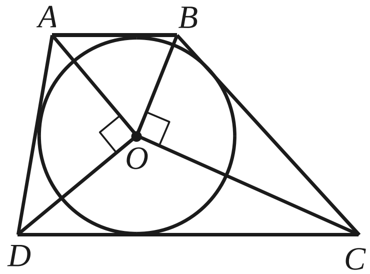
Доказательство

Точка пересечения диагоналей четырехугольника по условию принадлежит биссектрисам его углов. По задаче-теореме каждая точка биссектрисы угла одинаково удалена от сторон угла. Таким образом, точка пересечения диагоналей четырехугольника одинаково удалена от его сторон и служит центром вписанной в четырехугольник окружности, ч.т.д.

12.3. В трапецию $ABCD$ (AB и CD – основания) вписана окружность с центром O. Доказать, что: а) треугольники AOD и BOC – прямоугольные; б) сумма квадратов расстояний от центра

вписанной окружности до вершин трапеции равна сумме квадратов ее боковых сторон.

Решение



Рассмотрим один из треугольников, например, $\triangle AOD$. Его углы DAO и ADO – половины углов A и D трапеции, т.к. AO и DO – биссектрисы этих углов.

Но $\angle A + \angle D = 180^\circ$. Значит, $\angle DAO + \angle ADO = 180^\circ : 2 = 90^\circ$.

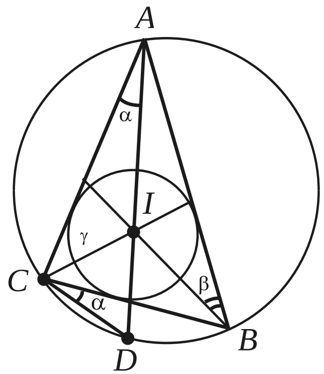
Отсюда $\angle AOD = 90^\circ$.

Аналогично доказывается, что и $\triangle BOC$ – прямоугольный.

Убедитесь самостоятельно в том, что утверждение б) данной задачи является следствием утверждения а) и теоремы Пифагора.

12.4. (№10.372). Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Найти длину хорды DC, если центр окружности, вписанной в данный треугольник, удален от точки D на расстояние n.

Решение



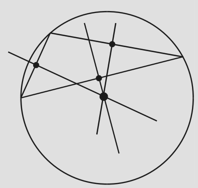
Пусть I – инцентр. Из условия следует, что $n = DI$, $I \in AD$, так как центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис углов треугольника. Проведем биссектрисы углов B и C и обозначим половины углов A, B, C соответственно α, β, γ.

Вписанные углы DAB и DCB опираются на дугу DB, а значит равны: $\angle DCB = \alpha$.

Заметим, что $\angle DCI = \angle DIC$. Действительно, $\angle DCI = \alpha + \gamma$ и $\angle DIC = \alpha + \gamma$ (как внешний угол треугольника AIC).

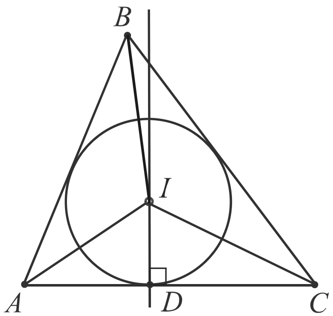
Следовательно, треугольник DIC – равнобедренный с вершиной D, т.е. $DI = DC = n$.

Ответ: n.

	13	***Около всякого треугольника можно описать единственную окружность. Её центр – точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника.*** ***Серединный перпендикуляр к отрезку есть г.м.т., равноудаленных от концов отрезка.***

13.1. (№292). Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с центром вписанной окружности. Найдите углы треугольника.

<u>*Решение*</u>



Пусть I – инцентр. Проведем через него серединный перпендикуляр к одной из сторон треугольника, например, $ID \perp AC$.

Тогда прямоугольные треугольники AID и CID равны по двум катетам ($AD = DC$ и DI – общий катет). Значит, $\angle DAI = \angle DCI$ и $\angle A = \angle C$, так как AI и CI – биссектрисы этих углов.

Отсюда следует, что треугольник ABC – равнобедренный и $AB = BC$.

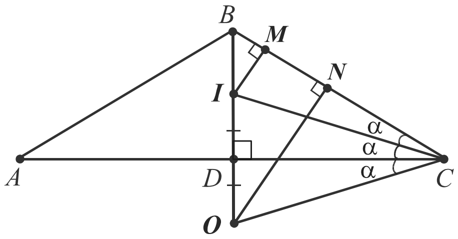
Аналогично, проводя серединный перпендикуляр к стороне BC, докажем, что $AB = AC$.

Таким образом, $AB = BC = AC$, т.е. треугольник ABC – равносторонний.

Ответ: 60°, 60°, 60°.

13.2. (№404). Центр описанной окружности треугольника симметричен его центру вписанной окружности относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.

<u>*Решение*</u>



Пусть инцентр I и центр описанной окружности O симметричны относительно стороны AC. Эти точки принадлежат серединному перпендикуляру, проведенному к отрезку AC.

Тогда $\triangle ABC$ – равнобедренный (см. 13.1) и тупоугольный ($\angle B > 90°$).

Заметим, что треугольники COI и OCB также равнобедренные с основаниями OI и CB. Действительно, $CO = CI$, так как CD является высотой и медианой в треугольнике COI, а $OC = OB$ как радиусы одной окружности.

Пусть $\angle OCD = \angle DCI = \angle ICB = \alpha$. Тогда в треугольнике OCB $\angle C = \angle B = 3\alpha$.

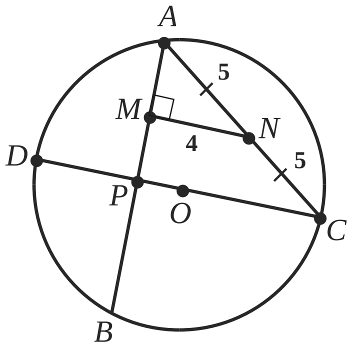
В прямоугольном треугольнике DBC: $3\alpha + 2\alpha = 90°$, $\alpha = 18°$.

Итак, $\angle C = \angle A = 2 \cdot 18° = 36°$, $\angle B = 6\alpha = 6 \cdot 18° = 108°$.

Ответ: 36°, 36°, 108°.

13.3. (№10.204). Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 10 и 12 см. Найти радиус окружности, если расстояние от середины меньшей хорды до большей хорды равно 4 см.

<u>*Решение*</u>



Пусть $AC = 10$ см, $AB = 12$ см. Точка N – середина меньшей хорды, $AN = NC = 5$ см, $MN = 4$ см, причем $MN \perp AB$.

Проведем $CP \parallel MN$, тогда $CP = 2\,MN = 2 \cdot 4 = 8$ (см) и $CP \perp AB$.

Из $\triangle APC$: $AP = 6$ см (пифагорова тройка). Значит, CP – серединный перпендикуляр к AB, содержащий диаметр данной окружности.

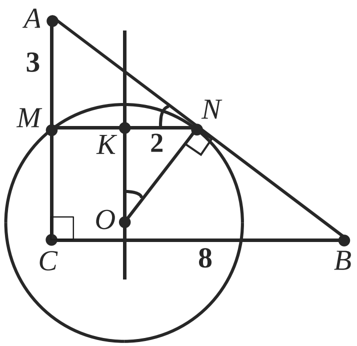
Имеем: $DP \cdot PC = AP \cdot PB$ или $DP \cdot 8 = 6 \cdot 6$, $DP = 4{,}5$ (см).

$OC = (4{,}5 + 8) : 2 = 6{,}25$ (см).

Ответ: 6,25 см.

13.4. (№10.295). Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведена окружность, касающаяся гипотенузы. Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью.

Решение



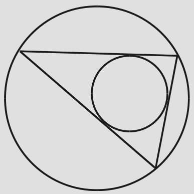
В △ ABC: $AC = 6$ см, $CB = 8$ см, $AB = 10$ см (пифагорова тройка).

Пусть M и N – середины сторон AC и AB. Тогда MN – средняя линия треугольника ABC, $MN = 4$ см.

Заданная окружность (O, ON) проходит через точки M и N, поэтому ее центр лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку. Отсюда $NK = 2$ см. Заметим, что углы NOK и ANM дополняют угол ONK до прямого. Следовательно, они равны, а прямоугольные треугольники NOK и ANM – подобны. Из подобия имеем пропорцию: $\frac{NO}{KN} = \frac{AN}{AM}$ или $\frac{NO}{2} = \frac{5}{3}$, $NO = \frac{10}{3}$ см.

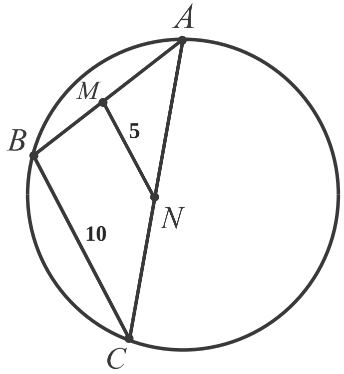
Вычислим искомую площадь круга: $\pi \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9}\pi$ (см^2).

Ответ: $\frac{100\pi}{9}$ см^2.

	14	***Радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника находят по формулам:*** $r = \frac{S}{p}$, $R = \frac{abc}{4S}$. ***a, b, c – длины сторон, S – площадь треугольника, p – его полупериметр. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой c:*** $r = (a + b - c)/2$, $R = c/2$.

14.1. (№10.203). Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 и 17 см. Найти радиус окружности, если расстояние между серединами данных хорд равно 5 см.

Решение



Пусть $AB = 9$ см, $AC = 17$ см, $MN = 5$ см, где M и N – середины хорд.

Соединим точки B, C и рассмотрим образовавшийся треугольник ABC. По теореме о средней линии треугольника $BC = 2\,MN = 10$ см (заметим, что $17^2 > 10^2 + 9^2$, поэтому $\angle B$ – тупой и центр описанной окружности лежит вне треугольника).

Искомый радиус вычислим как радиус описанной окружности треугольника ABC по формуле $\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S}$, где S – его площадь:
$\frac{9 \cdot 17 \cdot 10}{4 \cdot \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1}} = \frac{9 \cdot 17 \cdot 5}{2 \cdot 9 \cdot 4} = \frac{85}{8}$ (см).

Ответ: 10,625 см.

14.2. (№10.265). Доказать, что во всяком прямоугольном треугольнике сумма диаметров вписанной и описанной окружностей равна сумме его катетов.

Решение

Воспользуемся формулами из задачи-теоремы и стандартными обозначениями: $2r + 2R = a + b - c + c = a + b$, ч.т.д.

14.3. (№10.163). Стороны треугольника равны 13, 14 и 15. Найти отношение площадей описанного и вписанного в этот треугольник кругов.

Решение

Найдем полупериметр треугольника: $p = 7 + (13 + 15) : 2 = 21$.

Отношение площадей описанного и вписанного кругов равно отношению квадратов их радиусов.

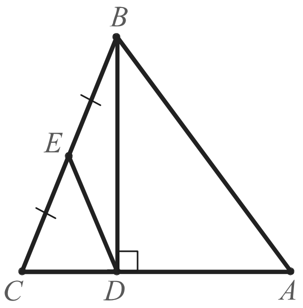
$$\frac{R}{r} = \frac{abc \cdot p}{4S \cdot S} = \frac{abcp}{4 \cdot p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{13 \cdot 5}{4 \cdot 8}.$$

$R^2 : r^2 = 65^2 : 32^2 = 4225 : 1024$.

Ответ. 4225 : 1024.

14.4. (№10.351). Пусть BD – высота треугольника ABC, точка E – середина BC. Вычислить радиус круга, описанного около треугольника BDE, если $AB = 30$, $BC = 26$, $AC = 28$.

Решение



Для нахождения искомого радиуса воспользуемся формулой $\dfrac{BD\cdot DE\cdot BE}{4S_{BDE}}$. Из условия задачи вытекает, что DE – медиана прямоугольного треугольника и площадь треугольника BDE – половина площади треугольника CBD, равной полупроизведению его катетов, а BE – половина гипотенузы, т. е. $BE = 13$.

$4S_{BDE} = 4 \cdot ½\, S_{CBD} = 2 \cdot ½\, BD \cdot CD = BD \cdot CD$.

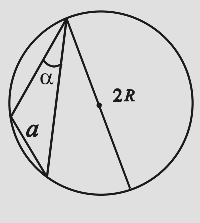
Имеем: $\dfrac{BD\cdot DE\cdot BE}{BD\cdot CD}=\dfrac{BE^2}{CD}$.

Обозначив катет CD через x, найдем его как проекцию наклонной BC на прямую AC: $AB^2 - BC^2 = AD^2 - DC^2$.

$30^2 - 26^2 = (28 - x)^2 - x^2$, $4 \cdot 56 = (28 - 2x) \cdot 28$, $4 = 14 - x$, $x = 10$.

Итак, радиус описанного круга равен $13^2 : 10 = 16{,}9$.

Ответ: 16,9.



15

Следствие из теоремы синусов.

Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего ей угла равно диаметру описанной окружности, т. е.

$\dfrac{a}{\sin\alpha}=2R$ ***или*** $\boldsymbol{a = 2R\sin\alpha}$.

15.1. (№10.092). В окружность радиуса R вписан треугольник с углами 15° и 60°. Найти площадь треугольника.

Решение

Начнем с вычисления третьего угла треугольника по теореме о сумме его углов: $180° – (15° + 60°) = 105°$.

Пусть a и b – стороны треугольника, противолежащие углам в 15° и 105°. Тогда $a = 2R\sin 15°$, $b = 2R\sin 105°$. Теперь вычислим площадь треугольника по известной формуле, используя полученные выражения для сторон и заданный угол в 60°:

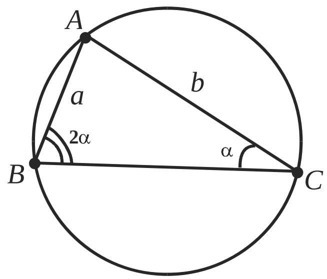
$S = ½ \cdot 2R\sin 15° \cdot 2R\sin 105° \cdot \sin 60° = R^2 \cdot 2\sin 15° \cdot \sin 105° \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2} \cdot (\cos(-90°) - \cos 120°) = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2} \cdot \left(0 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

15.2. (№10.044). В окружности проведены две хорды $AB = a$ и $AC = b$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB. Найти радиус окружности.

Решение



Введем обозначение: $\angle ACB = \alpha$. Тогда $\angle ABC = 2\alpha$, т.к. длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB.

По теореме синусов для $\triangle ABC$: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin 2\alpha}$. Отсюда выразим $\cos\alpha$ через a и b: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$ или

$\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2\cdot\cos\alpha}$ $(\sin\alpha \neq 0)$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{2a}$.

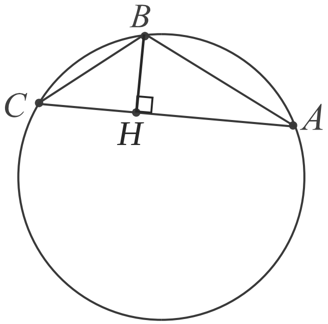
Найдем $\sin\alpha$. $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-b^2/4a^2}$ ($\sin\alpha > 0$, т. к. синус любого угла треугольника положителен).

Остается воспользоваться формулой: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=2R$, где R – искомый радиус. $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}=\dfrac{a\cdot 2a}{2\sqrt{4a^2-b^2}}=\dfrac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$.

Ответ: $\dfrac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$.

15.3. В круге радиуса 12 см длина хорды AB равна 6 см, а хорды BC – 4 см. Найти длину хорды AC.

Решение



Хорда AC – сторона тупоугольного треугольника ABC ($\angle B > 90^{\circ}$), вписанного в круг заданного радиуса.

По задаче-теореме в этом треугольнике $\sin \angle A = BC : (2 \cdot 12) = 4 : 24 = \dfrac{1}{6}$.

Проведем $BH \perp AC$ и заметим, что в треугольнике ABH $\sin \angle A = BH : AB = \dfrac{BH}{6}$. Значит, $BH = 1$.

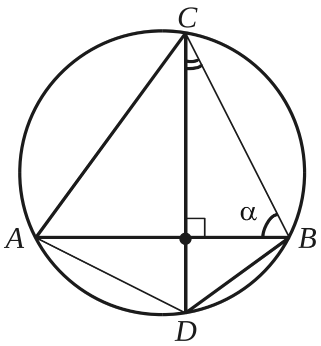
Далее из прямоугольных треугольников CBH и ABH по теореме Пифагора находим: $CH = \sqrt{15}$, $AH = \sqrt{35}$, $AC = \sqrt{35} + \sqrt{15}$.

Ответ: $\sqrt{35} + \sqrt{15}$.

(Применитe теорему Птолемея (см. 4.4, 29, 53, 67.1, 72) в четырехугольнике $ABCD$, где BD – диаметр описанной окружности).

15.4. (№10.219). В окружности радиуса R проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды AB и CD. Доказать, что $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

Доказательство



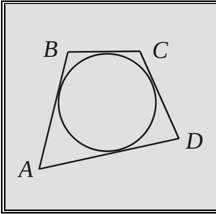
Обозначим $\angle ABC = \alpha$. По условию хорды AB и CD перпендикулярны, поэтому $\angle BCD = 90^{\circ} - \alpha$. Применим задачу-теорему к сторонам треугольников ABC и BCD, вписанных в окружность:

$AC = 2R \sin \alpha$, $BD = 2R \sin (90^{\circ} - \alpha)$.

Имеем: $AC^2 + BD^2 = 4R^2 \sin^2 \alpha + 4R^2 \cos^2 \alpha = 4R^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 4R^2$, что и требовалось доказать.

Примечание: из доказанного и теоремы Пифагора очевидно вытекает *теорема Архимеда*:

$$AM^2 + MC^2 + BM^2 + MD^2 = 4R^2, \text{ где } M = AB \cap CD.$$



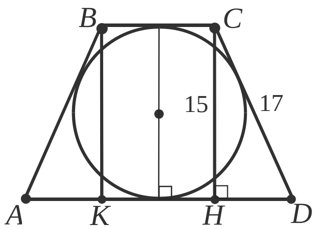
16

Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы длин его противолежащих сторон были равны.

$$\mathbf{AB + CD = BC + AD.}$$

16.1. (№10.007). Около окружности с диаметром 15 см описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17 см. Найти основания трапеции.

Решение



В данной трапеции $ABCD$: $AB = CD = 17$ см, $CH \perp AD$, $CH = 15$ см (диаметр вписанной окружности равен высоте трапеции).

Из $\triangle CDH$: $DH = 8$ см (пифагорова тройка 8, 15, 17).

По задаче-теореме для описанной трапеции: $AB + CD = BC + AD$. Имеем: $17 + 17 = BC + (8 + BC + 8)$, так как $BC = KH$. $17 = 8 + BC$, $BC = 9$ см. $AD = 9 + 2 \cdot 8 = 25$ (см).

Ответ: 9 см, 25 см.

16.2. (№10.123). Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S. Определить боковую сторону трапеции, если известно, что острый угол при основании равен $\pi/6$.

Решение

Пусть в трапеции $ABCD$: $AB = CD$, $CH \perp AD$, $\angle CDH = \pi/6 = 30^{\circ}$, $S_{ABCD} = S$ (см. рис. к задаче 16.1).

Т. к. трапеция описана, то $BC + AD = 2CD$ или ½ $(BC + AD) = CD$, т.е. боковая сторона CD равна средней линии трапеции. Кроме того, из $\triangle CDH$: $CH = ½\, CD$ ($\angle CDH = 30^{\circ}$).

Таким образом, искомую боковую сторону трапеции можно выразить через заданную площадь, равную произведению средней линии на высоту.

Имеем: $CD \cdot ½\, CD = S$, $CD^2 = 2S$, $CD = \sqrt{2S}$.

Ответ: $\sqrt{2S}$.

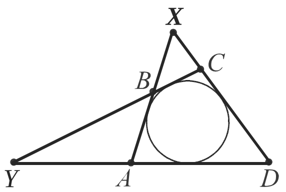
16.3. (№305). Через центр окружности, вписанной в трапецию, проведена прямая, параллельная основаниям. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами, равен четверти периметра трапеции.

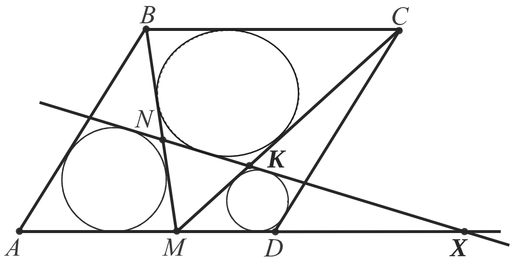
<u>*Доказательство*</u>

Легко убедиться, что отрезок данной прямой – средняя линия трапеции, которая равна полусумме оснований. По задаче-теореме сумма оснований описанной трапеции равна сумме ее боковых сторон, поэтому она равна половине периметра трапеции. Отсюда следует, что средняя линия равна четверти периметра, ч.т.д.

16.4. На стороне AD ромба $ABCD$ взята точка M. Доказать, что окружности, вписанные в треугольники ABM, BMC и CMD, имеют общую касательную.

<u>*Доказательство*</u>



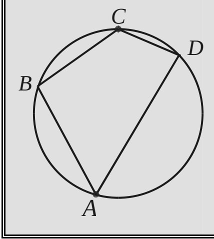


Лемма. Если X и Y – точки пересечения продолжений противоположных сторон описанного четырехугольника $ABCD$, то $XD + YB = XB + YD$ (1) и $AX + AY = CX + CY$ (2) (рис. слева). (Используя задачу-теорему, докажите лемму самостоятельно).

Вписав окружности в треугольники ABM и CMD, проведем к ним общую касательную (рис. справа). Если X, K, N – точки ее пересечения с прямыми AD, CM, BM, то в силу леммы верны соотношения $AB + XN = BN + XA$ (1′) и $KC + KX = DC + DX$ (2′).

Вычитая из равенства (1′) равенство (2′), получим $AB + XN - KC - KX = BN + XA - DC - DX$ или $AB - KC + NK = BN - DC + AD$. Т. к. $AB = AD$, то $NK - KC = BN - DC$, а т. к. $CB = CD$, то $NK + CB = BN + KC$.

По задаче-теореме четырехугольник $BCKN$ – описанный, что и доказывает утверждение.



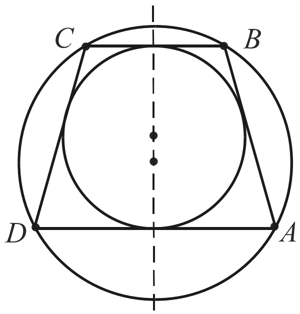
17

Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его противолежащих углов была равна 180°.

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°.$$

17.1. (№10.217). Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять трапеция, чтобы в нее можно было вписать и около нее можно было описать окружность?

<u>*Доказательство*</u>



Докажем, что условиям задачи удовлетворяет равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной полусумме ее оснований.

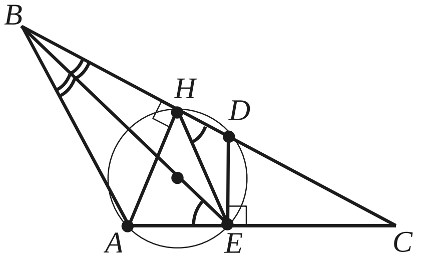
Необходимость. Пусть для трапеции с боковыми сторонами AB и CD существуют вписанная и описанная окружности. Тогда по задаче-теореме 17: $\angle A + \angle C = 180°$, но для всякой трапеции верно, что и $\angle A + \angle B = 180°$, поэтому $\angle C = \angle B$, т.е. трапеция равнобедренная. Далее, по задаче-теореме 16 для вписанной трапеции $AB + CD = BC + AD$. Отсюда, учитывая, что $AB = CD$, получим $AB = ½ (BC + AD)$.

Достаточность. Если $ABCD$–равнобедренная трапеция и $AB = CD = ½ (BC + AD)$, то $\angle C = \angle B$, $\angle A + \angle B = 180°$, т.е. $\angle A + \angle C = 180°$ и трапеция вписана. Кроме того, $2AB = BC + AD$ или $AB + CD = BC + AD$ и, следовательно, трапеция описана, ч.т.д.

17.2. (№3595) В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса BE. Докажите, что если $\angle BEA = 45°$, то и $\angle EHC = 45°$.

<u>*Доказательство*</u>

Очевидно, достаточно доказать, что HE – биссектриса прямого угла AHC. Восставим перпендикуляр из точки E к AC. D – точка его пересечения со стороной BC.

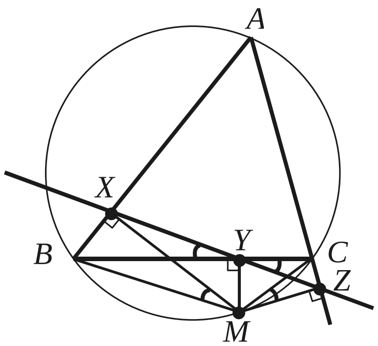


$\triangle$ *BEA* = $\triangle$ *BED*, т.к. у этих прямоугольных треугольников общая сторона *BE* и равные острые углы, прилежащие к ней. Отсюда *AE* = *ED* и $\angle$ *E* + $\angle$ *H* = = 90º + 90º = 180º в образовавшемся четырехугольнике *AEDH*.

Значит, существует описанная около него окружность. Отрезки *AE* и *ED* – равные хорды этой окружности. Равенство соответствующих им дуг влечет равенство вписанных углов *AHE* и *EHD*, т.е. *HE* – биссектриса прямого угла *AHC* и $\angle$ *EHC* = 45º, ч.т.д.

17.3. (№822. *Прямая Симпсона*). Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника (или их продолжения), лежат на одной прямой.

<u>*Доказательство*</u>



Пусть $\triangle$ *ABC* – вписанный, *MX*, *MY*, *MZ* – данные перпендикуляры. Докажем принадлежность трех точек *X*, *Y*, *Z* одной прямой, убеждаясь в равенстве вертикальных углов *BYX* и *CYZ* (см. 4.1).

По замечательному свойству окружности *X* и *Y* – вершины прямых углов, принадлежащих окружности с диаметром *BM*.

Отсюда $\angle$ *BYX* = $\angle$ *BMX*.

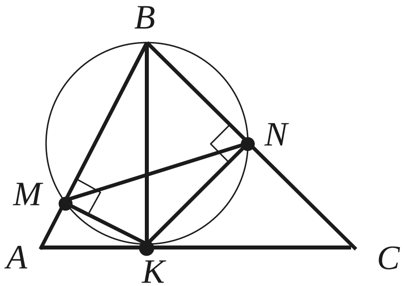
В четырехугольнике *MZCY*: $\angle$ *Y* + $\angle$ *Z* = 180º, поэтому существует описанная около него окружность. Отсюда $\angle$ *CYZ* = $\angle$ *CMZ*. Значит, вместо требуемого равенства можно доказать равенство одной из двух пар углов: $\angle$ *BMX* = $\angle$ *CMZ* или $\angle$ *XBM* = $\angle$ *ZCM*.

Последнее равенство $\angle$ *XBM* = $\angle$ *ZCM* – очевидно, так как каждый из углов этой пары дополняет угол *ACM* до развернутого (углы *XBM* или *ABM* и *ACM* – противолежащие углы вписанного четырехугольника, а углы *ZCM* и *ACM* – смежные).

Утверждение доказано.

17.4. На стороне *AC* остроугольного треугольника *ABC* найти такую точку, чтобы расстояние между ее проекциями на две другие стороны было наименьшим.

<u>*Решение*</u>



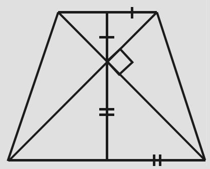
Введем обозначения: *K* – искомая точка, *M* и *N* – ее проекции на стороны *AB* и *BC*.

В четырехугольнике *BNKM*: $\angle$ *M* + $\angle$ *N* = 180º. Значит, около него можно описать окружность с диаметром *BK*.

Для описанной окружности треугольника *BMN* получим: *MN* = *BK* sin *B*. Множитель sin *B* в правой части – постоянная величина, поэтому произведение будет наименьшим при наименьшем значении *BK*.

Несложно сделать вывод, что в этом случае *BK* $\perp$ *AC*.

Ответ: основание высоты треугольника, проведенной к *AC*.

	18	***Если диагонали равнобочной трапеции взаимно перпендикулярны, то длина ее высоты равна длине средней линии, а площадь равна квадрату высоты.*** ***$S = h^2$.***

18.1. (№10.185). В равнобедренной трапеции длина средней линии равна 5, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

<u>*Решение*</u>

Применяя задачу-теорему, находим площадь *S* данной трапеции по формуле $S = h^2$: $S = 5^2 = 25$. *Ответ*: 25.

18.2. (№10.134). В равнобедренной трапеции одно основание равно 40 см, а другое 24 см. Диагонали этой трапеции взаимно перпендикулярны. Найти ее площадь.

<u>*Решение*</u>

Найдем среднюю линию данной трапеции, равную ее высоте: (24 + 40) : 2 = 32 (см). Далее, как и в предыдущей задаче, вычислим площадь по формуле: $32^2 = 1024$ (см^2). *Ответ*: 1024 см^2.

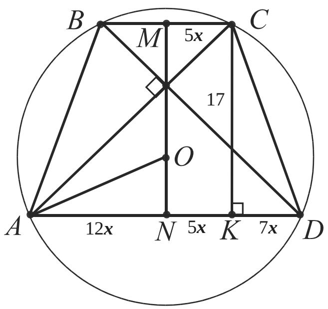
18.3. (№10.319). Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а ее площадь равна a^2. Найти высоту трапеции.

<u>*Решение*</u>

По задаче-теореме: $a^2 = S = h^2$. Отсюда $h = a$ ($h > 0$).
Ответ: a.

18.4. (№1595). Основания равнобедренной трапеции относятся как 5 : 12, а ее высота равна 17. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, если известно, что ее средняя линия равна высоте.

<u>*Решение*</u>



Пусть $ABCD$ данная трапеция с высотой CK, $BC : AD = 5 : 12$.

Обозначим BC через $10x$, AD – $24x$. Тогда $MC = NK = 5x$, $AN = 12x$, $KD = 7x$, где M и N – середины оснований.

По условию задачи средняя линия вписанной равнобедренной трапеции равна ее высоте. Отсюда по утверждению, обратному задаче-теореме 18, диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. В прямоугольном треугольнике ACK: $CK = 17$, $AK = 17x$, $\angle CAK = 45°$. Так как $CK = AK$, то $17x = 17$, $x = 1$.

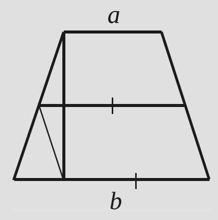
Значит, $BC = 10$, $AD = 24$.

Из $\triangle CKD$: $\angle CKD = 90°$, $CD = \sqrt{17^2 + 7^2} = \sqrt{338}$.

Радиус описанной около трапеции окружности найдем как радиус описанной окружности треугольника ADC: $\angle CAD = 45°$,

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{CD}{2\sin 45°} = \frac{\sqrt{338}}{\sqrt{2}} = \sqrt{169} = 13.$$

Ответ: 13.



19

Если основания равнобочной трапеции равны a и b, то основание ее высоты делит большее основание b на части $\frac{b-a}{2}$ и $\frac{b+a}{2}$, большая из которых равна средней линии трапеции.

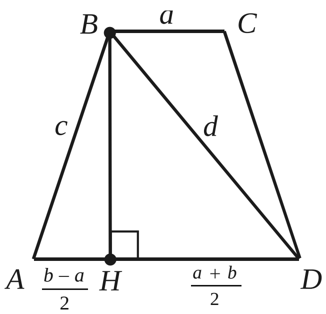
19.1. (№484). Найдите меньшее основание равнобедренной трапеции, если высота, проведенная из вершины меньшего основания, делит большее основание на отрезки, один из которых на 5 больше другого.

<u>*Решение*</u>

По задаче-теореме: $\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} = 5$, где a – меньшее, b – большее основания трапеции. Отсюда $a = 5$.
Ответ: 5.

19.2. (№10.028). Основания равнобочной трапеции a и b, боковая сторона c, диагональ равна d. Доказать, что $d^2 = ab + c^2$.

<u>*Решение*</u>



$ABCD$ – данная трапеция, $BC = a$, $AD = b$, $AB = c$, $BD = d$.

Из треугольников BDH и BAH, имеющих общий катет BH, по теореме Пифагора: $BD^2 - DH^2 = AB^2 - AH^2$, или $BD^2 = AB^2 + DH^2 - AH^2$.

Имеем: $d^2 = c^2 + \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 =$

$= c^2 + \frac{4ab}{4} = ab + c^2$, ч. т. д.

19.3. (№10.323). Диагональ равнобочной трапеции равна 10 см, а площадь равна 48 см^2. Найти высоту трапеции.

Решение

Воспользуемся рисунком к задаче 19.2.

По условию $BD = 10$ см, поэтому $DH^2 + BH^2 = 10^2$ (1).

По задаче-теореме отрезок большего основания DH равен средней линии трапеции, поэтому, учитывая второе условие задачи, получим $DH \cdot BH = 48$ или $2DH \cdot BH = 96$ (2).

Почленно складывая равенства (1) и (2), имеем:

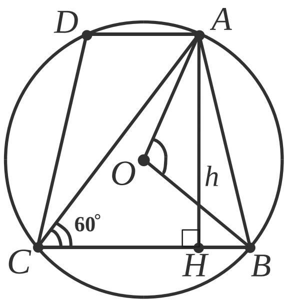
$(DH + BH)^2 = 196$. Отсюда $DH + BH = 14$ (см).

Легко убедиться (пифагорова тройка 6, 8, 10), что $DH = 6$ см, $BH = 8$ см или $DH = 8$ см, $BH = 6$ см.

Ответ: 6 см или 8 см.

19.4. (№10.233). Найти среднюю линию равнобочной трапеции с высотой h, если боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 120º.

Решение



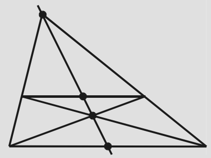
В трапеции $ABCD$: $AB = CD$, $AH \perp BC$, $AH = h$, $\angle AOB = 120°$, где O – центр описанной окружности.

$\angle ACB = 120° : 2 = 60°$ как вписанный.

Из $\triangle ACH$: $CH = AH : \sqrt{3} = h : \sqrt{3}$

По задаче-теореме отрезок CH равен средней линии трапеции.

Ответ: $h : \sqrt{3}$



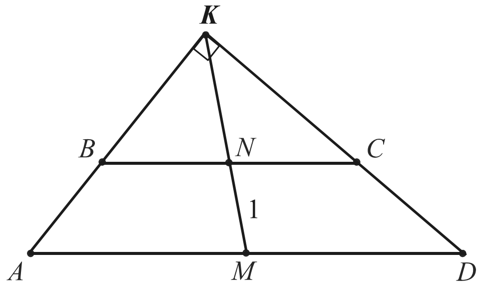
20

Замечательное свойство трапеции.

Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений её боковых сторон, проходит через середины оснований трапеции.

20.1. (№614). Средняя линия трапеции равна 4, углы при одном из оснований равны 40º и 50º. Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины этих оснований, равен 1.

Решение



В трапеции $ABCD$: $\angle D = 40°$, $\angle A = 50°$; N и M – середины оснований BC и AD, $MN = 1$.

Продлим боковые стороны трапеции до их пересечения в точке K. По задаче-теореме точки M, N, K лежат на одной прямой.

Образовавшиеся треугольники AKD и BKC – прямоугольные, т.к. $\angle K = 180° – 40° – 50° = 90°$. Значит, $AM = MK$, $BN = NK$.

Вычитая равенства, находим: $AM – BN = MK – NK = MN = 1$.

Итак, $AM – BN = 1$, $AM + BN = 4$, так как длина средней линии трапеции равна 4 по условию. Отсюда $2AM = AD = 5$.

Меньшее основание трапеции равно $2 \cdot 4 – 5$, т.е. 3.

Ответ: 3, 5.

20.2. (№562). Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90º. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен их полуразности.

Доказательство

В этой и двух последующих задачах воспользуемся рисунком к задаче 20.1.

Основания трапеции служат гипотенузами прямоугольных треугольников AKD и BKC и удвоенными радиусами описанных окружностей (см. 20.1). Следовательно, $KM = ½ AD$, $KN = ½ BC$.

$MN = KM – KN = ½ (AD – BC)$, ч.т.д.

20.3. (№1910). Прямые, содержащие боковые стороны равнобедренной трапеции, пересекаются под прямым углом. Найдите стороны трапеции, если ее площадь равна 12, а высота равна 2.

Решение

Пусть основания трапеции равны a и b ($a > b$).

Их сумма равна частному удвоенной площади и высоты, поэтому $a + b = 2 \cdot 12 : 2 = 12$.

Из задачи 20.2 следует, что $a - b = 2 \cdot 2 = 4$, так как отрезок, соединяющий середины оснований данной трапеции, равен ее высоте. Итак, $a + b = 12$ и $a - b = 4$. Отсюда $a = 8$, $b = 4$.

Боковая сторона данной трапеции очевидно в $\sqrt{2}$ раз больше ее высоты, т.е. равна $2\sqrt{2}$. *Ответ*: 4, 8, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.

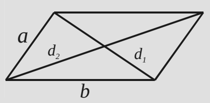
20.4. (№488). Пусть M и N – середины оснований трапеции. Докажите, что если прямая MN образует равные углы с боковыми сторонами трапеции, то эта трапеция равнобочная.

Доказательство

Пусть M и N – середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$, $K = AB \cap CD$. По задаче-теореме точки M, N, K принадлежат одной прямой, а по условию $\angle AKM = \angle MKD$.

Значит, треугольники ADK и BCK – равнобедренные, т.к. KM и KN соответственно служат их биссектрисами и медианами. Отсюда $AK = DK$ и $BK = CK$.

Вычитая, получим $AK - BK = DK - CK$, т.е. $AB = CD$, ч.т.д.



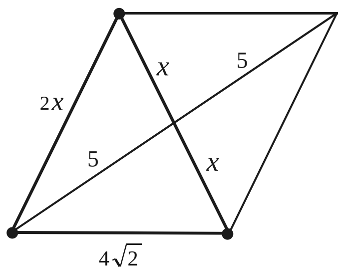
21

Следствие из теоремы косинусов.

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. $\boldsymbol{d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)}$.

21.1. (№10.011). Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана боковой стороны 5 см. Найти длины боковых сторон.

Решение



Достроив заданный треугольник до параллелограмма и обозначив через x половину боковой стороны треугольника, получим по задаче-теореме: $(2x)^2 + 10^2 = 2\,((4\sqrt{2})^2 + (2x)^2)$ или $2x^2 + 50 = 32 + 4x^2$, $x^2 = 9$, $x = 3$ см ($x > 0$), $2x = 6$ см.

Ответ: 6 см.

21.2. (№10.327). Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$ см, а медиана третьей стороны – 2 см.

Решение

Применяя те же обозначения и свойства, что и в предыдущей задаче, получим: $4x^2 + 4^2 = 2\,(1^2 + (\sqrt{15})^2)$, $4x^2 = 2 \cdot 16 - 16$, $x^2 = 4$, $x = 2$ см ($x > 0$), $2x = 4$ см.

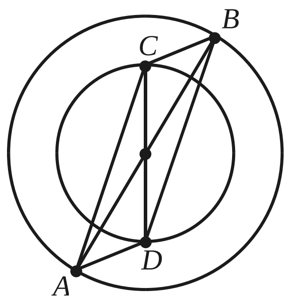
Заметим, что $1^2 + (\sqrt{15})^2 = 4^2$, поэтому треугольник со сторонами 1, $\sqrt{15}$, 4 – прямоугольный.

Следовательно, его площадь равна половине произведения катетов: $½ \cdot 1 \cdot \sqrt{15} = \sqrt{3{,}75}$ (см^2).

Ответ: $\sqrt{3{,}75}$ см^2.

21.3. Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки одной из двух концентрических окружностей до концов диаметра другой окружности есть постоянная величина.

Доказательство



Пусть C – произвольная точка меньшей окружности, AB – произвольный диаметр большей. Требуется доказать, что $CA^2 + CB^2$ – постоянная величина.

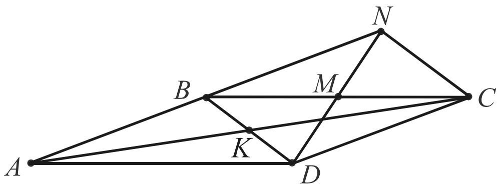
Проведем диаметр CD и примем во внимание, что диаметры AB и CD могут служить диагоналями параллелограмма $ABCD$ (общий центр окружностей делит их пополам).

Следовательно, $CA^2 + CB^2 = ½\,(CD^2 + AB^2)$.

Правая часть этого равенства для фиксированных окружностей является постоянной величиной, поэтому и левая часть – величина постоянная, ч.т.д.

21.4. (№607). Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ втрое больше диагонали BD и пересекается с ней под углом в 60°. Найдите отрезок, соединяющий вершину D с серединой стороны BC, если $AC = 24$, а угол BDC – тупой.

Решение



По свойству параллелограмма: $AK = KC = 12$, $BK = BD = 4$.

Пусть $BM = MC$. Продлим DM и построим параллелограмм $DBNC$, диагональ DN которого равна удвоенному искомому отрезку.

Сначала вычислим квадраты отрезков BC и CD, применяя теорему косинусов в треугольниках CKB и CKD ($\angle CKD = 60°$, поэтому смежный с ним угол CKB равен 120°).

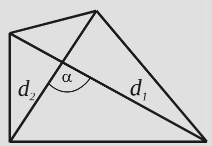
$BC^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot (-½) = 144 + 16 + 48 = 208$.

$CD^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot ½ = 144 + 16 - 48 = 112$.

По задаче-теореме для параллелограмма $DBNC$ запишем:

$DN^2 = 2(CD^2 + BD^2) - BC^2$. Имеем: $DN^2 = 2(64 + 112) - 208 = 4(32 + 56 - 52) = 4 \cdot 36 = (2 \cdot 6)^2 = 12^2$.

Итак, $DN = 12$, а $DM = 12 : 2 = 6$. *Ответ*: 6.



22

***Площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей, умноженному на синус угла между ними.* $S = ½\, d_1 d_2 \sin \alpha$.**

***Следствие: площадь четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны, равна половине произведения диагоналей.* $S = ½\, d_1 d_2$.**

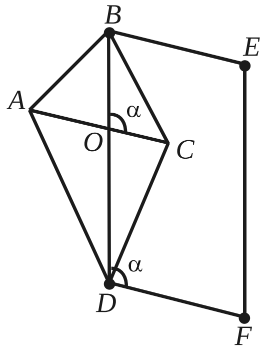
22.1. (№10.356). Доказать, что из всех прямоугольников, вписанных в одну и ту же окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

Решение

Обратим внимание на то, что равные диагонали прямоугольников, вписанных в одну и ту же окружность, равны диаметру d этой окружности и являются постоянными величинами для фиксированной окружности. Если α – угол между диагоналями прямоугольника, то его площадь равна $½\, d \cdot d \cdot \sin \alpha$. Это произведение принимает наибольшее значение при α = 90º, т.е. когда прямоугольник является квадратом, ч.т.д.

22.2. (№10.302). Площадь четырехугольника равна S. Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны и параллельны диагоналям четырехугольника.

Решение



Построим указанный параллелограмм на диагонали BD четырехугольника $ABCD$: $BE \parallel AC$, $BE = AC$, $\angle BOC = \angle BDF = \alpha$..

Имеем: $S = ½\, AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$..

Отсюда $AC \cdot BD \sin \alpha = 2S$.

Площадь параллелограмма суть:

$DF \cdot BD \sin \alpha. = AC \cdot BD \sin \alpha = 2S$, так как $DF = AC$.

Ответ: $2S$.

22.3. (№10.118). Вычислить сторону ромба, зная, что площадь его равна S, а длины диагоналей относятся как $m : n$.

Решение

Введем обозначения: a – сторона ромба, mx и nx – половины его диагоналей (x – коэффициент пропорциональности, $x > 0$).

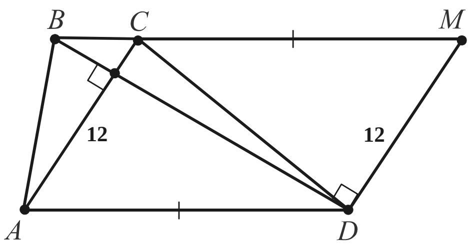
Диагонали ромба взаимно перпендикулярны, поэтому по теореме Пифагора $(mx)^2 + (nx)^2 = a^2$ или $a^2 = (m^2 + n^2) \cdot x^2$ (1); площадь ромба равна половине произведения его диагоналей, поэтому $S = ½ \cdot 2mx \cdot 2nx$ или $S = 2mn \cdot x^2$ (2).

Разделив (1) на (2), получим: $\dfrac{a^2}{S} = \dfrac{m^2 + n^2}{2mn}$, $a^2 = \dfrac{S \cdot (m^2 + n^2)}{2mn}$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{S \cdot (m^2 + n^2)}{2mn}}$.

22.4. Диагонали трапеции $ABCD$ взаимно перпендикулярны. $AC = 12$ см. Найти площадь трапеции, зная, что длина ее средней линии равна 10 см.

Решение



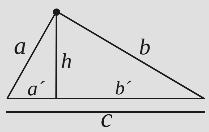
Проведем $DM \parallel AC$. Тогда в образовавшемся параллелограмме $ACMD$: $CM = AD$, $DM = 12$ см.
$BM = BC + CM = BC + AD = 2\dfrac{BC + AD}{2} = 20$ см (средняя линия трапеции равна 10 см по условию).

Вторую диагональ трапеции найдем из прямоугольного треугольника BDM ($\angle BDM = 90°$, т.к. $DM \parallel AC$).

$BD = 16$ см (пифагорова тройка 12, 16, 20).

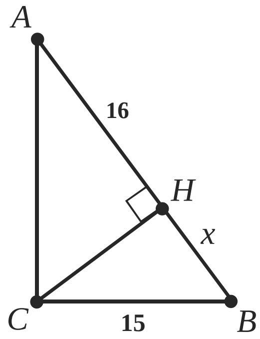
Воспользовавшись следствием из задачи-теоремы, вычислим площадь трапеции: $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 6 \cdot 16 = 96$ (см^2).

Ответ. 96 см^2.

	23	***Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобных исходному.*** ***Если в этих треугольниках взять соответствующие линейные элемен-ты x, y, z, то $x^2 + y^2 = z^2$.*** ***Пусть a и b – катеты, h – высота, проведенная к гипотенузе с прямоугольного треугольника, a' и b' – проекции катетов на гипотенузу.*** ***Тогда $a^2 = a' \cdot c$; $b^2 = b' \cdot c$; $h^2 = a' \cdot b'$.*** ***Следствие: $h = \dfrac{ab}{c}$.***

23.1. (№10.066). Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.

Решение



В $\triangle ABC$: $\angle C = 90°$, BC и AC – катеты, $BC = 15$ см, $CH \perp AB$, $AH = 16$ см.

Пусть $BH = x$ см, $AB = (x + 16)$ см.

Так как $BC^2 = BH \cdot AB$, то $15^2 = x(x + 16)$ или $x^2 + 16x - 225 = 0$, $x = 9$ см ($x > 0$). Значит, $AB = 9 + 16 = 25$ (см), $AC = 20$ см.

Зная стороны, вычислим искомый радиус: $\frac{1}{2} \cdot (15 + 20 - 25) = 5$ (см).

Ответ: 5 см.

23.2. (№10.403). В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена высота CD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 0,6 см и 0,8 см. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

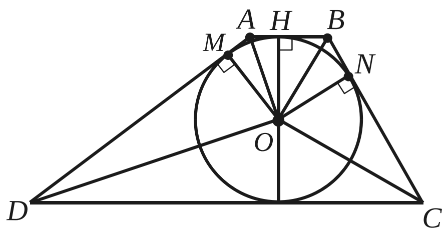
Решение

Высота CD проведена из вершины прямого угла. Согласно утверждению задачи-теоремы образовавшиеся треугольники подобны друг другу и подобны данному треугольнику. Радиусы вписанных в эти треугольники окружностей (соответствующие линейные элементы) связаны соотношением: $r_1^2 + r_2^2 = r^2$, где r – искомый радиус, а r_1 и r_2 – радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD. Имеем: $r^2 = 0{,}6^2 + 0{,}8^2 = 1$ (см).

Ответ: 1 см.

23.3. Центр O вписанной в трапецию $ABCD$ окружности удален от концов ее меньшего основания AB, равного 70, на 65 и 75. Вычислить площадь трапеции.

Решение



В $\triangle OAB$ известны все стороны. Вычислим его высоту OH, равную $2S/AB$, уменьшив заданные длины в 5 раз, считая стороны равными 13,14 и 15.

Тогда $\dfrac{OH}{5} = \dfrac{2\sqrt{21 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8}}{14} =$

$=\sqrt{3\cdot3\cdot2\cdot8}=12$. Итак, $OH = OM = ON = 60$ – радиусы вписанной окружности ($OM \perp AD$, $ON \perp BC$).

Площадь трапеции вычислим как произведение суммы оснований на половину высоты, т.е. по формуле: $OH\ (AB + CD)$.

Из $\triangle\ OAH$: $AH/5 = 5$ (пифагорова тройка 5, 12, 13).

Из $\triangle\ OBH$: $BH/5 = 9$ (пифагорова тройка 9, 12, 15).

Значит, $AM = AH = 25$, $BN = BH = 45$ (равные отрезки касательных, проведенные к окружности из точек A и B).

В прямоугольных треугольниках AOD и BOC вычислим проекции катетов OD и OC на их гипотенузы:

$\frac{MD}{5}=\frac{12^2}{5}$, $\frac{NC}{5}=\frac{12^2}{9}=16$, т.е. $MD = 144$, $NC = 80$.

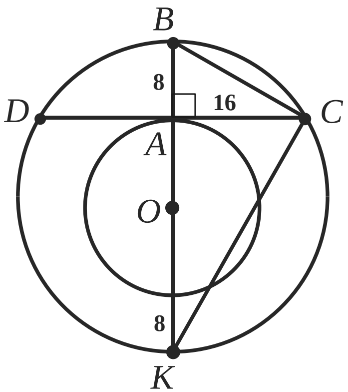
$DC = MD + NC = 144 + 80 = 224$.

Таким образом, $OH\cdot(AB + DC) = 60\cdot(70 + 224) = 17640$.

Ответ: 17640.

23.4. (№10.062). В большем из двух концентрических кругов проведена хорда, равная 32 см и касающаяся меньшего круга. Определить длину радиуса каждого из кругов, если ширина образовавшегося кольца равна 8 см.

<u>*Решение*</u>



Пусть O – общий центр кругов, OA и OB – их радиусы, $AB = 8$ см; CD – хорда, касающаяся меньшего круга в точке A, $CD = 32$ см по условию задачи.

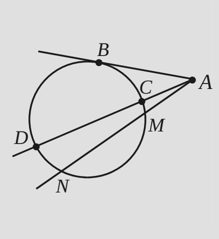
Проведем диаметр BK перпендикулярно хорде CD и соединим его концы с точкой C.

Тогда $AC = 16$ см, $\angle\ BCK = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр (задачи-теоремы 1 и 4).

Имеем: $AC^2 = AB\cdot AK$ или $16\cdot16 = 8\cdot(2\cdot OA + 8)$, $2\cdot16 = 2\ OA + 8$, $OA = 16 - 4 = 12$ см.

$OB = 12 + 8 = 20$ (см).

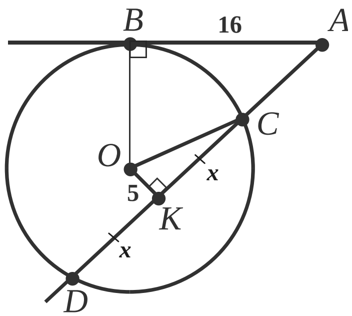
Ответ: 12 см и 20 см.



	24	***Из точки A, взятой вне окружности, проведены к ней касательная AB и две секущие, пересекающие окружность в точках C и D, M и N соответственно.*** ***Тогда*** $AB^2 = AC\cdot AD$. ***Следствие:*** $AC\cdot AD = AM\cdot AN$.

24.1. (№10.012). Из точки A, не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16 см, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью 32 см. Найти радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5 см.

<u>*Решение*</u>



Пусть O – центр, AB –касательная, AD – секущая. $AB = 16$ см, $AD = 32$ см.

Проведем $OK \perp CD$ и радиус OC. $OK = 5$ см. Обозначим KC через x, тогда $CD = 2x$ см (задача-теорема 1).

По задаче-теореме: $AB^2 = AC\cdot AD$ или $16^2 = 32\ (32 - 2x)$, $8 = 32 - 2x$, $4 = 16 - x$, $x = 12$ см.

Из прямоугольного треугольника OCK $OC = 13$ см (пифагорова тройка 5, 12, 13). *Ответ*: 13 см.

24.2. (№10.228). Один конец диаметра полуокружности совпадает с вершиной угла при основании равнобедренного треугольника, а другой принадлежит этому основанию. Найти радиус полуокружности, если она касается одной боковой стороны и делит другую на отрезки длиной 5 и 4 см, считая от основания.

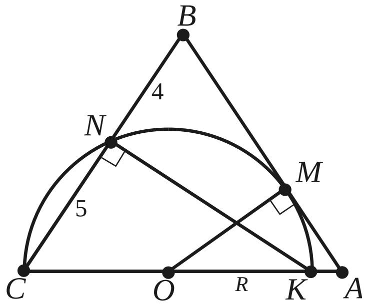
<u>*Решение*</u>

На рисунке O – центр, OM – радиус, CK – диаметр полуокружности, $K \in AC$, $M \in AB$. $N = $ Окр$(O, OM) \cap BC$.

В $\triangle ABC$: $AB = AC = 4 + 5 = 9$ (см).

По задаче-теореме $BM^2 = BN\cdot BC$ или $BM^2 = 4\cdot9 = 36$ (см).

Отсюда $BM = 6$ см, $AM = 3$ см. Пусть $OK = OM = OC = R$.

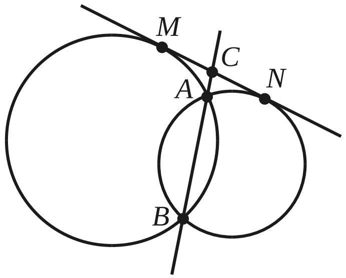


Воспользуемся подобием треугольников AOM и CKN ($\angle A = \angle C$):
$\frac{AM}{OA}=\frac{CN}{CK}$, $\frac{3}{OA}=\frac{5}{2R}$, $OA=\frac{6}{5}R$.

Из $\triangle AOM$ по теореме Пифагора:
$\frac{36R^2}{25}-R^2=3^2$, $\frac{11R^2}{5^2}=3^2, \sqrt{11}\cdot R = 15$, $R=\frac{15}{\sqrt{11}}$ см. *Ответ*: $\frac{15}{\sqrt{11}}$ см.

24.3. (№1427). Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

Доказательство

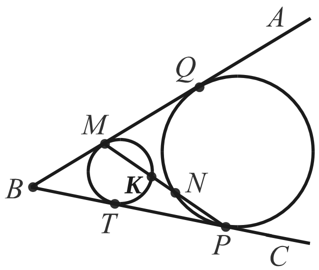


Пусть C – точка пересечения прямых AB и MN (AB – общая секущая окружностей, MN – касательная).

Для отрезков касательной CM и CN верны равенства:
$CN^2 = CA \cdot CB$, $CM^2 = CA \cdot CB$. Отсюда $CN^2 = CM^2$ или $CM = CN$, что и требовалось доказать.

24.4. В угол ABC вписаны две непересекающиеся окружности. M – точка касания меньшей окружности со стороной AB, P – большей со стороной BC. Доказать, что окружности высекают равные хорды, принадлежащие прямой MP.

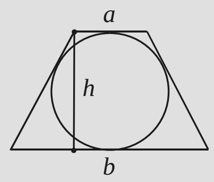
Доказательство



Требуется доказать, что $MK = NP$.

Пусть T и Q – точки касания на сторонах угла BC и AB. Тогда $MQ = TP$ и по задаче-теореме $MQ^2 = MN \cdot MP = TP^2 = PK \cdot MP$. Отсюда $MN = PK$.

Имеем: $MK + KN = NP + KN$, т.е. $MK = NP$, ч. т. д.



25 ***Если в равнобочную трапецию можно вписать окружность, то ее высота есть среднее пропорциональное оснований: $h=\sqrt{a\cdot b}$ или $h^2 = ab$.***

25.1. (№1925). В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса R. Верхнее основание трапеции в два раза меньше ее высоты. Найдите площадь трапеции.

Решение

Высота описанной трапеции равна $2R$. Из условия следует, что верхнее основание равно R.

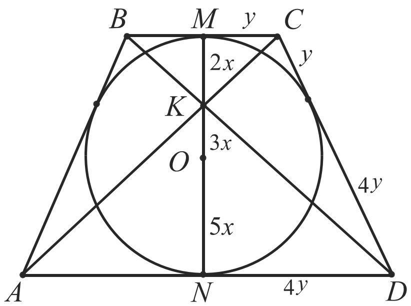
По задаче-теореме имеем: $4R^2 = Rx$, где x – нижнее основание трапеции. Отсюда $x = 4R$ ($R > 0$).

Площадь трапеции найдем как произведение суммы оснований на половину высоты, т.е. $(R + 4R) \cdot R = 5R^2$.

Ответ: $5R^2$.

25.2. (№2277). В равнобедренную трапецию вписана окружность. Расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции относится к радиусу, как 3 : 5. Найдите отношение периметра трапеции к длине вписанной окружности.

Решение



Пусть $AB = CD$, $K = AC \cap BD$, O – центр вписанной окружности, M и N – середины оснований, $OK : ON = 3 : 5$. Тогда $MK = 5x - 3x = 2x$, $NK = 8x$ ($x > 0$).

$\triangle KMC \sim \triangle KNA$, поэтому $MC : AN = MK : NK = 1 : 4$.

Если $MC = y$, $AN = ND = 4y$, то $CD = 5y$, а периметр описанной равнобедренной трапеции равен $4CD$ или $20y$ ($y > 0$).

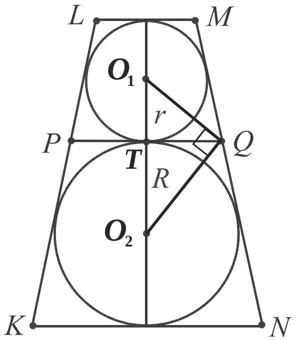
По задаче-теореме $MN^2 = AD \cdot BC$, т.е. $(10x)^2 = 2y \cdot 8y = (4y)^2$.

Отсюда $10x = 4y$ и искомое отношение равно $\frac{20y}{\pi\cdot 4y} = \frac{5}{\pi}$.

Ответ: 5 : π.

25.3. На боковых сторонах KL и MN равнобочной трапеции $KLMN$ выбраны соответственно точки P и Q так, что отрезок PQ параллелен основаниям трапеции. Известно, что в каждую из трапеций $KPQN$ и $PLMQ$ можно вписать окружность, и радиусы этих окружностей равны R и r соответственно. Определить основания LM и KN.

<u>*Решение*</u>



Соединим центры окружностей, точки O_1 и O_2 с точкой Q. QO_1, QO_2 – биссектрисы смежных углов MQP, NQP, поэтому $\angle O_1QO_2 = 90^o$ и $QT^2 = O_1T \cdot O_2T$ ($T = O_1O_2 \cap PQ$), $QT = \sqrt{rR}$, $PQ = 2\sqrt{rR}$.

Итак, общее основание PQ равнобедренных трапеций $KPQN$ и $PLMQ$ равно $2\sqrt{rR}$, а диаметры вписанных в них окружностей, высоты указанных трапеций, равны $2r$ и $2R$.

По задаче-теореме: $LM = \dfrac{4r^2}{2\sqrt{rR}} = 2r\sqrt{\dfrac{r}{R}}$, $KN = \dfrac{4R^2}{2\sqrt{rR}} = 2R\sqrt{\dfrac{R}{r}}$.

Ответ: $2r\sqrt{\dfrac{r}{R}}$, $2R\sqrt{\dfrac{R}{r}}$.

(См. задачу 43).

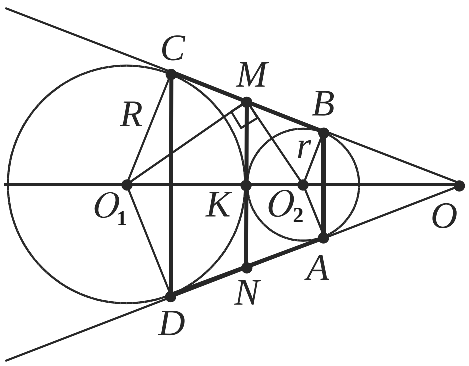
25.4. (№10.378). Две окружности касаются друг друга внешним образом. Четыре точки касания их общих внешних касательных A, B, C, D последовательно соединены. Показать, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, и найти ее радиус, если радиусы данных окружностей равны R и r [28, с.201].

<u>*Решение*</u>

Пусть O_1, O_2 – центры окружностей. Соединим их с точками C и D, B и A соответственно. $ABCD$ – равнобедренная трапеция, так как треугольники CO_1D и AO_2B гомотетичны с коэффициентом R/r ($BC \cap AD = O$ – центр гомотетии).

Через точку касания данных окружностей K проведем $MN \parallel AB$ ($M \in BC$, $N \in AD$).

$MC = MK$, $MB = MK$ (отрезки касательных), поэтому $MC = MB$.



Отсюда следует, что MN – средняя линия трапеции $ABCD$, $MN = ½ (AB + CD)$.

Но $MN = ½ (AD + BC)$, т.е. $AB + CD = AD + BC$ и трапеция $ABCD$ – описана.

Из прямоугольного треугольника O_1MO_2 (MO_1 и MO_2 – биссектрисы смежных углов) $MK^2 = O_1K \cdot KO_2$, $MK^2 = Rr$, $MK = \sqrt{Rr}$.

Значит, $MN = 2MK = 2\sqrt{R \cdot r}$.

Имеем: $2MN = AB + CD = AB + \dfrac{R}{r} \cdot AB$ или $4\sqrt{R \cdot r} = AB\,(1 + \dfrac{R}{r})$,

$AB = \dfrac{4r\sqrt{Rr}}{R+r}$.

Искомый радиус найдем как половину высоты описанной трапеции $ABCD$, которая по задаче-теореме является средним пропорциональным ее оснований.

$h^2 = AB \cdot CD = AB \cdot \dfrac{R}{r} \cdot AB = \dfrac{R}{r} \cdot AB^2$ (h – высота);

$h = \dfrac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}} AB = \dfrac{\sqrt{R} \cdot 4r\sqrt{R} \cdot \sqrt{r}}{\sqrt{r} \cdot (R+r)} = \dfrac{4Rr}{R+r}$; $\dfrac{h}{2} = \dfrac{2Rr}{R+r}$.

Ответ: $\dfrac{2Rr}{R+r}$.

Г л а в а 5

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

5.1. Введение вспомогательных отрезков и углов

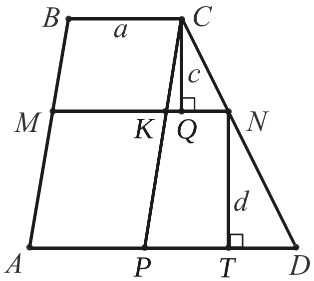
Знакомство с методами решения задач начнем с наиболее употребительных – введения вспомогательных отрезков и углов.

Вспомогательные величины – это величины, которые при решении задачи вводят помимо величин, заданных в условии. Вообще, вспомогательной величиной может быть длина отрезка, величина угла, периметр, площадь, объем, а также геометрическая фигура – точка, отрезок, угол, треугольник, окружность и т. п.

Если в процессе решения неясно, как выразить искомые величины через данные, то используют вспомогательные величины, чтобы составить несколько независимых уравнений, связывающих искомые и данные величины. Число уравнений должно быть достаточным для того, чтобы после исключения из них вспомогательных неизвестных можно было найти искомые.

26. (№2301). Прямая, параллельная основаниям трапеции, делит ее на две трапеции, площади которых относятся как 1 : 2. Найдите отрезок этой прямой, заключенный внутри трапеции, если основания равны a и b.

Решение



Пусть в трапеции $ABCD$ $BC = a$, $AD = b$, $MN = x$ – искомый отрезок.

Ясно, что для использования в решении основного условия нужно в качестве вспомогательных отрезков ввести высоты трапеций-частей – CQ и NT. Обозначим их соответственно через c и d. В принятых обозначениях условие примет вид: $(b + x)\,d = 2(a + x)\,c$ (1).

Чтобы получить еще одно уравнение, связывающее переменные, проведем $CP \parallel AB$ ($CP \cap AD = K$) и воспользуемся подобием треугольников CKN и CPD:

$$\frac{b-a}{x-a}=\frac{c+d}{c},\quad \frac{b-a}{x-a}-1=\frac{d}{c},\quad \frac{b-x}{x-a}=\frac{d}{c}\quad (2).$$

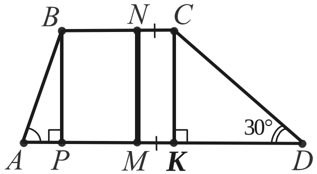
Из (1) в виде $\dfrac{2(a+x)}{b+x}=\dfrac{d}{c}$ и (2) следует: $\dfrac{2(a+x)}{b+x}=\dfrac{b-x}{x-a}$.

Имеем: $2(x^2 - a^2) = b^2 - x^2$, $3x^2 = b^2 + 2a^2$, $x=\sqrt{\dfrac{2a^2+b^2}{3}}$ $(x > 0)$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{2a^2+b^2}{3}}$, если $a < b$; $\sqrt{\dfrac{a^2+2b^2}{3}}$, если $a > b$.

27. (№2166). В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании AD соответственно равны 60° и 30°. Точка N лежит на основании BC, причем $BN : NC = 2$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN перпендикулярна основаниям трапеции и делит ее площадь пополам. Найдите отношение $AM : MD$.

Решение



Вспомогательные отрезки обычно обозначают переменными для использования их величин в уравнениях. Но эти величины могут быть промежуточными, например, если применяется свойство транзитивности. Используем в нашем решении отрезок MN дважды указанным образом.

Во-первых, AP меньше BP в $\sqrt{3}$ раз, а DK больше CK в $\sqrt{3}$ раз. Так как $BP = MN$ и $CK = MN$, то отсюда следует, что $DK = 3AP$ (1).

Во-вторых, трапеции $ABNM$ и $MNCD$ – равновеликие и имеют одну и ту же высоту MN, поэтому из формул для их площадей следует, что $AM + BN = MD + NC$.

Учитывая, что $BN = 2NC$ по условию и $NC = MK$, получаем: $AM = MD - NC$, $AM = DK$ (2).

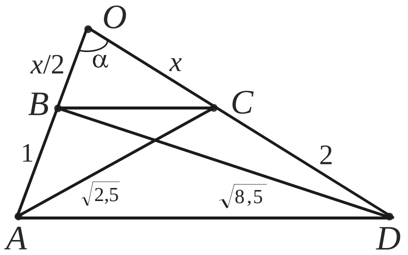
Из (1) и (2): $AM = 3AP$. Отсюда $PM = 2AP$, $MK = ½\,PM = AP$.

Имеем: $\dfrac{AM}{MD}=\dfrac{AP+PM}{MK+KD}=\dfrac{AP+2AP}{AP+3AP}=\dfrac{3}{4}$. *Ответ*: 3 : 4.

(Решите эту задачу, применяя замечательное свойство трапеции).

28. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны соответственно 1 и 2, а диагонали BD и AC – $\dfrac{\sqrt{34}}{2}$ и $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. Вычислить площадь трапеции (см. задачу 85).

Решение



Пусть $O = AB \cap CD$.

$DC : AB = CO : BO = 2 : 1$, поэтому обозначим CO через x, а BO через $x/2$. Общий угол O треугольников AOC и DOB используем как вспомогательный.

Если $\angle AOD = \alpha$, то по теореме косинусов из указанных треугольников имеем:

$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 + x^2 - 2{,}5}{2\left(\frac{x}{2}+1\right)\cdot x} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (x+2)^2 - 8{,}5}{2\cdot\frac{x}{2}(x+2)}.$$

Отсюда $x + 1 - 2{,}5 = 4x + 4 - 8{,}5$; $x = 1$. $CO = 1$, $BO = 0{,}5$. Подставив значение x в формулу для $\cos\alpha$, найдем, что $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$.

$$S_{BOC} = ½\, BO\cdot CO\cdot\sin\alpha = ½\cdot½\cdot1\cdot\sqrt{1-\tfrac{1}{16}} = \tfrac{\sqrt{15}}{16}.$$

Треугольники AOD и BOC подобны с коэффициентом подобия, равным 3, поэтому $S_{AOD} = 9\,S_{BOC}$, $S_{ABCD} = 9\,S_{BOC} - S_{BOC} = 8\,S_{BOC}$.

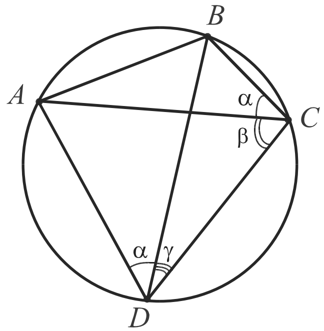
Имеем: $S_{ABCD} = 8\cdot\tfrac{\sqrt{15}}{16} = \tfrac{\sqrt{15}}{2}$. *Ответ*: $\tfrac{\sqrt{15}}{2}$.

29. (№1413. *Теорема Птолемея*). Докажите, что если четырехугольник вписан в окружность, то сумма произведений длин двух пар его противоположных сторон равна произведению длин его диагоналей.

Доказательство

Требуется доказать, что во вписанном четырехугольнике $ABCD$ $AC\cdot BD = AB\cdot CD + AD\cdot BC$.

Будем рассматривать радиус описанной окружности R как вспомогательный отрезок ($R \neq 0$).



Введем также вспомогательные углы: $\angle ACB = \alpha$, $\angle ACD = \beta$, $\angle BDC = \gamma$.

Применяя следствие из теоремы синусов, задачу-теорему 15, в соответствующих треугольниках, выразим через вспомогательные величины диагонали и все стороны четырехугольника:

$AC = 2R\sin(\alpha+\gamma)$, $BD = 2R\sin(\alpha+\beta)$, $AD = 2R\sin\beta$, $AB = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\gamma$, $CD = 2R\sin(\pi - (\alpha+\beta+\gamma))$.

Подставим выражения в доказываемое равенство:

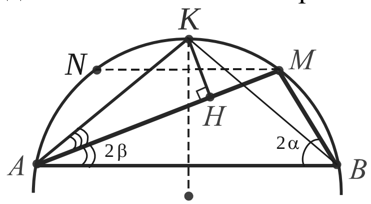
$$4R^2\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\beta) = 4R^2(\sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin\beta\sin\gamma).$$

Нетрудно убедиться, что получено тождество.

30. (№ 798. *Задача Архимеда*). В дугу AB окружности вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM > MB$). Докажите, что основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам, т.е. $AH = HM + MB$.

Доказательство

Введем два вспомогательных угла – $\angle ABM = 2\alpha$, $\angle BAM = 2\beta$ и вспомогательный отрезок – радиус R окружности, содержащей данную дугу AB. Из треугольника ABM по задаче-теореме 15: $AM = 2R\sin 2\alpha$, $BM = 2R\sin 2\beta$, $AM + BM = 2R(\sin 2\alpha + \sin 2\beta)$, т.е. длина всей ломаной выражена через вспомогательные величины.



Так как K – середина дуги AB, то $\angle ABK = \alpha + \beta$ и из треугольника ABK: $AK = 2R\sin(\alpha+\beta)$.

Докажем, что $\angle KAM = \alpha - \beta$.

Пусть дуги AN и BM равны. Тогда длина дуги MN равна $4\alpha - 4\beta$, а дуги KM – $2\alpha - 2\beta$. Это и значит, что вписанный угол KAM равен $\alpha - \beta$.

Из прямоугольного треугольника KAH: $AH = AK\cos(\alpha-\beta)$.

Имеем: $AH = 2R\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = R(\sin 2\alpha + \sin 2\beta)$.

Таким образом, $AH = ½\,(AM + BM)$, что равносильно доказываемому равенству (см. задачу 100).

(См. задачи 1.4, 5.4, 7.3, 12.4, 33, 35.2, 44, 85, 93, 102).

5.2. Введение вспомогательной площади

Одно из основных свойств площади гласит: если фигура разбивается на части, являющиеся простыми фигурами (простая фигура состоит из конечного числа плоских треугольников), то площадь этой фигуры равна сумме площадей ее частей. Кроме того, площадь треугольника выражается через разнообразные комбинации его элементов (другие геометрические фигуры имеют, как правило, также несколько формул для вычисления площади).

На применении этих свойств основан метод площадей: *для площади фигуры находим различные выражения*; *сравнивая их, получаем уравнение*, *содержащее известные и искомые величины*. Например, для прямоугольного треугольника: $S = ½\, ab$ и $S = ½\, ch_c$. Отсюда $h_c = ab/c$ (h_c – высота, проведенная к гипотенузе c).

Разновидность метода: *отношение отрезков* a_1 и b_1 прямой m *равно отношению площадей треугольников*, основания которых a_1 и b_1, а противолежащие им вершины совпадают или лежат на прямой, параллельной прямой m.

Заменяя отношение отрезков отношением площадей, докажем, например, задачу-теорему 9 в ее обозначениях:

$\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{0{,}5al\sin\gamma/2}{0{,}5bl\sin\gamma/2} = \dfrac{a}{b}$ (γ – вспомогательный угол).

31. Доказать, что в равностороннем треугольнике сумма расстояний от любой его точки до сторон – постоянная величина.

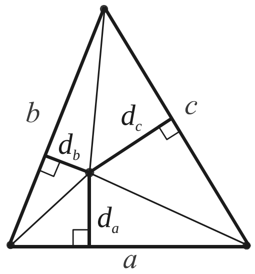
<u>*Доказательство*</u>

Пусть a – сторона, d_1, d_2, d_3 – расстояния до сторон треугольника. $S = ½\, a\,(a\sqrt{3}/2)$, $S = ½\, ad_1 + ½\, ad_2 + ½\, ad_3 = ½\, a\,(d_1 + d_2 + d_3)$.

Имеем: $d_1 + d_2 + d_3 = a\sqrt{3}/2$ – постоянная величина для фиксированного треугольника (длина его высоты), ч.т.д.

32. Доказать, что в треугольнике $\dfrac{d_a}{h_a} + \dfrac{d_b}{h_b} + \dfrac{d_c}{h_c} = 1$, где h_a, h_b, h_c – высоты, d_a, d_b, d_c – расстояния от любой его точки до сторон соответственно равных a, b, c.

<u>*Доказательство*</u>

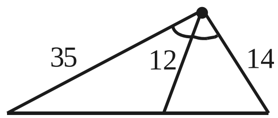


Действительно, $1 = \dfrac{d_a\cdot a + d_b\cdot b + d_c\cdot c}{2S} = \dfrac{d_a\cdot a}{h_a\cdot a} + \dfrac{d_b\cdot b}{h_b\cdot b} + \dfrac{d_c\cdot c}{h_c\cdot c} = \dfrac{d_a}{h_a} + \dfrac{d_b}{h_b} + \dfrac{d_c}{h_c}$, ч.т.д.

Если данная точка – инцентр, r – радиус, то $\dfrac{r}{h_a} + \dfrac{r}{h_b} + \dfrac{r}{h_c} = 1$, $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$.

33. (№10.343).Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14 см, а биссектриса угла между ними – 12 см.

<u>*Решение*</u>



Пусть 2α – угол между заданными сторонами. Тогда $S = ½ \cdot 35 \cdot 14 \sin 2\alpha$ и $S = ½\,(35 \cdot 12 \sin\alpha + 14 \cdot 12 \sin\alpha)$. Отсюда $35\cdot 14\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = 49\cdot 12\sin\alpha$.

Так как $\sin\alpha \neq 0$, то $5\cdot 2\cos\alpha = 6$, т.е. $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$. Значит, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$.

Имеем: $S = ½\cdot 35\cdot 14\cdot 2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{5} = \dfrac{7\cdot 14\cdot 12}{5} = \dfrac{49\cdot 48}{10} = \dfrac{(50-1)\cdot 48}{10} = \dfrac{2400-48}{10} = \dfrac{2352}{10} = 235{,}2$ (см^2). *Ответ*: 235,2 см^2.

34. (№2127). Докажите, что если a и b – стороны треугольника, γ – угол между ними, l – биссектриса этого угла, то $l = \dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$.

<u>*Доказательство*</u>

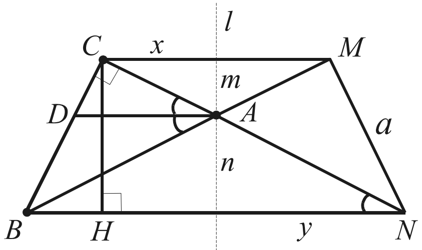
Имеем: $S = ½\, ab\sin\gamma$, $S = ½\, al\sin\dfrac{\gamma}{2} + ½\, bl\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

$ab\cdot 2\sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2} = l\sin\dfrac{\gamma}{2}(a+b)$, $l = \dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$, т.к. $\sin\dfrac{\gamma}{2} \neq 0$.

Метод площадей применим и при решении задач стереометрии.

35.1. (№12.315). Катет прямоугольного треугольника равен a, противолежащий ему угол равен α. Этот треугольник вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости треугольника, проходящей через вершину данного угла и перпендикулярной его биссектрисе. Найти объем тела вращения.

Решение



Пусть на рисунке изображено осевое сечение тела вращения вокруг прямой l, представляющее собой усеченный конус $BCMN$, из которого удалены конусы ACM и ABN.

$\angle C = 90^\circ$, AD – биссектриса угла A ($A \in l$, $AD \perp l$); $\angle CAD = \angle BAD = \alpha/2$, $BC = a$. Введем обозначения x, y, m, n соответственно для радиусов оснований и высот конусов ACM и ABN, V – для объема тела вращения и воспользуемся формулами для вычисления объема усеченного конуса и объема конуса.

Получим: $V = \dfrac{\pi}{3}\left((m+n)(x^2+xy+y^2) - x^2m - y^2n\right) =$

$= \dfrac{\pi}{3}(mxy + my^2 + nxy + nx^2) = \dfrac{\pi}{3}(x+y)(my+nx)$ (1).

Найдем множители $(x + y)$ и $(my + nx)$, не вычисляя отдельно каждую из величин x, y, m, n.

$x + y = NH = NC\cos{}^{\alpha}\!/_{2} = a\,\mathrm{ctg}\,{}^{\alpha}\!/_{2}\cos{}^{\alpha}\!/_{2}$ ($\angle CAD = \angle CNH = \alpha/2$).

По свойству площадей: $S_{BCMN} = S_{ABN} + S_{ACM} + 2S_{ABC}$. Отсюда $(x + y)(m + n) = mx + ny + 2 \cdot ½ \cdot a \cdot a \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha$ или $my + nx = a^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. Найденные выражения подставим в равенство (1).

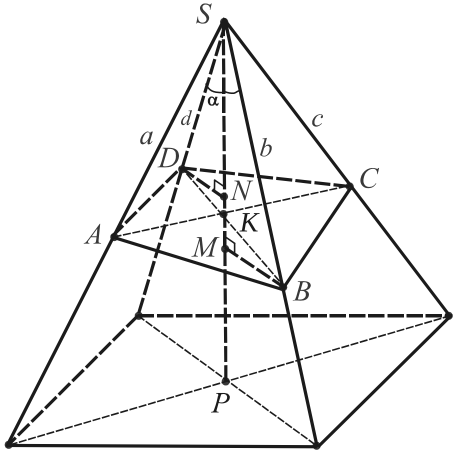
Ответ: $\dfrac{\pi}{3}a^3\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,{}^{\alpha}\!/_{2}\cos{}^{\alpha}\!/_{2}$.

Найдите рациональные решения задачи, дополнив данный усеченный конус до полного и вычисляя разность объемов двух полных конусов.

35.2. Плоскость пересекает боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды в точках, отстоящих от вершины на расстояния a, b, c, d. Доказать, что $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{d}$.

Доказательство

Единственная плоскость проходит через три точки, не лежащие на одной прямой. Зафиксировав, например, точки A, B, C, найдем точку D как пересечение плоскости ABC с боковым ребром пирамиды. Доказываемая формула выражает существующую зависимость между величинами a, b, c, d.



Пусть SP – высота данной пирамиды, $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, $SD = d$, $\alpha = \angle DSK = \angle BSK = \angle ASK = \angle CSK$, $K = AC \cap BD = (ABC) \cap SP$, $l = SK$ (вспомогательные угол и отрезок – биссектриса SK).

Тогда $S_{ASC} = ½\, ac \sin 2\alpha = ½\, al \sin\alpha + ½\, cl \sin\alpha$, т.е. $2ac\cos\alpha = l\,(a + c)$ (1).

$S_{BSD} = ½\, bd \sin 2\alpha = ½\, bl \sin\alpha + ½\, dl \sin\alpha$, т.е. $2bd\cos\alpha = l\,(b + d)$ (2).

Из (1) и (2) имеем:

$\dfrac{2\cos\alpha}{l} = \dfrac{a+c}{ac}$, $\dfrac{2\cos\alpha}{l} = \dfrac{b+d}{bd}$, т.е. $\dfrac{a+c}{ac} = \dfrac{b+d}{bd}$, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{d}$.

(Вспомогательные объем и угол).

Воспользуемся объемом V пирамиды $SABCD$ как вспомогательной величиной, вычисляя его как сумму объемов пирамид $BASC$, $DASC$ и как сумму объемов пирамид $ABSD$, $CBSD$.

$V = ⅓\, S_{ASC} \cdot BM + ⅓\, S_{ASC} \cdot DN$, где $BM \perp (ASC)$ и $DN \perp (ASC)$.

$V = ⅓\, S_{ASC}\,(BM + DN) = ⅓ \cdot ½\, ac \sin 2\alpha\,(b\sin\alpha + d\sin\alpha)$ (1).

$V = ⅓\, S_{BSD} \cdot H_1 + ⅓\, S_{BSD} \cdot H_2$, H_1, H_2 – высоты пирамид $ABSD$, $CBSD$.

$V = ⅓\, S_{ASC}\,(H_1 + H_2) = ⅓ \cdot ½\, bd \sin 2\alpha\,(a\sin\alpha + c\sin\alpha)$ (2).

Имеем: $ac \sin 2\alpha \sin\alpha\,(b + d) = bd \sin 2\alpha \sin\alpha\,(a + c)$.

Т.к. $\sin\alpha \neq 0$, то $ac\,(b + d) = bd\,(a + c)$, $\dfrac{a+c}{ac} = \dfrac{b+d}{bd}$, ч.т.д.

(См. задачи 71, 72, 99).

5.3. Введение вспомогательной окружности

Этот метод является одним из самых изящных и эффективных при решении сложных геометрических задач. Идея его проста: ввести в рассмотрение окружность, если это возможно в данной конфигурации, *чтобы применить разнообразные свойства отрезков и углов, связанных с ней* (задачи-теоремы 1-5, 12-17, 24-25 и т.п.). Для этого нередко требуются дополнительные построения.

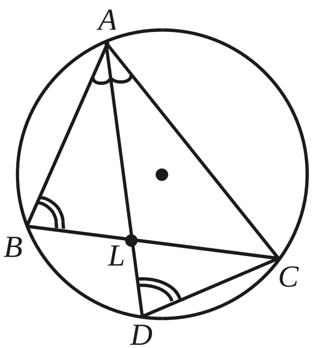
Являясь по определению г.м.т. (см. 2.3), окружность часто служит им в различных динамических конфигурациях (см. гл. 9). Окружностью нулевого радиуса можно считать точку, окружностью бесконечного радиуса и бесконечно удаленным центром – прямую. Окружность – это предельная фигура, к которой стремится последовательность периметров правильных вписанных и описанных n–угольников при $n \to \infty$. С ней связаны различные экстремальные свойства геометрических фигур.

Окружность имеет бесконечно много осей симметрии и центр симметрии. Две любые окружности гомотетичны, поэтому фигура используется в геометрических преобразованиях (см. 5.4).

"Именованные" окружности (Аполлония (см. 111, 142), 9 точек или Эйлера (см. 138)) обладают замечательными свойствами, которые находят применение при решении других задач.

36. (№ 1514). AL – биссектриса угла A треугольника ABC. Доказать, что $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot LC$.

<u>*Доказательство*</u>



Рассмотрим описанную окружность треугольника ABC как вспомогательную.

Продлим биссектрису AL до пересечения с окружностью в точке D и проведем хорду CD. Вписанные углы B и D равны (опираются на одну и ту же дугу), а углы BAD и CAD равны по условию. Значит, $\triangle BAL \sim \triangle DAC$ и $\dfrac{AB}{AL} = \dfrac{AD}{AC}$.

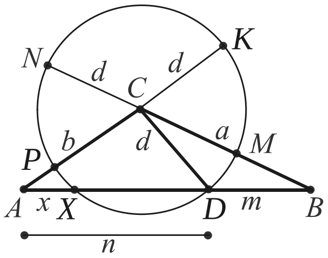
Отсюда $AB \cdot AC = AL \cdot (AL + LD)$ или $AL^2 = AB \cdot AC - AL \cdot LD$.

Но по свойству пересекающихся хорд $AL \cdot LD = BL \cdot LC$.

Окончательно имеем: $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot LC$, ч.т.д.

37. (№ 1774. *Теорема Стюарта*). Точка D расположена на стороне AB треугольника ABC (т.е. CD – чевиана). Докажите, что $AC^2 \cdot DB + BC^2 \cdot AD - CD^2 \cdot AB = AB \cdot AD \cdot BD$ (см. задачу 88).

<u>*Доказательство*</u>



Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AD = n$, $BD = m$, $CD = d$. Используем окружность с центром в точке C и радиусом d как вспомогательную.

Предположим, что эта окружность пересекает сторону AB в точке X (если она пересекает продолжение AB, доказательство аналогично), а прямые, содержащие стороны a и b, – соответственно в точках M, N и P, K.

Воспользуемся свойством секущих, проведенных к окружности из одной точки: $BM \cdot BN = BD \cdot BX$ и $AP \cdot AK = AX \cdot AD$.

Запишем равенства в принятых обозначениях:

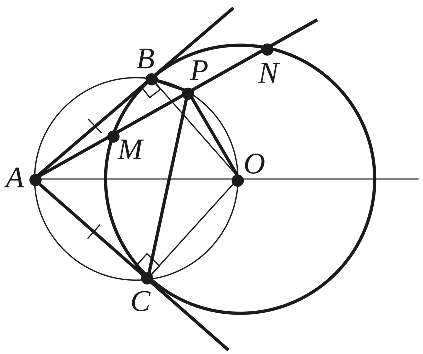
$(a - d)(a + d) = m(m + n - x)$ и $(b - d)(b + d) = xn$.

Умножим их на n и m соответственно

$a^2n - d^2n = m^2n + mn^2 - mnx$, $b^2m - d^2m = mnx$ и, почленно сложив новые равенства, получим: $a^2n - d^2n + b^2m - d^2m = m^2n + mn^2$ или $a^2n + b^2m - d^2(m + n) = mn(m + n)$, т.е. $a^2n + b^2m - d^2c = mnc$, ч.т.д.

38. (№ 788). Из точки A, расположенной вне окружности, проведены касательные AB, AC и секущая MN. Пусть B и C – точки касания, а P – середина хорды MN. Доказать, что $\angle BPA = \angle CPA$.

<u>*Доказательство*</u>



Пусть O – центр окружности. Тогда $OB \perp AB$ и $OC \perp AC$.

Значит, в четырехугольнике $ABOC$ $\angle B + \angle C = 180°$ и существует описанная около него окружность с диаметром AO, *которую* используем в решении как вспомогательную фигуру.

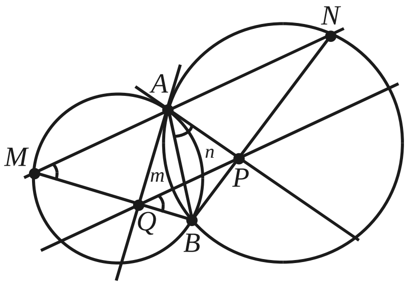
Прежде всего примем во внимание, что общая вершина углов

BPA и *CPA* лежит на этой окружности потому, что $OP \perp MN$ (по условию *P* – середина хорды *MN*) и вершина прямого угла *OPA*, опирающегося на диаметр *OA*, принадлежит окружности.

Далее отметим равенство отрезков касательных *AB* и *AC*, которое влечет равенство соответственных хорд и дуг. Следовательно, вписанные углы *BPA* и *CPA* с вершинами на одной окружности и опирающиеся на равные дуги, равны, ч.т.д.

39. Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Секущая, проходящая через точку *A*, пересекает окружности вторично в точках *M* и *N* соответственно. Касательные к окружностям в точке *A* пересекаются с прямыми *MB* и *NB* соответственно в точках *Q* и *P*. Доказать, что $QP \parallel MN$.

Доказательство



Пусть точка *A* принадлежит отрезку *MN*. В противном случае, решение аналогично. Докажем, что $\angle PQB = \angle M$.

Идея решения будет основана на введении вспомогательной окружности, описанной около четырехугольника *APBQ*, которая существует, если выполняется равенство $\angle B + \angle A = 180^\circ$.

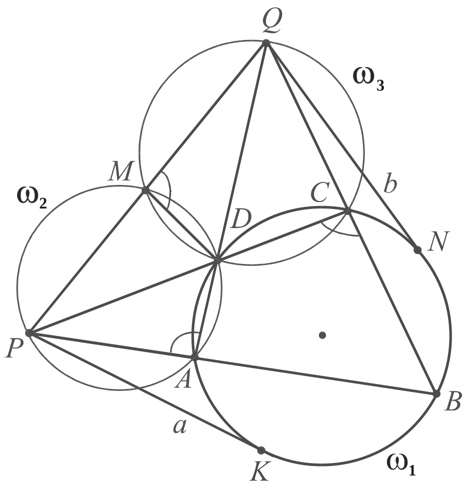
Обратим внимание на то, что угол *B* – общий для четырехугольника *APBQ* и треугольника *BMN*. По теореме о сумме углов треугольника: $\angle B + \angle M + \angle N = 180^\circ$. Значит, остается убедиться, что $\angle A = \angle M + \angle N$.

Действительно, $\angle A = \angle QAP = \angle BAP + \angle QAB = \angle M + \angle N$, потому что углы *BAP* и *M* измеряются половиной дуги *AnB*, а углы *QAB* и *N* – половиной дуги *AmB*. В этих парах один из углов – угол между касательной и хордой, а другой – вписанный.

Теперь с помощью введенной вспомогательной фигуры заключаем, что $\angle BAP = \angle PQB$, поскольку они измеряются половиной одной и той же дуги. По доказанному ранее $\angle BAP = \angle M$. Следовательно, $\angle PQB = \angle M$ и $QP \parallel MN$, что и требовалось доказать.

40. (№3613). Противоположные стороны четырехугольника, вписанного в окружность, пересекаются в точках *P* и *Q*. Найдите *PQ*, если касательные к окружности, проведенные из точек *P* и *Q*, равны *a* и *b*.

Решение



Пусть *ABCD* – вписанный четырехугольник в окружность ω_1, $P = AB \cap CD$, $Q = BC \cap AD$, $PK = a$, $QN = b$.

Рассмотрим описанную окружность ω_2 треугольника *ADP* как вспомогательную. Она пересечет прямую *PQ* в точке *M*.

$\angle DMQ = 180^\circ - \angle DMP$,

$\angle PAD = 180^\circ - \angle DMP$.

Значит, $\angle DMQ = \angle PAD$. Кроме того, $\angle PAD = \angle DCB$ (каждый из этих углов дополняет угол *BAD* до развернутого).

Отсюда $\angle DMQ = \angle DCB$.

Но $\angle DCB + \angle DCQ = 180^\circ$, поэтому и $\angle DMQ + \angle DCQ = 180^\circ$.

Из последнего равенства следует, что существует окружность ω_3, описанная около четырехугольника *CDMQ*.

Рассматривая теперь окружности ω_1, ω_2 и их общую секущую *QA*, запишем: $QM \cdot QP = QD \cdot QA = QN^2$.

Аналогично, для окружностей ω_1, ω_3 и их общей секущей *PC*: $PM \cdot PQ = PD \cdot PC = PK^2$.

Итак, $QM \cdot QP = b^2$, $PM \cdot PQ = a^2$. Складывая почленно эти равенства, получим: $QP\,(QM + PM) = a^2 + b^2$ или $QP \cdot QP = a^2 + b^2$, т.е. $QP = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2}$.

(См. задачи 1.3, 4.2, 17.4, 102, 106, 109 и раздел 4.1).

5.4. Применение геометрических преобразований

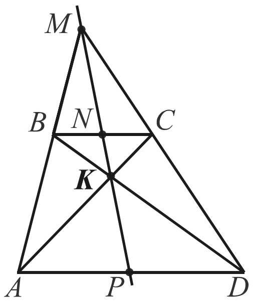
При введении вспомогательных фигур часто используются геометрические преобразования: *параллельный перенос*, *симметрия*, *гомотетия*, *поворот* и др. Цель их применения – получение дополнительных или новых свойств в конфигурации.

С практической точки зрения, основное внимание при решении задач следует уделить гомотетии, т.к. параллельный перенос и симметрия воспринимаются проще, а поворот – очень эффективен, но встречается реже. Все геометрические преобразования широко применяются к решению задач на построение.

Докажем с помощью *гомотетии* задачу-теорему 20.

(№1294. *Замечательное свойство трапеции*). Докажите, что точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, середины оснований и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой.

<u>*Доказательство*</u>



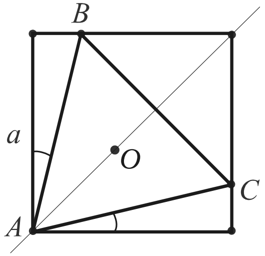
Пусть $AD \parallel BC$, $AC \cap BD = K$, $AB \cap CD = M$, $BN = NC$, $AP = PD$. Требуется доказать, что точки M, N, K, P принадлежат одной прямой.

Рассмотрим гомотетию с центром M и положительным коэффициентом. Так как $AD \parallel BC$, то треугольник MBC переходит в треугольник MAD, точка N – в точку P.

При гомотетии с центром K и отрицательным коэффициентом треугольник BKC переходит в треугольник DKA, точка N – в точку P. Следовательно, $K \in NP$ и четыре точки M, N, K, P лежат на одной прямой.

41. Доказать, что во внутреннюю область квадрата со стороной a можно поместить правильный треугольник со стороной a.

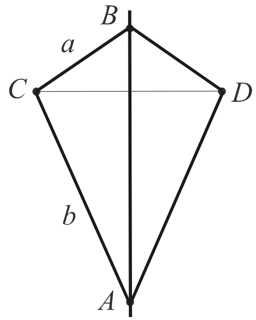
<u>*Доказательство*</u>



Очевидно, что правильный треугольник можно расположить, как показано на рисунке. Стороны AB и AC симметричны относительно прямой, содержащей диагональ квадрата, и образуют с его сторонами углы по 15° (45° – 60°: 2). Величина стороны треугольника равна отношению $a/\cos 15°$, что больше a. Пусть O – центр треугольника ABC. Тогда треугольник гомотетичный треугольнику ABC с центром в точке O и коэффициентом гомотетии cos 15° и будет искомым.

42. Доказать, что площадь треугольника ABC можно вычислить по формуле $S_{ABC} = ¼\,(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A)$, где a и b – длины сторон, A и B – величины противолежащих им углов.

<u>*Доказательство*</u>



Воспользуемся осевой симметрией.

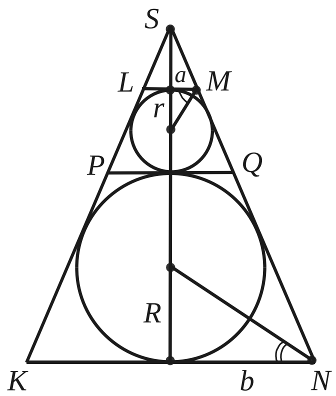
Построим треугольник ABD, симметричный данному относительно прямой AB. Тогда $S_{ACBD} = 2\,S_{ABC}$ (1).

С другой стороны, $S_{ACBD} = S_{CBD} + S_{ACD} =$
$= ½\,a \cdot a \cdot \sin 2B + ½\,b \cdot b \cdot \sin 2A =$
$= ½\,(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A)$ (2).

Из (1) и (2) следует, что
$S_{ABC} = ¼\,(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A)$, ч.т.д.

43. На боковых сторонах KL и MN равнобочной трапеции $KLMN$ выбраны соответственно точки P и Q так, что отрезок PQ параллелен основаниям трапеции. Известно, что в каждую из трапеций $KPQN$ и $PLMQ$ можно вписать окружность и радиусы этих окружностей равны R и r соответственно. Определить основания LM и KN (см. задачу 25.3).

<u>*Решение*</u>



При гомотетии с центром в точке S и коэффициентом, равным R/r, меньшая окружность переходит в большую, трапеция $PLMQ$ – в трапецию $KPQN$, т.к. по условию $PQ \parallel LM$ и $PQ \parallel KN$.

Отсюда $2b : 2a = R^2 : r^2$ ($LM = 2a$, $KN = 2b$) или $2br^2 = 2aR^2$ (1).

Заметим, что сумма острых углов, противолежащих радиусам окружностей, равна 90°. Значит, прямоугольные треугольники с катетами a, r и b, R являются подобными.

Имеем пропорцию $a : r = R : b$ – второе условие, связывающее неизвестные. Запишем его в виде $2a \cdot 2b = 4rR$ (2).

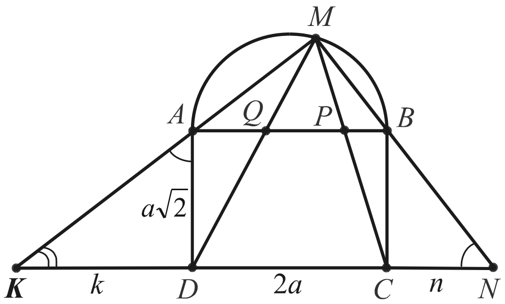
Деля и умножая (2) на (1), последовательно находим:

$(2a)^2 = \dfrac{4rr^2}{R}$, $2a = 2r\sqrt{\dfrac{r}{R}}$; $(2b)^2 = \dfrac{4RR^2}{r}$, $2b = 2R\sqrt{\dfrac{R}{r}}$.

Ответ: $2r\sqrt{\dfrac{r}{R}}$, $2R\sqrt{\dfrac{R}{r}}$.

44. (*Задача Ферма*). На стороне AB прямоугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построена полуокружность, на которой выбрана произвольная точка M. Прямые MC и MD пересекают сторону AB в точках P и Q. Найти $AP^2 + BQ^2$, если $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{2}$.

<u>*Решение*</u>



Пусть $N = MB \cap CD$, $K = MA \cap CD$, $NC = n$, $KD = k$.

При гомотетии с центром M треугольник MAB переходит в треугольник MKN, точка Q – в точку D, точка P – в точку C. Следовательно, отрезки AP и BQ переходят в отрезки KC и ND. Найдем сумму $DN^2 + KC^2$.

$DN^2 + KC^2 = (n + 2a)^2 + (k + 2a)^2 = n^2 + 4an + 4a^2 + k^2 + 4ak + 4a^2 =$
$= (n^2 + k^2 + 4a^2 + 4an + 4ak + 2nk) - 2nk + 4a^2 = (n + k + 2a)^2 - 2nk +$
$+ 4a^2 = NK^2 - 2nk + 4a^2$.

Выразим произведение nk через a^2.

$\triangle BNC \sim \triangle ADK$ ($\angle BNC = \angle DAC$, т.к. они дополняют угол K до прямого, $\angle D = \angle M = 90°$).

Имеем: $\dfrac{NC}{BC} = \dfrac{AD}{KD}$, $\dfrac{n}{a\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{k}$, $nk = 2a^2$.

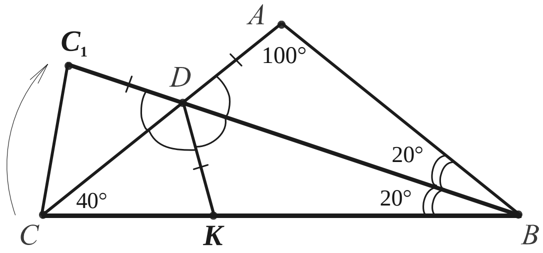
Отсюда $4a^2 - 2nk = 0$, $DN^2 + KC^2 = NK^2$.

Из свойств гомотетии вытекает, что $AP^2 + BQ^2 = AB^2 = 4a^2$.

Ответ: $4a^2$.

45. (№ 3562). В треугольнике ABC углы при вершинах B и C равны 40°, BD – биссектриса угла B. Докажите, что $BD + DA = BC$.

<u>*Доказательство*</u>



Соединим точку D с точкой K отрезка BC такой, что $BK = BA$.

$\triangle BAD = \triangle BKD$ (по двум сторонам и углу между ними).$DA = DK$, $\angle BDA = \angle BDK = 60°$.

Выполним поворот отрезка BC с центром B на 20° по часовой стрелке, при котором точка C перейдет в точку C_1 и $BC = BC_1$.

Образовавшийся треугольник CDC_1 равен треугольнику KDC по стороне CD и прилежащим к ней углам. Действительно, углы CDC_1 (вертикальный с углом BDA) и KDC равны по 60°, а углы DCK и DCC_1 по 40° (в равнобедренном треугольнике BCC_1 углы при основании равны по 80°).

Отсюда $DA = DK = DC_1$ и $BC = BC_1 = BD + DC_1 = BD + DA$, ч.т.д.

(C_1 – образ точки A, если рассматривать композицию двух осевых симметрий относительно прямых BD и CD).

(Применение тригонометрии).

Выразим AD и BC через BD с помощью теоремы синусов.

$\triangle ABD$: $AD = \dfrac{BD\sin 20°}{\sin 100°}$. $\triangle BCD$: $BC = \dfrac{BD\sqrt{3}}{2\sin 40°}$ ($\sin 120° =$
$= \sin 60°$). После подстановки в доказываемое равенство получим:

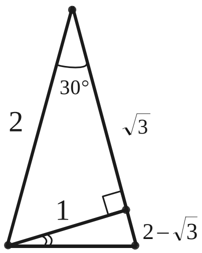
$$BD + \frac{BD\sin 20°}{\sin 100°} = \frac{BD\sqrt{3}}{2\sin 40°} \text{ или } \frac{\sqrt{3}}{2\sin 40°} = 1 + \frac{\sin 20°}{\sin 100°}.$$

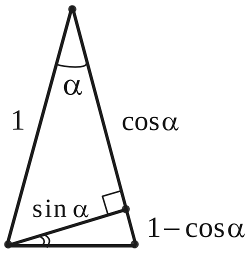
$$\frac{\sin 100° + \sin 20°}{\sin 100°} = \frac{2\sin 60° \cos 40°}{2\sin 50° \cos 50°} = \frac{\sin 60°}{\cos 50°} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 40°}, \text{ ч.т.д.}$$

(См. задачи 50, 72, 73, 70.1, 92, 104, 109, 113, 115, 118, 138, 141).

5.5. Применение тригонометрии

Тригонометрия применяется при решении разных задач. В геометрии это естественно: тригонометрические функции выражают соотношения между элементами прямоугольного треугольника – фигуры, встречающейся практически в каждой задаче.





Осмыслите, например, по рисункам геометрические доказательства формул тригонометрии:

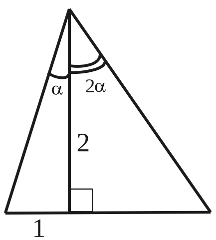
$$\text{tg } 15° = 2 - \sqrt{3},$$

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

($\alpha < 90°$, углы $\alpha/2$ и 15° отмечены двумя дугами).

Различные формулы тригонометрии и геометрии, содержащие тригонометрические функции, придают методу универсальность и гибкость. Отсюда разнообразие форм его применения: теорема косинусов, теорема синусов, получение тригонометрических уравнений и тождеств, использование обратных тригонометрических функций.

Средства тригонометрии нередко заменяют подобие. Рациональное применение они находят при решении вычислительных задач, в которых среди данных и искомых элементов фигуры нет углов (введение вспомогательного угла). Применение тригонометрии часто способствует поиску решения и упрощению вычислений, что важно во время проведения контрольных и экзаменационных работ. Задача сводится к применению формул, решению уравнений, доказательству тождеств.

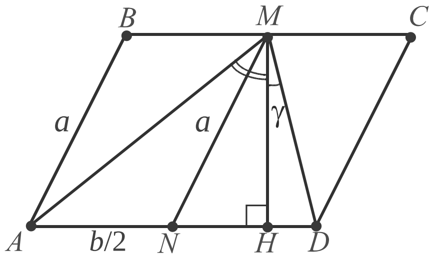


(№10.421). Высота треугольника, равная 2 см, делит угол треугольника в отношении 2 : 1, а основание – на части, меньшая из которых равна 1 см. Найти площадь этого треугольника [28, с. 203]. (См. задачу 9.3).

$\text{tg } \alpha = ½$, $\text{tg } 2\alpha = \dfrac{2\cdot 0{,}5}{1-0{,}25} = \dfrac{4}{3}$. Значит, больший отрезок основания равен 2 tg 2α или 8/3. Таким образом, $S = 1 \cdot (1 + 8/3) = 11/3$ (см^2).

46. Стороны параллелограмма равны a и b ($a < b$, $2a \neq b$). Из середины большей стороны параллелограмма параллельную сторону видно под углом α. Найти площадь параллелограмма.

Решение



По условию $AB = a$, $BC = b$, $MB = MC$, $\angle AMD = \alpha$.

Проведем $MN \parallel AB$, $MN = a$, $AN = DN$, $MH \perp AD$. Пусть $\alpha = \beta + \gamma$, где $\beta = \angle AMH$, $\gamma = \angle DMH$. Из прямоугольных треугольников AMH и DHM: $\text{tg } \beta = \dfrac{AH}{MH}$, $\text{tg } \gamma = \dfrac{DH}{MH}$.

Применяя формулу тангенса суммы, получим:

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } (\beta + \gamma) = \frac{\text{tg}\beta + \text{tg}\gamma}{1 - \text{tg}\beta\cdot\text{tg}\gamma} = \frac{AH + DH}{MH} : \left(1 - \frac{AH\cdot DH}{MH^2}\right) =$$

$$= \frac{AD\cdot MH^2}{MH(MH^2 - (AN + NH)(AN - NH))} = \frac{AD\cdot MH}{MH^2 - AN^2 + NH^2} =$$

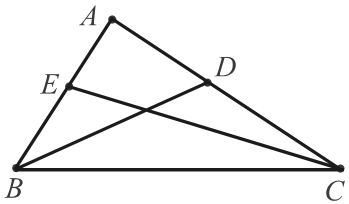
$$= \frac{S}{a^2 - b^2/4},$$ где S – искомая площадь, $AN = DN$, $MN^2 = MH^2 + NH^2$.

Отсюда $S = (a^2 - b^2/4)$ tg α.

Ответ: $(a^2 - b^2/4)$ tg α.

47. В треугольнике ABC известны отношения длин сторон BC и AC к радиусу описанной окружности: 2 и 1,5 соответственно. Найти отношение биссектрис внутренних углов B и C [3, с.332].

Решение



Применим задачу-теорему 15.

$\dfrac{BC}{R} = 2\sin A = 2$. Отсюда $\sin A = 1$, $\angle A = 90°$. $\dfrac{AC}{R} = 2\sin B = \dfrac{3}{2}$, $\sin B = \dfrac{3}{4}$.

Если $AC = 3x$, $BC = 4x$, то $AB = \sqrt{7}\, x$.

Имеем: $\dfrac{BD}{CE}=\dfrac{AB\cdot\cos{C/2}}{AC\cdot\cos{B/2}}=\dfrac{\sqrt7}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{1+\cos C}}{\sqrt{1+\cos B}}=\dfrac{\sqrt7\cdot\sqrt{1+3/4}}{3\cdot\sqrt{1+\sqrt7/4}}=$

$=\dfrac{7}{3\cdot\sqrt{4+\sqrt7}}=\dfrac{7}{9}\sqrt{4-\sqrt7}$, т.к. $\left|\cos{\alpha/2}\right|=\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$.

Ответ: $\dfrac{7}{9}\sqrt{4-\sqrt7}$.

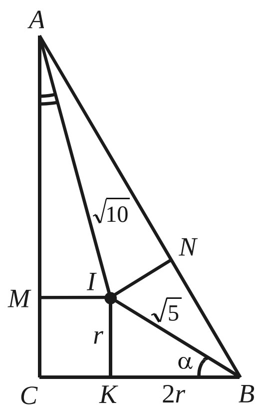
(🗍 Применение формулы $\cos{\gamma/2}=\dfrac{l(a+b)}{2ab}$ (см. задачу 34).

$\dfrac{BD}{CE}=\dfrac{AB\cdot\cos{C/2}}{AC\cdot\cos{B/2}}=\dfrac{AB\cdot CE(AC+BC)\cdot 2AB\cdot BC}{AC\cdot 2AC\cdot BC\cdot BD(AB+BC)}$.

Отсюда $\dfrac{BD}{CE}=\dfrac{AB\cdot\sqrt{AC+BC}}{AC\cdot\sqrt{AB+BC}}=\dfrac{\sqrt7\cdot\sqrt{3x+4x}}{3\cdot\sqrt{\sqrt7x+4x}}=\dfrac{7}{3\sqrt{4+\sqrt7}}$).

48. (№10.386). Расстояние от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин его острых углов равны $\sqrt5$ и $\sqrt{10}$. Найти катеты [28, с. 206].

Решение



Пусть $\angle C$ = 90º, I – инцентр, $AI=\sqrt{10}$, $BI=\sqrt5$. Обозначим угол KBI через α, тогда $\angle MAI$ = 45º – α (AI и BI – биссектрисы).

Заметим, что этим острым углам противолежат равные катеты (радиусы KI и MI), поэтому $\sqrt5\ \sin\alpha=\sqrt{10}\ \sin(45^\circ-\alpha)$ или $\sin\alpha=\sqrt2\ \dfrac{1}{\sqrt2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$, cos α = 2 sin α.

Из полученной зависимости следует, что в треугольнике BIK катет BK равен $2r$.

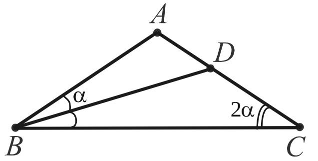
По теореме Пифагора $r^2+4r^2=5$, $r=1$ ($r>0$). Имеем: $AC=MC+AM=1+\sqrt{10-1}=4$, $BC=3r=3$.

Ответ: 3 и 4.

(🗍 Применение теоремы косинусов в ΔAIB, где $\angle AIB$ = 135º).

49. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=AC$) биссектриса угла B пересекает AC в точке D. Найти угол A, если $BC=AD+BD$.

Решение



Пусть $\angle ABD=\angle CBD=\alpha$. Тогда $\angle B=\angle C=2\alpha$, $\angle CDB=180^\circ-3\alpha$, $\angle A=180^\circ-4\alpha$.

Все углы треугольников ABD и CBD выражаются через α, BD – их общая сторона, поэтому, используя теорему синусов, выразим через нее два других отрезка, содержащихся в условии $BC-AD=BD$.

Δ ABD: $AD=\dfrac{BD\cdot\sin\alpha}{\sin(180^\circ-4\alpha)}$; Δ$CBD$: $BC=\dfrac{BD\cdot\sin(180^\circ-3\alpha)}{\sin2\alpha}$.

Имеем: $\dfrac{BD\cdot\sin(180^\circ-3\alpha)}{\sin2\alpha}-\dfrac{BD\cdot\sin\alpha}{\sin(180^\circ-4\alpha)}=BD$, $\dfrac{\sin3\alpha}{\sin2\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\sin4\alpha}=1$.

Решим полученное тригонометрическое уравнение

sin 3α sin 4α – sin α sin 2α = sin 2α sin 4α.

½ (cos α – cos 7α – cos α + cos 3α) = ½ (cos 2α – cos 6α),

cos 6α – cos 7α = cos 2α – cos 3α, $2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{13\alpha}{2}=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{5\alpha}{2}$,

$\sin\dfrac{13\alpha}{2}=\sin\dfrac{5\alpha}{2}$ ($\sin\dfrac{\alpha}{2}\neq0$). Отсюда следует, что $\dfrac{5\alpha}{2}+\dfrac{13\alpha}{2}=180^\circ$.

Действительно, $0^\circ<2\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{45^\circ}{2}$, $0^\circ<\dfrac{5\alpha}{2}<\dfrac{13\alpha}{2}<360^\circ$.

Таким образом, 9α = 180°, α = 20°, $\angle A$ = 180° – 4 · 20° = 100°.

Ответ: 100°.

50. В равнобедренном треугольнике ABC угол BAC равен 20°. На сторонах AC и AB взяты точки D и E соответственно так, что угол ECB равен 50°, а угол DBC равен 60°. Найдите величину угла EDB.

Решение

По теореме синусов из треугольников BDE и BDC имеем:

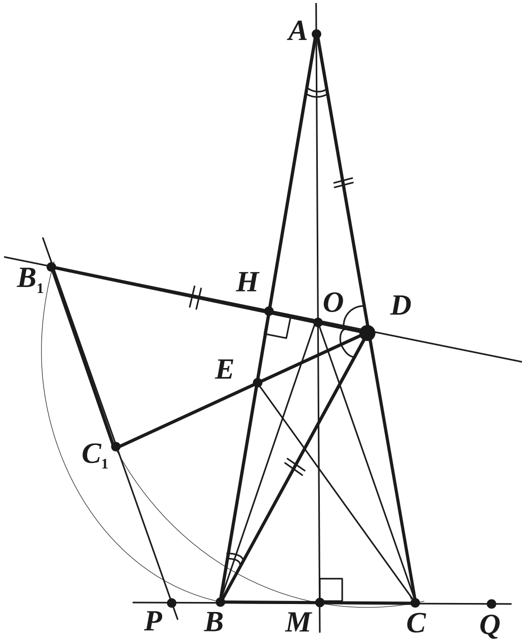
$BE=\dfrac{BD\cdot\sin x}{\sin(160^\circ-x)}$ и $BC=\dfrac{BD\cdot\sin40^\circ}{\sin80^\circ}$. Т. к. $BE=BC$ и $BD\neq0$, то

$$\frac{\sin x}{\sin(x+20^\circ)} = \frac{1}{2\cos 40^\circ}, \quad 2\cos(60^\circ - 20^\circ)\cdot \sin x - \sin(x + 20^\circ) = 0.$$

$$\cos 20^\circ \cdot \sin x + \sqrt{3}\sin 20^\circ \cdot \sin x - \sin x \cdot \cos 20^\circ - \cos x \cdot \sin 20^\circ = 0,$$

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0,\ \mathrm{tg}\, x = \frac{1}{\sqrt{3}},\ x = 30^\circ\ (x < 90^\circ).$$ *Ответ*: 30°.

(🗍 Применение геометрических преобразований).



Т.к. $\angle A = \angle DBA = 20^\circ$, то $AD = DB$. Тогда $O = DH \cap AM$ – центр описанной окружности $\Delta\ ABC$, где $DH \perp BA$, $AM \perp BC$.

В $\Delta\ CBD$ углы C, B и D соответственно равны 80°, 60° и 40°.

$\angle ADH = \angle BDH = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$.

Выполним поворот $\Delta\ CBD$ вокруг точки D на угол 70° по часовой стрелке. Луч DB перейдет в луч DB_1, совпадающий с DH, так как $\angle BDH = 70^\circ$, а луч DC перейдет в луч DC_1.

Докажем, что при этом совпадут лучи DC_1 и DE, а искомый угол BDE равен 30° (угол BDC, часть угла поворота, равен 40°).

Действительно, в этом случае $\angle DEH = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ и 50° будет равна сумма углов EBD и BDE, что согласуется с теоремой о внешнем угле DEH треугольника BDE.

(Анализируя конфигурацию, обратите внимание, что $\angle COD = \angle B_1 = 60^\circ$, т.е. $OC \parallel B_1P$, $\angle OCQ = \angle P = 110^\circ$. Кроме того, $\angle DCP + \angle DC_1P = 180^\circ$, поэтому четырехугольник $DCPC_1$ – вписанный и $\angle CDC_1 = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$).

Другие решения этой интересной задачи содержатся в №6 журнала "Квант" за 1993 г. в статье К.Кнопа "История с геометрией, или 9 решений одной задачи". http://kvant.mirror0.mccme.ru/1993/06/istoriya_s_geometriej.htm.

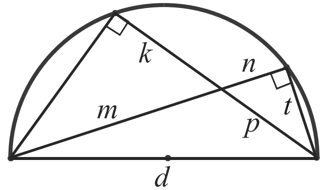
(См. задачи 45, 73, 66.2, 67.1, 67.2, 69, 97-99, 100, 103, 140).

5.6. Задачи геометрические и алгебраические

Указанное в заголовке разделение задач (и методов их решения) условно. Известные теоремы, формулы геометрии, тригонометрии или метод координат (см. 8.3) могут свести геометрическую задачу к алгебраической, а подходящая геометрическая конфигурация – наоборот.

В некоторых решениях, подобных приведенному ниже, средства алгебры и геометрии трудно разделить вообще.

(№269, [8]). В полукруге из концов диаметра проведены две пересекающиеся хорды. Доказать, что сумма произведений отрезка каждой хорды, примыкающего к диаметру, на всю хорду равна квадрату диаметра.



В принятых на рисунке слева обозначениях требуется доказать, что

$$m(m + n) + p(p + k) = d^2.$$

Образуем два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой d и, обозначив катет одного из них через t, запишем: $d^2 = (m + n)^2 + t^2$.

Имеем: $d^2 = (m^2 + mn) + mn + (n^2 + t^2) = m(m + n) + kp + p^2 = m(m + n) + p(p + k)$, так как $mn = kp$ и $p^2 = n^2 + t^2$.

51. (№ 3043). Пусть h_a, h_b, h_c – высоты треугольника, r – радиус вписанной окружности. Доказать, что $h_a + h_b + h_c \geq 9r$.

<u>*Доказательство*</u>

С помощью формул геометрии $h_a = \frac{2S}{a}$ и $r = \frac{2S}{P}$ (P – периметр) сведем данное геометрическое неравенство к алгебраическому: $\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \geq 9\frac{2S}{P}$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

Докажем полученное неравенство, учитывая, что a, b, c – длины сторон треугольника. Умножив обе его части на положительное число $(a + b + c)$, получим

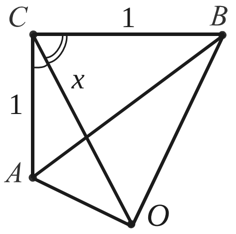
$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geq 9,\quad 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 \geq 9,$$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 6$$ – истинно, т.к. $x + \frac{1}{x} \geq 2$ при $x > 0$.

52. Найти наименьшее значение выражения

$$\sqrt{1+x^2-x}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}\ .$$

Решение



Решим эту алгебраическую задачу без применения производной, воспользовавшись вспомогательной геометрической конфигурацией: $\angle C = 90°$, $\angle ACO = 30°$, $\angle BCO = 60°$, $CO = x$, $CB = CA = 1$.

По теореме косинусов из треугольников ACO и BCO выражаются данные слагаемые. Действительно, $AO = \sqrt{1+x^2-2\cdot 1\cdot x\cdot \sqrt{3}/2} = \sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$,

$BO = \sqrt{1+x^2-2\cdot 1\cdot x\cdot 1/2} = \sqrt{1+x^2-x}$.

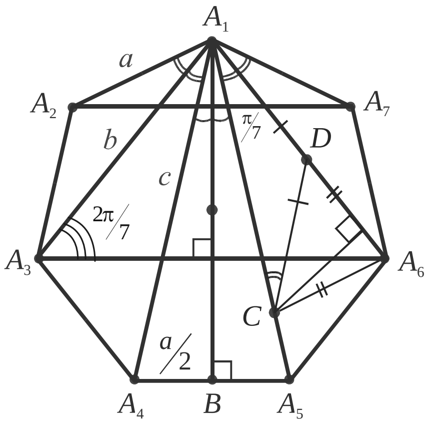
Но из $\triangle ABO$ по неравенству треугольника $AO + BO \geq AB$.

$AB = \sqrt{2}$. Значит, $Min\ \{AO + BO\} = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

53. Доказать тождество $\sin\frac{\pi}{14}\ \sin\frac{3\pi}{14}\ \sin\frac{5\pi}{14} = \frac{1}{8}$.

Доказательство



Пусть $A_1A_2 \ldots A_7$ – правильный 7-угольник, A_1B – ось симметрии. Введем параметры: $A_1A_2 = a$, $A_1A_3 = b$, $A_1A_4 = c$.

Т.к. угол при вершине равен $5\pi/7$, то диагонали разбивают его на пять равных (вписанных) углов величиной $\pi/7$.

$\angle BA_1A_4 = \angle BA_1A_5 = \pi/14$,

$\angle BA_1A_3 = \pi/14 + \pi/7 = 3\pi/14$,

$\angle BA_1A_2 = 3\pi/14 + \pi/7 = 5\pi/14$.

Итак, в конфигурации выявлены аргументы функции синус, содержащиеся в тождестве. Учитывая симметрию, а также равенства $A_1A_3 = A_2A_7$ и $A_1A_4 = A_3A_6$, значения синусов этих углов выразим через параметры a, b, c из

прямоугольных треугольников – соответствующих половин равнобедренных треугольников $A_1A_4A_5$, $A_1A_3A_6$, $A_1A_2A_7$:

$$\sin\frac{\pi}{14} = \frac{a}{2c}\ ,\ \ \sin\frac{3\pi}{14} = \frac{c}{2b}\ ,\ \ \sin\frac{5\pi}{14} = \frac{b}{2a}\ .$$

Перемножив, получим $\sin\frac{\pi}{14}\ \sin\frac{3\pi}{14}\ \sin\frac{5\pi}{14} = \frac{abc}{8abc} = \frac{1}{8}$, ч.т.д.

Продолжим задачу геометрическим доказательством тождества $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, которое связывает сторону и диагонали правильного семиугольника. Из треугольников $A_1A_4A_5$, $A_1A_3A_6$, $A_1A_2A_7$ получим: $a = 2R\sin\frac{\pi}{7}$, $b = 2R\sin\frac{2\pi}{7}$, $c = 2R\sin\frac{3\pi}{7}$ (R – радиус описанной окружности). Приходим к доказательству еще одного тригонометрического тождества: $\frac{1}{\sin{\pi/7}} = \frac{1}{\sin{2\pi/7}} + \frac{1}{\sin{3\pi/7}}$.

Отложим на большей диагонали A_1A_5 меньшую A_1A_6 и рассмотрим равнобедренный треугольник A_1A_6C.

$A_1C = A_1A_6$, $\angle C = \angle A_6 = (\pi - \pi/7) : 2 = 3\pi/7$. Выберем на стороне A_1A_6 точку D так, что $DA_1 = DC$. Тогда $DA_6 = CA_6$. (Здесь убедитесь, что возможны два разбиения равнобедренного треугольника на два других равнобедренных треугольника с углами $\pi/7$, $3\pi/7$, $3\pi/7$ и $\pi/5$, $2\pi/5$, $2\pi/5$).

Действительно, $\angle A_1CD = \angle A_1 = \pi/7$, $\angle DCA_6 = \angle A_6DC = 2\pi/7$.

Опустим из точки С перпендикуляр h на A_1A_6.

$$A_1C = \frac{h}{\sin{\pi/7}}\ ,\ CD = \frac{h}{\sin{2\pi/7}}\ ,\ CA_6 = \frac{h}{\sin{3\pi/7}}\ .$$

Но $A_1C = A_1A_6 = A_1D + DA_6 = CD + CA_6$, ч.т.д.

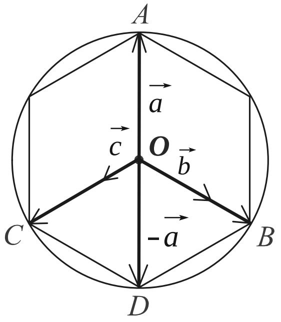
(Теорема Птолемея.

Для вписанного в окружность четырехугольника $A_1A_3A_4A_5$ по теореме Птолемея: $A_1A_4 \cdot A_3A_5 = A_1A_3 \cdot A_4A_5 + A_1A_5 \cdot A_3A_4$, т.е. $cb = ba + ca$.

Разделив на abc, получим $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$).

54. (№ 17.052). Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лежат в одной плоскости и образуют попарно друг с другом углы $2\pi/3$. Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$.

<u>*Решение*</u>



Введем вспомогательную конфигурацию – вписанный в окружность *Окр* (*OD*, 3) правильный шестиугольник. Тогда углы *AOB*, *BOC*, *AOC* (*A*, *B*, *C* – вершины) равны по 120°, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = 3/2\,\vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = 3\vec{c}$.

COBD – ромб (стр. 35), поэтому по правилу параллелограмма $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3/2\,\vec{b} + 3\vec{c}$. С другой стороны, очевидно, что $\overrightarrow{OD} = -\vec{a}$, поэтому $\vec{a} = -3/2\,\vec{b} - 3\vec{c}$.

55. (№ 10.332). Определить стороны прямоугольного треугольника, периметр которого равен $2p$, а площадь – m^2 [28, с.177].

<u>*Решение*</u>

По условию $a + b = 2p - c$ и $ab = 2m^2$ (a, b – катеты, c – гипотенуза). $a^2 + 2ab + b^2 = 4p^2 - 4pc + c^2$. Используя второе равенство и теорему Пифагора, получим: $4m^2 = 4p^2 - 4pc$, $c = (p^2 - m^2) / p$.

Тогда $a + b = 2p - (p^2 - m^2) / p = (p^2 + m^2) / p$.

Отсюда $b = (p^2 + m^2) / p - a$ или $a \cdot (p^2 + m^2) / p - a^2 = 2m^2$.

Приходим к квадратному уравнению относительно a:
$a^2 - ((p^2 + m^2) / p) \cdot a + 2m^2 = 0$. Решая его, находим a ($a > 0$).

$$a = \frac{1}{2}\cdot\frac{p^2+m^2}{p} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2+m^2}{p}\right)^2 - 8m^2} = \frac{p^2+m^2 \pm \sqrt{p^4+m^4-6m^2p^2}}{2p}.$$

Учитывая, что $a + b = (p^2 + m^2) / p$, запишем окончательный ответ.

Ответ: $\dfrac{p^2-m^2}{p}$, $\dfrac{p^2+m^2 \pm \sqrt{p^4+m^4-6m^2p^2}}{2p}$.

(См. задачи 72, 136, раздел 8.3).

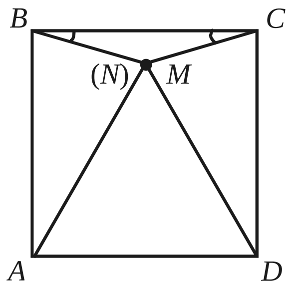
5.7. Применение идеи обратного хода

В процессе доказательства (решения задачи) рассуждения, как правило, проводят от данного к искомому. Но возможна и схема обратного хода. Для доказательства некоторого утверждения предполагают, что оно верно, и, проводя рассуждения (равносильные преобразования), получают следствие. Ложное следствие означает, что предположение неверно и доказательство заканчивается; истинное следствие означает, что предположение верно, но лишь в том случае, если все рассуждения (преобразования) *обратимы*.

Метод неприменим, если либо невозможно получить истинное следствие, либо некоторые рассуждения (преобразования) необратимы. При решении задач возможны его модификации.

56. (№219). Точка *M* выбрана внутри квадрата *ABCD* так, что углы *MBC* и *MCB* имеют величину 15º. Доказать, что треугольник *AMD* – равносторонний.

<u>*Решение*</u>



Предположим, что другая точка *N*, отличная от *M* и лежащая внутри квадрата, является третьей вершиной равностороннего треугольника.

Соединим ее с точками *B* и *C* и вычислим углы *NBC* и *NCB*. *AB* = *AD* = *AN*, поэтому в равнобедренном треугольнике *ABN*: ∠ *ABN* = (150º – 30º) : 2 = 75º. Следовательно, ∠ *NBC* = 90º – 75º = 15º. Это означает, что точки *N* и *M* совпадают. Утверждение доказано.

57. Стороны треугольника a, b, c ($a < b < c$) образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что $ac = 6\,rR$, где r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей.

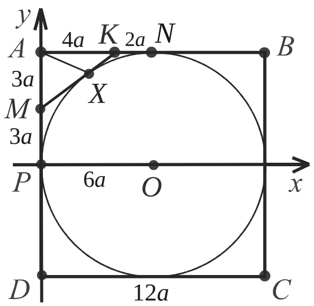
<u>*Решение*</u>

Предположим, что равенство $ac = 6\,rR$ – истинно. Применяя формулы для радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника, получим: $ac = 6\dfrac{2S}{a+b+c}\cdot\dfrac{acb}{4S}$, $1 = \dfrac{3b}{a+b+c}$.

Отсюда $3b = a + b + c$, $b = \dfrac{a+c}{2}$. Последнее равенство является характеристическим свойством арифметической прогрессии и все рассуждения можно провести в обратном порядке, поэтому утверждение доказано.

58. (№ 3491). На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ взяты точки K и M так, что $3AK = 4AM = AB$. Докажите, что прямая KM касается окружности, вписанной в квадрат.

Доказательство

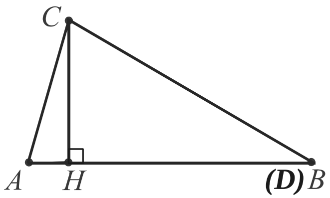


Пусть P и N – середины сторон AD и AB, $AD = 12a$. Имеем: $AM = MP = 3a$, $AK = 4a$, $KN = 6a - 4a = 2a$.

Предположим, что утверждение верно: X – точка касания, точки M, X, K лежат на одной прямой. Тогда $MX = MP = 3a$, $KX = KN = 2a$, $MK = 3a + 2a = 5a$, что истинно, т.к. MK – гипотенуза прямоугольного треугольника AMK с катетами $3a$ и $4a$. Рассуждения можно провести в обратном порядке, поэтому утверждение доказано (см. задачу 117).

59. (№10.196). Дан треугольник ABC, в котором $2h_c = AB$ и величина угла A равна 75°. Найти величину угла C.

Решение



Предположим, что точка D, отличная от B ($h_c < HD < 2h_c$) и лежащая на луче HB, служит вершиной равнобедренного треугольника ADC с основанием AC. Тогда $DC = AB = 2h_c = 2CH$.

Отсюда $\angle CDH = 30°$, $\angle DCH = 60°$, $\angle ACH = 75° - 60° = 15°$; в прямоугольном треугольнике ACH сумма острых углов равна $15° + 75° = 90°$.

Свойства конфигурации выполняются, следовательно, точки B и D совпадают, треугольник ABC – равнобедренный с основанием AC и $\angle C = \angle A = 75°$. *Ответ*: 75°.

60. Доказать, что в произвольном треугольнике имеет место неравенство $h_a \le \sqrt{p(p-a)}$, где h_a – высота, проведенная к стороне a, p – его полупериметр.

Доказательство

Предположив, что заданное неравенство истинно, выполним цепочку равносильных преобразований:

$h_a \le \dfrac{S}{\sqrt{(p-b)(p-c)}}$ (формула Герона); $\sqrt{(p-b)(p-c)} \le \dfrac{S}{h_a}$;

$2\sqrt{(p-b)(p-c)} \le a$ (формула $2S = a \cdot h_a$); $4(p-b)(p-c) \le a^2$

(обе части предыдущего неравенства – положительны);

$4\dfrac{a+c-b}{2}\cdot\dfrac{a+b-c}{2} \le a^2$; $ab - ac + ac + bc - c^2 - ab - b^2 + bc \le 0$;

$b^2 - 2bc + c^2 \ge 0$; $(b-c)^2 \ge 0$ (равенство имеет место при $b = c$).

Придя к очевидному неравенству и убедившись в обратимости преобразований, заключаем, что исходное неравенство доказано.

Анализируя полученное решение, заключаем, что преобразования выполнимы цепочкой:

$$h_a = \frac{2S}{a} = \sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}} = \sqrt{p(p-a)}\sqrt{\frac{2(p-b)\cdot 2(p-c)}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{p(p-a)}\sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{a^2}} = \sqrt{p(p-a)}\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{a^2}} \le$$

$\le \sqrt{p(p-a)}$, т.к. второй множитель меньше 1.

В других решениях могут применяться ранее доказанные неравенства. Возможен, например, вариант, использующий неравенство Коши для двух переменных:

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a/2} = \sqrt{p(p-a)}\,\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a/2} \le$$

$\le \sqrt{p(p-a)}$, т.к. $\sqrt{(p-b)(p-c)} \le \dfrac{(p-b)+(p-c)}{2} = \dfrac{a}{2}$.

(См. задачи 73, 67.2, 108).

5.8. Применение принципа Дирихле

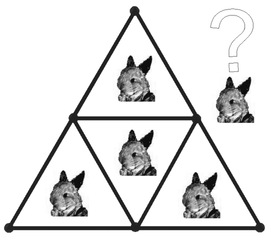
Принцип Дирихле – это логический метод рассуждения, одна из форм метода доказательства от противного:
в каждой совокупности из n множеств, в которой общее число элементов больше n, существует по крайней мере одно множество, содержащее не меньше двух элементов или *если в k клетках больше nk кроликов, то хотя бы в одной клетке больше n кроликов* (традиционная формулировка обобщенного принципа Дирихле в популярной литературе).

Формулировка очевидная, но возможность применения этого неконструктивного метода доказательства не всегда очевидна. В конкретной задаче затруднения могут вызывать определение множеств "клеток" и "кроликов", подсчет элементов этих множеств.

Принцип Дирихле обобщают и на бесконечные множества, а в геометрии используют его различные измененные формулировки:
если на отрезке длины 1 *расположено несколько отрезков с суммой длин больше* 1*, то по крайней мере два из них имеют общую точку;*
если на окружности радиуса 1 *расположено несколько дуг с суммой длин больше* 2π*, то по крайней мере две из них имеют общую точку;*
если внутри фигуры площадью 1 *расположено несколько фигур с суммой площадей больше* 1*, то по крайней мере две из них имеют общую точку.*

61. Во внутреннюю область равностороннего треугольника со стороной 1 брошено 5 точек. Доказать, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше ½.

<u>*Доказательство*</u>

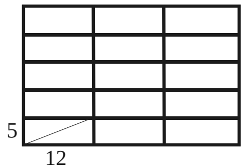


Чтобы применить метод, разобьем фигуру на равные части, число которых меньше числа точек. Такое разбиение найти несложно с помощью трех средних линий треугольника: 5 точек – "кролики", 4 правильных треугольника – "клетки". По принципу Дирихле по крайней мере 2 точки окажутся внутри одного из маленьких правильных треугольников со стороной ½.

Расстояние между такими точками очевидно меньше ½, поскольку они не совпадают с вершинами и длина любого отрезка внутри треугольника меньше его стороны.

62. Во внутреннюю область прямоугольника с измерениями 25 и 36 брошено 16 точек. Доказать, что среди них найдутся 2 точки, расстояние между которыми не больше 13.

<u>*Доказательство*</u>



Разбиение: 15 прямоугольников с измерениями 5 и 12 (16 точек – "кролики", 15 частей – "клетки"). Хотя бы одна из частей содержит не меньше 2 точек. Диагональ малого прямоугольника имеет длину 13 и служит наибольшим расстоянием между любыми его двумя точками, ч.т.д.

63. Доказать, что как бы ни была расположена на единичном квадрате 51 точка, всегда найдутся по крайней мере 3 из них, которые можно заключить в круг радиуса 1/7.

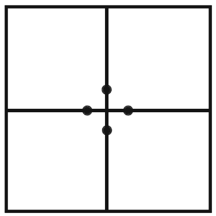
<u>*Доказательство*</u>

Разбиение: 25 равных квадратиков (51 точка – "кролики", 25 квадратиков – "клетки"). Хотя бы один квадратик содержит не меньше 3 точек ($51 = 25 \cdot 2 + 1$).

Сторона квадратика 1/5, диагональ $\sqrt{2}/5$, радиус описанного круга $\sqrt{2}/10$. $\dfrac{\sqrt{2}}{10} < \dfrac{1}{7}$, так как $7\sqrt{2} < 10$. Утверждение доказано.

64. Каждая из 9 прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как 2 : 3. Доказать, что по крайней мере 3 из этих 9 прямых проходят через одну точку.

<u>*Доказательство*</u>



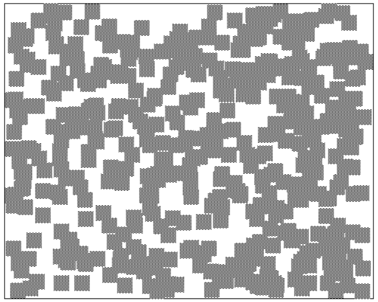
В этой задаче "клетки" найти сложнее.

Каждая прямая разбивает квадрат либо на два прямоугольника, либо на две трапеции. Из формул для вычисления площадей этих четырехугольников вытекает, что любая из четырех точек, изображенных на рисунке, в заданном отношении 2 : 3 делит и средние линии квадрата.

Итак, имеется четыре точки ("клетки") и девять прямых ("кролики"). $9 > 4 \cdot 2$, следовательно, по крайней мере через одну из этих точек проходит не меньше трех прямых, ч.т.д.

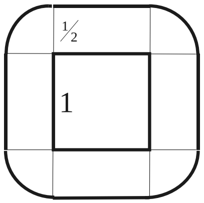
65. В прямоугольник со сторонами 20 и 25 бросают 120 квадратов со стороной 1. Доказать, что в прямоугольник можно поместить круг диаметра 1, не пересекающийся ни с одним из квадратов.

Доказательство



Если квадраты бросать случайным образом, то вероятность выполнения условия остается высокой даже при значительно большем их числе. Слева изображение, на котором компьютер расположил внутри прямоугольника случайным образом 500 квадратов.

Для доказательства утверждения квадраты необходимо располагать так, чтобы они занимали внутри максимальную площадь, "не позволяя" поместиться кругу. С этой целью изучим расположение *центра круга*. Т.к. радиус круга равен ½, то его центр должен располагаться на рассстоянии, большем ½, от любой из сторон заданного прямоугольника, т.е. внутри прямоугольника 19 x 24, площадь которого равна 456 (рис. справа вверху).



Кроме того, центр круга должен располагаться на рассстоянии, большем ½, от периферии любого из квадратов, т.е. вне каждой фигурки, изображенной крупно на рисунке и имеющей площадь $1 \cdot 1 + 4\,(\,½ \cdot 1 + ¼ \cdot ¼\,\pi)$, т.е. $3 + ¼\,\pi$. Если предположить, что фигурки внутри прямоугольника 19 x 24 не пересекаются, то их суммарная площадь равна $120\,(3 + ¼\,\pi)$ или $360 + 30\,\pi$, что меньше 456, т.к. $456 = 360 + 30 \cdot 3{,}2$ и $\pi < 3{,}2$.

Итак, сумма площадей 120 фигурок меньше площади прямоугольника 19 x 24. Значит, он не покрыт и во внутренней его области найдется точка, которая не принадлежит ни одной из фигурок. Приняв ее за центр, получим круг, удовлетворяющий условию задачи, ч.т.д.

(См. раздел 4.1).

Глава 6

ПОИСК РЕШЕНИЙ

6.1. Анализ и синтез

Анализ и *синтез* – методы научного исследования – главные элементы любого метода поиска решения задач.

Анализ (гр. analysis – разложение) – метод научного исследования, состоящий в расчленении целого на составные элементы; разбор, рассмотрение чего-либо.

Синтез (гр. synthesis – соединение, сочетание) – метод исследования какого-либо явления в его единстве и взаимной связи частей, обобщение, сведение в единое целое данных, добытых анализом.

На поиск пути решения направлен в первую очередь анализ. Но в большинстве случаев его применение осуществляется не в "чистом виде", а в соединении с синтезом, т.е. после завершения анализа синтетическое рассуждение проводится заново, чтобы изложить найденное решение.

Не менее важно, что подобный анализ, формируя интуицию и геометрическое мышление, позволяет показать, как можно самому догадаться решить задачу.

В двух первых примерах шестой главы остановимся на важном аспекте анализа – *всестороннем анализе первого решения* ("настойчивом" анализе), который полезен в каждой содержательной геометрической задаче. Уясняющий каждый шаг рассуждений и каждое утверждение, он указывает не только путь к рациональному решению, но и к аналогии, обобщению. Многие задачи взаимосвязаны и, анализируя решения, почти всегда можно найти направления, в которых удается их развить и обобщить.

Французский математик, физик и философ Блез Паскаль писал: "*Каждая решенная мною задача становилась образцом, который служил впоследствии для решения других задач*".

Нисходящий анализ применяется и в остальных задачах настоящей главы.

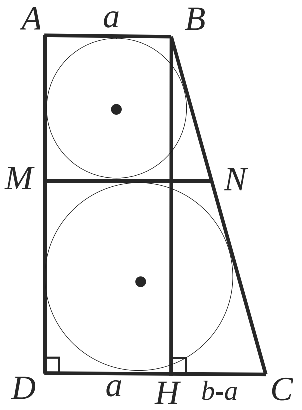
66.1. (№10.415, №1386). Прямая, параллельная основаниям прямоугольной трапеции, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найти основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны c и d, причем $c < d$.

Решение

Пусть в трапеции $ABCD$ $\angle A = 90^\circ$, $AD = c$, $BC = d$, $MN \parallel AB$. Введем обозначения $AB = a$, $DC = b$ для искомых величин, проведем высоту BH. Из $\triangle BCH$: $CH = \sqrt{CB^2 - BH^2}$, но $CH = CD - DH = CD - AB = b - a$. Отсюда $b - a = \sqrt{d^2 - c^2}$ (1).

Получено уравнение, связывающее данные и искомые величины, поэтому будем искать еще одно уравнение связи, чтобы определить неизвестные величины a и b из системы уравнений.

Во-первых, учтем, что трапеции $ABNM$ и $DCNM$ – описанные, поэтому $AB + NM = AM + BN$, $CD + NM = DM + CN$. Складывая эти равенства, получим: $AB + CD + 2NM = AD + BC$ (✷).



Во-вторых, трапеции подобны. Значит, $NM^2 = AB \cdot CD$, $NM^2 = ab$, $NM = \sqrt{ab}$ или $2NM = 2\sqrt{ab}$. Имеем: $b + a + 2\sqrt{ab} = c + d$, $(\sqrt{b} + \sqrt{a})^2 = c + d$, $\sqrt{b} + \sqrt{a} = \sqrt{c + d}$ (2).

После деления уравнения (1) на уравнение (2), получим новое уравнение $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \sqrt{d - c}$ (3). Далее, из системы уравнений (2) и (3) способом сложения определяем $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$, а затем a и b:

$$\sqrt{a} = \frac{\sqrt{d+c} - \sqrt{d-c}}{2}, \quad \sqrt{b} = \frac{\sqrt{d+c} + \sqrt{d-c}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{d - \sqrt{d^2 - c^2}}{2}$, $\dfrac{d + \sqrt{d^2 - c^2}}{2}$.

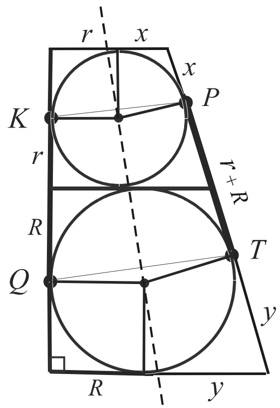
А н а л и з. Анализируя полученные выражения, замечаем, что $a + b = d$ (!). Как получить это соотношение? Его использование в системе вместе с уравнением (1) упростит ее. Вспомним, что для радиуса r вписанной в прямоугольную трапецию окружности верно соотношение: $r = ab : (a + b)$ (стр. 50), где a и b – основания трапеции.

Для наших трапеций получим: $AM = \dfrac{2a \cdot MN}{a + MN}$, $DM = \dfrac{2b \cdot MN}{b + MN}$.
Сумма левых частей равенств очевидно равна c ($AM + DM = AD$), а правых – $2MN$, т.к.

$$2MN\left(\frac{a}{a+MN} + \frac{b}{b+MN}\right) = 2MN\,\frac{2ab + MN(a+b)}{ab + MN^2 + MN(a+b)} = 2MN$$

(числитель и знаменатель дроби равны, потому что $MN^2 = ab$). Следовательно, $2MN = c$ и равенство (✷) примет вид: $a + b + c = c + d$. Отсюда $a + b = d$ и соотношение доказано.

Продолжим анализ. Нельзя ли без вспомогательного соотношения вывести равенство $a + b = d$? Обратим внимание на то, что в приведенных решениях существенную роль играет равенство (✷), которое следует из свойства описанного четырехугольника. Затем вспомним, что при доказательстве указанного свойства рассматриваются пары равных отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки. Изучим в нашей задаче отрезки, которые проведены к окружностям из вершин трапеций.



$a + b = x + r + y + R = (x + y) + (r + R)$ (обозначения приведены на рисунке);

$d = (x + y) + PT$. Следовательно, нужно доказать, что $PT = r + R$.

Действительно, в силу симметрии относительно линии центров $PT = KQ = r + R$ ($KPTQ$ – равнобедренная трапеция).

Таким образом, требуемое соотношение получено в результате всестороннего анализа без применения сложных свойств данной конфигурации фигур (в частности, подобия). Очевидно, что схемы подобных анализов решений не существует. Другие решения и другие схемы анализа возможны и в данной задаче. Так, можно рассмотреть гомотетию с центром в точке пересечения линии центров окружностей и прямой MN, переводящей центры окружностей друг в друга. Из свойств указанной гомотетии следует, что $MN = r + R$ или $2MN = c$. Это равенство можно доказать также используя метод площадей и формулы $S_{ABNM} = AB \cdot MN$ и $S_{CDMN} = DC \cdot MN$, верные для площадей наших трапеций. Сделайте модель или нарисуйте большой точный рисунок и продолжите самостоятельно анализ этой поучительной конфигурации.

С и н те з.

Рациональное решение:

Сводя в единое целое данные, добытые анализом, запишем его сокращенно:

Из $\triangle$ *BCH*: $\sqrt{CB^2 - BH^2} = CH = CD - DH = CD - AB = b - a$. Отсюда $b - a = \sqrt{d^2 - c^2}$ (1).

$a + b = (x + y) + (r + R)$; $d = (x + y) + PT$. Так как $PT = r + R$ (в силу симметрии относительно линии центров $PT = KQ = r + R$), то $a + b = d$ (2). Решив систему из уравнений (1) и (2), получим ответ.

Обобщение:

Результаты анализа позволяют сформулировать другие задачи:

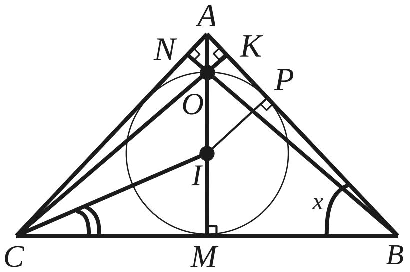
Прямая, параллельная основаниям данной прямоугольной трапеции, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

Доказать, что ее большая боковая сторона равна сумме оснований.

Доказать, что ее меньшая боковая сторона равна удвоенному общему основанию трапеций.

66.2. (№1085). Найти косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.

Решение



Пусть $AB = AC$, I – инцентр, O – ортоцентр. По условию задачи $O \in$ Окр (I, OI). Введем вспомогательный угол: $\angle B = x$. Тогда $\angle BCK = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - x$, потому что $CK \perp AB$.

Из прямоугольных треугольников *MCO* и *MCI*: $\angle MCO = \angle BCK$ и $MC = MO \operatorname{ctg}(90^\circ - x) = MO \operatorname{tg} x$ (1). $\angle MCI = x/2$ ($\angle B = \angle C$, *CI* – биссектриса); $MC = MI \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = ½\, MO \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ (2).

Из (1) и (2) имеем: $MO \operatorname{tg} x = ½\, MO \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ или $2 \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

Решим это тригонометрическое уравнение относительно $\cos x$:

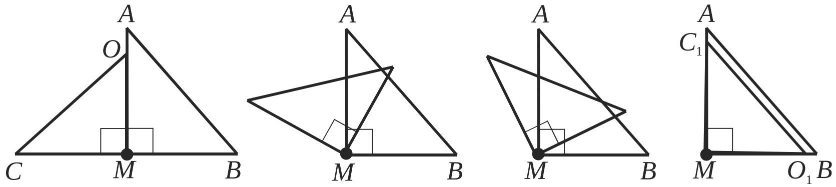
$$\frac{2\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{1-\cos x},\ \frac{2}{\cos x} = \frac{1}{1-\cos x},\ 2 = 3\cos x\ (\sin x \neq 0),\ \cos x = \frac{2}{3}.$$

Ответ: 2/3.

А н а л и з. Перейдем в тригонометрическом уравнении к длинам отрезков и изучим отношения в получившейся пропорции.

$2 \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ равносильно $\frac{2AM}{MB} = \frac{CM}{MI}$ или $\frac{AM}{MB} = \frac{CM}{MO}$ (✳).

Из пропорции (✳) следует, что $\triangle BAM \sim \triangle OCM$. Подобие этих прямоугольных треугольников не очевидно, но они подобны, так как $\angle OCM = \angle BAM$. Стороны указанных углов лежат на взаимно перпендикулярных прямых: $MC \perp MA$, $CO \perp AB$. При этом отрезок *CO* не пересекается с прямой *AB*, что и делает равенство углов менее наглядным. На серии рисунков ниже изображен поворот треугольника *OCM* вокруг точки *M* на 90º по часовой стрелке. В результате этого преобразования луч *MC* перейдет в луч *MA*, луч *MO* – в луч *MB*, а прямые *CO* и *AB* станут параллельными.



Подобие треугольников можно доказать, используя свойство транзитивности. $\triangle BAM \sim \triangle OCM$, т.к. каждый из них подобен треугольнику *AOK* ($\angle COM = \angle AOK$ как вертикальные, а углы *AOK* и *ABM* дополняют угол *OAK* до прямого).

Можно ли применить подобие треугольников в решении? Пропорция (✳) содержит "неудобный" отрезок *AM*. С этой целью продолжим анализ. $\triangle BAM \sim \triangle AIP$, т.е. $\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{IP}$, *IP* – радиус.

Т.к. $IP = ½\, MO$, то $\frac{AM}{MB} = \frac{2(AB - BP)}{MO}$, $\frac{AM}{MB} = \frac{2(AB - MB)}{MO}$. Отсюда $2MB\,(AB - MB) = AM \cdot MO$ или, с учетом пропорции (✳), $2MB\,(AB - MB) = MB \cdot CM$. Разделив на *MB*, получим $2AB - 2MB = CM$ или $2AB = 3MB$ ($CM = MB$). Таким образом, $\frac{MB}{AB} = \frac{2}{3} = \cos B$.

Решение найдено. Видим, что не обязательно применять формулы тригонометрии даже тогда, когда требуется найти косинус угла. Анализируя ход решения, обратим внимание на то, что в двух парах подобных треугольников, которые рассматривались, треугольник *BAM* был общий.

Итак, $\triangle BAM \sim \triangle OCM$ и $\triangle BAM \sim \triangle AIP$. Следовательно, по свойству транзитивности $\triangle OCM \sim \triangle AIP$. Значит, $\dfrac{CM}{MO} = \dfrac{AP}{IP}$ (обратите внимание, что берется отношение катетов, хотя искомым является отношение катета к гипотенузе).

Имеем: $\dfrac{CM}{MO} = \dfrac{2(AB - BP)}{MO}$, $BM = 2(AB - MB)$, $2AB = 3MB$, т.е. рационально рассматривать пропорцию, которая не содержит явно отрезки искомого отношения *MB* и *AB*.

<u>С и н т е з</u>.

Рациональное решение:

$\triangle OCM \sim \triangle AIP$ (каждый из этих треугольников подобен треугольнику *AOK*). Значит, $\dfrac{CM}{MO} = \dfrac{AP}{IP}$ или $\dfrac{MB}{MO} = \dfrac{2AP}{MO}$, т.к. $MB = CM$ и $MO = 2IP$. Отсюда $MB = 2AP$ или $MB = 2(AB - MB)$, $3MB = 2AB$, т.е. $MB : AB = \cos B = 2 : 3$.

Обобщение:

Изученные свойства конфигурации позволяют сформулировать другие задачи и содержательные вопросы:

В равнобедренном треугольнике точка пересечения высот лежит на вписанной окружности.

Доказать, что половина его основания есть среднее пропорциональное между диаметром этой окружности и высотой, проведенной к основанию.

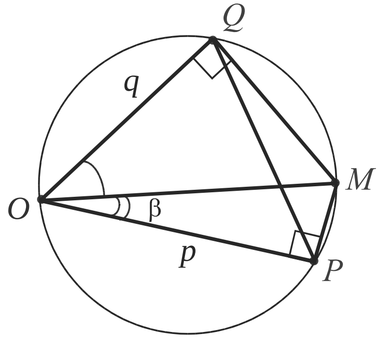
Доказать, что радиус вписанной окружности составляет третью часть длины отрезка, соединяющего ортоцентр с вершиной основания данного треугольника.

- Могут ли быть подобными половины двух треугольников, если сами треугольники не являются подобными?
- Можно ли, не проводя вычислений, сравнить искомый угол *B* с углом 45º?
- Имеет ли решение обратная задача?

В двух последующих задачах рациональные решения будем отыскивать *путем выявления и обоснования характерных свойств конфигурации и испытывая различные методы*.

67.1. [25, с.315]. Внутри острого угла α взята точка *M*. Основания *P* и *Q* перпендикуляров, опущенных из точки *M* на стороны угла, удалены от вершины *O* угла на расстояния $OP = p$, $OQ = q$. Найти углы, на которые прямая *OM* делит угол α.

<u>*Решение*</u>



Какое главное свойство полученной конфигурации? Очевидно – образовавшийся четырехугольник *OPMQ*, у которого $\angle P = \angle Q = 90°$.

Такой четырехугольник может быть вписан в окружность с диаметром *MO*. Следовательно, необходимо использовать описанную окружность как вспомогательную фигуру.

Обозначим угол *MOP* через β и, проведя отрезок *PQ*, выразим его длину из треугольника *OPQ* двумя способами – по теореме косинусов и по следствию из теоремы синусов. $PQ = \sqrt{p^2 + q^2 - 2pq\cos\alpha}$.

$PQ = MO \sin\alpha$, а т.к. $MO = p : \cos\beta$, то $PQ = p \sin\alpha : \cos\beta$.

По свойству транзитивности $\cos\beta = p\sin\alpha : \sqrt{p^2 + q^2 - 2pq\cos\alpha}$.

Ответ: $\beta = \arccos \dfrac{p\sin\alpha}{\sqrt{p^2 + q^2 - 2pq\cos\alpha}}$, $\alpha - \beta$.

(Применение тригонометрии).

Вторая диагональ *MO* четырехугольника *OPMQ* может быть "транзитивной"?

$\angle MOQ = \alpha - \beta$. Из прямоугольных треугольников *MOQ* и *MOP*: $MO = \dfrac{q}{\cos(\alpha - \beta)}$, $MO = \dfrac{p}{\cos\beta}$.

Значит, $q\cos\beta = p(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$ или $q = p\cos\alpha + p\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$, т.к. $\cos\beta \neq 0$.

Имеем: $\operatorname{tg}\beta = (q - p\cos\alpha) : (p\sin\alpha)$.

(В равносильности ответов можно убедиться с помощью тригонометрического тождества $1 + \operatorname{tg}^2\beta = 1/\cos^2\beta$).

(Теорема Птолемея).

Если использование каждой диагонали в отдельности дало способ решения, то можно ли их использовать в процессе решения вместе: $PQ \cdot MO = OP \cdot MQ + OQ \cdot MP$**?**

Имеем: $MO \sin\alpha \dfrac{p}{\cos\beta} = p \cdot MO \sin(\alpha - \beta) + q \cdot MO \sin\beta$ или

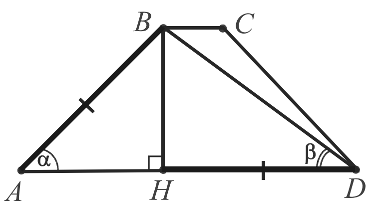
$\dfrac{p\sin\alpha}{\cos\beta} = p(\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta) + q\sin\beta$.

Отсюда $p\sin\alpha\,(1/\cos\beta - \cos\beta) = \sin\beta\,(q - p\cos\alpha)$,
$\operatorname{tg}\beta = (q - p\cos\alpha) : (p\sin\alpha)$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{q - p\cos\alpha}{p\sin\alpha}$, $\alpha - \operatorname{arctg}\dfrac{q - p\cos\alpha}{p\sin\alpha}$.

67.2. [27, с.257]. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{2/3}$. Найти углы трапеции.

<u>*Решение*</u>



Что нужно выделить в условии этой задачи? Абсолютно очевидно то, что равнобедренная трапеция является вписанной и описанной.

Необходимым и достаточным условием выполнения этого требования является равенство двух отрезков: боковой стороны равнобедренной трапеции и ее средней линии. Итак, в данной конфигурации <u>$AB = DH = CD$</u>.

На рисунке BH – высота трапеции, BD – ее диагональ, отрезок DH – проекция диагонали, равная средней линии. Обозначим через R радиус описанной окружности, а искомый острый угол трапеции через α, т.е. $\angle BAD = \angle BAH = \angle BDA = \alpha$.

Обратим внимание на три отрезка, выходящие из вершины B: высоту BH, выражаемую через R по условию, боковую сторону AB, выражаемую через BH (значит, и через R) и α, диагональ BD, выражаемую через R и α по следствию из теоремы синусов.

Наконец, $DH = AB$, поэтому все стороны прямоугольного треугольника BDH могут быть выражены через R и α, т.е. величина R используется как промежуточная, а теорема Пифагора даст уравнение для отыскания α.

Итак, замена катета DH боковой стороной AB – использование основного свойства конфигурации.

Имеем: $BH = R\sqrt{2/3}$, $DH = AB = \dfrac{R}{\sin\alpha}\sqrt{2/3}$, $BD = 2R\sin\alpha$,

$BD^2 = BH^2 + DH^2$. $4R^2\sin^2\alpha = \dfrac{2}{3}R^2 + \dfrac{2R^2}{\sin^2\alpha}$, $6\sin^2\alpha = 1 + \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$(R \neq 0)$, $6\sin^4\alpha - \sin^2\alpha - 1 = 0$. Отсюда $\sin^2\alpha = ½$, $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$,

$\cos 2\alpha = 0$, $\alpha = 45°$, т.к. α – острый угол. $\angle C = \angle B = 135°$.

Ответ: 45°, 135°, 135°, 45°.

(Применение тригонометрии, вспомогательный угол).

Пусть $\angle BDA = \beta$ – вспомогательный. Тогда, т.к. $AB = DH$, то $\dfrac{BH}{AB} = \dfrac{BH}{DH}$ или $\sin\alpha = \operatorname{tg}\beta$.

Уравнение получено из основного свойства конфигурации. Еще одно уравнение, связывающее величины α и β, дает условие задачи. Используя следствие из теоремы синусов, получаем

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{BH}{R} = \dfrac{BD\sin\beta}{R} = \dfrac{2R\sin\alpha\cdot\sin\beta}{R}$. Отсюда $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

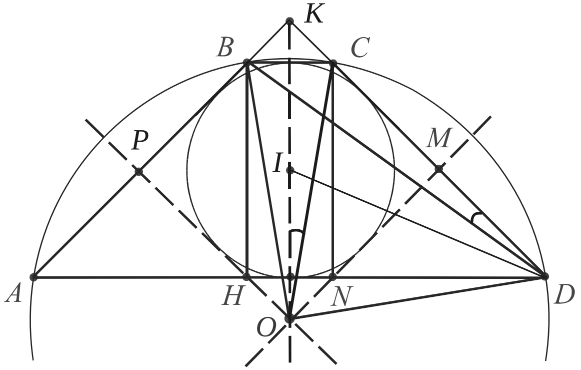
Имеем: $\operatorname{tg}\beta\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\dfrac{1-\cos^2\beta}{\cos\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $\sqrt{6}\cos^2\beta + \cos\beta - \sqrt{6} = 0$,

$\cos\beta = \dfrac{-1 \pm 5}{2\sqrt{6}}$. Т.к. β – острый угол, то $\cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{3/2 - 1} = 1/\sqrt{2} = \sin\alpha$, $\alpha = 45°$.

Полученный ответ и то, что $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{DH}{BD} = \dfrac{AB}{BD}$ (отношение боковой стороны к диагонали оказалось равным отношению, заданному в условии), подсказывают продолжить анализ.

(Метод координат).



Дополним рисунок, проведя серединные перпендикуляры OP, OK, OM, где O – центр описанной окружности, $K = AB \cap CD$, I – инцентр.

Пусть O (0; 0) и ось ординат принадлежат прямой OK, N $(a; b)$, где N – основание высоты трапеции CN.

Тогда H $(-a;\ b)$, C $(a;\ b+h)$, D $(x_0;\ b)$, h – длина высоты. Найдем x_0, используя равенство $DC^2 = DH^2$, а затем координаты точки M как середины стороны DC.

$$(x_0 - a)^2 + h^2 = (x_0 + a)^2,\ \ x_0 = \frac{h^2}{4a},\ \ M\left(\frac{a}{2} + \frac{h^2}{8a};\, b + \frac{h}{2}\right).$$

Характерное свойство конфигурации $DC = DH$ использовано для определения абсциссы точки D. Теперь заданное отношение преобразуем в координатную форму:

$$2R^2 = 3H^2,\ 2(a^2 + (b+h)^2) = 3h^2,\ \ 2a^2 + 2b^2 + 4bh = h^2\ (*).$$

Подставляя в уравнение $y = \dfrac{b}{a}x$ прямой ON координаты точки M, получим $b + \dfrac{h}{2} = \dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{2} + \dfrac{h^2}{8a}$ или $b + h = \dfrac{bh^2}{4a^2}$. С учетом (*) имеем: $b + h = \dfrac{b}{4a^2}\cdot(2a^2 + 2b^2 + 4bh)$. Отсюда $(b + 2h)(a^2 - b^2) = 0$.

Т.к. первый множитель не обращается в нуль, то $a^2 - b^2 = 0$ или $a = b$. Итак, если $a = b$, то точки O, N, M лежат на одной прямой. Это равносильно тому, что $\angle HNO = \angle MND = \angle MDN = 45°$.

(Обратный ход).

Применим идею обратного хода в нашей задаче, предположив, что $\angle A = \angle D = 45°$. Тогда, если $BH = h$, то $AB = DH = h\sqrt{2}$.

Из $\Delta\ BHD$ по теореме Пифагора $BD = h\sqrt{3}$, а из $\Delta\ BAD$ по следствию из теоремы синусов $BD = 2R\sin 45° = R\sqrt{2}$.

Имеем следствие $h\sqrt{3} = R\sqrt{2}$, истинное в силу условия задачи. Возможно, так и действовали ее составители, определяя коэффициент отношения $R : h$ при $\alpha = 45°$.

Если $\alpha = 30°$, то $BD = 2R\sin 30° = R$ и $BD = h\sqrt{5}$.

В этом случае $R : h = \sqrt{5} : 1$.

Обратимость преобразований проверим в общем виде (см. первое решение задачи).

$BD = 2R\sin\alpha = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\,R\sin\alpha = \sqrt{2}\cdot h\sqrt{3}\sin\alpha = h\sqrt{6}\sin\alpha.$

$DH = AB = h\sqrt{6\sin^2\alpha - 1}.$

Из $\Delta\,ABH$ $\sin\alpha = h : (h\sqrt{6\sin^2\alpha - 1})$.

Отсюда $6\sin^4\alpha - \sin^2\alpha - 1 = 0$ и $\alpha = 45°$.

Предоставляем читателю продолжить анализ задачи, обращая внимание на следующие идеи:

а) доказать, что $\angle AKD = 90°$ или $k_{AB}\cdot k_{CD} = -1$;

б) доказать, что $\angle BOD = 90°$ или $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{OD} = 0$;

в) доказать, что MO – касательная к окружности, вписанной в трапецию;

г) доказать, что $AB : BD = \sqrt{2} : \sqrt{3}$;

д) использование свойств инцентра I;

е) использование геометрических преобразований: серединные перпендикуляры OP, OK, OM – это и оси симметрии; следует ли рассматривать поворот луча OB на угол BOK по часовой стрелке (углы CDB и COB соответственно вписанный и центральный, опирающиеся на одну и ту же дугу BC окружности, поэтому $\angle CDB = \angle BOK$)?

6.2. Эвристические приемы и общематематические идеи

Целью настоящего раздела является раскрытие на конкретных примерах некоторых достаточно общих приемов целенаправленного поиска решений геометрических задач.

Поиск решений задач, особенно геометрических, – сложный и многогранный мыслительный процесс, который иногда даже трудно объяснить. Поэтому, наверное, в текстах решений так часто встречаются фразы: "очевидно…", "легко видеть…", "заметим…".

Невозможно учесть все индивидуальные особенности человека по восприятию и усвоению знаний; очень сложно богатство методов, идей и приемов привести в систему, которую можно было бы предлагать для использования в обучении как универсальную. Реализация такой деятельности многовариантна и неалгоритмична. Но практика убеждает, что *алгоритмический подход*, элементы которого предлагаются в этой книге, – необходимая грань процесса, а применение задач-теорем – возможный способ его реализации. Абсолютно очевидно, что *объем начальных сведений* и *систематизация знаний* необходимы. Необходимы также *желание* решить задачу, *изобретательность* и "*настойчивый анализ*". Мы видели, какую важную роль играет всесторонний анализ решения, стремление осмысленно варьировать соответствующие свойства конфигурации. Но анализ проводился уже после того, как задача была решена, а на контрольной работе, конкурсном экзамене или олимпиаде по математике важно решить задачу. *Как искать решение, какие идеи и приемы способствуют его поиску*?

В процессе поиска решений задач используются различные ***эвристические приемы и общематематические идеи***.

Аналогия – один из главных эвристических приемов. Аналогия означает сходство. Умозаключения по аналогии очень важны. Первооткрыватель законов небесной механики, немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер, писал: "*Я больше всего дорожу Аналогиями, моими самыми верными учителями. Они знают все секреты Природы, и ими меньше всего следует пренебрегать*".

Но заключение по аналогии не может служить доказательством. На это многократно обращали внимание логики, философы, математики и др. Однако, аналогия способствует возникновению гипотез, как и неполная индукция, которые в огромном количестве случаев все же оказываются верными. На аналогии основывается и процесс обобщения, который является одним из самых важных средств самообучения и углубления имеющихся знаний.

Неполная индукция – эвристический прием, который часто применяется в естественных науках. В переводе с латыни "индукция" означает "наведение": рассмотрение частных случаев наводит на решение задачи в общем случае. Особенно полезно в качестве частных случаев брать различные "крайние" случаи. Не давая доказательства того или иного утверждения, разбор конечного числа случаев играет важную роль: он помогает угадать правильную формулировку, увидеть формулу, закономерность и т.п.

Принцип парадигмы – эвристический прием, состоящий в переформулировке утверждения с целью выбора из возможных равносильных форм той, которая сближает заключение доказываемого предложения с условиями в ходе доказательства или связывает искомые величины с данными и промежуточными в ходе вычислений.

Преобразование задачи – метод, который заключается в преобразовании задачи в эквивалентную, но более простую и знакомую. Например, с помощью различных геометрических преобразований (параллельного переноса, симметрии, поворота, гомотетии и т.п.) или введения вспомогательных элементов (отрезка, угла, окружности, площади и т.п.).

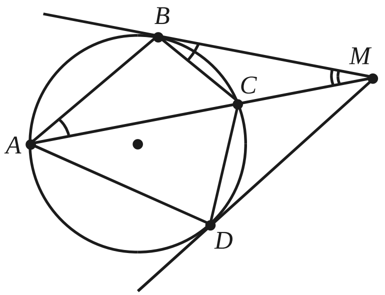
Кодирование задачи – метод, предполагающий переход от одного языка к другому с помощью кодирования объектов задачи. Например, переход от геометрической задачи к алгебраической с помощью координатного метода или переход к компьютерной программе с помощью языка программирования.

Сведение задачи к подзадачам – один из общих методов (подходов) к решению задач. Исходная задача последовательно сводится к набору подзадач – задач, решения которых или известны (например, задача решалась ранее), или элементарны. В этом процессе анализ соединяется с синтезом, применяются различные эвристические приемы и общематематические идеи.

На практике различные пути поиска решений, как правило, сочетаются.

68.1. *ABCD* – вписанный четырехугольник. Касательные, проведенные в точках *B* и *D*, пересекаются в точке *M*, лежащей на прямой *AC*. Доказать, что $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

<u>*Доказательство*</u>



Начнем поиск решения этой задачи с конца, изучая равенство $AB \cdot CD = BC \cdot AD$, которое нужно доказать.

Множители в произведениях не являются, например, отрезками пересекающихся хорд, поэтому перейдем к равносильной пропорции: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$ (✳).

Пропорции, как правило, следуют из подобия треугольников. Наша пропорция "указывает" на треугольники *ABC* и *ADC*, которые, очевидно, не подобны, так как составляют произвольный вписанный четырехугольник.

Вспомним *свойство транзитивности* для отношения равенства: $a = b$, если $a = \boldsymbol{c}$ и $b = \boldsymbol{c}$. Попробуем найти вспомогательную величину $\boldsymbol{c}$.

Что подсказывает возможность успешного поиска? В первую очередь – это равенство отрезков *BM* и *DM* касательных, а также наличие у пар треугольников общих сторон.

Изучив все треугольники, сделаем вывод о подобии треугольников *ABM*, *BCM* по двум углам: $\angle M$ – общий, а $\angle BAC = \angle CBM$, потому что они измеряются половиной одной и той же дуги *BC*, как вписанный угол и угол между касательной и хордой. Из подобия имеем пропорцию: $\frac{AB}{BC} = \frac{BM}{CM}$, которая содержит первое отношение пропорции (✳).

Теперь ясно, что её второе отношение можно получить аналогично, рассматривая пару подобных треугольников под прямой *AM*, т.е. *ADM* и *DCM*. Получим $\frac{AD}{CD} = \frac{DM}{CM}$.

Так как $BM = DM$, то правые части двух последних пропорций равны, т.е. $\boldsymbol{c} = \frac{BM}{CM} = \frac{DM}{CM}$. Имеем: $\frac{AB}{BC} = \boldsymbol{c} = \frac{AD}{CD}$, ч.т.д.

В решении применялись задачи-теоремы 2, 4, 5.

Запишем теперь решение кратко, проделывая все рассуждения в обратном порядке.

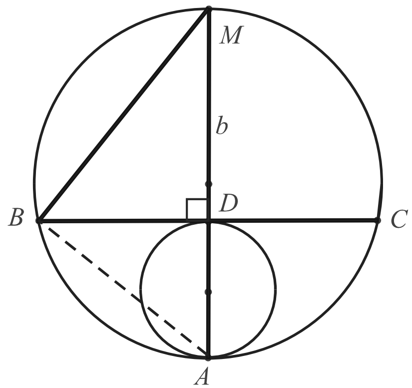
$\triangle ABM \sim \triangle BCM$ по двум углам: $\angle M$ – общий, $\angle BAC = \angle CBM$. Отсюда $\frac{AB}{BC} = \frac{BM}{CM}$.

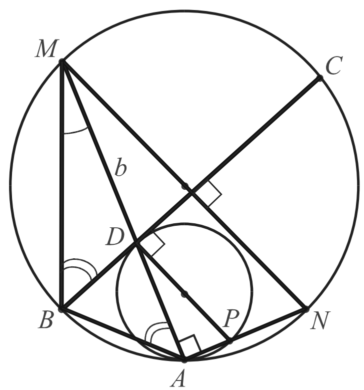
Аналогично, из подобия треугольников *ADM* и *DCM* следует: $\frac{AD}{CD} = \frac{DM}{CM}$. $BM = DM$ как отрезки касательных, поэтому правые части пропорций равны и по свойству транзитивности $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$, т.е. $AB \cdot CD = BC \cdot AD$, ч.т.д.

68.2. (№ 3599). Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке *A*. Хорда *BC* большей окружности касается меньшей в точке *D*. Прямая *AD* вторично пересекает большую окружность в точке *M*. Найдите *MB*, если $MA = a$, $MD = b$.

<u>*Решение*</u>

Равенство, содержащееся в условии задачи 68.1, послужило подсказкой и отправной точкой в поиске ее решения.





С чего начать поиск решения в этой задаче? Выполнив несколько различных рисунков, обратим внимание на особое "крайнее" положение хорды BC (рис. слева), в котором она перпендикулярна линии центров окружностей. В этом случае достаточно соединить точки A и B и, рассматривая катет MB как среднепропорциональный отрезок, записать $MB^2 = MA \cdot MD = ab$. Не распространяется ли эта зависимость (подобие) на общий случай?

Проведем диаметр DP ($DP \perp BC$) и, обозначив точку пересечения луча AP с большей окружностью через N, соединим N с M.

$\angle DAP = 90°$ по замечательному свойству окружности. Отсюда $\angle MAN = 90°$, т.е. MN – диаметр, причем $MN \perp BC$, т.к. $MN \parallel DP$.

Этот диаметр делит хорду BC пополам. Значит, равны соответствующие дуги MB, MC и опирающиеся на них вписанные углы MAB, MBC. У "трансформированных" треугольников MBD и MBA есть также общий угол. Следовательно, они остаются подобными.

Имеем: $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{MD}{MB}$ или $MB^2 = MA \cdot MD = ab$. *Ответ*: $\sqrt{ab}$.

В решении применялись задачи-теоремы 1, 4, 23.

69. $ABCD$ – вписанный четырехугольник. Пусть P, Q, R – основания перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые BC, CA, AB соответственно. Доказать, что $PQ = QR$ тогда и только тогда, когда биссектрисы углов ABC и ADC пересекаются в точке, лежащей на прямой AC.

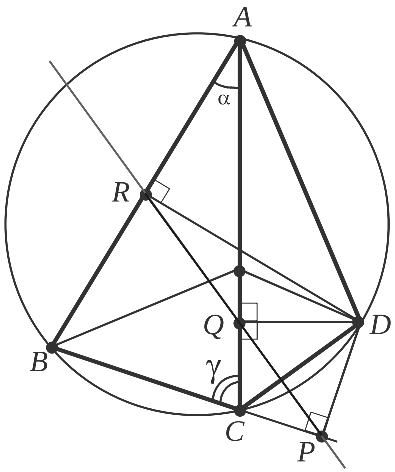
(XLIV Международная математическая олимпиада)

Доказательство

По свойству биссектрис внутренних углов B и D треугольников ABC и ACD условие задачи равносильно пропорции $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{CD}$ (✳) или равенству $AB \cdot CD = BC \cdot AD$. Вспомним, что аналогичное равенство доказывалось выше в задаче 68.1. Но в данной задаче требуется доказать, что это условие является необходимым и достаточным для выполнения равенства отрезков PQ и QR.

Как и в процессе решения указанной задачи, можно заменять отношения пропорции (✳) равносильными, используя подобие треугольников и прямую Симпсона (см. задачу 17.3); можно также

решать задачу координатным методом, выбрав точку R за начало прямоугольной системы координат, координатные оси, содержащими прямые DR и AB, и, убедившись, например, что при заданном условии отрезок DQ служит медианой треугольника RPD. Но



рациональное решение должно использовать наиболее характерные свойства заданной конфигурации – наличие трех прямых углов. Это указывает на поиск вспомогательных окружностей.

Действительно, существует окружность, описанная около четырехугольника $DPCQ$ с диаметром CD так как углы DPC и DQC – прямые. Кроме того, существует окружность, описанная и около четырехугольника $ADQR$. Так как $\angle ARD = \angle AQD = 90°$, то ее диаметром служит отрезок AD.

Обратим внимание на то, что *диаметры этих окружностей составляют второе отношение пропорции* (✳).

Поэтому попробуем опять применить свойство транзитивности. Спрашивается, какие вспомогательные величины с этой целью можно было бы ввести в данной задаче? Целенаправленный поиск позволяет обнаружить, что здесь надо использовать синусы углов.

По теореме синусов из $\triangle ABC$: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ (α и γ – величины углов A и C).

По следствию из этой теоремы: $\sin\alpha = \dfrac{QR}{AD}$ ($\triangle AQR$ вписан в окружность с диаметром AD) $\sin\gamma = \sin(180° - \gamma) = \dfrac{PQ}{CD}$ ($\triangle CPQ$ вписан в окружность с диаметром CD).

Имеем: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{PQ}{CD} : \dfrac{QR}{AD} = \dfrac{AD}{CD} \cdot \dfrac{PQ}{QR}$.

Отсюда следует, что пропорция (✳) истинна тогда и только тогда, когда $PQ = QR$, ч.т.д.

В решении применялись задачи-теоремы 4, 9, 15, 17.

Полезно связать и обобщить две последние задачи (продолжите их анализ, выполнив точный рисунок).

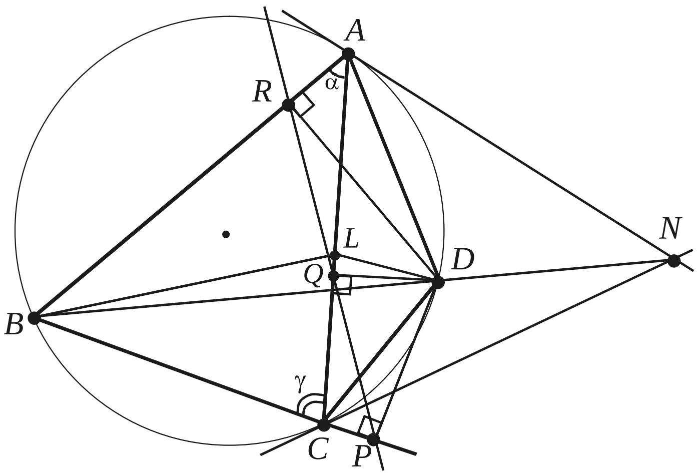
Так, можно сформулировать следующие задачи.

ABCD – вписанный четырехугольник. Касательные, проведенные в точках A и C, пересекаются в точке N, лежащей на прямой BD. Доказать, что:

1) *Биссектрисы углов B и D пересекаются на диагонали AC в точке L.*

2) *PQ = QR, где P, Q, R – основания перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые BC, CA, AB соответственно.*

3) *Произведения боковых сторон данного четырехугольника равны половине произведения его диагоналей.*



70.1. Пусть A – одна из точек пересечения двух окружностей с центрами O_1 и O_2, P_1P_2 и Q_1Q_2 – общие касательные, M_1 и M_2 – середины хорд P_1Q_1 и P_2Q_2 этой окружности. Доказать равенство углов O_1AO_2 и M_1AM_2.

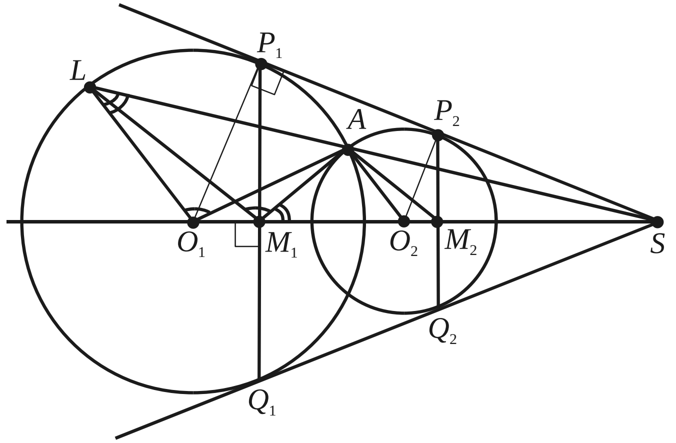
(XXIV Международная математическая олимпиада)

Доказательство

Воспользуемся снова поиском решения с конца.

Как можно доказать равенство двух углов? Путем вычислений, используя алгебраический подход, или путем доказательств, используя геометрический подход. Первый может потребовать применения формул тригонометрии, теорем синусов и косинусов, координатного метода и т.п.; второй – равенства или подобия треугольников, геометрических преобразований и т.п.

Остановимся на втором подходе. Изучая рисунок, замечаем, что для равных окружностей искомые углы совпадают, поэтому будем считать их радиусы различными. Убеждаемся в том, что его нужно дополнить так, чтобы образовалось больше углов и треугольников.



С этой целью продлим SA до пересечения с большей окружностью в точке L и соединим точку L с точками O_1 и M_1. Видим, что это эффективное дополнительное построение, так как при гомотетии с центром S, переводящей меньшую окружность в большую, прямая O_2A перейдет в прямую O_1L, а прямая M_2A – в прямую M_1L, т.е. $O_2A \parallel O_1L$, $M_2A \parallel M_1L$.

Это дает возможность вместо равенства углов O_1AO_2 и M_1AM_2 доказывать равенство соответственно равных им углов AO_1L и AM_1L (обозначены на рисунке одной дугой), но лежащих внутри одной окружности.

Угол AO_1L – центральный, а угол AM_1L – угол с вершиной внутри окружности. Сравнить непосредственно их нельзя, но заметим, что эти углы опираются на одну и ту же дугу AP_1L.

Отсюда следует, что они будут равны в том случае, если будут вписанными в окружность, а значит, четырехугольник LO_1M_1A должен быть вписанным. Вспомним, что для этого необходимо и достаточно, чтобы $\angle ALO_1 + \angle AM_1O_1 = 180^\circ$.

Последнее условие выполняется, если истинно равенство: $\angle ALO_1 = \angle AM_1S$ (обозначены на рисунке двумя дугами), так как углы AM_1S и AM_1O_1 – смежные и $\angle AM_1S + \angle AM_1O_1 = 180^\circ$.

Продолжим замену утверждений равносильными.

Откуда может теперь вытекать равенство: $\angle ALO_1 = \angle AM_1S$? Изучив треугольники, обращаем внимание на то, что у треугольников SLO_1 и SAM_1, содержащих эти углы, угол S – общий, т.е. равенство углов может вытекать из их подобия.

Если $\triangle SLO_1 \sim \triangle SM_1A$, то должна выполняться одна из пропорций: $SA : SO_1 = SM_1 : SL = AM_1 : LO_1$.

Перебрав произведения в пропорциях, выберем первую, так как оба произведения $SA \cdot SL$ и $SM_1 \cdot SO_1$ можно получить из свойств имеющейся конфигурации.

Действительно, обратим внимание на то, что отрезок SP_1 связан со всеми четырьмя отрезками первой пропорции: он является и отрезком касательной, и средним пропорциональным отрезком (как катет прямоугольного треугольника SO_1P_1).

Итак, $SA \cdot SL = SP_1^2$ и $SM_1 \cdot SO_1 = SP_1^2$, т.е. пропорция верна.

Поиск решения закончен.

В решении применялись задачи-теоремы 5, 17, 23, 24, а также теорема о смежных углах, свойства гомотетии, свойства подобных треугольников, свойство транзитивности, свойства пропорций.

Нисходящий анализ в этой задаче может показаться искусственным и сложным, но и задача сложная. Решения многошаговых задач появляются в процессе подобных рассуждений. Найти сразу прямое решение нелегко. Ему обязательно предшествует цепочка рассуждений и проб, аналогий и выводов.

Выполнив обратный ход, запишем прямое решение задачи.

Так как $SP_1^2 = SA \cdot SL$ и $SP_1^2 = SM_1 \cdot SO_1$, то по транзитивности $SA \cdot SL = SM_1 \cdot SO_1$, что эквивалентно пропорции: $\dfrac{SA}{SO_1} = \dfrac{SM_1}{SL}$.

Отсюда $\triangle SLO_1 \sim \triangle SAM_1$.

Из подобия следует, что $\angle ALO_1 = \angle AM_1S$.

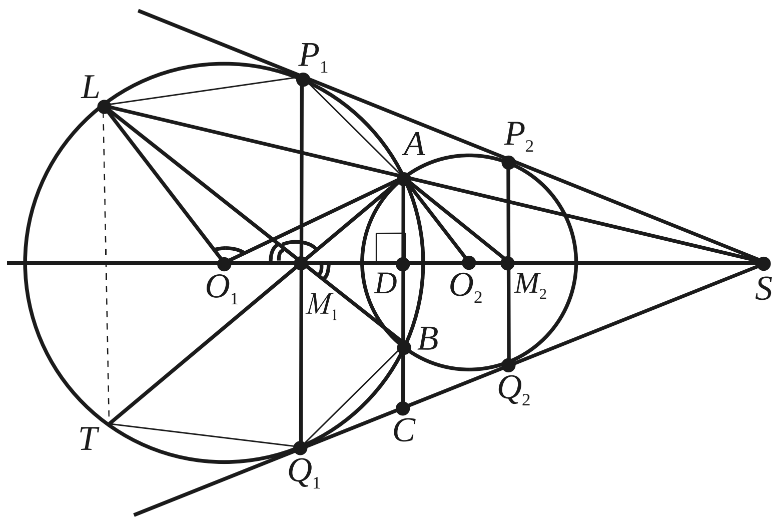
Имеем: $\angle ALO_1 = \angle AM_1S$ и $\angle AM_1S + \angle AM_1O_1 = 180^\circ$ (по теореме о смежных углах).

Таким образом, $\angle ALO_1 + \angle AM_1O_1 = 180^\circ$ и существует окружность, описанная около четырехугольника LO_1M_1A. Вписанные в эту окружность углы AO_1L и AM_1L равны, так как они опираются на одну и ту же дугу AP_1L.

При гомотетии с центром S, переводящей меньшую окружность в большую, прямая O_2A переходит в прямую O_1L, а прямая M_2A – в прямую M_1L, т.е. $O_2A \parallel O_1L$, $M_2A \parallel M_1L$. Стороны пар углов AO_1L, O_1AO_2 и AM_1L, M_1AM_2 соответственно параллельны. Отсюда $\angle AO_1L = \angle O_1AO_2$ и $\angle AM_1L = \angle M_1AM_2$.

По доказанному углы AO_1L и AM_1L равны, поэтому $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим другой способ решения этой задачи, который можно классифицировать как последовательное сведение исходной многошаговой задачи к набору более простых подзадач (стр. 159).



1) Докажем, что $\triangle M_1AM_2$ – равнобедренный.

Если B – вторая точка пересечения окружностей, то $AB \perp O_1O_2$. Пусть $C = AB \cap Q_1Q_2$. Тогда $CQ_1^2 = CA \cdot CB$.

С другой стороны, $CQ_2^2 = CA \cdot CB$. Отсюда $CQ_1 = CQ_2$, и по теореме Фалеса $DM_1 = DM_2$.

Значит, в треугольнике M_1AM_2 высота AD служит медианой, что и доказывает первое утверждение.

2) Докажем, что точки L, M_1 и B – коллинеарные.

Для доказательства принадлежности трех точек одной прямой убедимся, что углы $L\,M_1O_1$ и BM_1M_2 являются вертикальными.

Действительно, в силу гомотетичности $M_2A \parallel M_1L$, поэтому $\angle\, LM_1O_1 = \angle\, AM_2O_2$. Так как треугольник M_1AM_2 – равнобедренный, то $\angle AM_1M_2 = \angle\, AM_2M_1$ (подзадача 1).

Отсюда $\angle\, LM_1O_1 = \angle\, AM_1M_2$.

Но углы AM_1M_2 и BM_1M_2 равны (они симметричны относительно линии центров O_1O_2), поэтому углы LM_1O_1 и BM_1M_2 – вертикальные и утверждение о коллинеарности точек L, M_1 и B доказано.

3) Докажем, что $\angle\, LO_1A = \angle\, LM_1A$.

$\angle\, LO_1A$, как центральный, измеряется дугой AP_1L.

$\angle\, LM_1A$, как угол с вершиной внутри окружности, измеряется полусуммой дуг AP_1L и BQ_1T.

Замечаем, что указанные дуги равны в силу симметрии относительно линии центров O_1O_2, а значит и угол LM_1A измеряется дугой AP_1L, что доказывает утверждение о равенстве углов.

4) Докажем, что $\angle\, O_1AO_2 = \angle\, M_1AM_2$.

Из гомотетичности (см. первое решение) следует:

$\angle\, O_1AO_2 = \angle\, LO_1A$, $\angle\, M_1AM_2 = \angle\, LM_1A$.

Применяя эти равенства и утверждение 3), получаем требуемое равенство углов O_1AO_2 и M_1AM_2.

В решении применялись задачи-теоремы 5, 24, теорема о вертикальных углах, свойства гомотетии, симметрии, транзитивности, равнобедренного треугольника.

Следующую задачу обязательно решайте самостоятельно.

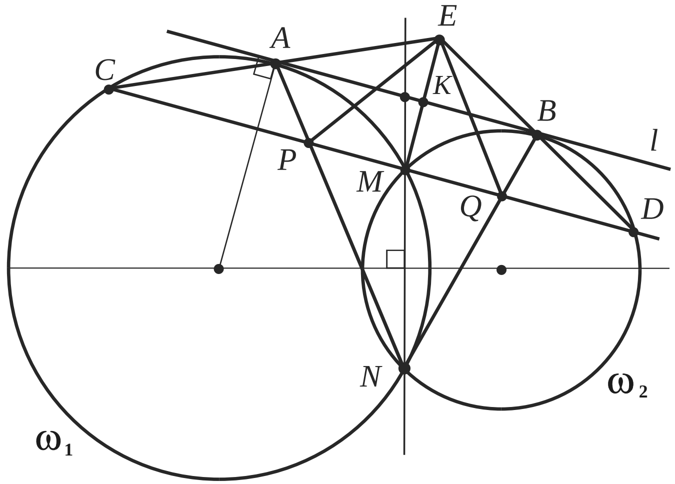
Внимательное изучение решения задачи 70.1 подскажет пути поиска ее решения.

70.2. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N. Прямая l – общая касательная к ω_1 и ω_2, такая, что M расположена к l ближе, чем N. Прямая l касается ω_1 в точке A, а ω_2 – в точке B. Прямая, проходящая через M параллельно l, пересекает вторично окружность ω_1 в точке C, а окружность ω_2 – в точке D. Прямые CA и DB пересекаются в точке E, прямые AN и CD – в точке P, прямые BN и CD – в точке Q. Доказать, что $EP = EQ$.

(XLI Международная математическая олимпиада)

<u>*Доказательство*</u>

Если окружности ω_1 и ω_2 равны, то утверждение задачи вытекает из симметрии отрезков EP и EQ относительно прямой MN. Считая радиусы окружностей различными, выполним чертеж.



Как можно доказать равенство двух отрезков?

Очевидно, с этой целью можно убедиться в том, что треугольник EPQ – равнобедренный.

Вспомним, что аналогичная подзадача встречалась в процессе решения предыдущей задачи (проанализируйте различия в расположении вершины треугольника, параллельных прямых и т.п.).

Сделаем аналогичный вывод:

$PM = MQ$, т.е. ME – медиана треугольника EPQ.

Теперь ясно, что остается доказать утверждение: медиана треугольника EPQ является его высотой.

Изучив параллельные прямые и секущие, легко определяем пары равных углов:

$\angle\, MCA = \angle\, KAE$ и $\angle\, MDB = \angle\, KBE$,

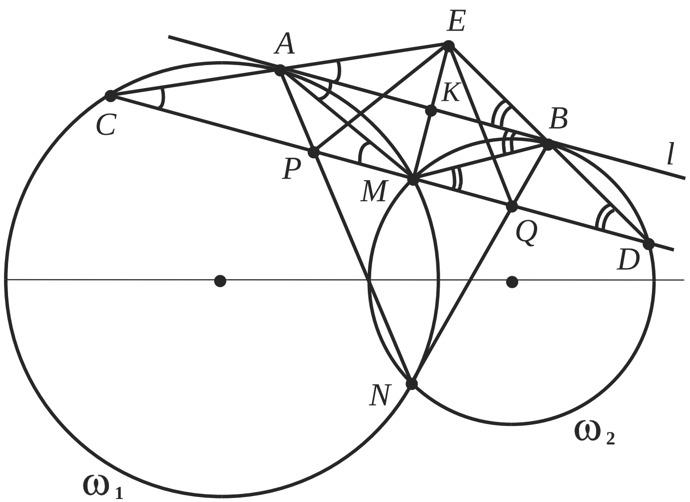
где K – точка пересечения медианы ME с касательной AB.

Какой шаг следующий?

Нужно ли дополнять чертеж?

Здесь мы подходим к самому трудному моменту решения.

Проводя различные хорды и секущие, замечаем главное: нужно соединить точку M с точками A и B, чтобы образовались новые равнобедренные треугольники CAM и DBM и продолжить сравнение углов.



Действительно, хорды CM и MD параллельны касательной, поэтому точки A и B делят соответственные дуги пополам.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны, а значит, для углов имеем две цепочки равенств:

$$\angle KAE = \angle MCA = \angle CMA = \angle MAK;$$

$$\angle KBE = \angle MDB = \angle DMB = \angle MBK.$$

Из равенств $\angle KAE = \angle MAK$, $\angle KBE = \angle MBK$ вытекает, что $EM \perp AB$ и $EM \perp PQ$.

Таким образом, треугольник EPQ – равнобедренный и $EP = EQ$, что и требовалось доказать.

Какие выводы можно сделать после внимательного анализа двух последних сложных задач?

Главный, вероятно, такой: поиск решения в первой задаче облегчил его во второй. Как видим, стандартные приемы встречаются и при решении содержательных геометрических задач.

6.3. Разные решения одной задачи

При решении задачи несколькими способами раскрываются возможности различных способов рассуждений, приводящих к одному и тому же результату, взаимосвязь и общность понятий. Кроме поиска оптимального решения, происходит эффективный самоконтроль и проверка. В итоге, с помощью конкретных задач вскрываются общие методы и происходят обобщения.

Рассмотрим решения нескольких задач разными способами.

71. Найти периметр прямоугольного треугольника, катеты которого относятся как 3 : 4, а длина биссектрисы прямого угла равна $24\sqrt{2}$.

Решение

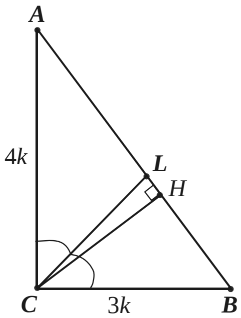


Рис.1

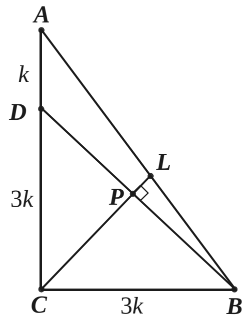


Рис.2

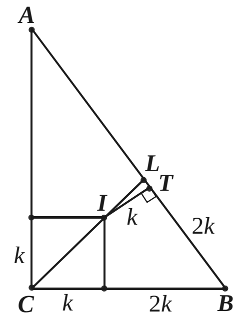


Рис.3

Введем обозначения и сделаем общие замечания: $\angle C = 90^\circ$, $CL = 24\sqrt{2}$, $BC = 3k$, $AC = 4k$, $AB = 5k$ (k – коэффициент пропорциональности); $AL : LB = 4 : 3$ (по свойству биссектрисы треугольника), $AL = 20k/7$, $LB = 15k/7$; $12k$ – искомый периметр.

(🗐 Высота, проведенная к гипотенузе).

Проведем высоту CH (рис. 1). $\triangle CBH \sim \triangle ABC$ с коэффициентом 3/5. Поэтому $BH = 9k/5$, $CH = 12k/5$.

$\triangle CLH$: $LH = 15k/7 - 9k/5 = 12k/35$. По теореме Пифагора

$$\left(\frac{12k}{35}\right)^2 + \left(\frac{12k\cdot 7}{5\cdot 7}\right)^2 = (24\sqrt{2})^2, \quad \left(\frac{12k}{35}\right)^2 = \frac{24\cdot 24\cdot 2}{50} = \left(\frac{24}{5}\right)^2.$$

$P_{ABC} = 12k = 7 \cdot 24 = 168$.

Ответ: **168**.

(🗐 Формула $CL = CP + PL$).

Проведем отрезок BD так, чтобы $CD = CB = 3k$ (рис. 2). Образуются равнобедренные прямоугольные треугольники CDB и CPB.

Имеем: $CP = PB = \dfrac{3k}{\sqrt{2}}$. Далее, из $\triangle\ BLP$ по теореме Пифагора:

$LP^2 = \dfrac{225k^2}{49} - \dfrac{9k^2}{2} = \dfrac{450-441}{2\cdot 49}k^2 = \left(\dfrac{3}{7\sqrt{2}}k\right)^2$, т.е. $LP = \dfrac{3k}{7\sqrt{2}}$. Так как $CL = CP + PL$, то $24\sqrt{2} = \dfrac{3k}{\sqrt{2}} + \dfrac{3k}{7\sqrt{2}}$, $16 = \dfrac{8}{7}k$, $k = 14$.

(здесь и дальше ограничимся вычислением коэффициента k).

(🗐 Формула $CL = CI + IL$).

Проведем $IT \perp AB$, где I – инцентр. Так как $I \in CL$, то $CL = CI + IL$. Вычислим радиус вписанной окружности. $IT = \dfrac{7k-5k}{2} = k$.

Отсюда $CI = k\sqrt{2}$. Из $\triangle\ ILH$ ($\angle\ IHL = 90°$) по теореме Пифагора: $IL = \sqrt{k^2 + \dfrac{k^2}{7}} = \dfrac{5\sqrt{2}k}{7}$. Так как $CL = CI + IL$, то $24\sqrt{2} = k\sqrt{2} + \dfrac{5\sqrt{2}k}{7}$, $24 = \dfrac{12}{7}k$, $k = 14$.

(🗐 Теорема косинусов).

Применим теорему косинусов в треугольнике CLB (рис.1), считая, что $k = 7t$, т.е. $BC = 21t$, $LB = 15t$.

Уменьшив в три раза все стороны треугольника ($CL = 8\sqrt{2}$, $BC = 7t$, $LB = 5t$), запишем $25t^2 = 64 \cdot 2 + 49t^2 - 2 \cdot 7t \cdot 8\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Имеем: $24t^2 - 14t \cdot 8 + 64 \cdot 2 = 0$, $3t^2 - 14t + 16 = 0$, $t = 2$, $t = 8/3$ (не подходит). Следовательно, $t = 2$, $k = 14$.

(🗐 Теорема синусов).

Очевидно, что $\sin\angle B = \sin\angle CBL = 4/5$ (рис. 1).

По теореме синусов из треугольника CBL $\dfrac{CL}{\sin\angle B} = \dfrac{LB}{\sin\angle LCB}$.

Имеем: $\dfrac{24\sqrt{2}\cdot 5}{4} = \dfrac{15k\sqrt{2}}{7}$, $6 = \dfrac{3k}{7}$, т.е. $k = 14$.

(🗐 Формула биссектрисы $l = \dfrac{2ab\cdot\cos{\gamma/2}}{a+b}$).

Если a и b – катеты данного треугольника, $\gamma/2 = 45°$, то $24\sqrt{2} = \dfrac{2\cdot 3k\cdot 4k\cdot 1}{\sqrt{2}\cdot(3k+4k)}$, $24 = \dfrac{3k\cdot 4}{7}$. Отсюда $k = 14$.

(🗐 Формула квадрата биссектрисы $l^2 = ab - a'b'$).

Пусть $k = 7t$, a и b – катеты данного треугольника, a' и b' – их проекции на гипотенузу. Имеем: $(24\sqrt{2})^2 = (28 \cdot 21 - 20 \cdot 15)t^2$ или $24^2 \cdot 2 = 144 \cdot 2 \cdot t^2$, $12t = 24$, $t = 2$, $k = 14$.

(🗐 Метод площадей).

По свойству площадей $S_{ABC} = S_{ACL} + S_{BCL}$, поэтому $½ \cdot 3k \cdot 4k = ½ \cdot (3k \cdot 24\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 4k \cdot 24\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}})$, $12k = 3 \cdot 24 + 4 \cdot 24$, $k = 14$.

(🗐 Векторный метод).

Так как $AL : LB = 4 : 3$, то $\overline{CL} = \dfrac{3}{7}\overline{CA} + \dfrac{4}{7}\overline{CB}$. Отсюда $\overline{CL}^2 = \dfrac{9}{49}\overline{CA}^2 + \dfrac{16}{49}\overline{CB}^2 + \dfrac{12}{49}\overline{CA}\cdot\overline{CB}$ или $24^2 \cdot 2 = \dfrac{9}{49}\cdot 16k^2 + \dfrac{16}{49}\cdot 9k^2 + 0$, $24^2 = \dfrac{144k^2}{49}$, $24 = \dfrac{12k}{7}$, $k = 14$.

(🗐 Координатный метод).

Пусть $C\ (0, 0)$, $L\ (1, 1)$, $A\ (0, 4t)$, $B\ (3t, 0)$, т.е. длина биссектрисы прямого угла равна $\sqrt{2}$ (рис. 4).

а) Уравнение прямой AB суть: $y = -4/3x + 4t$. $L \in AB$, поэтому $1 = -4/3 + 4t$, $4t = 7/3$, $t = 7/12$. $CL = 24\sqrt{2}$, т.е. заданная длина биссектрисы в 24 раза больше, чем во введенной системе координат. Значит, $k = 7/12 \cdot 24$, $k = 14$.

б) $\dfrac{AL^2}{BL^2}=\dfrac{16}{9}$, поэтому $\dfrac{1+1-8t+16t^2}{1+1-6t+9t^2}=\dfrac{16}{9}$, $18-72t=32-96t$, $24t=14$. Отсюда $k=7/12\cdot 24$, $k=14$.

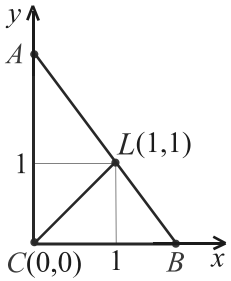


Рис. 4

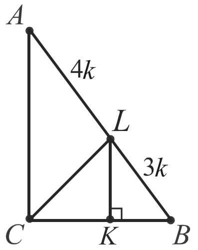


Рис. 5

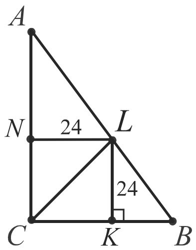


Рис. 6

(🗐 Теорема Стюарта (см. задачи 37 и 84).

Так как $AC^2\cdot BL+BC^2\cdot AL-CL^2\cdot AB=AB\cdot AL\cdot BL$, то имеем равенство $16k^2\cdot\dfrac{15k}{7}+9k^2\cdot\dfrac{20k}{7}-24^2\cdot 2\cdot 5k=5k\cdot\dfrac{15k}{7}\cdot\dfrac{20k}{7}$.

$$16k^2\cdot 3+9k^2\cdot 4-24^2\cdot 2\cdot 7=\frac{15\cdot 20}{7}\cdot k^2,\quad k^2=\frac{24^2\cdot 2\cdot 7^2}{(48+36)\cdot 7-300}=$$

$$=\frac{(24\cdot 7)^2}{(24+18)\cdot 7-150}=\frac{(24\cdot 7)^2}{144}=\left(\frac{24\cdot 7}{12}\right)^2=14^2,\ k=14.$$

(🗐 Дополнительное построение $LK \parallel AC$ и подобие).

Проведя $LK \parallel AC$ (рис. 5), заметим, что $\triangle ABC \sim \triangle LKB$ с коэффициентом 7/3 и то, что длина отрезка LK, равного 24, составляет третью часть от периметра $\triangle LKB$ (4 части из 12).

Следовательно, $P_{ABC}=(24\sqrt{2}:2)\cdot 3\cdot 7/3=24\cdot 7=168$.

(🗐 Дополнительное построение $LK \parallel AC$, $LN \parallel BC$ и подобие).

Проведя дополнительно $LN \parallel BC$ (рис. 6), заметим, что треугольники ANL и LKB подобны треугольнику ABC, $LK=NL=24$, $LK=\dfrac{1}{3}P_{LKB}$, $NL=\dfrac{1}{4}P_{ANL}$ и то, что $\boldsymbol{P_{ABC}=P_{ANL}+P_{LKB}}$.

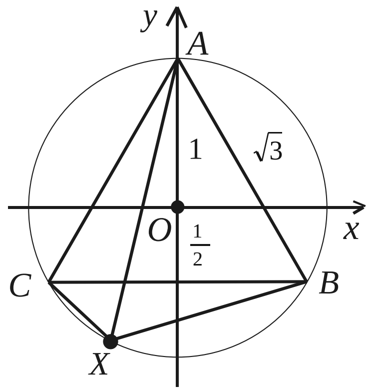
Следовательно, $P_{ABC}=24\cdot 3+24\cdot 4=24\cdot 7=168$.

72. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность. Дана произвольная точка X, принадлежащая меньшей дуге BC, которую стягивает хорда BC. Доказать, что $AX=BX+CX$.

Решение

Рассмотрение решений этой известной задачи начнем с универсального метода – координатного.

(🗐 Координатный метод).



Введём систему координат с началом в центре O правильного треугольника и единичным отрезком, равным радиусу описанной окружности (см. рис.).

Тогда $AB=\sqrt{3}$, $O\ (0,0)$, $A\ (0,1)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$, $C\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

Кроме того, заметим, что для текущей точки $X\ (x,y)$ окружности выполняется соотношение $x^2+y^2=1$ – уравнение окружности с центром в начале координат и радиу-сом, равным 1.

В доказываемом равенстве $AX=BX+CX$ перейдем к координатам и непосредственной проверкой убедимся, что оно истинно:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}=\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Упрощая и заменяя сумму x^2+y^2 на 1, придем к равенству:

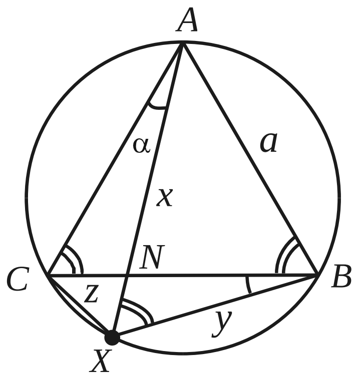
$$\sqrt{2-2y}=\sqrt{(2+y)-x\sqrt{3}}+\sqrt{(2+y)+x\sqrt{3}}.$$

Далее, возводя обе его части в квадрат, получим:

$2-2y=2+y-x\sqrt{3}+2+y+x\sqrt{3}+2\sqrt{y^2+4y+4-3x^2}$ или

$-2-4y=\sqrt{y^2+4y+4-3(1-y^2)}$, $-1-2y=\sqrt{4y^2+4y+1}$.

Отсюда $-1-2y=|1+2y|$, $-1-2y=-1-2y$ $\left(y<-\dfrac{1}{2}\right)$, ч.т.д.



Введем обозначения, которые будут использоваться в дальнейшем: $AB = a$, $AX = x$, $BX = y$, $CX = z$, $\angle CAX = \alpha$, $N = BC \cap AX$.

Определим величины углов:

$\angle CBX = \angle CAX = \alpha$ (вписанные, опирающиеся на дугу CX); аналогично, $\angle AXB = \angle ACB = 60^\circ$.

В четырехугольнике $ABXC$:

$\angle B = 60^\circ + \alpha$, $\angle X = 120^\circ$, $\angle C = 180^\circ - (60^\circ + \alpha) = 120^\circ - \alpha$.

(🗐 <u>Теорема синусов</u>).

Применим теорему синусов в треугольниках AXC и BXC.

$\dfrac{CX}{\sin\alpha} = \dfrac{AX}{\sin(120^\circ - \alpha)}$, $CX = \dfrac{AX\sin\alpha}{\sin(60^\circ + \alpha)}$ (синусы углов $120^\circ - \alpha$ и $60^\circ + \alpha$ равны, т.к. в сумме они составляют развернутый угол).

$\dfrac{BX}{\sin(60^\circ - \alpha)} = \dfrac{AX}{\sin(60^\circ + \alpha)}$, $BX = \dfrac{AX\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin(60^\circ + \alpha)}$.

Имеем: $CX + BX = AX\ \dfrac{\sin\alpha + \sin(60^\circ - \alpha)}{\sin(60^\circ + \alpha)} = AX \cdot 1 = AX$.

Действительно, $\sin\alpha + \sin(60^\circ - \alpha) = \sin(60^\circ + \alpha)$, так как $\sin\alpha = \sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) = 2\cos 60^\circ \sin\alpha$ – истинно.

(🗐 <u>Следствие из теоремы синусов</u>).

Треугольники AXC и BXC – вписанные в окружность.

Имеем: $AX = 2R\sin(60^\circ + \alpha)$, $BX = 2R\sin(60^\circ - \alpha)$, $CX = 2R\sin\alpha$, где R – радиус окружности. Подставляя эти выражения в доказываемое равенство $AX = CX + BX$ и учитывая доказанное выше тригонометрическое тождество, получим требуемое.

(🗐 <u>Теорема косинусов</u>).

Из треугольников ABX и BXC по теореме косинусов:

$a^2 = y^2 + x^2 - 2xy\cos 60^\circ = y^2 + x^2 - xy$;

$a^2 = y^2 + z^2 - 2zy\cos 120^\circ = y^2 + z^2 + zy$.

Вычитая из первого равенства второе, получим: $0 = x^2 - z^2 - xy - zy$ или $y(x + z) = (x + z)(x - z)$. Так как $x + z \neq 0$, то $y = x - z$, ч.т.д.

(🗐 <u>Метод площадей</u>).

Докажем, что $\angle ANB = \angle ABX$. Действительно, из $\triangle ANB$: $\angle ANB = 180^\circ - 60^\circ - (60^\circ - \alpha) = 60^\circ + \alpha = \angle ABX$.

Обозначим $\angle ABX = \angle ANB = \beta$.

Тогда $S_{ABXC} = ½\, ax\sin\beta$ и

$S_{ABXC} = S_{ABX} + S_{AXC} = ½\,(ay\sin\beta + az\sin(180^\circ - \beta))$.

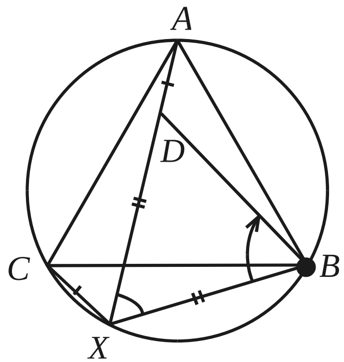
Отсюда $x\sin\beta = y\sin\beta + z\sin\beta$, т.е. $x = y + z$, ч.т.д.

(🗐 <u>Теорема Птолемея</u>).

Так как четырехугольник $ABXC$ вписан в окружность, то по теореме Птолемея: $AX \cdot CB = AC \cdot BX + AB \cdot CX$.

В принятых обозначениях имеем: $AX \cdot a = BX \cdot a + CX \cdot a$ или $AX = BX + CX$, т.к. $a \neq 0$.

(🗐 <u>Геометрическое преобразование – поворот</u>).



Отложим на XA отрезок XD, равный XB. $\triangle BDX$ будет равносторонним ($\angle BXD = \angle BCA = 60^\circ$).

Повернем треугольник BCX на угол 60° вокруг точки B против часовой стрелки, чтобы точка C совпала с точкой A. При этом точки X и D также совпадут, а значит, совпадут отрезки XC и DA, что обозначает их равенство.

Имеем: $AX = XD + DA = XB + XC$, что и требовалось доказать.

Подробный анализ и сравнение способов решения задач проведите самостоятельно.

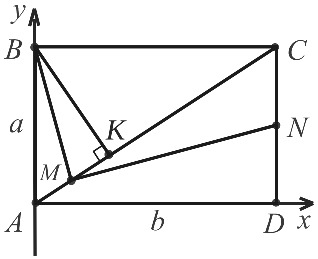
Заметим лишь, что если знакомиться с решениями второй задачи в указанной последовательности, то кажется, что после применения теоремы Птолемея нельзя найти более эффективное решение. Но, как видим, геометрическое преобразование – *поворот* – дает изящное и чисто геометрическое решение (см. также задачи 45, 50, 68, 104, 113, 118, 122).

Используя координатный метод, векторы или другие методы, докажите равенство $XA^2 + XB^2 + XC^2 = 2AB^2$.

73. (№ 3546). В прямоугольнике $ABCD$ опущен перпендикуляр BK на диагональ AC. Точки M и N – середины отрезков AK и CD соответственно. Докажите, что угол BMN – прямой.

Доказательство

(Координатный метод).



Обозначив смежные стороны AB и AD соответственно через a и b, выберем систему координат с центром в вершине A и осями координат, содержащими указанные стороны (см. рис.). Тогда A (0, 0), B (0, a), C (b, a), N (b, a/2).

Угловой коэффициент прямой AC (тангенс угла CAD) равен a/b, поэтому ее уравнение $y = ax/b$. Прямая BK перпендикулярна AC и проходит через точку B (0, a). Уравнение этой прямой имеет вид $y = -b/a \cdot x + a$ (здесь и в конце доказательства используется тот факт, что произведение угловых коэффициентов взаимно перпендикулярных прямых равно – 1).

Найдем координаты точки K как точки пересечения прямых AC и BK. $\frac{a}{b}x = -\frac{b}{a}x + a$. Отсюда $x = \frac{a^2b}{a^2+b^2}$, $y = \frac{a^3}{a^2+b^2}$.

$AM = MK$, поэтому абсцисса и ордината точки M определяются через координаты точек A и K по формулам для координат середины отрезка и соответственно равны $\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}$, $\frac{a^3}{2(a^2+b^2)}$.

Теперь найдем произведение угловых коэффициентов прямых BM и MN, вычисляя каждый из них по формуле $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$.

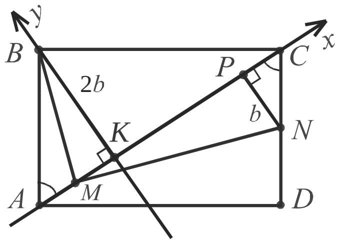
$$\frac{a^2b\cdot 2(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)(-2ab^2-a^3)}\cdot\frac{\frac{a^2b}{2(a^2+b^2)}-b}{\frac{a^3}{2(a^2+b^2)}-\frac{a}{2}} = \frac{a^2b\cdot(-a^2b-2b_3)}{-a(a^2+2b^2)\cdot(-ab^2)} = -1.$$

Следовательно, $BM \perp MN$ и угол BMN – прямой, ч.т.д.

Можно также проверять равенство $BN^2 = BM^2 + MN^2$.

Примечание. Если в условии задачи фигурируют перпендикулярные прямые и середины (отношения) отрезков, то применение координат и векторов может быть эффективно.

(Координатный метод и подобие).



В первом стандартном решении выбор системы координат продиктован тем, что координаты двух точек B и N из трех B, N, M, которые необходимы для решения, легко определялись.

Рассмотрим другой выбор системы координат и *применение подобия для нахождения координат точек*.

Если K – начало координат, то пять точек конфигурации A, M, K, C и B принадлежат осям. Но более важны зависимости, существующие между длинами отрезков, которые можно использовать. *Учтем, что AK во столько раз меньше (больше) BK, во сколько раз BK меньше (больше) KC*, т.к. $\frac{BK}{AK} = \frac{CK}{BK}$.

Пусть $BK = 2b$ и λ – положительный коэффициент.

В силу подобия $AK = 2b \cdot \lambda$, $KC = 2b : \lambda$.

Проведем $NP \perp AC$. Тогда $\Delta\, NPC \sim \Delta\, BKA$ с коэффициентом ½, т.к. CN = ½ AB. Значит, $PN = b$, $PC = MK$ = ½ $AK = \lambda b$. Наконец, абсцисса точки P, длина отрезка KP, суть $KC - PC = 2b/\lambda - \lambda b$.

Итак, K (0; 0), B (0; 2b), M ($-\lambda b$; 0), N ($2b/\lambda - \lambda b$; $-b$).

$$k_{MB}\cdot k_{NM} = \frac{2b-0}{0+\lambda b}\cdot\frac{0+b}{-\lambda b-2b/\lambda+\lambda b} = \frac{2}{\lambda}\cdot\frac{-\lambda}{2} = -1,\ BM \perp MN.$$

(Векторный метод).

Убедимся, что скалярное произведение $\overline{BM}\cdot\overline{MN}$ равно 0.

$$\overline{BM}\cdot\overline{MN} = (\overline{BK}+\overline{KM})(\overline{MC}+\overline{CN}) = (\overline{BK}+\overline{KM})(\overline{MC}+$$

$$+\frac{1}{2}\overline{BK}+\frac{1}{2}\overline{KA}) = \frac{1}{2}\overline{BK}^2+\overline{KM}\cdot\overline{MC}+\frac{1}{2}\overline{KA}\cdot\overline{KM} =$$

$$=\frac{1}{2}\overline{BK}^2+\frac{1}{2}\overline{KA}(\overline{MK}+\overline{KC}) - \frac{1}{2}\overline{KA}\cdot\overline{MK} = \frac{1}{2}\overline{BK}^2+\frac{1}{2}\overline{KA}\cdot\overline{KC} =$$

$$=\frac{1}{2}\overline{BK}^2+\frac{1}{2}|\overline{KA}|\cdot|\overline{KC}|\cdot\cos 180° = \frac{1}{2}BK^2+\frac{1}{2}KA\cdot KC\cdot(-1) =$$

$$=\frac{1}{2}BK^2-\frac{1}{2}BK^2 = 0, \text{ т.к. } BK^2 = KA\cdot KC.$$

Следовательно, $\overline{BM} \perp \overline{MN}$, $\angle\, BMN = 90°$.

(🗍 Векторный метод и подобие).

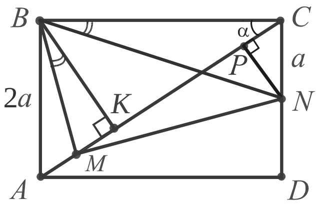
Дополнительное построение может упростить и векторное решение задачи. Воспользуемся тем, что $\Delta\, NPC \sim \Delta BKA$.

$$\overline{BM}\cdot\overline{MN} = (\overline{BK}+\overline{KM})\cdot(\overline{MP}+\overline{PN}) = \overline{BK}\cdot\overline{MP} + \overline{BK}\cdot\overline{PN} +$$

$$+\ \overline{KM}\cdot\overline{MP} + \overline{KM}\cdot\overline{MP} = 0 + \overline{BK}\cdot\frac{1}{2}\overline{BK} + \frac{1}{2}\overline{KA}\cdot\overline{MP} + 0 =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{BK}^2 + \frac{1}{2}\overline{KA}\cdot\overline{KC} = \frac{1}{2}BK^2 - \frac{1}{2}BK^2 = 0,\ \text{т.к. } MP = KC.$$

(🗍 Применение тригонометрии).



Убедимся, что $BN^2 = BM^2 + MN^2$.

Пусть $\angle ACB = \angle ABK = \alpha$, $AB = 2a$, $CN = a$. Тогда $AK = 2a\sin\alpha$, $AM = MK = a\sin\alpha$, $BK = 2a\cos\alpha$, $BC = 2a\operatorname{ctg}\alpha$.

$\Delta\, BMK$: $BM^2 = a^2(\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha)$.

$\Delta\, BNC$: $BN^2 = a^2(1 + 4\operatorname{ctg}^2\alpha)$.

Найдем квадрат катета MN. $NP \perp AC$, $\Delta\, NPC \sim \Delta BKA$.

$MN^2 = MP^2 + NP^2 = KC^2 + NP^2$, т.к. $MP = KC$.

$KC = BK\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{2a\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$. $NP = a\cos\alpha$ из $\Delta\, NPC$ ($\angle CNP = \alpha$).

Подставляя величины в проверяемое равенство и сокращая на a^2, получим: $1 + 4\operatorname{ctg}^2\alpha = \sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\left(\dfrac{4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 1\right)$.

$4\operatorname{ctg}^2\alpha = 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cdot 4\operatorname{ctg}^2\alpha$, $\operatorname{ctg}^2\alpha = \cos^2\alpha\,(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)$,

$\operatorname{ctg}^2\alpha = \cos^2\alpha\ \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ – истинно.

По теореме, обратной теореме Пифагора, $\angle BMN = 90°$.

(🗍 Тригонометрия и подобие).

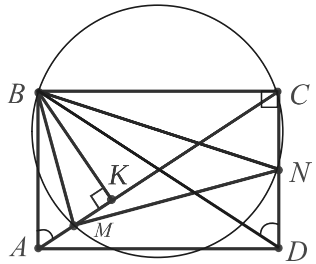
$CN = a$, $MK = a\sin\alpha$. Заметим, что $\dfrac{BK}{BC} = \sin\alpha = \dfrac{MK}{CN}$, т.е. прямоугольные треугольники BCN и BKM подобны.

Из подобия следует: $\angle MBK = \angle NBC$, $\dfrac{BK}{BC} = \dfrac{BM}{BN}$.

Рассматривая теперь отрезки в последней пропорции как стороны треугольников BKC и BMN и учитывая, что $\angle MBN = \angle KBC$ (они получаются из указанных выше равных углов, сложенных с углом KBN), заключаем, что $\Delta\, BMN \sim \Delta BKC$.

Значит, $\angle BMN = \angle BKC = 90°$.

(🗍 Подобие и вспомогательная окружность).



$\Delta\, BDC \sim \Delta BAK$. Из условия следует, что BN и BM – медианы. Эти отрезки служат соответственными элементами указанных подобных треугольников.

Отсюда, $\Delta\, BMK \sim \Delta\, BNC$, $\angle BMC = \angle BNC$ и точки M, N, C, B лежат на одной окружности.

Ее диаметр – медиана BN, т.к. $\angle BCN = 90°$.

Таким образом, $\angle BMN = 90°$ по замечательному свойству окружности.

(🗍 Подобие и композиция преобразований).

$\Delta\, BMK \sim \Delta BNC$ и $\Delta\, BMA \sim \Delta BND$ (см. предыдущее решение). Значит, $\angle ABM = \angle DBN$.

Применим поворот вокруг точки B на угол ABM по часовой стрелке и гомотетию с тем же центром и коэффициентом $\dfrac{BA}{BM}$.

В результате композиции указанных преобразований (центрально-подобного поворота) точка M перейдет в точку A, точка N – в точку D, отрезок MN – в отрезок AD, угол BMN – в прямой угол BAD. Значит, $\angle BMN = 90°$.

(🗍 Обратный ход (см. 5.7))

Если предположить, что угол BMN – прямой, то равенство $BN^2 = BM^2 + MN^2$ – истинно.

Тогда $BC^2 + CN^2 = BK^2 + KM^2 + MP^2 + PN^2$ или

$BC^2 + CN^2 = KM^2 + PN^2 + (BK^2 + CK^2)$, т.к. $MP = KC$.

Имеем: $CN^2 = PC^2 + PN^2$ ($KM = PC$), что истинно, т.к. треугольник PNC – прямоугольный.

6.4. Одно решение разных задач

Не менее важно, чем умение находить различные способы решения одной задачи, умение определять общность задач, что позволяет их систематизировать и рационально решать.

"… *Много задач вместе иногда решить легче, чем всего лишь одну из них, если это большое число задач хорошо согласовано, а одна задача сама по себе изолирована*". (Д. Пойа. "Математика и правдоподобные рассуждения").

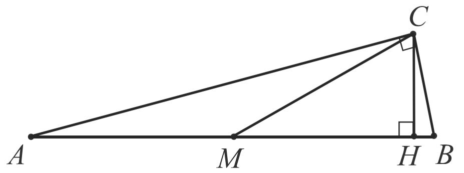
Рассмотрим два набора взаимосвязанных задач, имеющих общую идею решения. Убедимся, что в решении каждой задачи набора может эффективно использоваться утверждение его базисной задачи-теоремы.

I. *Прямоугольный треугольник с углом* 15°.

Сформулируем и докажем базисную задачу-теорему набора:

Для того чтобы угол прямоугольного треугольника равнялся 15°, необходимо и достаточно, чтобы высота, проведенная к его гипотенузе, была в четыре раза меньше гипотенузы.

Доказательство



Достаточность. Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $CH \perp AB$, $AB = 4CH$. Проведем медиану CM. Тогда $CM = ½\ AB$ или $CM = ½ \cdot 4CH = 2CH$. Отсюда $\angle CMH = 30°$. Это внешний угол равнобедренного треугольника MAC, поэтому $\angle A = \angle C = 30° : 2 = 15°$.

Необходимость. Легко проверяется с помощью обратного хода.

***Следствие* 1.** *Для того чтобы угол прямоугольного треугольника равнялся* 15°, *необходимо и достаточно, чтобы квадрат его гипотенузы был равен учетверенному произведению катетов, т.е.* $AB^2 = 4AC \cdot BC$ $\quad((AC + BC)^2 = 6AC \cdot BC$, $(AC + BC)^2 : AB^2 = 3 : 2$).

Действительно, $AB = 4CH = 4\dfrac{AC \cdot BC}{AB}$. Отсюда $AB^2 = 4AC \cdot BC$.

Заметим, что формулы, содержащиеся в следствии, связывают лишь стороны прямоугольного треугольника, поэтому соотношение между гипотенузой и высотой, проведенной к ней, можно определять, не находя последнюю. Эти формулы применимы, как правило, в задачах, в которых требуется вычислять углы.

***Следствие* 2.** *Если угол прямоугольного треугольника равен* 15°, *то его площадь равна* $\frac{1}{8}c^2$ *или* $2h_c^2$ (h_c *– высота, проведенная к гипотенузе* c).

Ограничимся одним примером использования этого очевидного следствия (см. также стр. 58).

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C медиана BM равна 6, $\angle MBC = 15°$. Найти площадь треугольника ABC.

Т.к. BM – медиана, то $S_{ABC} = 2S_{MBC}$. Прямоугольный треугольник MBC содержит угол 15° и его гипотенуза равна 6.

Следовательно, $S_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 6^2 = 36/4 = 9$.

74. Найти острый угол ромба, если известно, что сторона ромба служит средним геометрическим его диагоналей.

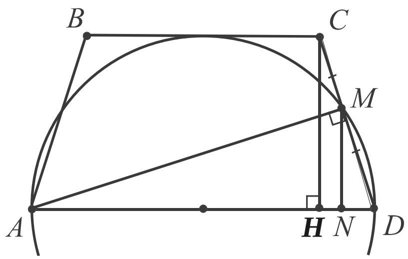
Решение

Пусть AC, BD – диагонали ромба $ABCD$, $AC \perp BD$. По условию $AB^2 = AC \cdot BD = 2AO \cdot 2BO = 4AO \cdot BO$, где $O = AC \cap BD$.

По следствию 1 $\angle ABO = 15°$. Так как BD – биссектриса угла B, то $\angle B = 30°$. *Ответ*: 30°.

75. (№ 403). Окружность, построенная на основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции и касается основания BC. Найдите углы трапеции.

Решение



Очевидно, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция. Ее высота CH равна радиусу данной окружности, $CH = ½\ AD$.

Проведем AM, $MN \perp AD$. MN – средняя линия треугольника CDH, т.к. $MN = ½\ CH = ¼\ AD$.

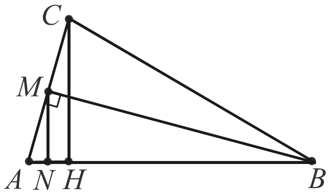
Отсюда $\angle MAD = 15°$.

Имеем: $\angle D = \angle A = 75°$, $\angle B = \angle C = 180° - 75° = 105°$.

Ответ: 75°, 75°, 105°, 105°.

76. (№ 10.196). Дан треугольник ABC, в котором $2h_c = AB$ и величина угла A равна 75°. Найти величину угла C.

<u>*Решение*</u>

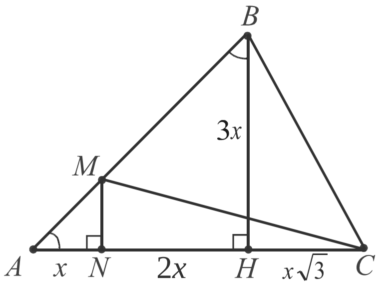


Проведем $BM \perp AC$, $MN \perp AB$.

Тогда в прямоугольном треугольнике ABM с острыми углами 15°, 75° $MN = ¼\ AB$. Т.к. $AB = 2h_c$ по условию, то $MN = ¼ \cdot 2h_c = ½\ h_c = ½\,CH$. $MN \parallel CH$, поэтому MN – средняя линия треугольника ACH. В треугольнике ABC высота BM служит медианой. Значит, он равнобедренный и $\angle C = \angle A = 75°$. *Ответ*: 75°.

77. На стороне AB треугольника ABC взята точка M такая, что $AM : MB = 1 : 2$. Известно, что $\angle A = 45°$, $\angle B = 75°$. Доказать, что $\angle ACM = 15°$.

<u>*Доказательство*</u>

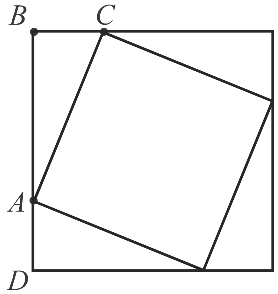


Пусть $BH \perp AC$, $MN \perp AC$. Тогда $AN : NH = 1 : 2$, $\angle ABH = 45°$, $\angle CBH = 30°$. Обозначив $AN = x$, находим $NH = 2x$, $NM = x$, $BH = 3x$, $HC = x\sqrt{3}$, $NC = 2x + \sqrt{3}\,x$. В треугольнике MNC катеты выражены через x, поэтому вычислим их произведение и квадрат гипотенузы. $MN \cdot NC = x^2\,(2 + \sqrt{3})$, $MC^2 = x^2 + x^2\,(2 + \sqrt{3})^2 = x^2\,(8 + 4\sqrt{3})$. Отсюда $MC^2 = 4MN \cdot NC$ и меньший острый угол NCM, лежащий против меньшего катета, равен 15°.

Итак, $\angle ACM = 15°$, ч.т.д.

78. В квадрат вписан другой квадрат. Определить меньший угол между сторонами квадратов, если отношение площадей квадратов равно 1,5.

<u>*Решение*</u>



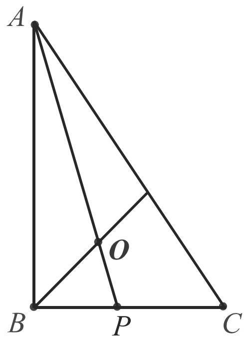
Из условия следует, что $DB^2 : AC^2 = 3 : 2$, где DB и AC – стороны заданных квадратов. $DB^2 = (AD + AB)^2 = (BC + AB)^2$, т.к. $AD = BC$. Имеем: $(BC + AB)^2 : AC^2 = 3 : 2$.

Значит, по следствию 1 острый угол A прямоугольного треугольника ABC, меньший угол между сторонами квадратов, равен 15°.

Ответ: 15°.

79. (№ 1655). В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса AP острого угла A делится центром вписанной окружности в отношении $AO : OP = (\sqrt{3}+1) : (\sqrt{3}-1)$. Найдите острые углы.

<u>*Решение*</u>



O – точка пересечения биссектрис треугольника ABC. По свойству биссектрисы BO угла B треугольника ABP $AB : BP = AO : OP$. Пусть $AB = (\sqrt{3}+1)x$, $BP = (\sqrt{3}-1)x$, $x > 0$. Тогда $AP^2 = (\sqrt{3}+1)^2x^2 + (\sqrt{3}-1)^2x^2 = 8x^2$, $AB \cdot BP = 2x^2$, т.е. $AP^2 = 4AB \cdot BP$.

По следствию 1 $\angle BAP = 15°$.

Следовательно, $\angle A = 30°$, $\angle C = 60°$.

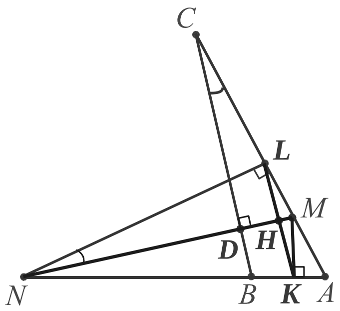
Ответ: 30°, 60°.

80. В треугольнике ABC угол B – тупой. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону AC в точке M, а серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает прямую AB в точке N (точка B лежит между N и A). Отрезки MN и BC равны и взаимно перпендикулярны. Найдите углы треугольника ABC.

<u>*Решение*</u>

Пусть K и L – середины AB и AC, $D = BC \cap MN$, $H = LK \cap MN$, $\angle CDM = 90°$. Прямоугольные треугольники CDM и NLM подобны (острый угол LMN – общий). Отсюда $\angle MNL = \angle C$.

Четырехугольник $KMLN$ – вписанный ($\angle NLM + \angle NKM = 180°$).



Диаметр описанной окружности MN, перпендикулярный хорде LK, делит ее пополам.

Значит, $LH = ½\ LK = ¼\ BC = ¼\ MN$, т.к. LK – средняя линия треугольника ABC и $BC = MN$ по условию.

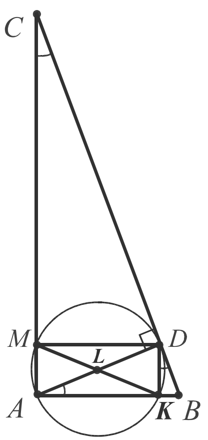
LH – высота прямоугольного треугольника NLM, проведенная к гипотенузе, поэтому по базисной задаче-теореме $\angle\ MNL = 15°$.

Имеем: $\angle\ C = 15°$; $\angle\ LMN = 75°$, $\angle\ LMK = 150°$; $\angle\ AMK = 180° – 150° = 30°$, $\angle A = 60°$; $\angle B = 105°$.

Ответ: 15°, 60°, 105°.

81. (№ 3621). Окружность, построенная на высоте AD прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает катет AB в точке K, а катет AC – в точке M. Отрезок KM пересекает высоту AD в точке L. Известно, что отрезки AK, AL и AM составляют геометрическую прогрессию (т.е. $AK : AL = AL : AM$). Найдите острые углы треугольника ABC.

<u>*Решение*</u>



Проведем DK. Т.к. AD – диаметр окружности, то треугольник ADK – прямоугольный. Кроме того, $MK = AD$ (как диаметры), $DK \parallel AM$.

Значит, $AMDK$ – прямоугольник и треугольники ADK и AKM равны.

$\angle AKM = \angle DAK = \angle KDB = \angle C$.

Отсюда $\triangle ACB \sim \triangle AKM$.

Соответствующие углы подобных треугольников равны, поэтому вычислим углы треугольника AKM, стороны и медиана которого связаны главным условием задачи.

Имеем: $AL^2 = AK \cdot AM$ или $¼\ MK^2 = AK \cdot AM$, т.к. $AL = ½\ MK$. По следствию 1 $\angle\ AKM = 15°$. Следовательно, $\angle C = 15°$, $\angle B = 75°$.

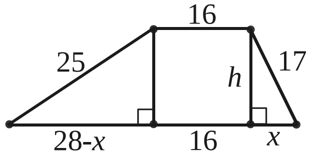
Ответ: 15°, 75°.

II. ***Разности квадратов наклонных и их проекций.***

Второй набор, как базисную, использует задачу-теорему: ***разность квадратов двух наклонных, проведенных из одной точки к прямой (или из двух точек, параллельной ей прямой), равна разности квадратов их проекций.***

(№ 2162). Вычислить площадь трапеции, параллельные стороны которой равны 16 и 44, а непараллельные – 17 и 25 (см. задачу 6.3).

<u>*Решение*</u>



Пусть отрезки большего основания трапеции равны x, 16, $28 – x$.

Применяя утверждение базисной задачи, получим: $25^2 – 17^2 = (28 – x)^2 – x^2$, $8 \cdot 42 = 28 \cdot 28 – 2 \cdot 28\ x$, $2 \cdot 6 = 28 – 2x$, $6 = 14 – x$, $x = 8$. Значит, $h = 15$ (пифагорова тройка 8, 15, 17, h – высота трапеции). Площадь трапеции равна произведению суммы половин ее оснований на высоту, т.е. $(8 + 22) \cdot 15 = 30 \cdot 15 = 450$.

Для треугольника: *разность квадратов двух сторон треугольника равна разности квадратов их проекций на третью сторону*.

Эти очевидные, вытекающие из теоремы Пифагора, утверждения находят в планиметрии рациональное применение во многих конфигурациях, содержащих окружность, медиану (чевиану) треугольника, симметричные точки, которые можно откладывать и использовать как вспомогательные (см. стр.49). Нередко они не только упрощают вычисления, но и раскрывают свойства взаимного расположения фигур.

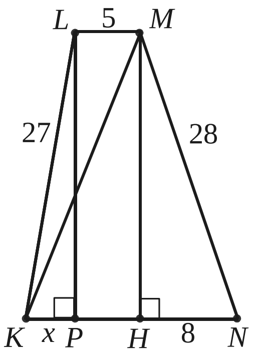
***Следствие* 1.** *Разность квадратов двух сторон треугольника равна удвоенному произведению третьей стороны и проекции на эту сторону соответствующей медианы* (доказат. см. в задаче 78).

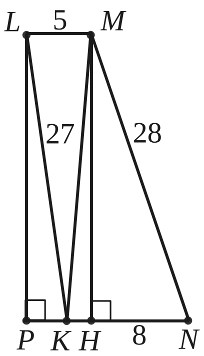
***Следствие* 2.** *Если прямые AB и MN перпендикулярны, то* $MA^2 – MB^2 = NA^2 – NB^2$ (можно доказать, что верно и обратное утверждение, т.е. *приведенное соотношение выражает условие перпендикулярности прямых AB и MN*).

82. (№ 3254). В трапеции $KLMN$ известны боковые стороны $KL = 27$, $MN = 28$ и верхнее основание $LM = 5$.

Зная, что $\cos \angle\ LMN = –2/7$, найдите диагональ KM.

Решение





Пусть $LP \perp NK$ и $MH \perp NK$. Заметим, что точка P может принадлежать либо основанию KN, либо его продолжению.

Сумма углов LMN и MNH равна 180°, поэтому $\cos \angle MNH = -\cos \angle LMN = 2/7 = 8/28 = NH : NM$.

Отсюда $NH = 8$.

В первом случае: $MN^2 - LK^2 = NH^2 - KP^2$. $28^2 - 27^2 = 8^2 - x^2$, где x – проекция отрезка KL на прямую NK. $1 \cdot 55 = 64 - x^2$, $x^2 = 9$, $x = 3$ $(x > 0)$. $KH = KP + PH = 5 + 3 = 8 = NH$.

В треугольнике KMN отрезок MH является высотой и медианой. Значит, он равнобедренный и $MK = MN = 28$.

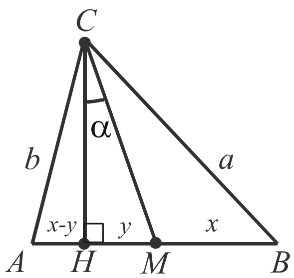
Во втором случае: $LK^2 - MK^2 = PK^2 - KH^2$. $PK = 3$, $KH = 2$.

$27^2 - MK^2 = 3^2 - 2^2$, $MK^2 = 729 - 5 = 724$, $MK = \sqrt{724} = 2\sqrt{181}$.

Ответ: 28 или $2\sqrt{181}$.

83. (№ 12.402). В треугольнике даны две стороны a и b $(a > b)$ и площадь S. Найти угол между высотой и медианой, проведенными к третьей стороне [28, с. 308].

Решение



Пусть в ΔABC CH – высота, CM – медиана, $CB = a$, $CA = b$, $\angle HCM = \alpha$ – искомый угол.

$BC^2 - AC^2 = BH^2 - AH^2$ или $a^2 - b^2 = (BH + AH) \cdot (BH - AH) = AB\,(BM + MH - AH) = AB\,(AM - AH + MH) = AB \cdot 2MH = \dfrac{2S}{CH} \cdot 2MH = 4S\,\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a^2 - b^2}{4S}$.

Ответ: $\mathrm{arctg}\dfrac{a^2 - b^2}{4S}$.

Рассмотрим процесс поиска, предшествовавший решению.

Введя обозначения $AM = MB = x$, $AB = 2x$, $HM = y$, начнем поиск зависимостей между данными величинами (a, b, S), промежуточными величинами (x, y) и искомой величиной (углом α).

Как найти угол α? Можно использовать тригонометрические функции, теоремы косинусов, синусов, другие подходящие соотношения. Выберем $\mathrm{tg}\,\alpha$. На отношение отрезков указывает то, что отрезок HM – промежуточная величина y, а катет-высота CH содержится в формуле для вычисления площади.

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{MH}{CH} = \dfrac{y}{CH} = \dfrac{y \cdot 2x}{2S} = \dfrac{xy}{S}$. Видим, что числитель, выраженный через промежуточные величины, необходимо выразить через данные величины. Вычислять каждый множитель отдельно или произведение xy? Воспользуемся аналогиями. Так, тождество $xy = ¼\,((x + y)^2 - (x - y)^2)$ встречалось при упрощении выражений, при выводе формулы производной произведения двух функций, в задачах с равнобедренной трапецией, основания которой x и y, и т.п.; свойство транзитивности – при доказательстве неравенств, сравнении чисел, решении задач с наклонными, проведенными из одной точки, в методе площадей и т.п.

Из треугольников CHA и CHB: $a^2 - b^2 = (x + y)^2 - (x - y)^2$.

Отсюда $4xy = a^2 - b^2$. Имеем: $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{4xy}{4S} = \dfrac{a^2 - b^2}{4S}$.

Решение найдено. Анализируя полученное выражение, замечаем, что разность квадратов $a^2 - b^2$ можно выразить через отрезки прямой AB: $a^2 - b^2 = (BH + AH)\,(BH - AH)$.

Остается увидеть замену отрезка BM равным ему отрезком AM.

Примечание. Процесс поиска решения здесь показан с учебной целью. Применив следствие (см. задачи 79, 80), сократите его.

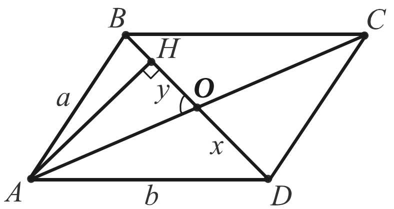
84. O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найти площадь параллелограмма, если $AB = a$, $AD = b$ $(a < b)$, $\angle AOB = \alpha$ $(0° < \alpha < 90°)$.

Решение

Пусть $OD = OB = x$, $OH = y$, где $AH \perp BD$.

$S_{ABCD} = 2\,S_{ABD} = AH \cdot BD = y\,\mathrm{tg}\,\alpha \cdot 2x = 2xy\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

По следствию из базисной задачи $AD^2 - AB^2 = 2BD \cdot OH$.



Имеем: $b^2 - a^2 = 2 \cdot 2xy = 4xy$.
Отсюда $2xy = ½\,(b^2 - a^2)$,
$S_{ABCD} = ½\,(b^2 - a^2)\,\text{tg}\,\alpha$.
Ответ: $½\,(b^2 - a^2)\,\text{tg}\,\alpha$.

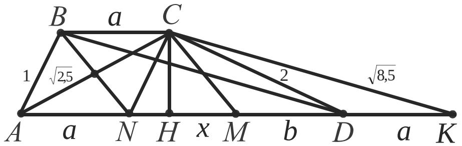
Примечание. В задачах, содержащих параметры, предполагается, что геометрическая конфигурация существует. Исследование полученного ответа не является обязательным, если это не сказано в условии (нередко это задача более сложная: сравните, например, с тригонометрическими тождествами).

В нашей задаче площадь параллелограмма не превосходит площади прямоугольника с такими же длинами сторон, поэтому

$½\,(b^2 - a^2)\,\text{tg}\,\alpha \le ab$. Отсюда $0 \le \alpha \le \text{arctg}\,\dfrac{2ab}{b^2 - a^2}$ $(a < b)$.

85. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны соответственно 1 и 2, а диагонали BD и AC – $½\sqrt{34}$ и $½\sqrt{10}$. Вычислить площадь трапеции (см. задачу 28).

<u>*Решение*</u>



Из вершины C проведем: $CN \parallel AB$, $CK \parallel BD$, $CH \perp AD$, медиану CM в образовавшемся треугольнике NCD. Тогда $CN = 1$.

Введем обозначения $BC = AN = DK = a$, $NM = MD = b$, $HM = x$ и дважды воспользуемся следствием из базисной задачи:

$CK^2 - AC^2 = 2AK \cdot HM$, $CD^2 - CN^2 = 2DN \cdot HM$.

Отсюда $(CK^2 - AC^2) : (CD^2 - CN^2) = AK : DN = AM : NM$.

Имеем: $(8{,}5 - 2{,}5) : (4 - 1) = (a + b) / b$, $(a + b) / b = 2$, т.е. $a = b$.

Теперь найдем a, выражая, например, квадрат общей медианы CM из $\Delta\,ACK$ и $\Delta\,NCD$: $\dfrac{2{,}5}{2} + \dfrac{8{,}5}{2} - \dfrac{16a^2}{4} = \dfrac{1^2}{2} + \dfrac{2^2}{2} - \dfrac{4a^2}{4}$.

Отсюда $a = 1$, $ABCN$ – ромб.

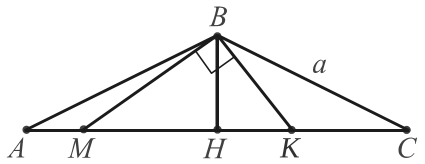
Площадь S трапеции равна сумме площадей четырех равновеликих треугольников: ABC, ACN, NCM, MCD, имеющих равные основания и высоту. Следовательно, искомую площадь можно вычислить как удвоенную площадь ромба $ABCN$ или прямоугольного треугольника ACM ($BN \perp AC$, $MC \perp AC$).

$S = 2S_{ABCN} = AC \cdot BN = \sqrt{2{,}5} \cdot \sqrt{2 \cdot 1 - 0{,}5} = \sqrt{3{,}75}$.

Ответ: $\sqrt{3{,}75}$.

86. В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны a. На основании AC взяты точки K и M так, что $\angle\,KBM = 90°$. Найти MB, если $\dfrac{1}{AM} = \dfrac{1}{MK} + \dfrac{1}{MC}$.

<u>*Решение*</u>



Проведем высоту и медиану BH в заданном треугольнике.

$CB^2 - MB^2 = CH^2 - MH^2$, $a^2 - MB^2 = (CH - MH)\,(CH + MH) = (AH - MH)\,CM = AM \cdot CM$.

По условию $\dfrac{1}{AM} - \dfrac{1}{MC} = \dfrac{1}{MK}$, $\dfrac{MC - AM}{AM \cdot MC} = \dfrac{1}{MK}$. Преобразуем разность. $MC - AM = MH + CH - AM = MH + AH - AM = 2MH$. Имеем: $2MH \cdot MK = AM \cdot MC$ или $2MB^2 = a^2 - MB^2$ ($MB^2 = MH \cdot MK$).

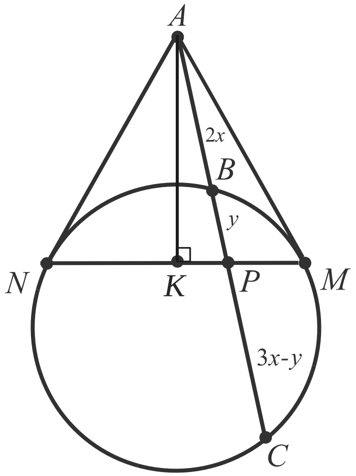
Итак, $3MB^2 = a^2$, $MB = a / \sqrt{3}$. *Ответ*: $a / \sqrt{3}$.

87. Из точки A к окружности проведены две касательные AM, AN и секущая, которая пересекает окружность в точках B и C, а хорду MN – в точке P. Найти $AP : PC$, если $AB : BC = 2 : 3$.

<u>*Решение*</u>

Пусть $AB = 2x$, $BC = 3x$, $BP = y$. Тогда $AP = 2x + y$, $PC = 3x - y$ и $AP : PC = (2x + y) : (3x - y)$.

Требуется выразить x через y или наоборот. В этом состоит сложность задачи. Точки A, B, P, C лежат на одной прямой, поэтому ясно, что отрезки хорды MN должны фигурировать в решении. Здесь возникает мысль воспользоваться свойством пересекающихся хорд для замены произведения $BP \cdot PC$ на $NP \cdot PM$ и базисной задачей, чтобы отрезки NP и PM рассматривать как производные проекций наклонных AM, AP (AK – высота и медиана равнобедренного треугольника AMN).



Заметим, что наклонная AP выражена через x и y, а наклонная AM легко выражается через x как касательная к окружности:

$AM^2 = AB \cdot AC = 2x\,(2x + 3x) = 10\,x^2$.

Конфигурация уже знакома.

Аналогично запишем: $AM^2 - AP^2 = KM^2 - KP^2 = (KM - KP)(KM + KP) = PM\,(NK + KP) = PM \cdot PN = PB \cdot PC$.

В принятых обозначениях:

$10x^2 - (2x + y)^2 = y(3x - y)$ или

$10x^2 - 4x^2 - 4xy - y^2 = 3xy - y^2$,

$6x^2 = 7xy$, $3x = 7y/2$ ($x \neq 0$).

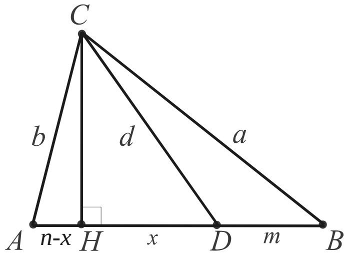
Имеем:

$AP : PC = (7y/3 + y) : (7y/2 - y) = 10/3 : 5/2 = 4 : 3$.

Ответ: 4 : 3.

88. (№ 1774. *Теорема Стюарта*). Точка D расположена на стороне AB треугольника ABC (CD – чевиана). Докажите, что $AC^2 \cdot DB + BC^2 \cdot AD - CD^2 \cdot AB = AB \cdot AD \cdot BD$ (см. задачу 37).

<u>*Доказательство*</u>



Проведем $CH \perp AB$ и введем обозначения a, b, c для длин сторон треугольника, d – чевианы, m и n – отрезков BD и AD. Требуется доказать, что

$$a^2n + b^2m - d^2c = mnc.$$

Если $DH = x$, то проекции наклонных a, b, d соответственно равны $m + x$, $n - x$, x. Имеем:

$a^2 - d^2 = (m + x)^2 - x^2 = m^2 + 2mx;\quad b^2 - d^2 = (n - x)^2 - x^2 = n^2 - 2nx.$

Умножим первое равенство на n, а второе – на m.

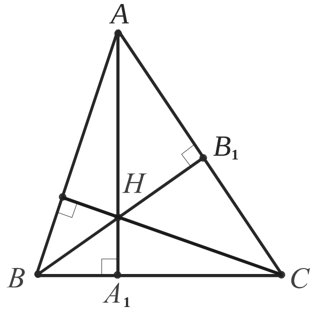
$a^2n - d^2n = nm^2 + 2mnx,\quad b^2m - d^2m = mn^2 - 2mnx.$

Теперь почленно сложим новые равенства:

$a^2n + b^2m - d^2(m + n) = mn\,(m + n)$, что верно, т.к. $m + n = c$.

89. Докажите, что высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.

<u>*Доказательство*</u>



Пусть $H = AA_1 \cap BB_1$, где $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$. Точка H существует, т.к. в противном случае были бы параллельны стороны AC и BC, что невозможно. Если точки C и H совпадают, то $\angle C = 90°$ и утверждение доказано. Если эти точки различны, то докажем, что $CH \perp AB$, применяя следствие 2. Так как $AH \perp BC$, то $AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2$, а так как $BH \perp AC$, то $BA^2 - BC^2 = HA^2 - HC^2$.

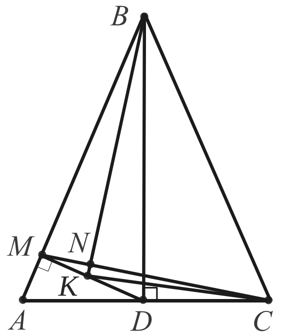
Вычитая почленно равенства, получим $BC^2 - AC^2 = HB^2 - HA^2$, что по второму следствию означает перпендикулярность прямых CH и AB, ч.т.д.

90. (№17.076). В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота BD. M – проекция точки D на сторону AB, точка K – середина отрезка DM, N – точка пересечения прямых BK и MD. Доказать, что угол BNC равен 90°.

<u>*Доказательство*</u>

Воспользуемся вторым следствием из базисной задачи.

Убедимся в истинности равенства $BC^2 - BM^2 = KC^2 - KM^2$.



$AB = BC$, CK – медиана $\Delta\, CMD$, поэтому

$$AB^2 - BM^2 = \frac{MC^2}{2} + \frac{CD^2}{2} - \frac{MD^2}{4} - KM^2,$$

$2(AB - BM)(AB + BM) = MC^2 + CD^2 - MD^2$, т.к. $KM^2 = ¼\,MD^2$.

Выразим MC^2 из $\Delta\, CMA$ по теореме косинусов: $2AM\,(AB + BM) = AM^2 + AC^2 - 2\,AM \cdot AC\dfrac{AM}{AD} + AD^2 - MD^2$.

Имеем: $2AM\,(AM + 2BM) = AM^2 + 4AD^2 - 2AM^2 \cdot 2 + AM^2$ или $2AM^2 + 4AM \cdot BM = 4AD^2 - 2AM^2$ или $4AM^2 + 4MD^2 = 4AD^2$, т.к. $AM \cdot BM = MD^2$.

Равенство $AM^2 + MD^2 = AD^2$ верно в силу теоремы Пифагора.

Итак, $BK \perp MC$ и $\angle\, BNC = 90°$, ч.т.д.

(См. задачу 120).

Задачи для самостоятельного решения к разделу 6.4:

***.** Найдите другие решения задач 69–85, не использующие базисные задачи-теоремы наборов.

Сравните решения и оцените эффективность способов.

I.1. Найти острые углы прямоугольного треугольника, в котором произведение высот в 4 раза меньше произведения сторон.

I.2. (№ 274). Сторона ромба равна 8, острый угол равен 30°. Найдите радиус вписанного круга.

I.3. (№ 219). Точка M выбрана внутри квадрата $ABCD$ так, что углы MBC и MCB имеют величину 15º. Доказать, что треугольник AMD – равносторонний.

I.4. Основания трапеции равны 10 см и 42 см, углы при меньшем основани равны 105° и 165°. Найти площадь трапеции.

I.5. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90º$) медиана BM равна 2, $\angle BMC = 75º$. Найти площадь треугольника ABC.

I.6. (№ 3200). В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса BE прямого угла B делится центром O вписанной окружности в отношении $BO : OE = \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Найдите острые углы треугольника.

II.1. (№ 862). Докажите, что в прямоугольной трапеции разность квадратов диагоналей равна разности квадратов оснований.

II.2. (№ 1307). Боковая сторона, меньшее основание и диагональ равнобочной трапеции равны соответственно 10, 6 и 14. Найдите большее основание.

II.3. (№ 1022). Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна a и образует угол α с медианой, проведенной из той же вершины. Найдите его катеты.

II.4. Стороны параллелограмма равны a и b ($a < b$, $2a \neq b$). Из середины большей стороны параллелограмма параллельную сторону видно под углом α. Найти площадь параллелограмма.

II.5. Из точки A к окружности проведены касательные AN, AM и секущая AC, пересекающая окружность в точках B и C, а хорду MN – в точке P. Докажите, что $AC : AB = PC : PB$ (отношение секущей к ее внешней части равно отношению отрезков хорды).

II.6. Основание параллелепипеда – ромб, диагонали которого равны 8 и 16. Три диагонали параллелепипеда равны между собой, а боковое ребро равно 10. Найти объем параллелепипеда.

Глава 7

ПРИМЕНЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ЗАДАЧ-ТЕОРЕМ

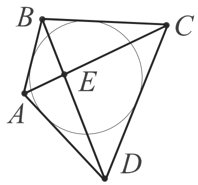
7.1. Применение нескольких задач-теорем

В решениях более трудных, в основном конкурсных и олимпиадных, задач настоящего раздела применяются несколько задач-теорем, а также различные методы и дополнительные построения. На последние обратите особое внимание, анализируя их целесообразность и эффективность. Перед изучением решений и после этого обязательно находите решения задач самостоятельно.

Нередко в процессе решения достаточно увидеть простую комбинацию нескольких задач-теорем.

Диагонали описанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. R_1, R_2, R_3, R_4 – радиусы описанных окружностей треугольников ABE, BCE, CDE, DAE соответственно. Доказать, что $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$.

Доказательство



Пусть при пересечении прямых AC и BD образуются углы α и $\pi - \alpha$. Т.к. $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$, то синусы всех углов при вершине E равны. Для вписанных треугольников ABE, BCE, CDE, DAE верны равенства $AB = 2R_1 \sin\alpha$, $BC = 2R_2 \sin\alpha$, $CD = 2R_3 \sin\alpha$, $DA = 2R_4 \sin\alpha$.

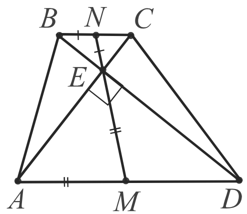
Четырехугольник $ABCD$ – описанный по условию задачи, поэтому верно равенство $AB + CD = BC + DA$.

Имеем: $2R_1 \sin\alpha + 2R_3 \sin\alpha = 2R_2 \sin\alpha + 2R_4 \sin\alpha$ или $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$, ч.т.д.

В решении очевидно применение комбинации задач-теорем 15 и 16.

Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Доказать, что средняя линия трапеции равна отрезку, соединяющему середины ее оснований.

Доказательство



Пусть в трапеции $ABCD$ M и N – середины оснований AD и BC, $E = AC \cap BD$.

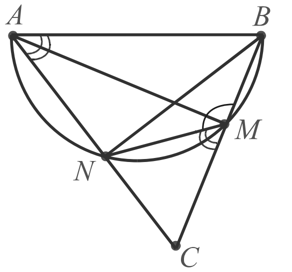
По замечательному свойству трапеции точки M, N, E лежат на одной прямой.

Треугольники BEC и AED – прямоугольные по условию. Известно, что медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине. Поэтому отрезок MN состоит из отрезков ME и NE, равных половинам MA и NB оснований трапеции, т.е. он равен ее средней линии.

В этом решении применялись задачи-теоремы 20 и 8.

Но кроме умения комбинированно применять задачи-теоремы необходимо изучать свойства конфигурации, числовые данные и т.п. (см. 4.1.), "видеть" подобие и применять различные методы и эвристические приемы (см. 5 и 6.2).

AB – диаметр окружности, вне которой лежит точка *C*. Отрезки *AC* и *BC* пересекают эту окружность в точках *N* и *M* соответственно. Зная, что площади треугольников *NCM* и *ABC* относятся как 1 : 4, найти угол *ACB*.



Отношение площадей фигур равно 1 : 4. Если они подобны, то отношение их линейных размеров равно 1 : 2. ½ = cos 60°, поэтому возникает предположение, что искомый острый угол равен 60°. Докажем его.

$\angle C$ – общий. *ABMN* – вписан в окружность, поэтому $\angle BMN + \angle BAN = 180°$. Но $\angle BMN + \angle CMN = 180°$ (смежные углы). Отсюда $\angle BAN = \angle CMN$ и $\triangle NCM \sim \triangle ABC$. Отношение их пропорциональных сторон *CM* и *AC* равно 1 : 2, что и равно косинусу искомого угла из $\triangle ACM$, т.к. $\angle BMA = \angle CMA = 90°$.

Итак, $\angle C = 60°$.

В решении применялись задачи-теоремы 4 и 17.

91. (№ 3550). Внутри треугольника имеются две точки. Расстояния от одной из них до сторон треугольника равны 1, 3 и 15, а от другой (в том же порядке) – 4, 5 и 11. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник (см. стр. 53).

Решение

Пусть *a*, *b*, *c* – стороны треугольника, взятые в порядке, соответствующем указанным расстояниям до них. Вычисляя площадь данной фигуры как сумму площадей составляющих его треугольников двумя способами, получим: $a + 3b + 15c = 4a + 5b + 11c$, $3a = 4c - 2b$, $a = (4c - 2b)/3$.

Считая теперь стороны треугольника равными $4c - 2b$, $3b$ и $3c$, воспользуемся формулой $r \cdot P = 2S$, где *r* – искомый радиус.

$r(4c - 2b + 3b + 3c) = 2 \cdot ½ (1 \cdot (4c - 2b) + 3 \cdot 3b + 15 \cdot 3c)$.

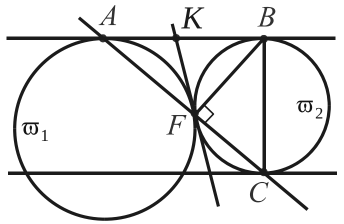
Отсюда $r = (49c + 7b) : (7c + b) = 7$.

Ответ: 7.

Применялся метод площадей, задача-теорема 14.

92. Окружности ϖ_1, ϖ_2 касаются внешним образом в точке *F*. Прямая *l* касается ϖ_1 и ϖ_2 в точках *A* и *B* соответственно. Прямая, параллельная прямой *l*, касается ϖ_2 в точке *C* и пересекает ϖ_1 в двух точках. Доказать, что точки *A*, *F* и *C* лежат на одной прямой.

Доказательство



Касательные к окружности ϖ_2 в точках *B* и *C* параллельны, поэтому *BC* – диаметр и $\angle CFB = 90°$.

$KF = KA = KB$, поэтому *FK* – медиана, разбивающая треугольник *AFB* на два равнобедренных, т.е. $\angle AFB = 90°$.

Итак, углы *CFB* и *AFB* – смежные, угол *AFC* – развернутый и точки *A*, *F*, *C* лежат на одной прямой.

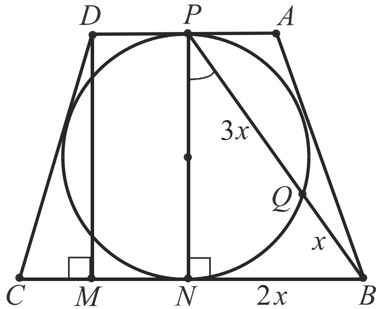
Применялись задачи-теоремы 2, 4, 8.

(Применение гомотетии).

При гомотетии с центром *F* и коэффициентом, равным $-R_2/R_1$ (R_2 и R_1 – радиусы окружностей ϖ_2 и ϖ_1), ϖ_1 переходит в ϖ_2, а прямая *l* – касательная к ϖ_1 – в параллельную прямую – касательную к ϖ_2. Значит, точка *A* переходит в *C* и точка *F* лежит на отрезке *AC*.

93. (№3420). В равнобедренную трапецию *ABCD* ($BC \parallel AD$) вписана окружность радиуса *R*, касающаяся основания *AD* в точке *P* и пересекающая отрезок *BP* в точке *Q* такой, что $PQ = 3BQ$. Найдите углы и площадь трапеции.

Решение



Пусть $BQ = x$, $PQ = 3x$, $BP = 4x$. $BN^2 = BQ \cdot BP$, $BN^2 = x \cdot 4x = 4x^2$, т.е. $BN = 2x$ ($x > 0$).

$AP = PD$, $PN \perp BC$, $DM \parallel PN$.

$\triangle BNP$: $\angle BNP = 90°$, $BN = ½\, BP$. Значит, $\angle BPN = 30°$, $\angle NBP = 60°$, $PN = DM = 2x\sqrt{3}$.

$PN^2 = BC \cdot AD$, поэтому $12x^2 = 4x \cdot AD$, $AD = 3x$.

$\triangle CMD$: $\angle CMD = 90°$, $CM = ½\, x$. $\operatorname{tg} \angle C = \dfrac{DM}{CM} = \dfrac{2x\sqrt{3} \cdot 2}{x} = 4\sqrt{3}$.

$\angle C = \angle B = \operatorname{arctg} 4\sqrt{3}$. $\angle A = \angle D = 180° - \operatorname{arctg} 4\sqrt{3}$. $PN = 2x\sqrt{3} = 2R$, $x = R : \sqrt{3}$. $S_{ABCD} = ½\, PN\,(AD + BC) = R \cdot 7x = 7R^2/\sqrt{3}$.

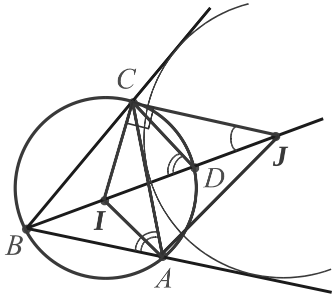
Ответ: $\operatorname{arctg} 4\sqrt{3}$, $180° - \operatorname{arctg} 4\sqrt{3}$; $7R^2/\sqrt{3}$.

Применялись задачи-теоремы 19, 24, 25.

94. I – инцентр треугольника ABC, J – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC. Доказать, что $DI = DJ$, где D – точка пересечения биссектрисы угла B с описанной окружностью данного треугольника.

Решение

Известно, что, каков бы ни был треугольник, существуют три вневписанные окружности – окружности, касающиеся одной из его сторон и продолжений двух других сторон. Центр каждой из них – это точка пересечения биссектрис соответствующих внешних углов с биссектрисой внутреннего угла, противолежащего стороне, которой касается эта окружность. В нашей задаче центр J – это точка пересечения биссектрис внешних углов при вершинах A и C с биссектрисой BI внутреннего угла B.



Проведем CI, CD, CJ. $\angle ICJ = 90°$, $\angle CDB = \angle A$ как вписанные.

Докажем, что $½ \angle A = \angle CJB$.

$\angle A = 180° - \angle B - \angle C$ или $½ \angle A = 90° - ½ \angle B - ½ \angle C$.

$\angle CJB = 180° - \angle CBJ - \angle BCI - 90° = 90° - ½ \angle B - ½ \angle C$.

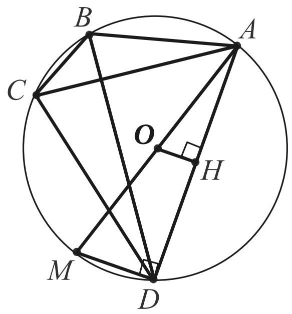
Итак, $\angle A = 2 \angle CJB$ или $\angle CDI = 2 \angle CJB$, D – центр описанной окружности ΔICJ и $DC = DI = DJ$ как радиусы этой окружности.

Применялись задачи-теоремы 4, 12.

95. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. $AC \perp BD$. Доказать, что длина перпендикуляра OH, опущенного из центра O этой окружности на сторону AD, вдвое меньше длины стороны BC.

(Московская олимпиада)

Доказательство



Проведем диаметр AM и хорду MD. Тогда $\angle ADM = 90°$, $OH \parallel MD$, $OH = ½\, MD$. Остается доказать, что $MD = BC$.

Равенство этих хорд следует из равенства стягивающих их дуг MD и BC.

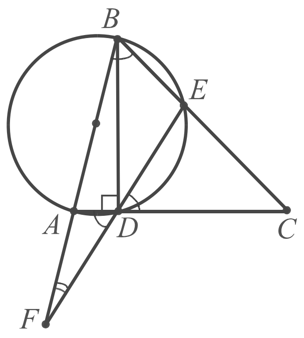
Т.к. AM – диаметр, то $\cup MD = 180° - \cup DA$. Т.к. $AC \perp BD$, то $\cup BC + \cup AD = 180°$, поэтому и $\cup BC = 180° - \cup AD$.

Итак, $OH = ½\, MD = ½\, BC$, ч.т.д.

Применялось дополнительное построение, задачи-теоремы 4, 5.

96. (№ 1324). На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол 15°. Найдите углы треугольника ABC.

Решение



Пусть $\angle BFE = 15°$. Проведем отрезок BD. Тогда $\angle BDA = \angle BDC = 90°$ (сторона AB служит диаметром окружности).

$\triangle ABC \sim \triangle EDC$, т.к. $\angle ABC = \angle EDC$ (дополняют угол ADE до развернутого) и $\angle C$ – общий. $\angle ADE + \angle ABE = 180°$ как противолежащие углы вписанного четырехугольника $ABED$.

Отношение площадей треугольников ABC и EDC равно 1 : 2, поэтому их соответственные линейные размеры относятся как $1 : \sqrt{2}$.

Отсюда $CB = \sqrt{2}\, CD$ и $\angle C = \angle CBD = 45°$.

(Без явного применения подобия.

$S_{ABC} = 2\, S_{CDE}$, поэтому $½\, CB \cdot CA \sin \angle C = 2 \cdot ½\, CE \cdot CD \sin \angle C$, $CB \cdot CA = 2\, CE \cdot CD$ (1).

По свойству секущих $CD \cdot CA = CE \cdot CB$ (2).

Разделим (1) на (2). $\dfrac{CB}{CD} = \dfrac{2CD}{CB}$, $CB^2 = 2CD^2$ или $CB = \sqrt{2}\, CD$).

Найдем теперь углы A и B. Угол A – внешний для треугольника ADF, в котором угол AFD равен 15°. Значит, $\angle A = 15° + \angle ADF$ или $\angle A = 15° + \angle B$, т.к. $\angle ADF = \angle EDC = \angle B$.

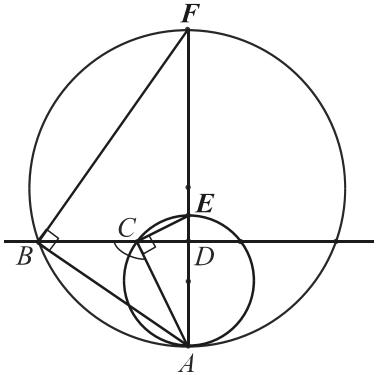
Имеем: $\angle B + 15° + \angle B = 180° - 45°$, $\angle B = 60°$; $\angle A = 75°$.

Ответ: 45°, 60°, 75°.

Применялось дополнительное построение, задачи-теоремы 4, 17.

97. Окружность радиуса r касается изнутри окружности радиуса R в точке A. Прямая, перпендикулярная линии центров, пересекает одну окружность в точке B, другую – в точке C. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение



Пусть $AE = 2r$, $AF = 2R$, $BC \perp AE$, $D = BC \cap AE$, x – искомый радиус.

Если $\angle ACB = \alpha$, то $x = \dfrac{AB}{2\sin\alpha}$.

Из $\triangle ACD$: $\sin(180° - \alpha) = \dfrac{AD}{AC} =$ $= \sin\alpha$. Значит, $x = AB \cdot AC : (2AD)$.

Соединив точки C, E, и B, F, образуем прямоугольные треугольники ACE, ABF.

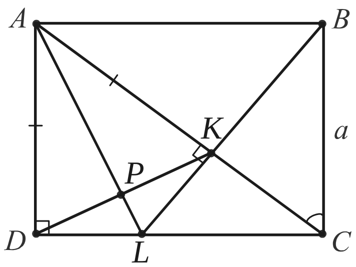
$AC = \sqrt{AD\cdot AE} = \sqrt{AD\cdot 2R}$; $AB = \sqrt{AD\cdot AF} = \sqrt{AD\cdot 2r}$;

$AB\cdot AC = 2AD\sqrt{rR}$, $x = \sqrt{rR}$. *Ответ*: $\sqrt{rR}$.

Применялось дополнительное построение, задачи-теоремы 4, 15, 23.

98. В прямоугольнике $ABCD$ ($AB > BC$) на стороне CD выбрана точка L так, что $BL \perp AC$. $K = BL \cap AC$, $AL \perp DK$. Найти величину угла ACB (Соросовская олимпиада).

Решение



В прямоугольном треугольнике ABC $BC^2 = KC \cdot AC$ (1).

Пусть $BC = a$, $\angle ACB = \alpha$. Выразим KC и AC через a и α.

Из прямоугольного треугольника BKC $KC = a\cos\alpha$.

Четырехугольник $AKLD$ – вписанный, т.к. $\angle D + \angle K = 180°$. AL – диаметр описанной окружности, перпендикулярный хорде DK и делящий ее пополам. Отсюда $AK = AD = a$, $AC = a + a\cos\alpha$.

Подставляя полученные выражения в (1), получим:
$a^2 = a\cos\alpha\,(a + a\cos\alpha)$, $1 = \cos\alpha\,(1 + \cos\alpha)$, $\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$.

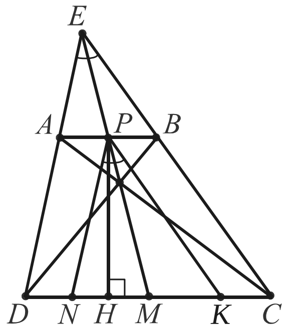
Угол ACB – острый, поэтому $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 51°$.

Ответ: $\arccos((\sqrt{5}-1)/2)$.

Применялись задачи-теоремы 1, 17, 23.

99. (№ 1803). Найдите высоту трапеции, у которой основания AB и CD равны a и b ($a < b$), угол между диагоналями равен 90°, а угол между продолжениями боковых сторон равен 45°.

Решение



Пусть $E = AD \cap BC$, $\angle DEC = 45°$; P и M – середины оснований трапеции. Тогда прямая EM содержит точку P и точку пересечения диагоналей трапеции.

Проведя $PN \parallel AD$, $PK \parallel BC$, переформулируем задачу: найти высоту треугольника NPK, в котором известны угол P, противолежащая ему сторона NK и медиана PM. Действительно, $\angle P = \angle DEC = 45°$, $NK = DC - (DN + KC) = DC - AB = b - a$, $PM = DM + AP = ½\,(b + a)$ как сумма медиан двух прямоугольных треугольников ($DB \perp AC$ по условию).

Имеем: $1 = \operatorname{tg} 45° = \operatorname{tg}(\angle NPH + \angle KPH) =$
$= (\operatorname{tg}\angle NPH + \operatorname{tg}\angle KPH) : (1 - \operatorname{tg}\angle NPH \cdot \operatorname{tg}\angle KPH) =$

$$= \left(\frac{NH}{PH} + \frac{KH}{PH}\right) : \left(1 - \frac{NH\cdot KH}{PH^2}\right) = \frac{NK}{PH}\cdot\frac{PH^2}{PH^2 - NH\cdot KH} =$$

$$= \frac{NK\cdot PH}{PH^2 - (MN - MH)(MN + MH)} = \frac{NK\cdot PH}{PH^2 + MH^2 - MN^2} =$$

$$= \frac{NK\cdot PH}{PM^2 - MN^2}.\ \text{Отсюда}\ PH = \frac{PM^2 - MN^2}{NK} =$$

$$= \left(\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right) : (b - a) = \frac{ab}{b-a}.\quad \textit{Ответ}: \frac{ab}{b-a}.$$

Применялось дополнительное построение, задачи-теоремы 8, 20.

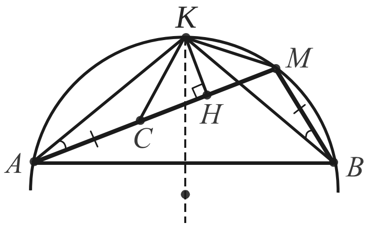
(Метод площадей и теорема косинусов).

В треугольнике NPK имеем: 1) $½\,PH \cdot NK = ½\,PN \cdot PK \sin 45°$, т.е. $PH = \dfrac{PN\cdot PK\sqrt{2}}{2NK}$. 2) По теореме косинусов: $(b - a)^2 = PN^2 + PK^2 - 2PN \cdot PK\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $2ab = \sqrt{2}\,PN \cdot PK$. $PN^2 + PK^2 = a^2 + b^2$ т.к. диагонали трапеции перпендикулярны. $PH = ab : (b - a)$).

100. (№ 798. *Задача Архимеда*). В дугу AB окружности вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM > MB$). Докажите, что основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам, т.е. $AH = HM + MB$.

Архимед опубликовал ее в трактате "Измерение круга" в такой формулировке: "*Если вписанный в дугу окружности сломанный на две неравные части отрезок прямой принимает опущенный на него из середины дуги перпендикуляр, то этот перпендикуляр разделит всю ломаную линию пополам*".

Эта красивая задача содержится под юбилейным 1000-м номером в задачнике журнала "Квант". Рассмотрим два ее решения (последний заимствован из №12 за 1986 г. указанного журнала). Оба они основаны на естественном спрямлении ломаной, но разными способами. Читателю предоставляем найти свои решения, применяя другие идеи и вспомогательные построения (см. задачу 30).



"Отбросим" звено MB. Отложим на звене AM отрезок AC, равный MB ($AM > MB$).

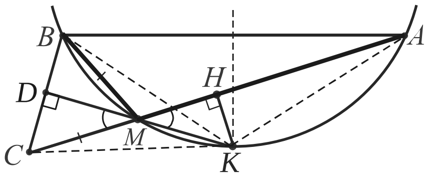
Остается доказать, что $CH = MH$.

Соединим точку K с точками A, B и отметим, что $AK = BK$, т.к. K – середина дуги AB по условию.

Заметив равенство вписанных углов KAM и KBM, опирающихся на дугу KM, соединим точку K с точками C, M и получим равные треугольники KAC и KBM. Отсюда $KC = KM$.

В равнобедренном треугольнике KMC высота KH является и медианой, поэтому $CH = MH$, $AC + CH = MH + MB$, ч.т.д.

(Звено MB теперь добавим к звену MA: $MC = MB$, $M \in AC$).



Соединив точки C и B, проведем луч KM до пересечения с BC в точке D. Угол BMC как внешний угол $\Delta\, AMB$ измеряется суммой углов MAB и MBA. Т.к. это и вписанные углы, то их сумма измеряется половиной дуги AB, т.е. дугой AK, на которую опирается вписанный угол AMK.

Отсюда $\angle\, BMC = 2\,\angle\, CMD = 2\,\angle\, AMK$ и в равнобедренном треугольнике CMB MD – биссектриса, служащая и высотой.

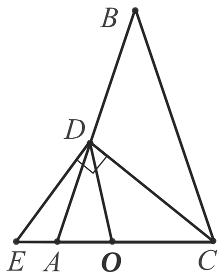
Значит, KD – серединный перпендикуляр к отрезку BC.

Имеем: $KC = KB = KA$, $AH = HC = HM + MC = HM + MB$, ч.т.д.).

Применялось дополнительное построение, задачи-теоремы 4, 13.

101. (№ 3551). В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD. Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно CD, пересекает AC в точке E. Докажите, что $EC = 2AD$.

<u>*Доказательство*</u>



Проведем $DO \parallel BC$ ($O \in AC$).

Тогда $\Delta\, ADO \sim \Delta ABC$. Если $AB = a$, $AC = b$, $CO = x$, $AO = b - x$, то по свойству биссектрисы $BD = ka$, $AD = kb$ ($k > 0$), а по свойству пропорциональных отрезков $\dfrac{ka}{kb} = \dfrac{x}{b-x}$, $x = \dfrac{ab}{a+b} = CO$.

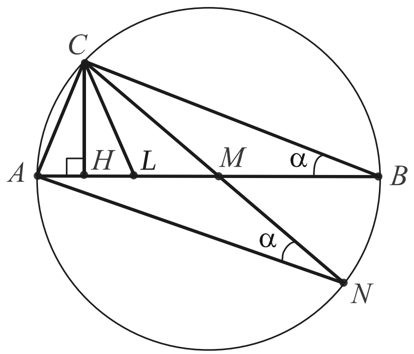
Кроме того, $ka + kb = a$, $k = a : (a + b)$.

Имеем: $AD = kb = ab : (a + b) = DO = CO$, т.е. $\Delta\, DOC$ – равнобедренный. Т.к. $\angle\, EDC = 90°$, то DO – медиана треугольника EDC. Отсюда $EC = 2\,OD = 2\,AD$, ч.т.д.

Применялось дополнительное построение, задачи-теоремы 8, 9, 10.

102. (№ 3516). Известно, что в некотором треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины C, делят угол на четыре равные части. Найдите углы треугольника.

<u>*Решение*</u>



Продлим медиану CM до пересечения с описанной окружностью данного треугольника в точке N и проведем хорду NA.

Если $\angle\, ANC = \alpha$, то $\angle\, B = \alpha$. Отсюда следует, что $\angle CAN = 90°$. Действительно, углы BCH и ACN ($CH \perp AB$) содержат по три равные части угла C, а значит, они равны и у треугольников BCH и ACN одинаковые углы.

Отсюда следует, что точка M – центр окружности, CN и AB – ее диаметры, $\angle\, C = 90° = 4\alpha$ (ΔMCB – равнобедренный).

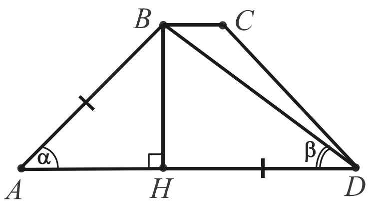
Значит, $\angle\, B = \alpha = 90° : 4 = 22{,}5°$, $\angle\, A = 90° - \alpha = 67{,}5°$.

Ответ: 22,5°; 67,5°; 90°.

Применялось дополнительное построение, вспомогательные угол и окружность, задачи-теоремы 4, 8.

103. (№ 12.403). Отношение радиуса круга, описанного около трапеции, к радиусу круга, вписанного в нее, равно k. Найти углы трапециии, допустимые значения k [27, с.218; 28, с.309].

<u>*Решение*</u>



Пусть $BC < AD$, R – радиус описанной окружности, BH – высота и диаметр вписанной окружности.

Если $\angle BAD = \alpha$, $\angle BDA = \beta$, то верно $BH : AB = BH : DH$ или $\sin\alpha = \operatorname{tg}\beta$ (1), т.к. $AB = DH$ (см. 86.2).

$\dfrac{R}{r} = \dfrac{2R}{BH} = \dfrac{BD}{\sin\alpha \cdot BD \cdot \sin\beta} = \dfrac{1}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = k$, т.е. $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{k}$ (2).

Из (1) и (2): $\operatorname{tg}\beta \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{k}$, $\dfrac{1-\cos^2\beta}{\cos\beta} = \dfrac{1}{k}$, $k\cos^2\beta + \cos\beta - k = 0$,

$\cos\beta = \dfrac{-1+\sqrt{1+4k^2}}{2k}$ ($\beta < 90°$). Имеем: $\sin\alpha = \operatorname{tg}\beta = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\beta} - 1} =$

$= \dfrac{\sqrt{4k^2 - 2 - 4k^2 + 2\sqrt{4k^2+1}}}{\sqrt{4k^2+1}-1} = \dfrac{\sqrt{2(\sqrt{4k^2+1}-1)}}{\sqrt{(\sqrt{4k^2+1}-1)^2}} = \sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{4k^2+1}-1}} =$

$= \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{4k^2+1}}}{\sqrt{2}\cdot k}$. Найдем допустимые значения k, учитывая, что $k > 0$ и ограниченность синуса. $0 < \sqrt{1+\sqrt{4k^2+1}} : (\sqrt{2}\cdot k) < 1$,

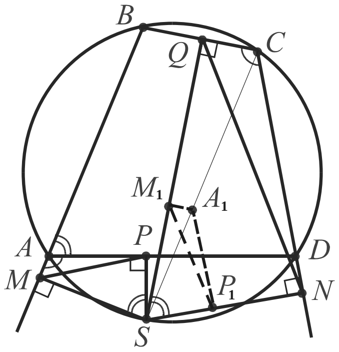
$1 + \sqrt{1+4k^2} < 2k^2$, $1 + 4k^2 < 4k^4 - 4k^2 + 1$, $k^2 - 2 > 0$, $k > \sqrt{2}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{4k^2+1}}}{\sqrt{2}\cdot k}$, $\pi - \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{4k^2+1}}}{\sqrt{2}\cdot k}$ при $k > \sqrt{2}$.

Применялось дополнительное построение, задачи-теоремы 15, 16, 19.

104. (№ 3437). В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. На дуге AD, не содержащей вершин B и C, взята точка S. Точки P, Q, M и N являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки S соответственно на стороны AD, BC, AB и CD (или на их продолжения). Найдите SN, если $SP = d$ и $S_{NQS} : S_{PMS} = m$.

<u>*Решение*</u>



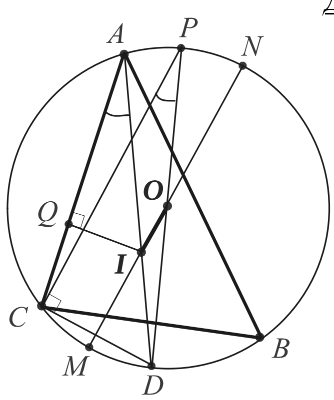
$\angle PAM = \angle DCB$, т.к. эти углы дополняют угол BAD до развернутого. $APSM$ и $CNSQ$ – вписанные четырехугольники. Отсюда $\angle MSP = \angle NSQ$.

Выполним поворот четырехугольника $SPAM$ вокруг вершины S по часовой стрелке, при котором луч SP совпадет с лучом SN. При этом совпадут также лучи SM и SQ, а четырехугольники $SNCQ$, $SP_1A_1M_1$ станут гомотетичными с центром S и коэффициентом $\sqrt{m}$, т.к. $\Delta NQS \sim \Delta PMS \sim \Delta P_1M_1S$ с коэффициентом m по условию задачи. Значит, $SN = SP_1\sqrt{m} = SP\sqrt{m} = d\sqrt{m}$. *Ответ*: $d\sqrt{m}$.

Применялись геометрические преобразования, задачи-теоремы 10, 17.

105. (№ 1843). Докажите *формулу Эйлера*: $OI^2 = R^2 - 2Rr$, где O, I – центры описанной и вписанной окружностей треугольника, R, r – радиусы этих окружностей.

<u>*Доказательство*</u>



Переписав формулу в виде $R^2 - OI^2 = 2Rr$, докажем, что обе ее части равны произведению $AI \cdot DI$, где D – точка пересечения биссектрисы угла BAC с описанной окружностью.

По свойству пересекающихся хорд $AI \cdot DI = NI \cdot MI = (R - OI)(R + OI) = R^2 - OI^2$ ($I \in MN$, $O \in MN$).

Проведем диаметр DP и радиус вписанной окружности IQ.

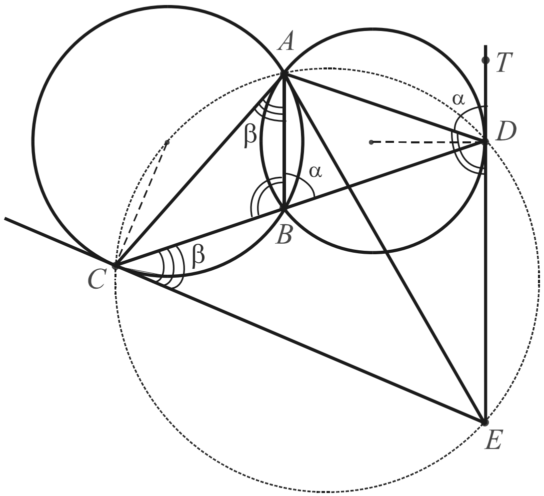
$\Delta PCD \sim \Delta AQI$: $\angle PCD = \angle AQI = 90°$, $\angle A = \angle P$. Отсюда $\dfrac{AI}{QI} = \dfrac{DP}{CD}$, $\dfrac{AI}{r} = \dfrac{2R}{CD}$, $AI \cdot CD = 2Rr$.

Но $CD = DI$ (см. задачу 12.4), поэтому $AI \cdot DI = 2Rr$, ч.т.д.

Применялись дополнительное построение, задачи-теоремы 3, 4.

106. (№ 3327). Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, лежащих по разные стороны от прямой AB. Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E. Найдите AD, если $AB = 15$, $AC = 20$, $AE = 24$.

Решение



Изучим углы. Пусть $\angle ABD = \alpha, \angle BAC = \beta$.

Тогда $\angle\ ADT = \alpha$, $\angle\ BCE = \beta$ ($T \in DE$). Вписанные углы первой пары измеряются соответственно половинами дуг AD и BC. Каждый угол второй пары, угол между касательной и хордой, измеряется половиной той же дуги. Далее, в $\Delta\ ABC$ $\angle\ ACB = \alpha - \beta$ ($\angle ABD$ – внешний для треугольника ABC при вершине B).

Отметим равенство смежных углов: $\angle\ ADE = \angle\ ABC = 180° - \alpha$. Следовательно, $\angle\ ACE = \alpha$, $\angle\ ACE + \angle\ ADE = \alpha + 180° - \alpha = 180°$, т.е. четырехугольник $ADEC$ вписанный в окружность.

Отсюда $\angle ACB = \angle AED$ и $\Delta\, ACB \sim \Delta\, ADE$.

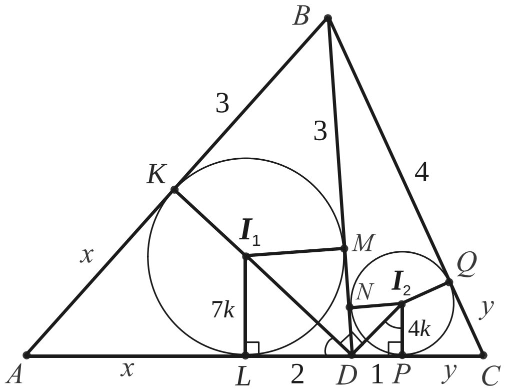
Имеем: $\dfrac{AD}{24} = \dfrac{15}{20}$, $AD = 18$.

Ответ: 18.

Применялись задачи-теоремы 4, 5, 17, вспомогательная окружность.

107. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник ABD, касается отрезка BD в точке M, а окружность, вписанная в треугольник BCD – в точке N; отношение радиусов этих окружностей равно 7 : 4. Найти стороны треугольника ABC, если $BM = 3$, $MN = ND = 1$ [24, с. 44].

Решение



Пусть I_1 и I_2 – центры окружностей, P, Q, K, L – точки касания.

Имеем: $DP = ND = 1$, $DL = DM = 2$, $BK = BM = 3$, $BN = BQ = 4$.

Введем обозначения: $AL = AK = x$, $CP = CQ = y$, $LI_1 = 7k$, $PI_2 = 4k$ ($k > 0$). $\angle\ I_1DI_2 = 90°$ (угол между биссектрисами смежных углов), $\angle\ DI_2P = \angle\ LDI_1$ (эти углы дополняют угол PDI_2 до прямого). $\Delta\ DI_2P \sim \Delta\ LDI_1$, $\dfrac{4k}{1} = \dfrac{2}{7k}$, $k^2 = \dfrac{1}{14}$. Квадраты радиусов $\dfrac{49}{14}$ и $\dfrac{16}{14}$, т.е. $\dfrac{7}{2}$ и $\dfrac{8}{7}$.

Дважды воспользуемся формулой $r^2 = S^2 : p^2$, переписав ее в виде $r^2 = \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$, где p – полупериметр.

$\dfrac{7}{2} = \dfrac{x \cdot 3 \cdot 2}{(x+5)}$, $x = 7$. $\quad \dfrac{8}{7} = \dfrac{y \cdot 4 \cdot 1}{(y+5)}$, $y = 2$.

Итак, $AB = 7 + 3 = 10$, $BC = 4 + 2 = 6$, $AC = 7 + 2 + 1 + 3 = 12$.

Ответ: 10, 6 и 12.

Применялись задачи-теоремы 2, 12, 14.

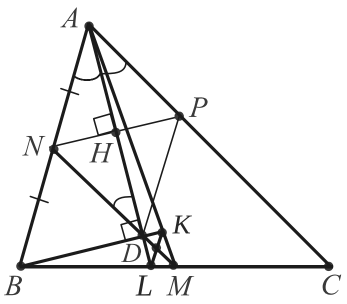
108. AM и AL – соответственно медиана и биссектриса в треугольнике ABC. $LK \parallel AB$, где $K \in AM$. Доказать, что $BK \perp AL$.

(Соросовская олимпиада)

Доказательство

M – точка пересечения боковых сторон трапеции $ABLK$. По замечательному свойству трапеции точки N, D и M лежат на одной прямой, где N – середина стороны AB, D – точка пересечения ее диагоналей. Значит, MN – средняя линия треугольника ABC. MN и AC параллельны, AD – секущая, поэтому $\angle\ ADN = \angle\ LAC$.

Но $\angle\ LAC = \angle\ LAB$. Отсюда $\angle\ ADN = \angle\ LAB = \angle\ LAN$ и треугольник AND – равнобедренный: $AN = DN$.



Итак, DN – медиана треугольника ADB, равная половине стороны AB. Значит, $\angle ADB = 90°$, $BK \perp AL$, ч.т.д.

Применялись дополнительное построение, задачи-теоремы 8, 20.

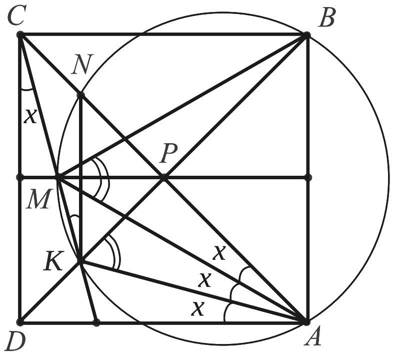
(🗐 Обратный ход).

(🗐 Проведем $DP \parallel AB$ и NP. $ANDP$ – параллелограмм, у которого диагональ AD служит биссектрисой угла.

Значит, $ANDP$ – ромб и $NP \perp AD$. Но $NP \parallel BD$ ($BDPN$ – параллелограмм, т.к. отрезки DP и BN параллельны и равны), поэтому $BK \perp AL$).

109. (№ 3521). Через вершину C квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке K, а серединный перпендикуляр к стороне AB – в точке M (M лежит между C и K). Найдите $\angle DCK$, если $\angle AKB = \angle AMB$.

Решение



Пусть $\angle DCK = x = \angle DAK$ (ΔDCK и ΔDAK – симметричны относительно прямой BD).

Рассмотрим описанную окружность треугольника AMB как вспомогательную. $\angle AKB = \angle AMB$, поэтому ей принадлежит точка K. Проведем диагональ AC, и точку N ее пересечения с окружностью соединим с точкой K. Из соображений симметрии относительно прямой MP ($P = AC \cap BD$), равны дуги MN и MK, а $\angle CKN = x$.

Это вписанный угол, опирающийся на дугу MN. На эту же дугу опирается вписанный угол MAN, а на равную ей дугу – вписанный угол MAK.

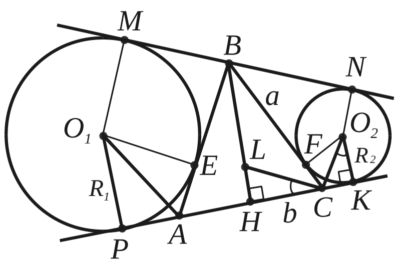
$\angle CAD = \angle MAN + \angle MAK + \angle DAK = 3x = 45°$, $x = 15°$.

Ответ: 15°.

Применялись дополнительное построение, осевая симметрия, вспомогательная окружность, задачи-теоремы 1, 4.

110. (№ 3606) Даны две непересекающиеся окружности, к которым проведены две общие внешние касательные. Рассмотрим равнобедренный треугольник, основание которого лежит на одной касательной, противоположная вершина – на другой, а каждая из боковых сторон касается одной из данных окружностей. Докажите, что высота треугольника равна сумме радиусов окружностей.

Доказательство



Пусть $AB = BC = a$, $AC = 2b$, $BH = h$, $BH \perp AC$; $O_1E = O_1P = R_1$; $O_2F = O_2K = R_2$; $CK = n$, $AP = m$.

Проведем биссектрису CL угла ACB.

Углы CO_2K и LCH равны как дополняющие угол O_2CK до прямого. Отсюда $\Delta CO_2K \sim \Delta LCH$ и $\dfrac{n}{R_1} = \dfrac{bk}{b} = k$ ($k > 0$).

По свойству биссектрисы $HC : HL = BC : BL$, поэтому $BL = ka$.

Имеем: $ka + kb = h$, $k = \dfrac{h}{a+b}$, $R_2 = \dfrac{n}{k} = \dfrac{n(a+b)}{h}$.

Аналогично $R_1 = \dfrac{m(a+b)}{h}$ и $R_1 + R_2 = \dfrac{(m+n)(a+b)}{h}$.

$MN = PK$, поэтому $MB + BN = PA + AC + CK$.
Учитывая равные отрезки касательных, получим:
$a - m + a - n = m + n + 2b$, $m + n = a - b$.

Имеем: $R_1 + R_2 = \dfrac{(a-b)(a+b)}{h} = \dfrac{a^2 - b^2}{h} = \dfrac{h^2}{h} = h$, ч.т.д.

Применялись дополнительное построение, задачи-теоремы 2, 9.

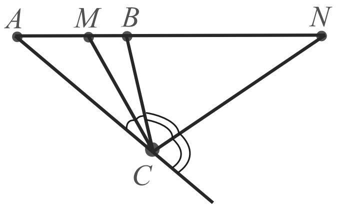
(🗐 Применение тригонометрии).
Пусть $\angle A = \angle C = 2\alpha$.

Тогда $R_1 + R_2 = m\,\mathrm{ctg}\,\alpha + n\,\mathrm{ctg}\,\alpha = (m+n)\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} =$

$= (a-b)(1 + \dfrac{b}{a}) : \dfrac{h}{a} = \dfrac{(a-b)(a+b)}{h} = \dfrac{h^2}{h} = h.$

111. (№ 2930. *Окружность Аполлония*). Доказать, что геометрическим местом точек, расстояния которых до двух данных точек A и B относятся как $m : n$ ($m \neq n$), есть окружность (см. задачу 142).

<u>*Доказательство*</u>

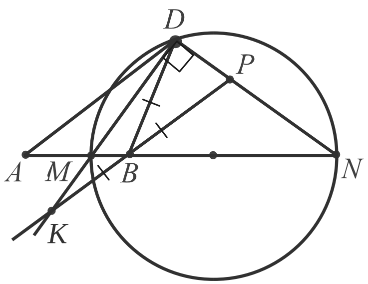


Пусть C – одна из точек, удовлетворяющих условию: $CA : CB = m : n$. Продлив отрезки AB и AC за точки B и C, проведем биссектрисы CM и CN углов ACB и образовавшегося смежного с ним угла. Тогда из точки C отрезок MN видно под углом 90°, т.к. угол между биссектрисами смежных углов прямой.

Кроме того, по свойству биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника верны пропорции: $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NB} = \dfrac{m}{n}$.

Значит, *точка C принадлежит окружности, построенной на отрезке MN, как на диаметре, называемой окружностью Аполлония*.

Докажем обратное утверждение: любая точка D построенной окружности обладает свойством: $AD : DB = m : n$.



Через точку B проведем прямую KP, параллельную AD и пересекающую прямые DM, DN в точках K, P соответственно. Используем очевидное подобие треугольников:

$\Delta AND \sim \Delta BPN$: $\dfrac{AD}{BP} = \dfrac{AN}{BN} = \dfrac{m}{n}$ (1).

$\Delta ADM \sim \Delta BKM$: $\dfrac{AD}{BK} = \dfrac{AM}{BM} = \dfrac{m}{n}$ (2).

Из (1) и (2): $\dfrac{AD}{BP} = \dfrac{AD}{BK}$, т.е. $BK = BP$, а т.к. по замечательному свойству окружности $\angle MDN = 90° = \angle KDP$, то DB – медиана прямоугольного треугольника KDP и $DB = KB = BP$.

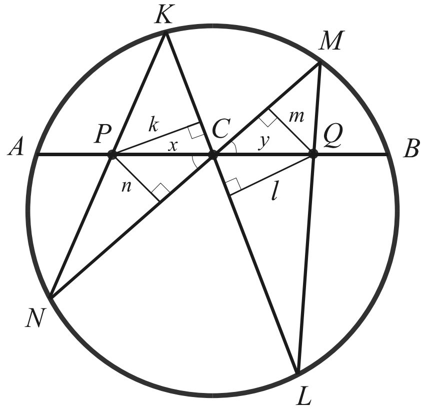
Подставив в равенство (1) DB вместо BP, получим требуемое: $AD : DB = m : n$.

Утверждение доказано полностью.

Применялись дополнительное построение, задачи-теоремы 4, 8, 9, 10.

112. (№ 3617. *Теорема о бабочке*). Через середину C произвольной хорды AB окружности проведены две хорды KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от AB). Отрезок KN пересекает AB в точке P. Отрезок LM пересекает AB в точке Q. Доказать, что $PC = CQ$.

<u>*Доказательство*</u>



Из точек P, Q опустим перпендикуляры на хорды KL, MN и обозначим их соответственно k, n, l, m.

Пусть $PC = x$, $CQ = y$.

Тогда $\dfrac{x}{y} = \dfrac{k}{l}$ и $\dfrac{x}{y} = \dfrac{n}{m}$. Пропорции следуют из подобия пар образовавшихся прямоугольных треугольников с общей вершиной C, которые содержат равные вертикальные углы.

Кроме того, подобны прямоугольные треугольники с гипотенузами KP, MQ и катетами k, m, потому что их острые углы K и M равны как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу NL. Отсюда $\dfrac{k}{m} = \dfrac{KP}{MQ}$. Для пары треугольников, расположенных в нижней полуплоскости относительно прямой AB, пропорция аналогична: $\dfrac{n}{l} = \dfrac{PN}{QL}$.

Теперь перемножим две первые и две последние пропорции: $\dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{kn}{lm}$ и $\dfrac{kn}{ml} = \dfrac{KP \cdot PN}{MQ \cdot QL}$. Следовательно, $\dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{KP \cdot PN}{MQ \cdot QL}$.

Наконец, воспользуемся свойством пересекающихся хорд окружности: $KP \cdot PN = AP \cdot PB$ и $MQ \cdot QL = AQ \cdot QB$.

Выполняя замены и полагая $AC = CB = a$, получим:

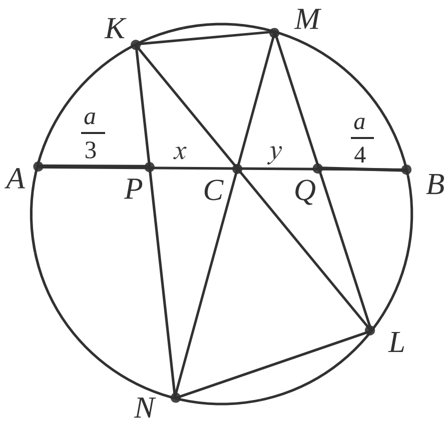
$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{AP \cdot PB}{AQ \cdot QB} = \frac{(a-x)\cdot(a+x)}{(a+y)\cdot(a-y)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 - y^2}.$$

$a^2x^2 - x^2y^2 = a^2y^2 - x^2y^2$, $x^2 = y^2$, $x = y$, $PC = CQ$, ч.т.д.

Применялись дополнительное построение, задачи-теоремы 3, 4.

113. Через точку пересечения диагоналей вписанного четырехугольника проведена хорда. Известно, что части этой хорды, расположенные вне четырехугольника, составляют ⅓ и ¼ длины хорды. В каком отношении эта хорда делится точкой пересечения диагоналей данного четырехугольника?

Решение



Пусть $MKNL$ – вписанный четырехугольник, $MN \cap KL = C$, $AB \cap KN = P$, $AB \cap ML = Q$, где AB – данная хорда.

Если $AB = a$, то по условию $AP = ⅓\, a$, $QB = ¼\, a$.

В предыдущей задаче доказано, что $\dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{AP \cdot PB}{AQ \cdot QB}$, где $x = PC$, $y = CQ$.

Имеем: $\dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{\frac{a}{3} \cdot \frac{2a}{3}}{\frac{a}{4} \cdot \frac{3a}{4}} = \dfrac{32}{27}$.

Отсюда $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{27}}$. $PQ = a - (⅓\, a + ¼\, a) = \dfrac{5a}{12}$. Таким образом, отрезок длиной $5a/12$ требуется разделить в отношении $\sqrt{32} : \sqrt{27}$.

$$PC = x = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{32}+\sqrt{27}} \cdot \frac{5a}{12} = \frac{\sqrt{32}a}{12}(\sqrt{32}-\sqrt{27}).$$

$$CQ = y = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{32}+\sqrt{27}} \cdot \frac{5a}{12} = \frac{\sqrt{27}a}{12}(\sqrt{32}-\sqrt{27}).$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{12(AP+PC)}{12(BQ+CQ)} = \frac{4a + a\sqrt{32}(\sqrt{32}-\sqrt{27})}{3a + a\sqrt{27}(\sqrt{32}-\sqrt{27})} = \frac{4+32-4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}}{3+4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}-27} =$$

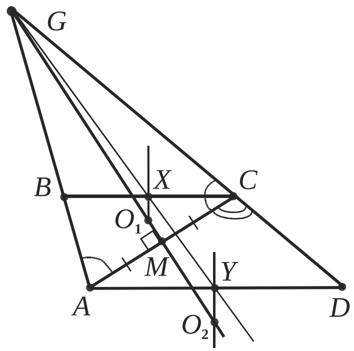
$$= \frac{36-12\sqrt{6}}{12\sqrt{6}-24} = \frac{3-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\sqrt{3} : \sqrt{2}$.

Применялись теорема о бабочке, задачи-теоремы 3, 4.

114. В трапеции $ABCD$ с основаниями $BC = a$, $AD = b$ известно, что $\angle BAC + \angle ACD = 180°$. Прямая AC пересекает общие касательные к окружностям, описанным около треугольников BAC и ACD, в точках P и Q. Найти PQ.

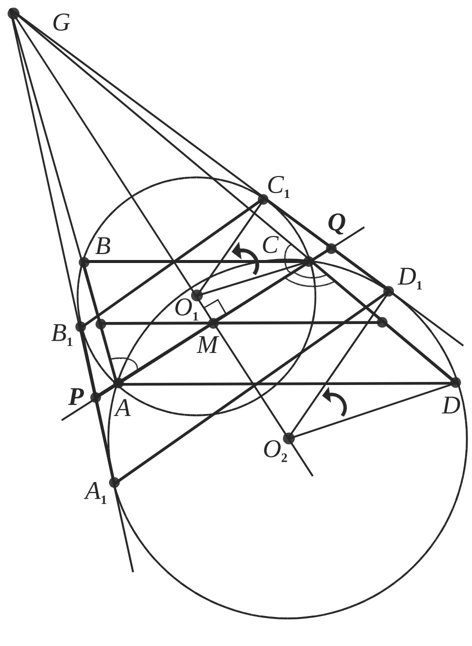
Решение



Пусть $G = AB \cap CD$.

Характерное свойство конфигурации: $\Delta\ AGC$ – равнобедренный, т.к. углы BAC и ACB дополняют угол ACD до развернутого. Если M – середина диагонали AC, то серединный перпендикуляр GM содержит центры O_1 и O_2 описанных окружностей треугольников ACB и ACD.

Рассмотрим гомотетию с центром G и коэффициентом $GA : GB$. Так как основания трапеции параллельны, то по свойству гомотетии BC перейдет в AD, середина BC, точка X – в середину AD – точку Y, XO_1 – в YO_2 ($XO_1 \parallel YO_2$). Следовательно, O_1C перейдет в O_2D и окружность с центром O_1 – в окружность с центром O_2.



Дополним рисунок, построив описанные окружности и общие касательные к ним. Пусть B_1, A_1 и C_1, D_1 – точки касания. Это пары соответственных точек при гомотетии, поэтому касательные тоже пересекутся в точке G.

Обратим внимание на равные углы CO_1C_1 и DO_2D_1, переходящие друг в друга.

При повороте вокруг точки O_1 на угол CO_1C_1 точка C перейдет в точку C_1, B – в B_1, отрезок CB – в C_1B_1 (здесь учтем симметрию лучей GA, GC и GB_1, GC_1 относительно линии центров O_1O_2). Аналогично при повороте вокруг точки O_2 на угол DO_2D_1 точка D перейдет в точку D_1, A – в A_1, отрезок DA – в D_1A_1.

В результате двух поворотов с различными центрами получим равнобедренную трапецию $A_1B_1C_1D_1$ с основаниями a и b как у данной трапеции!

Остается доказать, что искомый отрезок PQ – средняя линия новой трапеции.

$C_1Q^2 = QC \cdot QA$ для малой окружности и $D_1Q^2 = QC \cdot QA$ – для большей окружности. Отсюда $C_1Q^2 = D_1Q^2$, $C_1Q = D_1Q$.

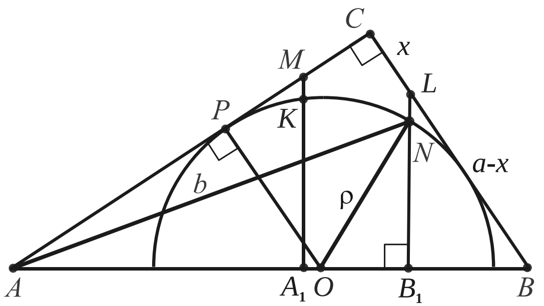
Аналогично $B_1P = A_1P$. Имеем $PQ = \dfrac{a+b}{2}$. *Ответ*: $\dfrac{a+b}{2}$.

Применялись геометрические преобразования, дополнительные построения, задачи-теоремы 13, 24.

№30 (150) (2006 г.) журнала "Математика в школах Украины" открывается интересной статьей Д.П. Мавло, содержащей три теоремы о равных (неравных) отрезках и их доказательства. Рассмотрим другие доказательства этих теорем.

115. Теорема 1. В произвольный прямоугольный треугольник ABC вписана полуокружность радиуса ρ, касающаяся катетов и имеющая центр на гипотенузе AB. Окружности с центрами в вершинах A и B и радиусами, равными b и a, пересекают ее в точках N и K соответственно. Проведенные через точки N и K перпендикуляры к гипотенузе пересекают катеты BC и CA в точках L и M. Тогда $CL = CM = ½\rho$.

Доказательство



Вначале докажем, что $CL = ½\,\rho$. Длины сторон BC, AC и AB, величины a, b и c, будем использовать как вспомогательные.

$\rho = \dfrac{ab}{a+b}$ пропорция $\dfrac{b-\rho}{\rho} = \dfrac{b}{a}$ следует из подобия треугольников AOP и ABC, где O – центр полуокружности, P – точка касания).

Ясно, что решение должно использовать характерное свойство конфигурации – принадлежность точек N и L соответственно полуокружности и катету: $AN = b$, $ON = \rho$, $CL = x$, $BL = a - x$, где x – искомая величина.

Воспользуемся равенством $AN^2 - ON^2 = AB_1^{\,2} - OB_1^{\,2}$ (см 6.4).

Тогда $b^2 - \rho^2 = (AB_1 - OB_1)\,(AB_1 + OB_1) = AO\,(c - BB_1 + OB - BB_1) = AO\,(c + OB - 2BB_1)$.

Полученное уравнение подходит, т.к. величины AO и OB несложно выразить через вспомогательные, а BB_1 – через искомую.

Точка O принадлежит биссектрисе прямого угла треугольника, поэтому $AO = kb$, $BO = ka$ $(k > 0)$.

Так как $ka + kb = c$, то $k = \dfrac{c}{a+b}$, $AO = \dfrac{bc}{a+b}$, $BO = \dfrac{ac}{a+b}$.

$BB_1 = \dfrac{a(a-x)}{c}$ (пропорция $\dfrac{BB_1}{a-x} = \dfrac{a}{c}$ следует из подобия треугольников LBB_1 и ABC).

Имеем: $b^2 - \rho^2 = \dfrac{bc}{a+b}\left(c + \dfrac{ac}{a+b} - 2\dfrac{a(a-x)}{c}\right)$. Умножив обе части равенства на $\dfrac{a+b}{ab}$, выразим x, учитывая, что $a^2 + b^2 = c^2$.

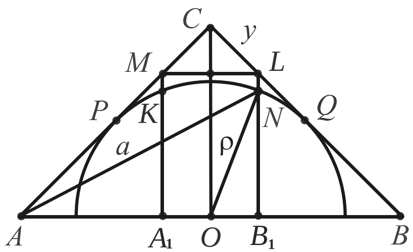
$$\frac{(a+b)b}{a} - \frac{ab}{a+b} = \frac{c^2}{a} + \frac{c^2}{a+b} - 2a + 2x,\quad 2x = \frac{ab + b^2 + 2a^2 - c^2}{a} - $$

$$- \frac{c^2+ab}{a+b} = \frac{ab+a^2}{a} - \frac{c^2+ab}{a+b} = a + b - \frac{c^2+ab}{a+b} = \frac{ab}{a+b} = \rho,$$

$x = CL = ½\,\rho$. Равенство $CM = ½\,\rho$ доказывается аналогично.

Итак, $CL = CM = ½\,\rho$, ч.т.д.

(Метод параллельного проектирования).



Упростим "честное" доказательство. Записав равенства $CL = ½\,\rho$, $CM = ½\,\rho$ в виде $CL : CQ = 1 : 2$, $CM : CP = 1 : 2$ (P и Q – точки касания), приходим к выводу, что доказываемые свойства носят аффинный характер (при параллельном проектировании на плоскость сохраняются отношения отрезков, лежащих на одной или на параллельных прямых) и произвольный прямоугольный треугольник можно заменить, например, равнобедренным прямоугольным, для которого $b = a$, $\rho = ½\, a$.

Пусть $CL = y$. $AN^2 - ON^2 = AB_1^2 - OB_1^2$.

$$a^2 - ¼\, a^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2, \quad \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2} + ay,$$

$y = (\frac{3}{4} - \frac{1}{2})\, a = \frac{a}{4}$, т.е. $CL = ½\, \rho$.

Из соображений симметрии $CM = CL = ½\, \rho$.

Теорема 3 (обратная теореме 1).

Дан прямоугольный треугольник ABC и вписанная в его прямой угол C полуокружность, касающаяся катетов CA и CB в точках F_1 и F_2 соответственно, имеющая центр на гипотенузе. Через середины M и L отрезков CF_1 и CF_2 проведены перпендикуляры к гипотенузе AB, которые пересекают полуокружность в двух точках K и N. Доказать, что треугольники ANC и BKC – равнобедренные.

Доказательство

Пусть $AN = z$.

Требуется доказать, что $z = b = AC$, зная, что $x = ½\rho$ (см. первое доказательство теоремы 1), ρ – вспомогательный отрезок.

Тогда $z^2 - \rho^2 = AO\,(c + OB - 2BB_1)$.

Имеем: $z^2 - \rho^2 = \frac{bc}{a+b}(c + \frac{ac}{a+b} - 2\frac{a^2(2a+b)}{2c(a+b)})$,

$$z^2 = \rho^2 + \frac{b}{a+b}(c^2 + \frac{ac^2}{a+b} - \frac{a^2(2a+b)}{(a+b)}) =$$

$$= \rho^2 + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{c^2(2a+b) - a^2(2a+b)}{a+b} = \frac{a^2b^2}{(a+b)^2}\cdot b\cdot\frac{b^2(2a+b)}{(a+b)^2} =$$

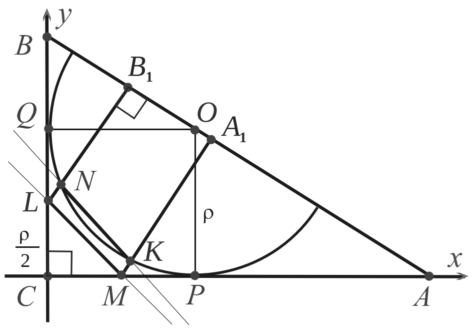
$$= b^2\cdot\frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a+b)^2} = b^2.$$

Отсюда $z = b = AN = AC$ и треугольник ACN – равнобедренный.

Для треугольника BKC доказательство аналогично.

Теорема 2. Доказать, что $KN \geq ML$ (см. полное условие в т.1).

Доказательство



(Метод координат без явного задания единичного отрезка).

Пусть C (0; 0), A (b; 0), B (0; a), т.е. катеты AC и BC принадлежат осям, $AC \geq BC$.

Тогда O (ρ; ρ), M ($\rho/2$; 0), L (0; $\rho/2$), $k_{LM} = -1$ (см. теорему 1).

Для доказательства неравенства $KN \geq ML$ убедимся, например, в том, что $k_{NK} \leq -1$ (k_{LM} и k_{NK} – угловые коэффициенты прямых).

$k_{NK} = \frac{y_K - y_N}{x_K - x_N}$, где x_K, x_N, y_K, y_N – координаты точек N и K.

Координаты точек вычислим как координаты точек пересечения прямых LB_1 и MA_1 с полуокружностью $(x - \rho)^2 + (y - \rho)^2 = \rho^2$ (∗).

$k_{AB} = -\frac{a}{b}$. Тогда угловые коэффициенты параллельных прямых LB_1 и MA_1, содержащих перпендикуляры к гипотенузе, равны $(-1) : (-\frac{a}{b}) = \frac{b}{a}$, а их уравнения суть: $y = \frac{b}{a}x + \frac{\rho}{2}$, $y = \frac{b}{a}x - \frac{\rho}{2}$.

Итак, вычислим координаты точки N, подставляя $\frac{b}{a}x + \frac{\rho}{2}$ вместо y в уравнение (∗).

$x^2 - 2x\rho + \frac{b^2}{a^2}x^2 - \frac{b\rho}{a}x + \frac{\rho^2}{4} = 0$, $x^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) - 2x\rho\left(\frac{2a+b}{2a}\right) + + \frac{\rho^2}{4} = 0$. Учитывая, что $a^2 + b^2 = c^2$,и умножив на $4a^2$, получим квадратное уравнение $4c^2x^2 - 2x\cdot 2a\rho\,(2a + b) + \rho^2a^2 = 0$. Отсюда $x_N = (2a\rho\,(2a + b) - \sqrt{4a^2\rho^2(4a^2 + 4ab + b^2) - 4a^2\rho^2c^2}\,) : (4c^2) = \frac{a\rho}{2c^2}(2a + b) - \sqrt{4ab + 3a^2}\,)$ (значение выражения со знаком плюс перед корнем – абсцисса второй точки пересечения прямой LB_1 с полной окружностью). $y_N = \frac{b}{a}x_N + \frac{\rho}{2}$.

Аналогично, подстановкой $\frac{b}{a}x - \frac{\rho}{2}$ вместо y в уравнение (*), вычислим координаты точки K.

$4c^2x^2 - 2x \cdot 2a\rho(2a + 3b) + 9\rho^2a^2 = 0.$

$x_K = \frac{a\rho}{2c^2}(2a + 3b) - \sqrt{12ab - 5a^2})$, $y_K = \frac{b}{a}x_K - \frac{\rho}{2}$. Имеем:

$$k_{NK} = \frac{\frac{b}{a}x_K - \frac{\rho}{2}y - \frac{b}{a}x_N - \frac{\rho}{2}}{x_K - x_N} = \frac{\frac{b}{a}(x_K - x_N) - \rho}{x_K - x_N} = \frac{b}{a} - \frac{\rho}{x_K - x_N}.$$

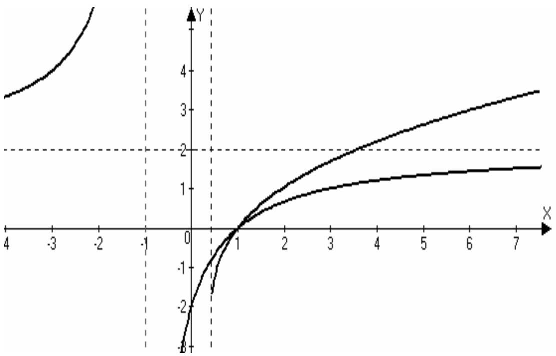
Так как $x_K - x_N = \frac{a\rho}{2c^2}(2b + \sqrt{4ab + 3a^2} - \sqrt{12ab - 5a^2})$, то остается доказать неравенство

$$\frac{b}{a} - \frac{2c^2}{a(2b + \sqrt{4ab+3a^2} - \sqrt{12ab-5a^2})} \le -1 \text{ или}$$

$$\sqrt{12ab - 5a^2} - \sqrt{4ab + 3a^2} \ge \frac{2a(b-a)}{a+b}.$$

Разделив на a ($a > 0$) обе части, получим $\sqrt{12\frac{b}{a} - 5} - \sqrt{4\frac{b}{a} + 3} \ge$

$$\ge \frac{2(b-a)}{a+b} = 2\frac{b/a - 1}{b/a + 1} \text{ или } \sqrt{12t - 5} - \sqrt{4t + 3} \ge 2\frac{t-1}{t+1}, \text{ где } t \ge 1.$$



Убедиться в истинности полученного неравенства можно, например, графическим способом.

При $t \ge 1$ в его левой и правой частях возрастающие функции, причем разность корней возрастает быстрее и неограниченно, а гипербола имеет горизонтальную асимптоту $y = 2$.

Итак, $k_{NK} \le -1$, что равносильно доказываемому неравенству.

Равенство достигается тогда и только тогда, когда треугольник прямоугольный и равнобедренный.

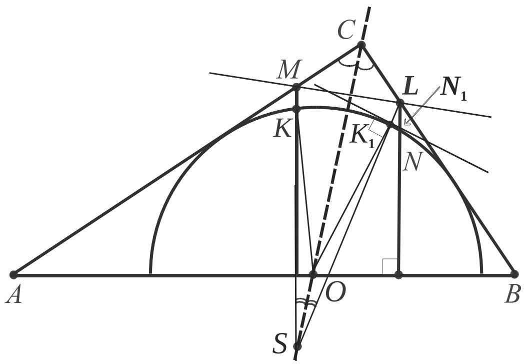
(🗍 Осевая симметрия).

Отыскивая более изящное доказательство, обратим внимание на то, что в равнобедренном треугольнике ABC $KN = ML$, $LN = MK$, $OM = OL$ и т.д.

Неравенство возникает тогда, когда нарушается симметрия.

"Восстановим" ее, рассматривая осевую симметрию относительно прямой, содержащей биссектрису CO прямого угла.

$MK \cap CO = S$ ($AC > BC$). Так как точка M симметрична точке L, то симметричны отрезки SM, SL, их точки пересечения с полуокружностью K, K_1 и радиусы OK, OK_1.



Пусть касательная, перпендикулярная радиусу OK_1, пересекает LN в точке N_1.

Точка N_1 не принадлежит полуокружности, поэтому она отлична от точки N.

Имеем: $MK = LK_1 < LN_1 < LN$.

Полученное неравенство $MK < LN$ и равенство $MK = LN$ дают неравенство $MK \le LN$, равносильное доказываемому.

7.2. Задачи для самостоятельного решения

К десяти задачам для самостоятельного решения приведены ответы и указания двух уровней. *Первое* – это указание номеров задач-теорем или методов, которые могут применяться в решении, *второе* – более подробное.

Задачи взяты из раздела "Конкурсные задачи" сборника [2].

№ 3125. Дан треугольник ABC, в котором угол B равен 30º, $AB = 4$, $BC = 6$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Найти площадь треугольника ABD.

№ 3194. Окружность с центром в точке O проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает сторону AC в точке M и сторону BC в точке N. Углы AOM и BON равны 60º. Расстояние от точки N до прямой AB равно $5\sqrt{3}$. Длина отрезка MN в четыре раза меньше длины отрезка AB. Найти площадь треугольника ABC.

№ 3202. На сторону BC ромба $ABCD$ опущена высота DK. Диагональ AC пересекает ее в точке M. Найдите DK, если известно, что $AK = 17$ и $DM : MK = 13 : 7$.

№ 3220. Касательная, проведенная через вершину M вписанного в окружность треугольника KLM, пересекает продолжение стороны KL за вершину L в точке N. Известно, что радиус окружности равен 2, $KM = \sqrt{8}$, $\angle MNK + \angle KML = 4 \angle LKM$. Найдите касательную MN.

№ 3222. В треугольнике ABC угол C равен 120º, а биссектриса угла C равна 3. Известно, что $AC : CB = 3 : 2$. Найдите тангенс угла A и сторону BC.

№ 3225. Медиана AM и высота CH равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке K. Найдите площадь треугольника ABC, если $CK = 5$, $KH = 1$.

№ 3244. В окружность радиуса 5 вписан четырехугольник $ABCD$, у которого угол D прямой, $AB : BC = 3 : 4$. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если его площадь равна 44.

№ 3313. В окружности проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке E, причем касательная к окружности, проходящая через точку B, параллельна AC. Найдите площадь треугольника BCE, если известно, что $EA : DA = 3 : 4$ и $S_{DCB} = 16$.

№ 3318. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке K. Известно, что $AD = 5$, $BC = 10$, $BK = 6$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

№ 3343. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на высоте BD как на диаметре построена окружность. Через точки A и C к окружности проведены касательные AM и CN, продолжения которых пересекаются в точке O. Найдите отношение $AB : AC$, если $OM : AC = k$ и высота BD меньше основания AC.

О т в е т ы

3125. 2,4. **3194**. $80\sqrt{3}$. **3202**. $2\sqrt{30}$. **3220**. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 15°}$ или $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 105°}$.

3222. $\sqrt{3}/4$, 5. **3225**. 30. **3244**. $14 + 6\sqrt{5}$. **3313**. 9. **3318**. 55.

3343. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5k+1}{k+1}}$.

Указания первого уровня

3125. 9.

3194. 4, 10, 19.

3202. 9.

3220. 5, теорема синусов.

3222. Метод площадей.

3225. 10, подобие.

3244. 4, 17.

3313. 4, 5, 9.

3318. 3, 22.

3343. 9, 14, 24.

Указания второго уровня

3125. $AD : DC = 2 : 3$. $S_{ABD} = 2/5\ S_{ABC}$.

3194. $S_{AMNB} = AK \cdot NK$, где $NK = 5\sqrt{3}$. $S_{ABC} = 16/15\ S_{AMNB}$, так как $\Delta\ CMN \sim \Delta\ ABC$.

3202. $CD : CK = 13 : 7$. $DK^2 = 169\,k^2 - 49\,k^2 = 120\,k^2$, $k > 0$. Из $\Delta\ ADK$: $120\,k^2 + 169\,k^2 = 17^2$. $AD = 13$, $DK = 2\sqrt{30}$.

3220. $\angle LKM = \angle NML$ как вписанный угол и угол между касательной и хордой. Далее в $\Delta\ KMN$ применить теоремы о сумме углов треугольника и синусов.

Возможны два случая расположения точек M и O относительно прямой KL.

3222. $S_{ABC} = S_{BCL} + S_{ACL}$. $BC = 5$. $BD \perp AC$. Из прямоугольного треугольника ABD $\operatorname{tg} \angle A = BD / AD$.

3225. MN – средняя линия, $MD \perp AB$. $\Delta\, ACH \sim \Delta\, NMD$. $MD = 3$, $DN = x$, $AH = 2x$.

$\Delta\, AHK \sim \Delta\, ADM$. $AN = 5x = MC = MB$. Из $\Delta\, MDB$ ($BD = 4x$, $BM = 5x$, $MD = 3$) $x = 1$. $AN = 5$. $S_{ABC} = AN \cdot CH = 5 \cdot 6 = 30$.

3244. $\angle B = \angle D = 90^{\circ}$. $AC = 10$, $BC = 8$, $AB = 6$, $BC + AB = 14$.
$S_{ADC} = 44 - 24 = 20$. $AD \cdot DC = 40$.

$$AD + DC = \sqrt{(AD+DC)^2} = \sqrt{AD^2 + DC^2 + 2AD \cdot DC} =$$
$$= \sqrt{100 + 2 \cdot 40} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}.\ P_{ABCD} = 14 + 6\sqrt{5}.$$

3313. $\Delta\, AED \sim \Delta\, BCE$. $\angle ADB = \angle BDC = \angle ACB$. $\Delta\, BDC \sim \Delta\, BEC$ (коэффициент подобия равен ¾).

3318. $CK = 8$. $AK = x$, $DK = \sqrt{25 - x^2}$. $AK \cdot KC = AK \cdot KD$, $x = 3$. $AC = 11$, $BD = 10$. $S_{ABDC} = ½\, AC \cdot BD = 55$.

3343. (🗍 $BD = OD - OB$, где $OB = OM^2 : OD$).
(🗍 $BD = 2r$, где $r = S/p$, S – площадь треугольника AOC, p – его полупериметр, $DI = r$).
(🗍 Т.к. $AO : AD = b(2k + 1) : b = 2k + 1$, то $OI : DI = 2k + 1$).

Глава 8

КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

8.1. Координатный метод

Метод позволяет использовать средства алгебры и анализа. Он *требует задания прямоугольной системы координат, рациональный выбор которой важен*. Необходимо анализировать, как во введенной системе будут определяться координаты точек, которые используются при составлении уравнений прямых и окружностей, вычислении расстояний. Эффективно сочетается с векторным.

Приведем основные теоретические сведения.

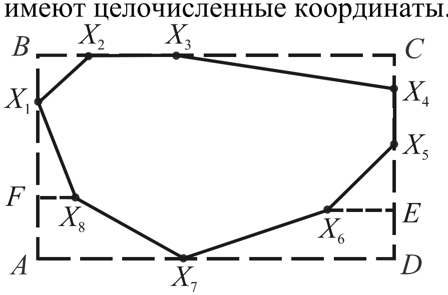
Пусть на плоскости даны точки $A\,(x_1;\, y_1)$, $B\,(x_2;\, y_2)$ и две прямые $y = k_1 x + l_1$, $y = k_2 x + l_2$, имеющие угловые коэффициенты k_1 и k_2.

1. $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ – расстояние между точками A и B.
2. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ – уравнение окружности *Окр* ($M\,(a, b)$, R).
3. $y = k\,(x - a) + b$ – ур-е прямой с угл. коэф. k, проходящей через т. $M\,(a, b)$.
4. $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha$ – угл. коэф. прямой AB, образующей угол α с осью ox.
5. $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две точки A и B.
6. $k_1 = k_2$, $l_1 \neq l_2$ – условие параллельности двух прямых.
7. $k_1 k_2 = -1$ – условие перпендикулярности двух прямых.
8. $\operatorname{tg} \varphi = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$ – тангенс угла между двумя пересекающимися прямыми.
9. $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ – деление отрезка AB в отношении $\lambda > 0$.
10. $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ – деление отрезка AB пополам ($\lambda = 1$).
11. $\rho = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ – расстояние от т. $M\,(x_0, y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$.

116. Координаты всех вершин выпуклого многоугольника являются целыми числами. Докажите, что его площадь выражается рациональным числом.

Доказательство

Пусть $X_1 \ldots X_8$ – выпуклый многоугольник, вершины которого имеют целочисленные координаты.

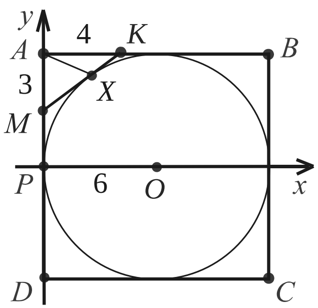


Всегда существует содержащий его прямоугольник $ABCD$.

Площадь многоугольника равна разности площадей прямоугольника $ABCD$ и суммы площадей всех фигур, которые дополняют многоугольник до прямоугольника. Эти фигуры являются либо прямоугольными треугольниками (как X_1BX_2), либо прямоугольными трапециями (как X_6EDX_7), в формулах для вычисления площадей которых используются длины катетов треугольников, длины оснований и высот трапеций. Перечисленные величины и длины сторон прямоугольника определяются как модули разностей соответствующих координат вершин и являются натуральными числами. Значит, площади фигур – рациональные числа, и площадь многоугольника выражается рациональным числом.

117. (№ 3491). На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ взяты точки K и M так, что $3AK = 4AM = AB$. Докажите, что прямая KM касается окружности, вписанной в квадрат.

Доказательство



Выберем начало системы координат в точке P – середине AD. Пусть ось абсцисс содержит центр O вписанной окружности, а ось ординат – точки M, A и D. Если O (6, 0), то M (0, 3), K (4, 6).

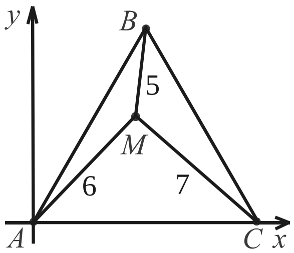
Убедимся, что прямая KM ($y = ¾\, x + 3$) и вписанная окружность ($(x - 6)^2 + (y - 0)^2 = 6^2$ или $x^2 - 12x + y^2 = 0$) имеют единственную общую точку X.

$x^2 - 12x + (¾\, x + 3)^2 = 0$, $(5/4\, x - 3)^2 = 0$, $x = 12/5$, $y = 24/5$.

Итак, X (12/5, 24/5) – точка касания, ч.т.д. (См. задачу 58).

118. (№ 3559). Внутри правильного треугольника имеется точка, удаленная от его вершин на 5, 6 и 7. Найдите площадь этого треугольника.

Решение



Пусть $AB = BC = AC = a$, A (0; 0) – начало системы координат, ось абсцисс которой содержит сторону AC, а ось ординат перпендикулярна ей. Тогда C (a; 0), $B\,(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2})$, M (x; y) – данная точка.

Так как по условию $AM = 6$, $CM = 7$, то $AM^2 = 36$, $CM^2 = 49$ и верна система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ (x-a)^2 + y^2 = 49 \end{cases}$, из которой находим, что $a^2 - 2ax = 13$, $x = (a^2 - 13) / 2a$.

$BM = 5$, поэтому $BM^2 = 25$ и $(x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{a\sqrt{3}}{2})^2 = 25$, $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 - ay\sqrt{3} + \frac{3a^2}{4} = 25$. Т.к. $x^2 + y^2 = 36$, то $11 + a^2 = ax + ay\sqrt{3}$,

$$y = \frac{a^2 + 11 - ax}{a\sqrt{3}} = \frac{a^2 + 11 - \frac{a^2 - 13}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a^2 + 35}{2a\sqrt{3}}.\quad M\,(\frac{a^2 - 13}{2a}, \frac{a^2 + 35}{2a\sqrt{3}}).$$

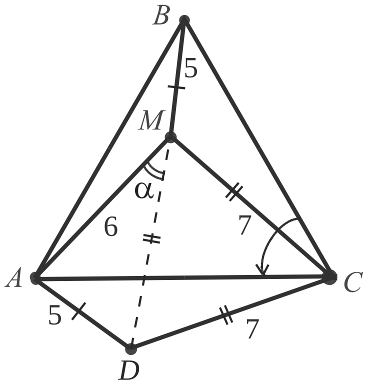
Координаты точки M выражены через параметр a, поэтому еще раз воспользовавшись первым уравнением системы, составим новое уравнение для нахождения квадрата стороны треугольника:

$$36 - x^2 = y^2 \text{ или } 36 - \frac{a^4 - 26a^2 + 169}{4a^2} = \frac{a^4 + 70a^2 + 1225}{4a^2 \cdot 3},$$

$a^4 - 110\,a^2 + 433 = 0$, $a^2 = 55 + 36\sqrt{2}$ (значение $a^2 = 55 - 36\sqrt{2}$ явно не подходит). Вычисляя искомую площадь по формуле $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, получим $\frac{55\sqrt{3} + 36\sqrt{6}}{4}$.

Ответ: $\frac{55\sqrt{3} + 36\sqrt{6}}{4}$.

(Применение поворота).



Пусть $MB = 5$, $MA = 6$, $MC = 7$.

Выполним поворот треугольника BMC вокруг вершины C на 60°, при котором совпадут стороны CB и CA. Если D – образ точки M, то совпадут также CM, CD и BM, AD.

Соединив точки M и D, изучим стороны образовавшихся треугольников. $\Delta\ CMD$ – правильный как равнобедренный ($CM = CD$) с углом 60° (угол поворота) при вершине.

Значит, в $\Delta\ AMD$ известны все стороны: $MD = 7$, $AD = 5$, $MA = 6$ (заметим, что их длины равны данным отрезкам, а углы – углам с общей вершиной в точке M, уменьшенным на 60°).

$S_{ABC} = \dfrac{AC^2\sqrt{3}}{4}$. AC^2 теперь можно вычислить из $\Delta\ AMC$ по теореме косинусов, предварительно найдя $\cos\alpha$, где $\alpha = \angle AMD$.

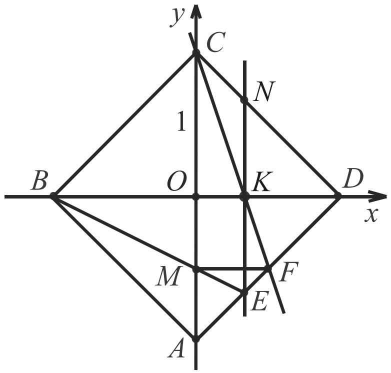
$\cos\alpha = \dfrac{36+49-25}{2\cdot 6\cdot 7} = \dfrac{5}{7}$. $\sin\alpha = \sqrt{1-\dfrac{25}{49}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{7}$ $(\alpha < 90°)$.

$\cos(60° + \alpha) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{7} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{7} = \dfrac{5-6\sqrt{2}}{14}$. Имеем: $AC^2 = 36 + 49 - 2\cdot 6\cdot 7\cdot\dfrac{5-6\sqrt{2}}{14} = 55 + 36\sqrt{2}$. $S_{ABC} = \dfrac{55\sqrt{3}+36\sqrt{6}}{4}$.

Примечание. В геометрии треугольника известна *теорема Помпею*: если в плоскости правильного треугольника ABC имеется точка M, то отрезки MB, MA, MC могут служить сторонами некоторого треугольника (один из отрезков равен сумме двух других тогда и только тогда, когда точка M принадлежит описанной окружности треугольника (см. задачу 72).

119. На диагонали AC квадрата $ABCD$ выбрана точка M. Прямая BM пересекает сторону AD в точке E, а прямая, проходящая через точку M параллельно BD, – в точке F. Докажите, что прямая FC и прямая, проходящая через точку E параллельно диагонали AC, пересекаются на диагонали BD.

Доказательство



Выберем систему координат на плоскости с началом в точке O пересечения диагоналей квадрата осями, которые их содержат, и единичным отрезком, равным половине диагонали. Тогда $A\ (0; -1)$, $B\ (-1; 0)$, $C\ (0; 1)$, $D\ (1; 0)$, $M\ (0; a)$, где a – параметр $(-1 < a < 0)$.

Вычислим координаты точки K как точки пересечения прямых FC и BD. $MF \parallel BD$ и $F \in AD$, поэтому ордината точки F совпадает с ординатой точки M, а ее абсцисса определяется из уравнения $y = x - 1$ прямой AD и равна $a + 1$, т.е. $F\ (a + 1; a)$. Уравнение прямой FC суть: $\dfrac{a-1}{a+1} = \dfrac{y-1}{x-0}$, $y = \dfrac{a-1}{a+1}x + 1$.

Уравнение прямой BD $y = 0$, поэтому $\dfrac{a-1}{a+1}x + 1 = 0$.

Отсюда $x = \dfrac{a+1}{1-a}$ и $K\left(\dfrac{a+1}{1-a}; 0\right)$.

Теперь вычислим абсциссу точки E. Если она совпадет с абсциссой точки K, то утверждение будет доказано, т.к. $EN \parallel AC$.

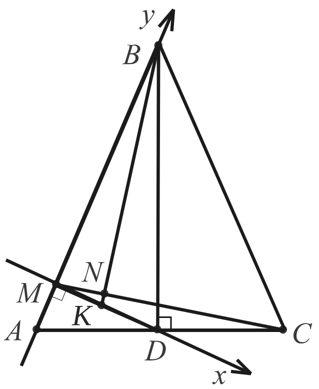
Уравнение прямой BM суть: $\dfrac{a-0}{0+1} = \dfrac{y-0}{x+1}$, $y = ax + a$. Уравнение прямой AD $y = x - 1$. Отсюда $ax + a = x - 1$, $x = \dfrac{a+1}{1-a}$.

Абсциссы точек K и E совпали, что и требовалось доказать.

120. (№17.076). В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота BD. M – проекция точки D на сторону AB, точка K – середина отрезка DM, N – точка пересечения прямых BK и MD. Доказать, что угол BNC равен 90° (см. задачу 73).

Доказательство

Используем пропорцию $MB : MD = MD : MA$ для определения координат точек. Пусть $MB = b$ и 2λ – положительный коэффициент. Тогда $MD = MB \cdot 2\lambda = 2\lambda b$, $MA = MD \cdot 2\lambda = 4\lambda^2 b$.



Если M – начало координат и лучи MD, MB соответственно положительные полуоси абсцисс и ординат, то $M\ (0;\ 0)$, $B\ (0;\ b)$, $D\ (2\lambda b;\ 0)$, $A\ (0;\ -4\lambda^2 b)$.

Координаты точек C и K найдем по формулам для координат середины отрезка: $K\ (\lambda b;\ 0)$, $C\ (4\lambda b;\ 4\lambda^2 b)$.

Вычислим угловые коэффициенты прямых BK и MC:

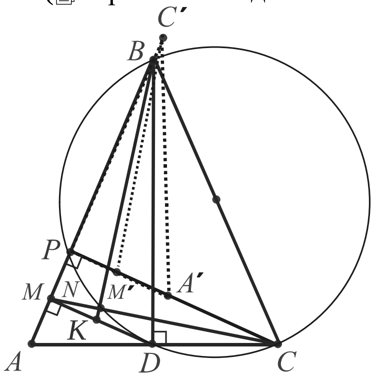
$$k_{BK} = \frac{0-b}{\lambda b - 0} = -\frac{1}{\lambda},\quad k_{MC} = \frac{4\lambda^2 b}{4\lambda b} = \lambda .$$

Итак, $k_{BK}\cdot k_{MC} = -1$, поэтому $BK \perp MC$, $\angle\, BNC = 90°$, ч.т.д.

(Применение векторов).

$\overline{MC}\cdot\overline{BK} = (\overline{MA}+\overline{AC})(\overline{BD}+\overline{DK}) = \overline{MA}\cdot\overline{BD} + \overline{AC}\cdot\overline{BD} +$
$+\overline{MA}\cdot\overline{DK} + \overline{AC}\cdot\overline{DK} = (\overline{MD}+\overline{DA})\cdot\overline{BD} + 0 + 0 + 2\overline{AD}\cdot\overline{DK} =$
$= \overline{MD}\cdot\overline{BD} + \overline{DA}\cdot\overline{BD} + \overline{DM}\cdot\overline{AD} = \overline{DM}\cdot\overline{DB} + 0 + \overline{DM}\cdot\overline{AD} =$
$= \overline{DM}\cdot(\overline{AD}+\overline{DB}) = \overline{DM}\cdot\overline{AB} = 0$. Отсюда $BK \perp MC$, $\angle\, BNC = 90°$.

(Применение дополнительного построения и подобия).



Проведем $CP \perp AB$. $DM \parallel CP$ и D – середина AC, DM и CM служат средней линией и медианой $\Delta\ ACP$ соответственно. $\Delta\ ACP \sim \Delta\ DBM$, т.к. углы C и B дополняют угол A до прямого. Стороны указанных углов взаимно перпендикулярны: $AC \perp BD$, $PC \perp BM$. Значит, соответственные медианы CM и BK взаимно перпендикулярны, т.е. угол BNC – прямой, ч.т.д.

Можно рассмотреть поворот треугольника ACP вокруг точки P на 90°, при котором вершина A перейдет в A', вершина C – в C' ($C' \in AB$, $A' \in CP$), а медианы $C'M'$ и BK станут параллельными.

Заметим также, что точки C, D, N, P, B лежат на описанной окружности треугольника CBD.

(См. задачи 71-73, 67.2, 115, задачи главы 9).

8.2. Векторный метод

Векторный метод решения планиметрических задач состоит в применении мощного аппарата векторной алгебры – раздела математики, изучающего векторы.

Он эффективен в задачах на вычисление расстояний и углов, на доказательство параллельности и перпендикулярности прямых, принадлежности трех точек одной прямой, геометрических тождеств и неравенств. *В решениях используют теоретические сведения и доказанные ранее векторные соотношения*.

(*Теоретические сведения*: правила треугольника, параллелограмма и многоугольника сложения векторов, вычитание векторов, противоположные векторы, коллинеарные векторы, разложение вектора по базису, скалярное произведение, единичные векторы, координатные векторы (орты); действия над векторами, заданными координатами и т.д.).

Основные векторные соотношения на плоскости

1. $\overline{AA} = \overline{0}$ – нулевой вектор.
2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ – противоположные векторы.
3. $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ – правило треугольника ($|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$).
4. $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$ – правило параллелограмма ($AOBC$ – парал.).
5. $\overline{A_1A_n} = \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n}$ – правило многоугольника.
6. $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{0}$ – необходимое и достаточное условие того, чтобы точки A_1 и A_n совпадали (или ломаная $A_1A_2\ldots A_n$ была замкнутой).
7. $(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})^2 = \overline{a}^2 + \overline{b}^2 + \overline{c}^2 + 2\overline{a}\,\overline{b} + 2\overline{a}\,\overline{c} + 2\overline{b}\,\overline{c}$.
8. $\overline{OB} - \overline{OA} = \overline{AB}$ – правило вычитания векторов.
9. $\overline{b} = k\overline{a}$ – признак коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
10. $\overline{BC} = k\overline{BA}$; $\overline{OC} = k\overline{OA} + (1-k)\overline{OB}$; $\overline{OC} = k\overline{OA} + p\overline{OB}$ $(k + p = 1)$ – необходимые и достаточные условия принадлежности трех точек A, B и C одной прямой (O – произвольная точка).
11. $\overline{c} = x\overline{a} + y\overline{b}$ – разложение вектора $\overline{c}$ по двум неколлинеарным векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Если $x_1\overline{a} + y_1\overline{b} = x_2\overline{a} + y_2\overline{b}$, то $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$ – единственность такого разложения.

12. $\overline{OM}$ = ½ ($\overline{OA}+\overline{OB}$), где M – середина отрезка AB (O – произвольная точка); $\overline{AM}=\overline{MB}$.

13. $\overline{OX}=\dfrac{n}{m+n}\,\overline{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overline{OB}$, где $AX : XB = m : n$, $X \in AB$;

$\overline{OX}=\dfrac{\overline{OA}+k\overline{OB}}{1+k}$, где $AX : XB = k$ ($k \neq -1$), $X \in AB$ – деление отрезка в данном отношении (O – произвольная точка).

14. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ – скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

$\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$. $\overline{a}\perp\overline{b}\Leftrightarrow\varphi=90°$.

15. $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$ – скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

16. $(\overline{a}\cdot\overline{b})^2\le\overline{a}^2\cdot\overline{b}^2$ или $-|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\le\overline{a}\cdot\overline{b}\le|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|$.

17. $\overline{OM}$ = ⅓ ($\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$), где M – центроид треугольника ABC.

18. $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{0}$, где M – центроид треугольника ABC.

19. Для любых трех точек A, B и C: $AB^2+AC^2-BC^2=2\,\overline{AB}\cdot\overline{AC}$.

20. Для любых четырех точек A, B, C и D:

$AB^2+CD^2-AD^2=2\,\overline{AB}\cdot\overline{AC}-BC^2=2\,\overline{AC}\cdot\overline{DB}$.

21. $a_1=x_2-x_1$, $a_2=y_2-y_1$ – координаты вектора $\overline{a}\,(a_1;a_2)$, имеющего началом точку A_1 (x_1; y_1), а концом точку A_2 (x_2; y_2).

22. $|\overline{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ – абсолютная величина (длина) вектора $\overline{a}\,(a_1;a_2)$.

23. $\overline{a}\,(a_1;a_2)+\overline{b}\,(b_1;b_2)=\overline{c}\,(a_1+b_1;a_2+b_2)$ – сумма векторов.

24. $\overline{a}\,(a_1;a_2)-\overline{b}\,(b_1;b_2)=\overline{c}\,(a_1-b_1;a_2-b_2)$ – разность векторов.

25. $\overline{(a_1;a_2)}\cdot\lambda=\overline{(\lambda a_1;\lambda a_2)}$ – произведение вектора на число λ.

26. $a_1b_1+a_2b_2$ – скалярное произведение двух векторов $\overline{a}\,(a_1;a_2)$ и $\overline{b}\,(b_1;b_2)$; $a_1b_1+a_2b_2=0\Leftrightarrow\overline{a}\perp\overline{b}$. $(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$.

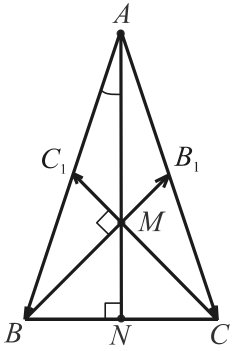
27. $\overline{a}=x\overline{e_1}+y\overline{e_2}$ – разложение вектора $\overline{a}\,(a_1;a_2)$ по координатным векторам $\overline{e_1}$ (1; 0), $\overline{e_2}$ (0; 1) (ортам).

Для овладения векторным методом решения задач важно уметь геометрически истолковывать основные векторные соотношения.

Векторное соотношение	***Геометрическое истолкование***
$\overline{AB}=k\,\overline{CD}$ $(k\neq 0)$	$AB \parallel CD$
$\overline{AC}=k\,\overline{AB}$ $(k\neq 0)$	$C\in AB$
$\overline{OM}=-\overline{ON}$	Точки M и N симметричны относительно точки O.
$\overline{MN}=\overline{MA}+\overline{MB}$	Точки M и N симметричны относительно середины отрезка AB.
$\overline{AY}=k\overline{AX}$	$Y=H_O^k(X)$ – гомотетия с центром O и коэффициентом k.
$\overline{AB}=\overline{DC}$; $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}$; $\overline{OA}+\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{OD}$	Четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм (O – произвольная точка).
$\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\lvert\overline{AD}\rvert\cdot\lvert\overline{BC}\rvert$	Четырехугольник $ABCD$ – трапеция, у которой $AD \parallel BC$.
$\overline{OM}$ = ⅓ ($\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$); $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}=\overline{0}$	M – центроид треугольника ABC (O – произвольная точка).
$\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$	H – ортоцентр треугольника ABC (O – центр описанной окр.).
$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{0}$	Δ ABC – правильный (O – центр треугольника).
$\overline{CA}\cdot\overline{CB}=\overline{0}$; $\overline{AB}\cdot\overline{CA}+\overline{CA}^2=\overline{0}$	Δ ABC – прямоугольный ($\angle C=90°$).
$\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$; $\overline{AB}^2=2\overline{AB}\cdot\overline{AC}$	Δ ABC – равнобедренный ($AC=BC$).
$\overline{MN}$ = ½ $\overline{AB}$	MN – средняя линия Δ ABC (M и N – середины сторон AC и BC).
$(\overline{a}+\overline{b})^2+(\overline{a}-\overline{b})^2=2\overline{a}^2+2\overline{b}^2$	Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Сравнивая векторные решения с другими, демонстрируют, как правило, неэкономность первых. Сравните также разные решения двух задач: задачи из учебника геометрии [5, с.56], в котором она иллюстрирует применение скалярного умножения векторов к решению задач, и связанную с ней задачи из пособия [25, с.123].

В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите угол между боковыми сторонами этого треугольника.



Пусть $AB = AC$ в треугольнике ABC.

Медианы BB_1 и CC_1 по условию перпендикулярны, поэтому $\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{CC_1} = 0$ (1).

Разложим векторы $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ по базисным векторам $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{q} = \overrightarrow{AC}$. Имеем:

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{q} - \vec{p},$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{p} - \vec{q}.$$

Согласно (1): $(\frac{1}{2}\vec{q} - \vec{p})(\frac{1}{2}\vec{p} - \vec{q}) = 0$, $\frac{1}{4}\vec{q}\cdot\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q}^{\,2} - \frac{1}{2}\vec{p}^{\,2} + \vec{p}\cdot\vec{q} = 0$, $\frac{5}{4}\vec{q}\cdot\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q}^{\,2} - \frac{1}{2}\vec{p}^{\,2} = 0$. Обозначив $|\vec{p}| = |\vec{q}| = m$, угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ через φ, воспользуемся определением скалярного произведения: $\frac{5}{4}m^2\cos\varphi - m^2 = 0$. Отсюда cos φ = 0,8 (φ ≈ 37°).

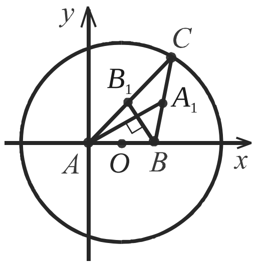
(🗐 Применение тригонометрии).

Пусть AN – медиана, биссектриса и высота, $\angle BAC = \varphi$. Тогда $\angle BAN = \varphi/2$; $\angle BMN = 90° : 2 = 45° = \angle MBN$ и $BN = MN$.

Имеем: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{BN}{AN} = \frac{MN}{AN} = \frac{1}{3}$, т.к. $MN = ⅓AN$ по свойству медиан треугольника. $\varphi = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} \approx 37°$.

$(\cos\varphi = (1 - \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}) : (1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}) = (1 - 1/9) : (1 + 1/9) = 0{,}8)$.

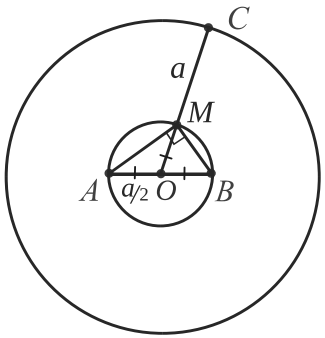
На плоскости даны точки A и B. Найти множество точек C этой плоскости таких, что медианы треугольника ABC, проведенные из вершин A и B, взаимно перпендикулярны.



Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. В этой системе точки A и B имеют координаты: A (0, 0), B (a, 0), где $AB = a$. Обозначим (x, y) – координаты точки C. Середины B_1 и A_1 сторон AC и BC треугольника ABC будут иметь координаты: $B_1(\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$, $A_1(\frac{x+a}{2}, \frac{y}{2})$.

Тогда $\overrightarrow{BB_1} = (\frac{x}{2} - a, \frac{y}{2})$, $\overrightarrow{AA_1} = (\frac{x+a}{2}, \frac{y}{2})$. Так как $\overrightarrow{BB_1} \perp \overrightarrow{AA_1}$, получаем уравнение: $\frac{x+a}{2}\left(\frac{x}{2} - a\right) + \frac{y^2}{4} = 0$, $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}a^2$.

Значит, искомым множеством точек является окружность с центром O в середине отрезка AB и радиусом, равным $\frac{3}{2}AB$ (без двух точек пересечения окружности с прямой AB).



(🗐 Геометрическое решение).

$\angle AMB = 90°$ (M – центроид).

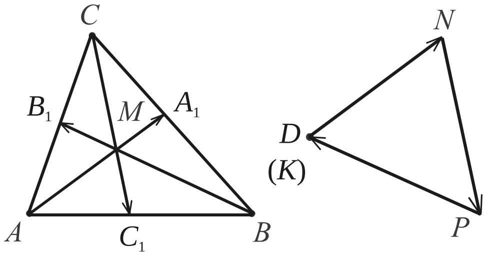
По замечательному свойству окружности г.м.т. всех вершин прямых углов (центроидов) будет окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре (без точек A и B). Значит, каждой точке M соответствует единственная точка C. Ее положение на луче OM однозначно определяется свойством медиан треугольника: $CM = 2\,OM$.

Таким образом, если $AB = a$, то $OM = a/2$, $CM = a$, $OC = 3a/2$ и искомое г.м.т. – Окр (O, $3a/2$)).

Анализируя решения, помните, что, вообще говоря, сравнение векторных решений с другими некорректно. Векторный аппарат, используя другие математические средства, имеет свои преимущества, особенно в аффинных задачах.

121. Доказать, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.

Доказательство



Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – медианы треугольника ABC.

От произвольной точки плоскости D отложим вектор DN, равный вектору AA_1. Затем от точки N – вектор NP, равный вектору CC_1 и от точки P – вектор PK, равный вектору BB_1.

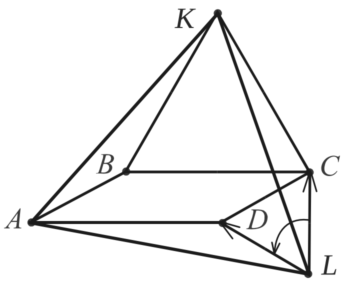
Получим равные суммы: $\overline{DN}+\overline{NP}+\overline{PK}=\overline{AA_1}+\overline{CC_1}+\overline{BB_1}$.

Но $\overline{AA_1}+\overline{CC_1}+\overline{BB_1}=\overline{0}$ (из соотношения $2\overline{MC_1}=\overline{MA}+\overline{MB}$ следует, что $\frac{2}{3}\overline{CC_1}+\overline{AM}+\overline{BM}=\overline{0}$ или $\frac{2}{3}\overline{CC_1}+\frac{2}{3}\overline{AA_1}+\frac{2}{3}\overline{BB_1}=\overline{0}$), поэтому и $\overline{DN}+\overline{NP}+\overline{PK}=\overline{0}$.

Следовательно, *точки K и D совпадают* (см. соотношение 6) и $\Delta\, DNP$ – искомый.

122. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и DCL. Докажите, что треугольник AKL – правильный.

Доказательство

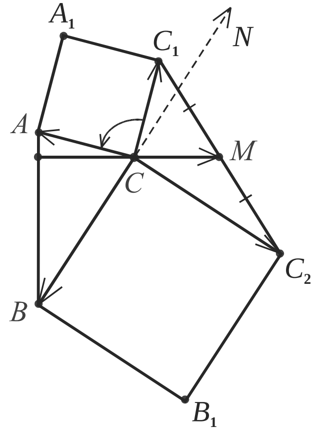


Воспользуемся часто применяемым в векторных решениях преобразованием – *поворотом вектора на заданный угол*. При повороте на угол величиной 60° вокруг своего начала векторы $\overline{LC}$ и $\overline{CK}$ переходят в векторы $\overline{LD}$ и $\overline{CB}$. Так как $\overline{CB}=\overline{DA}$, то вектор $\overline{LK}$ (сумма векторов $\overline{LC}$ и $\overline{CK}$) перейдет в вектор $\overline{LA}$ (сумму векторов $\overline{LD}$ и $\overline{DA}$).

Таким образом, $LK = LA$ и треугольник ALK – равнобедренный с углом при вершине 60°, т.е. правильный, ч.т.д.

123. На сторонах CA и CB треугольника ABC вне его построены квадраты CAA_1C_1 и CBB_1C_2. Докажите, что медиана треугольника CC_1C_2, проведенная из вершины C, перпендикулярна стороне AB и равна ее половине.

Доказательство



$\overline{CM}$ = ½ ($\overline{CC_1}+\overline{CC_2}$).

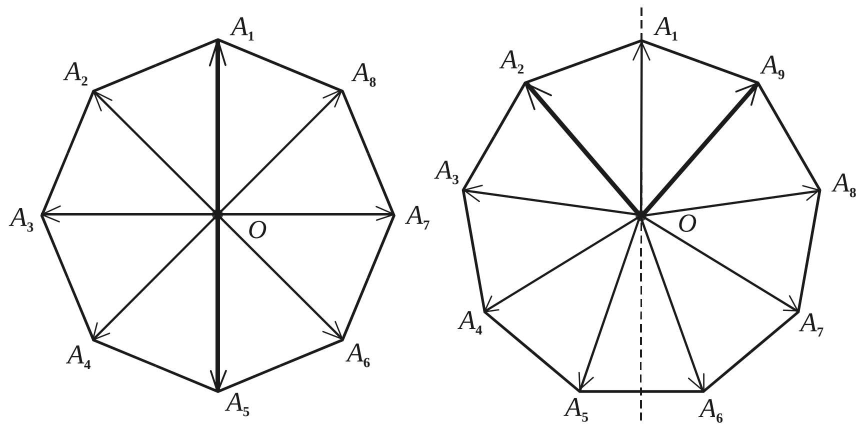
При повороте на 90° вектор $\overline{CC_1}$ перейдет в вектор $\overline{CA}$, вектор $\overline{CC_2}$ в $\overline{CN}$, равный $-\overline{CB}$ (векторы противоположны, т.к. $\angle\ BCN$ = 180°), а сумма векторов $\overline{CC_1}+\overline{CC_2}$ в вектор $\overline{CA}-\overline{CB}$, равный вектору $\overline{BA}$. Имеем: ($\overline{CC_1}+\overline{CC_2}$) $\perp$ $\overline{BA}$, т.е. $CM \perp AB$. Кроме того, $\left|\overline{CC_1}+\overline{CC_2}\right| = \left|\overline{BA}\right| = 2\left|\overline{CM}\right|$. Отсюда следует, что CM = ½ AB.

124. (№ 2507). O – центр правильного n-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$, X – произвольная точка плоскости.

а) Докажите, что $\overline{S}=\overline{OA_1}+\overline{OA_2}+\overline{OA_3}+\ldots+\overline{OA_n}=\overline{0}$;

б) Докажите, что $\overline{XA_1}+\overline{XA_2}+\ldots+\overline{XA_n}=n\cdot\overline{XO}$.

Доказательство



а) Докажем формулу при одном четном и одном нечетном значениях n. В общем случае доказательство аналогично.

$n = 8$. С учетом симметрии правильного n-угольника относительно центра O разобьем сумму на 4 пары противоположных векторов, одна из которых $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_5}$ выделена на рисунке слева.

$\overline{S} = (\overline{OA_1} + \overline{OA_5}) + (\overline{OA_2} + \overline{OA_6}) + (\overline{OA_3} + \overline{OA_7}) + (\overline{OA_4} + \overline{OA_8})$.

Но сумма противоположных векторов равна нулю, поэтому $\overline{S} = \overline{0}$.

$n = 9$. В случае, когда число вершин нечетно, рассмотрим осевую симметрию правильного n-угольника, например, относительно прямой OA_1. 4 пары векторов, одна из которых $\overline{OA_2}, \overline{OA_9}$ выделена на рисунке справа, симметричны относительно этой прямой. Значит, сумма векторов каждой пары – это вектор, коллинеарный вектору $\overline{OA_1}$. Имеем:

$\overline{S} = \overline{OA_1} + (\overline{OA_2} + \overline{OA_9}) + (\overline{OA_3} + \overline{OA_8}) + (\overline{OA_4} + \overline{OA_7}) + (\overline{OA_5} + \overline{OA_6}) =$

$= \overline{OA_1} + x_1\overline{OA_1} + x_2\overline{OA_1} + x_3\overline{OA_1} + x_4\overline{OA_1} = (1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\overline{OA_1} =$

$= x\,\overline{OA_1}$, где x_1, x_2, x_3, x_4, x – коэффициенты.

Рассмотрев теперь осевую симметрию относительно другой прямой, например, OA_2, аналогично получим: $\overline{S} = y\,\overline{OA_2}$.

Отсюда $x\,\overline{OA_1} = y\,\overline{OA_2}$ и $x = y = 0$ в силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным (вектора $\overline{S}$ по неколлинеарным векторам $\overline{OA_1}$ и $\overline{OA_2}$ в нашем решении).

Следовательно, $\overline{S} = \overline{0}$, что и требовалось доказать.

(Применение поворота вектора).

Вектор $\overline{S} = \sum\limits_{i=1}^{n}\overline{OA_i}$ при повороте на $\dfrac{360°}{n}$ $(n \geq 3)$ переходит сам в себя, т.к. при этом повороте вектор $\overline{OA_1}$ переходит в вектор $\overline{OA_2}$, $\overline{OA_2}$ в $\overline{OA_3}$, …, $\overline{OA_n}$ в $\overline{OA_1}$.

Таким свойством может обладать только нуль-вектор.

б) Используя формулу а), докажите векторное соотношение б) самостоятельно.

125. (*Теорема Лейбница*). Доказать, что для любой точки P плоскости $PA^2 + PB^2 + PC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3PM^2$, где точка M – центр тяжести треугольника ABC.

Доказательство

По правилу треугольника запишем суммы:

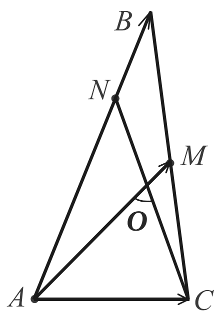
$\overline{PA} = \overline{PM} + \overline{MA}$, $\overline{PB} = \overline{PM} + \overline{MB}$, $\overline{PC} = \overline{PM} + \overline{MC}$.

Возведя обе части равенств в квадрат и сложив их, получим:

$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 + 2\,\overline{PM}\cdot(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) +$
$+ 3\,\overline{PM}^2$. Так как скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины и имеет место векторное равенство $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$ (соотношение 18), то теорема доказана.

126. (№ 17.063). В треугольнике ABC точка N лежит на стороне AB и $AN = 3NB$. Медиана AM пересекается с CN в точке O. Найти AB, если $AM = CN = 7$ и $\angle NOM = 60°$.

Решение



$\overline{AM} = ½\,(\overline{AB} + \overline{AC})$ – соотношение 12.

$2\,\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AN} + \overline{NC} = \overline{AB} + \tfrac{3}{4}\overline{AB} - \overline{CN}$.

Отсюда $2\,\overline{AM} + \overline{CN} = \tfrac{7}{4}\overline{AB}$. Возведем в квадрат. $4\,\overline{AM}^2 + \overline{CN}^2 + 4\overline{AM}\cdot\overline{CN} = \tfrac{49}{16}\overline{AB}^2$.

Переходя к модулям векторов, получим:

$AB^2 = \tfrac{16}{49}(4 \cdot 49 + 49 + 4 \cdot 49 \cdot ½) = 16 \cdot (4 + 1 + 2)$.

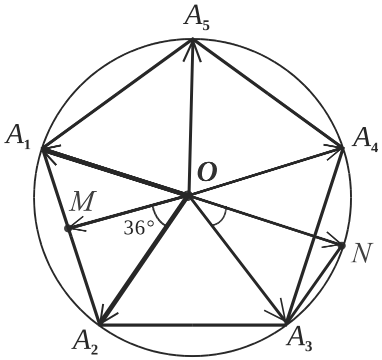
Следовательно, $AB = 4\sqrt{7}$. *Ответ*: $4\sqrt{7}$.

(Проведите $MK \parallel CN$ и примените теорему косинусов в $\Delta\,AMK$, учитывая, что $\angle AMK = 120°$, $MK = 7/2$, $AK = 7/8\,AB$).

Примечание. Несмотря на простоту второго решения, решение задачи векторным методом найти проще. Ясно, что нужно получить разложение $\overline{AB} = x\overline{AM} + y\overline{CN}$, т.к. заданы длины векторов этой базисной пары и величина угла между ними. Дополнительное построение и замену угла надо увидеть! Убедитесь, что оно улучшает и векторное решение: $\overline{AB} = 8/7(\overline{AM} + \overline{MK})$ и т.д.

127. Дан правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ с центром O. Выразите векторы $\overline{OA_3}, \overline{OA_4}, \overline{OA_5}$ через векторы $\overline{OA_1}$ и $\overline{OA_2}$.

<u>*Решение*</u>



Базисом на прямой является любой ненулевой вектор, а базисом на плоскости является любая пара неколлинеарных векторов.

Векторы $\overline{OA_1}$ и $\overline{OA_2}$ – неколлинеарные и, следовательно, задают базис (с. 320) на плоскости. Чтобы выразить векторы $\overline{OA_4}$ и $\overline{OA_3}$ через базисные, продлим лучи A_4O и A_1O до пересечения соответственно со стороной A_1A_2 в точке M и с окружностью, описанной около правильного пятиугольника, в точке N.

$OM \perp A_1A_2$, $A_1M = MA_2$, $\overline{OM} = ½(\overline{OA_1} + \overline{OA_2})$. $\overline{OA_4} = x\,\overline{OM}$ ($x < 0$, $|x| > 1$, т.к. векторы противоположно направленные, $|\overline{OA_4}| > |\overline{OM}|$).

Из $\Delta\ OMA_2$ $OM = OA_2 \cdot \cos 36°$ ($\angle A_1OA_2 = 360° : 5 = 72°$). Но $OA_4 = OA_2$, поэтому $\overline{OA_4} = -\dfrac{1}{\cos 36°}\cdot\dfrac{1}{2}(\overline{OA_1} + \overline{OA_2}) = -\dfrac{\overline{OA_1} + \overline{OA_2}}{2\cos 36°}$.

$\overline{OA_3} = \overline{ON} + \overline{NA_3}$. $\overline{ON} = -\overline{OA_1}$ ($ON = OA_1$ как радиусы). $\overline{NA_3} = y\,\overline{OA_2}$ ($y > 0$, $|y| > 1$, $NA_3 \parallel OA_2$ (убедитесь в этом) и эти векторы одинаково направленные). Найдем коэффициент (координату) y.

Из $\Delta\ NOA_3$ по теореме синусов $NA_3 = \dfrac{OA_3 \cdot \sin 36°}{\sin 72°} = \dfrac{OA_2}{2\cos 36°}$.

Значит, $y = \dfrac{1}{2\cos 36°}$, $\overline{NA_3} = \dfrac{\overline{OA_2}}{2\cos 36°}$, $\overline{OA_3} = -\overline{OA_1} + \dfrac{\overline{OA_2}}{2\cos 36°}$.

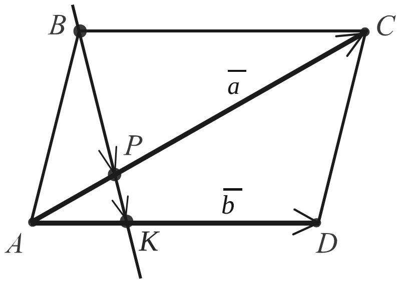
Ясно, что аналогично получим: $\overline{OA_5} = -\overline{OA_2} + \dfrac{\overline{OA_1}}{2\cos 36°}$.

Ответ: $-\overline{OA_1} + \dfrac{\overline{OA_2}}{2\cos 36°}$, $-\dfrac{\overline{OA_1} + \overline{OA_2}}{2\cos 36°}$, $-\overline{OA_2} + \dfrac{\overline{OA_1}}{2\cos 36°}$.

(Выполните проверку: $\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \overline{OA_3} + \overline{OA_4} + \overline{OA_5} = \overline{0}$).

128. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ и на его диагонали AC взяты такие точки K и P, что $AD = n \cdot AK$, $AC = (n+1) \cdot AP$. Доказать, что точки K, P и B лежат на одной прямой.

<u>*Доказательство*</u>



Убедимся, что $\overline{BK} = k\,\overline{BP}$ (соотношение 9).

В задаче 127 базис был задан. Здесь же мы сталкиваемся с необходимостью его выбора. Эта операция важна, как и выбор системы координат, и требует тщательного обдумывания.

Базисные векторы ($\overline{a};\overline{b}$) называют координатными, т.к. они задают особую систему координат на плоскости. Числа x и y в равенстве $\overline{c} = x\overline{a} + y\overline{b}$ (соотношение 11) называют координатами вектора в базисе.

Пусть $\overline{AC} = \overline{a}$, $\overline{AD} = \overline{b}$ (на отрезках AC, AD заданы отношения).

Так как $\dfrac{AC}{AP} = \dfrac{n+1}{1}$, то $\dfrac{CP}{AP} = \dfrac{n}{1}$. $\overline{BP} = \overline{CP} - \overline{CB} = \overline{b} - \dfrac{n}{n+1}\overline{a}$.

$\overline{BK} = \overline{BA} + \overline{AK} = \overline{CD} + \dfrac{1}{n}\overline{b} = \overline{b} - \overline{a} + \dfrac{1}{n}\overline{b} = \dfrac{n+1}{n}\overline{b} - \overline{a}$.

Отсюда $\overline{BK} = \dfrac{n+1}{n}\overline{BP}$, т.е. $k = \dfrac{n+1}{n}$.

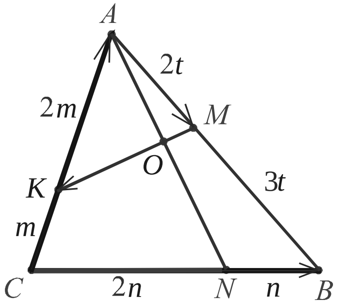
Значит, ненулевые векторы $\overline{BP}$, $\overline{BK}$ коллинеарные и имеют общее начало, что доказывает утверждение.

129. (№ 1351). На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M, N и K так, что $AM : MB = 2 : 3$, $AK : KC = 2 : 1$, $BN : NC = 1 : 2$. В каком отношении прямая MK делит отрезок AN? (см. задачу 10.3).

<u>*Решение*</u>

При решении векторным способом задач, в которых среди данных и искомых величин имеются отношения отрезков, во многих случаях можно пользоваться алгоритмом:

1. *Выбрать базисные векторы* $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
2. *Выбрать ненулевой вектор* $\overline{c}$.
3. *Разложить вектор* $\overline{c}$ *по базисным* ($\overline{c} = x\overline{a} + y\overline{b}$, *где один из коэффициентов x или y – искомое отношение) двумя способами* $\overline{c} = x_1\overline{a} + y_1\overline{b}$, $\overline{c} = x_2\overline{a} + y_2\overline{b}$.
4. *Найти искомый коэффициент из системы* $\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2, \end{cases}$ *учитывая единственность такого разложения*.



1. $\overline{a} = \overline{CB}$, $\overline{b} = \overline{CA}$.
2. $\overline{c} = \overline{AM}$.
3. $\overline{AM} = \frac{2}{5}\overline{AB} = \frac{2}{5}(\overline{CB} - \overline{CA}) =$

$= \frac{2}{5}\overline{a} - \frac{2}{5}\overline{b}$ (1).

$\overline{AM} = \overline{AO} + \overline{OM} = x\overline{AN} + y\overline{MK} =$

$= x(\overline{CN} - \overline{CA}) + y(\overline{MA} + \overline{AK}) =$

$= x(\frac{2}{3}\overline{a} - \overline{b}) + y(\frac{2}{5}\overline{b} - \frac{2}{5}\overline{a} - \frac{2}{3}\overline{b}) = \frac{2}{3}x\overline{a} - x\overline{b} - \frac{4}{15}y\overline{b} - \frac{2}{5}y\overline{a} =$

$= (\frac{2}{3}x - \frac{2}{5}y)\overline{a} - (x + \frac{4}{15}y)\overline{b}$ (x – искомый коэффициент) (2).

4. $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{2}{5}y = \frac{2}{5}, \\ x + \frac{4}{15}y = \frac{2}{5} \end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{4}{9}x - \frac{4}{15}y = \frac{4}{15}, \\ x + \frac{4}{15}y = \frac{2}{5} \end{cases}$. Отсюда $\frac{13}{9}x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{6}{13}$.

Итак, $\overline{AO} = \frac{6}{13}\overline{AN}$, т.е. $AO : ON = 6 : 7$.

Ответ: 6 : 7.

Примечания. а) Выбор вектора $\overline{c}$ важен. Для сравнения решите задачу, выбрав $\overline{c} = \overline{KN}$ или $\overline{c} = \overline{CO}$.

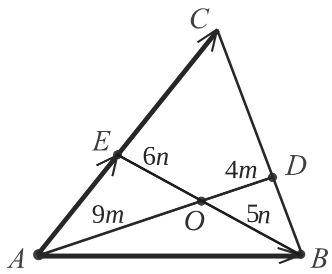
б) Простое сравнение решений задач 129 и 10.3 будет не в пользу первого, но векторное решение обладает общностью.

Решим еще одну задачу по приведенному алгоритму, выбирая вектор $\overline{c}$ коллинеарным одному из базисных векторов.

(№ 3240). Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC, а точка O расположена на отрезке AD так, что $AO : OD = 9 : 4$. Прямая, проходящая через вершину B и точку O, пересекает сторону AC в точке E, причем $BO : OE = 5 : 6$.

Найдите отношение, в котором точка E делит сторону AC.

<u>*Решение*</u>



1. $\overline{a} = \overline{AC}$, $\overline{b} = \overline{AB}$. 2. $\overline{c} = \overline{AE}$.
3. $\overline{AE} = x\overline{AC} = x\,\overline{a} + 0\,\overline{b}$ (1)

(x – искомый коэффициент).

$\overline{AE} = \overline{AO} + \overline{OE} = \frac{9}{13}\overline{AD} + \frac{6}{11}\overline{BE} =$

$= \frac{9}{13}(\overline{AB} + \overline{BD}) + \frac{6}{11}(\overline{AE} - \overline{AB}) =$

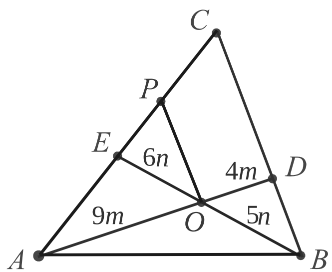
$= \frac{9}{13}(\overline{b} + y\overline{BC}) + \frac{6}{11}(x\overline{a} - \overline{b}) =$

$= \frac{9}{13}(\overline{b} + y(\overline{a} - \overline{b})) + \frac{6}{11}(x\overline{a} - \overline{b}) = (\frac{9}{13}y + \frac{6}{11}x)\,\overline{a} + (\frac{21}{13 \cdot 11} - \frac{9}{13}y)\,\overline{b}$ (2).

4. $\begin{cases} \frac{9}{13}y + \frac{6}{11}x = x, \\ \frac{9}{13}y - \frac{21}{11 \cdot 13} = 0. \end{cases}$ Отсюда $\frac{5}{11}x = \frac{21}{11 \cdot 13}$, $x = \frac{21}{65}$, $\overline{AE} = \frac{21}{65}\overline{AC}$.

Значит, $AE : EC = 21 : 44$. *Ответ*: 21 : 44.

(Применение подобия).



Пусть $AC = b$. Проведем $OP \parallel CD$.

Тогда $PC = \frac{4}{13}b$, $PE = \frac{6}{5}PC = \frac{24}{65}b$,

$EC = \frac{4}{13}b + \frac{24}{65}b = \frac{44}{65}b$.

$AE = b - \frac{44}{65}b = \frac{21}{65}b$.

Имеем: $AE : EC = 21 : 44$.

130. X – произвольная внутренняя точка треугольника ABC, O, I – центры его описанной и вписанной окружностей, H – ортоцентр, M – центроид, a, b, c – стороны.

Доказать, что $S_{XBC} \cdot \overline{XA} + S_{XAC} \cdot \overline{XB} + \ldots + S_{XAB} \cdot \overline{XC} = \overline{0}$.

Используя это соотношение, доказать, что:

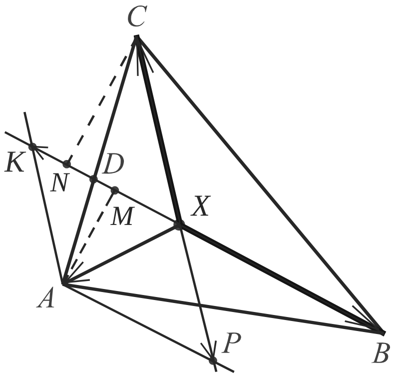
а) $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$;

б) $\sin 2A \cdot \overline{OA} + \sin 2B \cdot \overline{OB} + \sin 2C \cdot \overline{OC} = \overline{0}$;

в) $a \cdot \overline{IA} + b \cdot \overline{IB} + c \cdot \overline{IC} = \overline{0}$;

г) $\operatorname{tg} A \cdot \overline{HA} + \operatorname{tg} B \cdot \overline{HB} + \operatorname{tg} C \cdot \overline{HC} = \overline{0}$.

<u>*Доказательство*</u>



Разложим один из векторов, например вектор $\overline{XA}$, по двум другим неколлинеарным векторам $\overline{XB}$ и $\overline{XC}$. Через точку A проведем прямые, параллельные векторам $\overline{XB}$ и $\overline{XC}$. Они пересекут прямые XB и XC в точках K и P. При этом образуется параллелограмм $AKXP$.

По правилу параллелограмма $\overline{XA} = \overline{XP} + \overline{XK} = x\,\overline{XC} + y\,\overline{XB}$ ($x < 0$, $y < 0$).

Найдем теперь коэффициенты x и y.

$|x| = \dfrac{XP}{XC} = \dfrac{DA}{DC}$ по теореме о пропорциональных отрезках.

Но $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{AM}{CN} = \dfrac{S_{XAB}}{S_{XBC}}$, т.к. отношение площадей треугольников, имеющих общее основание, равно отношению их высот ($AM \perp BX$, $CN \perp BX$). Имеем: $|x| = \dfrac{S_{XAB}}{S_{XBC}}$, $\overline{XP} = -\dfrac{S_{XAB}}{S_{XBC}}\,\overline{XC}$ ($x < 0$).

Аналогично доказывается, что $|y| = \dfrac{S_{XAC}}{S_{XBC}}$, $\overline{XK} = -\dfrac{S_{XAC}}{S_{XBC}}\,\overline{XB}$ ($y < 0$).

Таким образом, $\overline{XA} = -\dfrac{S_{XAB}}{S_{XBC}}\,\overline{XC} - \dfrac{S_{XAC}}{S_{XBC}}\,\overline{XB}$, что и доказывает основное соотношение задачи.

Перейдем к выводу соотношений-следствий, заменяя в доказанном соотношении точку X другой подходящей точкой.

а) <u>$X \equiv M$</u>: $S_{MBC} \cdot \overline{MA} + S_{MAC} \cdot \overline{MB} + \ldots + S_{MAB} \cdot \overline{MC} = \overline{0}$.

$S_{MBC} = S_{MAC} = S_{MAB}$. Отсюда $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$, ч.т.д.

б) <u>$X \equiv O$</u>: $S_{OBC} \cdot \overline{OA} + S_{OAC} \cdot \overline{OB} + \ldots + S_{OAB} \cdot \overline{OC} = \overline{0}$.

Но $S_{OBC} = ½\, R^2 \cdot \sin 2A$, $S_{OAC} = ½\, R^2 \cdot \sin 2B$, $S_{OAB} = ½\, R^2 \cdot \sin 2C$, поэтому $\sin 2A \cdot \overline{OA} + \sin 2B \cdot \overline{OB} + \sin 2C \cdot \overline{OC} = \overline{0}$, ч.т.д.

в) <u>$X \equiv I$</u>: $S_{IBC} \cdot \overline{IA} + S_{IAC} \cdot \overline{IB} + \ldots + S_{IAB} \cdot \overline{IC} = \overline{0}$.

Но $S_{IBC} = ½\, ar$, $S_{IAC} = ½\, br$, $S_{IAB} = ½\, cr$ (r – радиус вписанной окружности). Значит, $a \cdot \overline{IA} + b \cdot \overline{IB} + c \cdot \overline{IC} = \overline{0}$, ч.т.д.

г) <u>$X \equiv H$</u>: $S_{HBC} \cdot \overline{HA} + S_{HAC} \cdot \overline{HB} + \ldots + S_{HAB} \cdot \overline{HC} = \overline{0}$.

Разделим почленно на S_{HBC}. $\overline{HA} + \dfrac{S_{HAC}}{S_{HBC}}\,\overline{HB} + \dfrac{S_{HAB}}{S_{HBC}}\,\overline{HC} = \overline{0}$.

Но $\dfrac{S_{HAC}}{S_{HBC}} = \dfrac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A}$, $\dfrac{S_{HAB}}{S_{HBC}} = \dfrac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A}$ (убедитесь в этом).

Отсюда следует, что $\operatorname{tg} A \cdot \overline{HA} + \operatorname{tg} B \cdot \overline{HB} + \operatorname{tg} C \cdot \overline{HC} = \overline{0}$, ч.т.д.

(См. задачи 54, 71, 73, 120).

8.3. Множества точек плоскости

Геометрические образы на плоскости могут задаваться различными аналитическими соотношениями. Задачи, в которых они фигурируют, многообразны и нередко встречаются на вступительных экзаменах в вузы. Упражняясь, постройте на координатной плоскости образы данных соотношений:

1. а) $xy = 0$, б) $x^2 - y^2 = 0$ (или $|x| = |y|$).
2. а) $x^2 - 1 = 0$, б) $|x + y| = 5$, в) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 1$.
3. а) $2^{3x} - 2^{8y-3x+3} = 2^{4y+1}$; б) $y = 0{,}75x - 0{,}5x^4 + y^4 = 4{,}25x^2y^2$.
4. а) $\operatorname{Max}\{x, y\} = 1$; б) $\log_x y + \log_y x = 2$.
5. $\sqrt{x^2+y^2-18x+4y+85}+\sqrt{x^2+y^2+6x-12y+45}=4\sqrt{13}$.
6. а) $|x| + |y| = 5$; б) $|2x| + |y| = 1{,}25$.
7. а) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$, б) $\lg(x^2 + y^2) = 2$, в) $y=\sqrt{5-x^2+4x}$.
8. $(x+3)^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 0$ или $|x+3| + |y-\sqrt{2}| = 0$.
9. а) $\sin(\pi(x^2+y^2)) = 0$; б) $y = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.
10. $(|x|+0{,}5)^{x^2+y^2} \le x^2 + |x| + 0{,}25$.

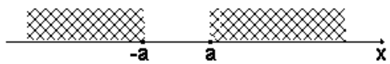
Ответы: **1.** Пары перпендикулярных прямых. **2.** Параллельные прямые: а) 2, б) 2, в) множество (без тех точек (x; y), для которых $\cos x$ или $\cos y$ равен 0). **3.** а) Прямая; б) 4 прямых: $y = \pm 2x$, $y = \pm 0{,}5x$. **4.** а) Два луча $\begin{cases} x=1, \\ y\le 1 \end{cases}$, $\begin{cases} y=1, \\ x\le 1, \end{cases}$ выходящие из точки (1; 1); б) открытый луч, без точки (1; 1). **5.** Отрезок с концами в точках (-3; 6) и (9; -2). **6.** а) Граница квадрата с вершинами в точках (5; 0), (0; 5), (-5; 0), (0; -5); б) граница ромба с вершинами в точках (5/8; 0), (0; 5/4), (-5/8; 0), (0; -5/4). **7.** а) Окружность с центром в точке (1; -2) и радиусом 4; б) окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом 10; в) полуокружность с центром в точке (2; 0) и радиусом 3. **8.** Точка (-3; $\sqrt{2}$). **9.** а) Множество концентрических окружностей $x^2 + y^2 = k$ ($k \in N$) и точка (0; 0); б) Верхняя полуокружность окружности $x^2 + y^2 = 1$. **10.** Точки круга $x^2 + y^2 = 2$ или точки вертикальной полосы $|x| \le$ ½ без их общих точек.

Важно не только "узнавать" геометрические образы по их уравнениям, но и владеть фундаментальными понятиями математической логики – дизъюнкцией, конъюнкцией, импликацией и эквиваленцией, т.к. *переход от аналитических записей (как правило, сложных высказываний) к геометрическим образам осуществляется с помощью логических операций.*

Конъюнкция			Дизъюнкция		
$\cap$	**и**	$\{$	$\cup$	**или**	[

На координатной прямой:

$|x| \le a \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -a, \\ x \le a. \end{cases}$ $|x| \ge a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -a, \\ x \ge a. \end{array}\right.$



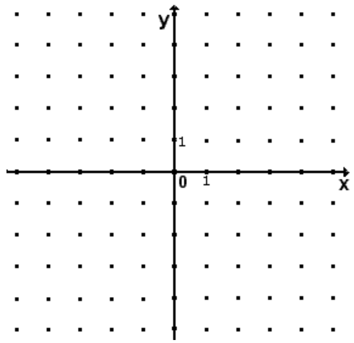
На координатной плоскости:

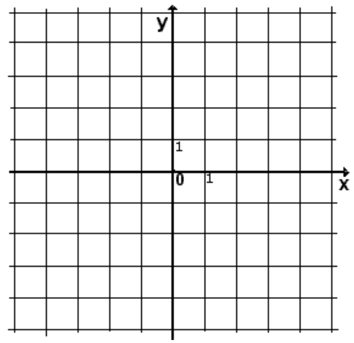
$\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = \mathbf{0} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = n, n \in Z, \\ y = m, m \in Z. \end{cases}$

(точки с целочисленными координатами)

$\sin \pi x \cdot \sin \pi y = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = n, n \in Z, \\ y = m, m \in Z. \end{array}\right.$

(целочисленная решетка)





131. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости xy системой неравенств $\begin{cases} \log_{1/3}(2x+y-2) \ge \log_{1/3}(y+1), \\ \sqrt{y-2x-3} \le \sqrt{3-2x}. \end{cases}$

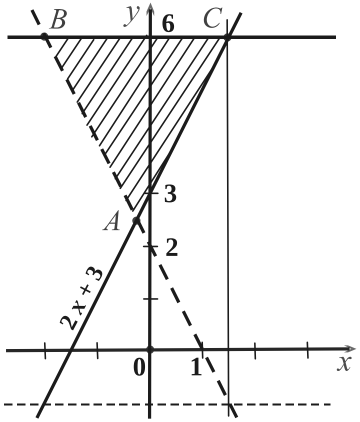
Решение

Логарифмическая функция определена на множестве положительных чисел и $\log_{1/3} t$ убывает, т.к. $0 < 1/3 < 1$.

Арифметический квадратный корень определен на множестве неотрицательных чисел, и функция $\sqrt{t}$ возрастает на нем.

Учитывая область определения выражений и характер монотонности соответствующих функций, получим систему неравенств

$$\begin{cases} 2x+y-2>0, \\ y+1>0, \\ 2x+y-2 \le y+1, \\ y-2x-3 \ge 0, \\ 3-2x \ge 0, \\ y-2x-3 \le 3-2x \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y>-2x+2, \\ y>-1, \\ x \le 3/2, \\ y \ge 2x+3, \\ y \le 6. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y>-2x+2, \\ y \ge 2x+3, \\ y \le 6. \end{cases}$$



Каждое из пяти неравенств второй системы задает полуплоскость (первые две не содержат свою границу), пересечение которых заштриховано на рисунке слева.

Площадь фигуры вычислим по формуле для площади треугольника: $S_{ABC} = ½\ h \cdot BC$, где h – высота, опущенная из вершины A на BC.

Вычислим абсциссы точек B и C. $2x + 3 = 6$, $x = 3/2$. $-2x + 2 = 6$, $x = -2$. Итак, $C\ (3/2;\ 6)$, $B\ (-2;\ 6)$, $BC = 2 + 3/2 = 7/2$.

Координаты точки A найдем как координаты точек пересечения прямых $2x + 3$ и $-2x + 2$. $4x = -1$, $x = -1/4$, $y = 5/2$. $A\ (-1/4;\ 5/2)$.

Имеем: $h = 6 - 5/2 = 7/2$, $S_{ABC} = ½ \cdot 7/2 \cdot 7/2 = 49/8$.

Ответ: 49/8.

132. При каких значениях параметра a площадь фигуры M будет равна 24, если она на координатной плоскости xy задана условием $|\,2x + y\,| + |\,x - y + 3\,| \le a$?

Решение

При $a < 0$ неравенство ложно и множество точек $(x;\ y)$ пусто.

При $a = 0$ имеем систему $\begin{cases} y=-2x, \\ y=x+3 \end{cases}$, единственное решение которой $x = -1$, $y = 2$. Множество состоит из одной точки $(-1;\ 2)$.

При $a > 0$ фигура M – параллелограмм. Докажем это.

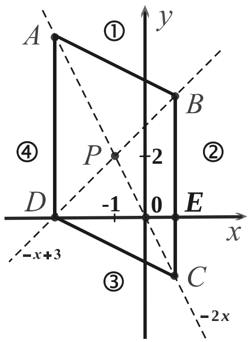
Уравнение $|\,m\,| + |\,n\,| = a$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} m+n=\pm a, \\ m-n=\pm a. \end{array}\right.$

Слагаемые m и n содержат x и y в первой степени. Выразив y через x, получим уравнения $y = kx \pm a$ (k – коэффициент), которые задают пары параллельных прямых. Пересекаясь, эти прямые и образуют стороны параллелограмма, ч.т.д.

В нашей задаче: $m + n = 3x + 3$, $m - n = 2y + x - 3$.

Отсюда $x = -1 \pm a/3$, $y = -x/2 + 3/2 \pm a/2$. Значит, высота, основание и площадь параллелограмма равны $2a/3$, a и $2a^2/3$.

Переписав условие в виде $|\,y - (-2x)\,| + |\,y - (x + 3)\,| \le a$, рассмотрим решение подробнее. Раскроем модули в каждой из четырех областей ① – ④.



① $y \ge -x+3$ и $y \ge -2x$:
$y + 2x + y - x - 3 \le a$, $y \le -x/2 + 3/2 + a/2$.

② $y \le -x+3$ и $y \ge -2x$:
$y + 2x - y + x + 3 \le a$, $x \le -1 + a/3$.

③ $y \le -x+3$ и $y \le -2x$:
$-y - 2x - y + x + 3 \le a$, $y \ge -x/2 + 3/2 - a/2$.

④ $y \ge -x+3$ и $y \le -2x$:
$-y - 2x + y - x - 3 \le a$, $x \ge -1 - a/3$.

Итак, фигура M – параллелограмм $ABCD$.
$P\,(-1;\,2)$ – центр его симметрии.

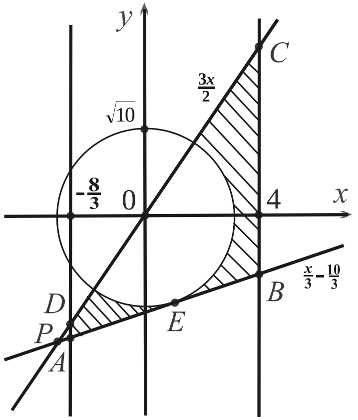
$S_{ABCD} = BC \cdot DE$. $DE = -1 + a/3 - (-1 - a/3) = 2a/3$. Длину BC найдем аналогично: как длину отрезка, отсекаемого параллельными прямыми на оси ординат ($x = 0$). $BC = 3/2 + a/2 - (3/2 - a/2) = a$.

Имеем: $S_{ABCD} = 2a^2/3$, $2a^2/3 = 24$, $a = 6$ ($a > 0$). *Ответ*: 6.

133. Найти площадь фигуры M, которая на координатной плоскости задается системой неравенств $\begin{cases} x^2+y^2\ge 10,\\ 3x^2-4x-32\le 0,\\ (3x-2y)(3y-x+10)\ge 0.\end{cases}$

<u>*Решение*</u>

Первому неравенству системы удовлетворяют все точки координатной плоскости, кроме точек, лежащих внутри круга с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{10}$; второму – точки вертикальной полосы, заданной прямыми $x = -8/3$ и $x = 4$, т.к. отрезок $[-8/3; 4]$ оси абсцисс служит его решением.



Пусть A, B, C и D – точки пересечения прямых $y = x/3 - 10/3$ и $y = 3x/2$ с прямыми $x = -8/3$ и $x = 4$. Тогда $A\ (-8/3; -38/9)$, $B\ (4; -2)$, $C\ (4; 6)$, $D\ (-8/3; -4)$. Если $P = AB \cap CD$, то ясно, что точка P лежит слева от полосы (A ниже D, т.к. $-38/9 < -4$).

Переписав третье неравенство в виде $2(y - 3x/2)\cdot 3(y - (x/3 - 10/3)) \le 0$, получим равносильные ему системы

$$\begin{cases} y\le 3x/2,\\ y\ge x/3-10/3,\end{cases}\qquad \begin{cases} y\ge 3x/2,\\ y\le x/3-10/3.\end{cases}$$

Геометрический образ первой из них – угол BPC, а второй – вертикальный с ним угол.

Заметим также, что прямая $y = 3x/2$ проходит через центр круга, а прямая $y = x/3 - 10/3$ касается его в точке $E\ (1; -3)$. Координаты точки E – единственное решение системы $\begin{cases} x^2+y^2=10,\\ y=x/3-10/3.\end{cases}$

Таким образом, фигура M, пересечение множеств точек, удовлетворяющих неравенствам данной системы, – *трапеция ABCD без полукруга*. Ее основания AD и BC, а высота равна ширине полосы, т.е. $4 - (-8/3) = 20/3$. $AD = -4 - (-38/9) = 2/9$; $BC = 6 - (-2) = 8$.

Имеем: $S_{фиг} = (2/9 + 8)\cdot 10/3 - ½\,\pi\cdot 10 = 740/27 - 5\pi$.

Ответ: $740/27 - 5\pi$.

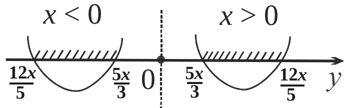
134. Фигура M – множество точек (x, y) координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют системе из двух неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{xy}{15}}\ge y-2x,\\ \dfrac{x-25}{x^2+y^2-625}\ge\dfrac{1}{26}.\end{cases}$$

Изобразить фигуру M и найти ее площадь.

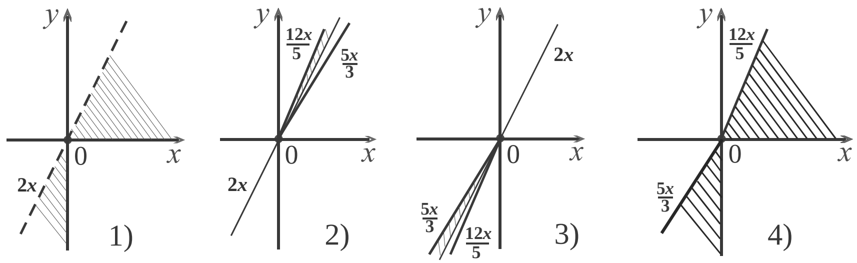
<u>*Решение*</u>

Первое неравенство системы в полуплоскости $y < 2x$ выполняется для всех пар $(x; y)$ из области определения: $xy \ge 0$. Это множество точек под прямой $y = 2x$ и лежащих в первой или третьей четвертях (рис. 1). В полуплоскости $y \ge 2x$ после возведения в квадрат неравенство примет вид $15y^2 - 61xy + 60x^2 \le 0$. Левую его часть разложим на множители как квадратный трехчлен относительно переменной y: $15(y - 5x/3)(y - 12x/5) \le 0$. Применяя свойства квадратного трехчлена (схематический рисунок слева),



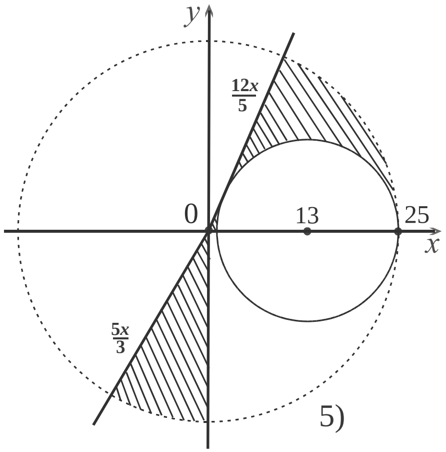
получим $\begin{cases} x\ge 0, y\ge 0,\\ y\ge 5x/3,\\ y\le 12x/5\end{cases}$ $\begin{cases} x\le 0, y\le 0,\\ y\le 5x/3,\\ y\ge 12x/5.\end{cases}$

Геометрические образы, удовлетворяющие системам, – острые углы, образованные полупрямыми прямых $y = 12x/5$, $y = 5x/3$ в соответствующих координатных четвертях (рис. 2, рис. 3).



Объединяя множества точек (рис. 1-3), получим образ первого неравенства данной системы – два острых угла с общей вершиной в начале координат (рис. 4). Они принадлежат первой и третьей координатной четвертям и имеют величины arctg 12/5, arctg 3/5 (tg $\alpha = k$, где k – угловой коэффициент прямой, образующей угол α с осью абсцисс. Значит, arctg 5/3 – угол, образованный прямой $y = 5x/3$ с осью абсцисс. На рис. 4 угол образован с осью ординат, поэтому его величина arctg 3/5).

Второе неравенство данной системы преобразуем к виду $\dfrac{(x-13)^2+y^2-12^2}{x^2+y^2-25^2}\le 0$. Его геометрический образ получим, рассматривая две соответствующие системы, одна из которых несовместна ($(x-13)^2+y^2\le 144$ и $x^2+y^2>625$). Это множество точек открытого круга с центром (0; 0) и радиусом 25 без точек круга с центром (13; 0) и радиусом 12 (убедитесь, что прямая $y=12x/5$ касается меньшей окружности в точке (25/13; 60/13), опустив перпендикуляр из центра малого круга на прямую $y=12x/5$ или вычислив единственное решение системы из двух уравнений $y=12x/5,\ (x-13)^2+y^2=144$).



5)

Итак, фигура M – это *объединение двух круговых секторов без меньшего полукруга* (заштрихована на рис. 5).

Площадь сектора найдем по формуле $S=0{,}5R^2x$, где x – величина центрального угла в радианах, R – радиус окружности.

Таким образом, искомая площадь фигуры M равна

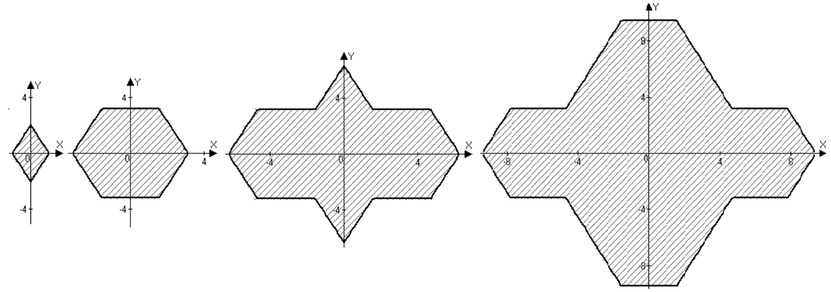
$0{,}5\ (25^2\ (\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}+\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5})-$ $-\pi\cdot 12^2)=312{,}5\ (\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}+$ $+\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5})-72\pi$ (≈ 310).

Ответ: $312{,}5\ (\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}+\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5})-72\pi$.

135. Найти все значения параметра a, при которых фигура M является 14–угольником, если на координатной плоскости она задана условием $|y|\le(\sqrt{a-|x|})^2+\arcsin(\sin(a-|x|))$. Может ли площадь 14–угольника равняться 200? Если да, то при каком значении параметра a?

Решение

Изобразим фигуру M при $a=1$, $a=\pi$, $a=2\pi$, $a=3\pi$, используя программу Advanced Grapher.



С увеличением параметра a фигура M увеличивается, являясь соответственно 4, 6, 12 и 14–угольником. Ясно, что $a=3\pi$ – подходящее значение параметра. Если $a=0$, то $x=0$ и $y=0$, т.е. M вырождается в точку (0; 0).

Перейдем к детальному аналитическому решению. Очевидно, что $(\sqrt{a-|x|})^2=a-|x|$, если $a\ge 0$, $x\in[-a;\ a]$. Значит, множество значений x и y ограничено. Кроме того, обе переменные в данном неравенстве содержатся под знаком модуля, поэтому M симметрична относительно координатных осей и ее достаточно изобразить в первой четверти: $0\le x\le a$, $0\le y\le(a-x)+\arcsin(\sin(a-x))$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=x+\arcsin(\sin x)$, заметив, что выражение $(a-x)+\arcsin(\sin(a-x))$ – это $g(a-x)$. Графики функций $\arcsin(\sin x)$, $g(x)$, $g(a-x)$ – ломаные. Очевидно, стороны 14–угольника образуются из звеньев ломаной.

Пусть $a=10$. Запишем аналитические выражения функций $\arcsin(\sin x)$ и $g(x)$ на участках отрезка [0; 10] и изобразим графики функций $\arcsin(\sin x)$, $g(x)$, $g(-x)$, $g(10-x)$.

$$\begin{cases} x, & x\in[0;\ \frac{\pi}{2}],\\ -x+\pi, & x\in[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}],\\ x-2\pi, & x\in[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}],\\ -x+3\pi, & x\in[\frac{5\pi}{2};10\,]. \end{cases}\qquad \begin{cases} 2x, & x\in[0;\ \frac{\pi}{2}],\\ \pi, & x\in[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}],\\ 2x-2\pi, & x\in[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}],\\ 3\pi, & x\in[\frac{5\pi}{2};10\,]. \end{cases}$$

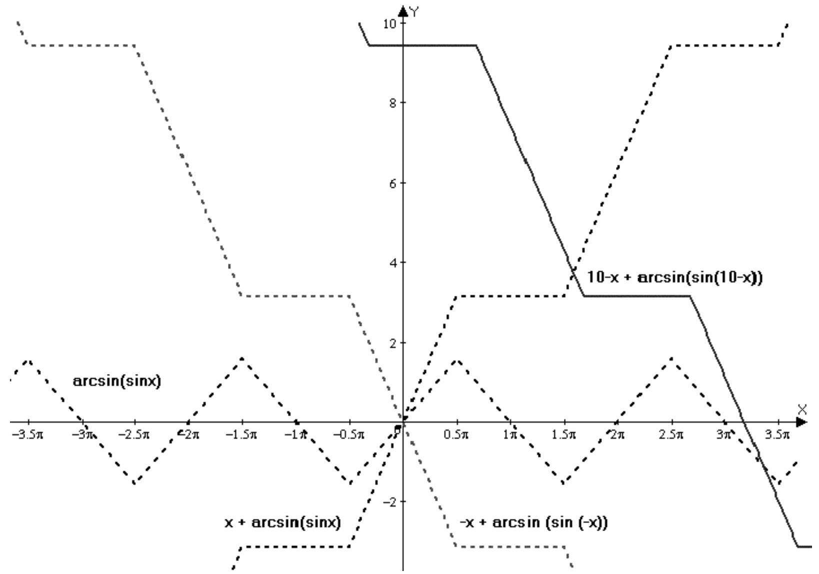


График функции $g(-x)$ симметричен графику функции $g(x)$ относительно оси ординат, а т.к. $g(x)$ – нечетна, то имеет место и симметрия относительно начала координат. График функции $g(-x+10)$ получается из графика функции $g(-x)$ с помощью параллельного переноса вдоль оси абсцисс на 10 единиц вправо.

После указанных преобразований при $a > 0$ и $a = 10$ имеем:

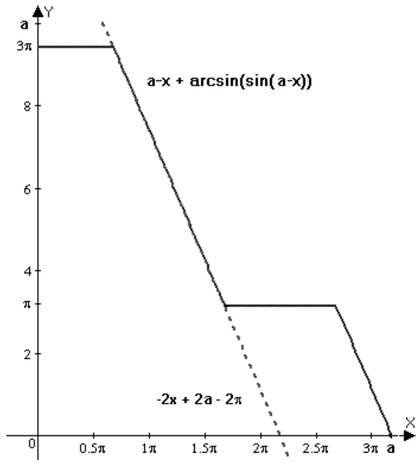
$$\begin{cases} 3\pi, & x\in[0; -\frac{5\pi}{2}+a], \\ -2x+2a-2\pi, & x\in[-\frac{5\pi}{2}+a; -\frac{3\pi}{2}+a], \\ \pi, & x\in[-\frac{3\pi}{2}+a; -\frac{\pi}{2}+a], \\ -2x+2a, & x\in[-\frac{\pi}{2}+a;\ a]. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\pi, & x\in[0; -\frac{5\pi}{2}+10], \\ -2x+20-2\pi, & x\in[-\frac{5\pi}{2}+10; -\frac{3\pi}{2}+10], \\ \pi, & x\in[-\frac{3\pi}{2}+10; -\frac{\pi}{2}+10], \\ -2x+20, & x\in[-\frac{\pi}{2}+10;\ 10]. \end{cases}$$

Итак, при $a = 10$ четыре звена ломаной лежат в первой четверти. Отразив их симметрично относительно осей координат, получим контур 14–угольника. Рассматривая проекции графиков на ось абсцисс, определяем, что ломаная будет четырехзвенной, если $a \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$. Это искомые значения параметра.

Вообще, число сторон n–угольника равно $4k$, если k – нечетно или $4k-2$, если k – четно. k – число звеньев ломаной, лежащих в первой четверти, а значение параметра a выбирается равным, например, $(k-1)\pi$. Число n можно выразить через параметр по формуле: $n(a) = 4k - 1 + (-1)^k$, где $\frac{a}{\pi}+\frac{1}{2} \le k < \frac{a}{\pi}+\frac{3}{2}$ ($a > 0$, $k \in N$), т.к. $a \in \left(\frac{(k-1)\pi}{2}; \frac{(k+1)\pi}{2}\right]$ или $\frac{(k-1)\pi}{2} < a \le \frac{(k+1)\pi}{2}$.

По формуле находим: $n(4\pi) = 20$, $n(5\pi) = 22$, $n(2006) = 2556$.

Перейдем к решению задачи о площади. Вычислим $S(3\pi)$ – площадь четверти 14–угольника при $a = 3\pi$ как сумму площадей трапеции и параллелограмма (разбиение показано на рис.).



$S(3\pi) = (\pi/2 + 2\pi) : 2 \cdot 3\pi + \pi\cdot\pi = 19\pi^2/4 \approx 46{,}88$. Результат близок к числу 50, которое равно ¼ от 200, а 3π – середина промежутка-решения, поэтому площадь 14–угольника очевидно может принимать значение 200. Найдем, соответствующее значение параметра.

Прямая $-2x+2a-2\pi$ пересекает прямые π и 3π в точках, абсциссы которых равны $a-\pi$ и $a-5\pi/2$ (высоты трапеции и параллелограмма, равные 3π и π, не зависят от параметра; основание параллелограмма также не зависит от параметра, потому что прямые $-2x+2a-2\pi$, $-2x+2a$ получаются друг из друга с помощью параллельного переноса).

Значит, длины оснований трапеции равны $a-5\pi/2$ и $a-\pi$, а ее площадь $3\pi(a-7\pi/4)$. Площадь параллелограмма равна π^2.

Имеем: $S(a) = 3\pi(a-7\pi/4) + \pi^2 = \pi(3a-17\pi/4)$.

Остается решить относительно параметра уравнение $S(a) = 50$. $\pi(3a-17\pi/4) = 50$, если $a = 50/3\pi + 17\pi/12$ ($\approx 9{,}76$; $9{,}76 > 3\pi$).

Ответ: $\left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$; $\frac{50}{3\pi}+\frac{17\pi}{12}$.

Г л а в а 9

МОДЕЛИРОВАНИЕ В СРЕДЕ TURBO PASCAL

Компьютерные технологии влияют и, несомненно, меняют традиционные формы и методы изучения геометрии. В интерактивном режиме возможны вычислительные эксперименты, графические построения, динамические иллюстрации, анализ конфигурации, проверки гипотез и даже компьютерный поиск доказательств.

"*Влияние "Начал" Евклида было столь фундаментальным, что никаких других формулировок геометрии не было предложено вплоть до Декарта. Введение последним координат позволило выразить геометрические задачи алгебраически, вымостив путь к изучению плоских кривых и ньютоновскому анализу. Координаты позволили резко повысить вычислительные возможности, соединив две великие области математики и дав начало конструктивистского мышления. Теперь появилась возможность получать новые геометрические объекты, решая связанные с ними алгебраические уравнения*" [29, с.11].

Новые геометрические объекты можно получать, например, с помощью известных учебных компьютерных курсов и педагогических программных средств ("Открытая математика. Планиметрия" ("Физикон", http://www.physicon.ru), "1С: Репетитор. Математика" (АОЗТ "1С", http://edu.1c.ru/products/), "Электронный учебник-справочник. ПЛАНИМЕТРИЯ" ("КУДИЦ", http://education.kudits.ru/homeandschool), "Уроки геометрии Кирилла и Мефодия" (http://www.nmg.ru/), "GRAN-2D" – графический анализ геометрических объектов на плоскости (Киев, http://www.dcnit.com.ua), "DG" – пакет динамической геометрии (Харьков, http://dg.osenkov.com/index_ru.html) и др.).

Их успешно используют в учебном процессе многие учителя математики и информатики для решения разнообразных задач.

Но важно рассмотреть и скрытую часть – технологию моделирования процессов, реализуемых этими средствами. Компьютерные динамические модели, реализуемые в программной среде, – эффективное средство обучения. В процессе моделирования интегрируются знания по различным предметам, постигаются элементы исследовательской деятельности. При моделировании геометрических объектов логическое мышление и воображение связываются с наглядной картиной и практическим пониманием.

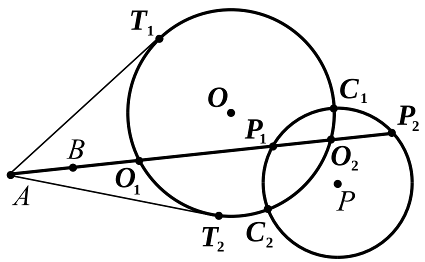
9.1. Вычисление координат точек

Задачи 136–140 – подготовительные для последующего моделирования геометрических мест точек. В них *вычисляются координаты точек* на экране компьютера путем составления и решения соответствующих систем уравнений относительно их координат (приводится решение системы, алгоритм решения в "крупных" командах, текст программы на паскале и рисунок с экрана, отображающий результаты ее работы).

136. *Пересечение прямой и окружности, двух окружностей, касательные к окружности*

Даны пересекающиеся окружности с центрами O и P и две точки A и B с различными абсциссами, лежащие вне окружностей. Найти координаты и изобразить следующие точки: а) пересечения окружностей с прямой AB (если они существуют); б) пересечения окружностей; в) касания для касательных, проведенных к окружности с центром O из точки A.

Решение



Пусть прямая AB пересекает окружности в точках O_1, O_2 и P_1, P_2, окружности пересекаются в точках C_1 и C_2, T_1 и T_2 – точки касания. Для вычисления координат точек пересечения составим и решим соответствующие системы уравнений.

При этом будем использовать вспомогательные переменные, что позволит избежать громоздких преобразований и, главное, сделать вычисления координат единообразными.

а) $AB \cap$ Окр (O, r_o), $AB \cap$ Окр (P, r_p).

Первое уравнение системы – уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом, второе – уравнение окружности:

$$\begin{cases} y = \dfrac{y_b - y_a}{x_b - x_a}(x - x_a) + y_a, \\ (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r_o^2. \end{cases} \quad y = kx + l,\ k = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a},\ l = y_a - kx_a.$$

$$x^2 - 2x_o x + x_o^2 + k^2x^2 + 2klx + l^2 - 2ky_o x - 2ly_o + y_o^2 - r_o^2 = 0,$$

$(1 + k^2) \cdot x^2 - 2(x_o + ky_o - kl) \cdot x - (r_o^2 - l^2 - x_o^2 - y_o^2 + 2ly_o) = 0.$

Введем обозначения: $a = 1 + k^2$, $b = x_o - ky_o - kl$, $c = r_o^2 - l^2 - x_o^2 - y_o^2 + 2ly_o$, $d = \sqrt{b^2 + ac}$ $(b^2 + ac \geq 0)$.

Итак, k, l, a, b, c, d – вспомогательные переменные.

Имеем: $ax^2 - 2bx - c = 0$, $x = (b \pm d)/a$, $y = kx + l$.

Значит, $\mathbf{x_{O1} = (b - d)/a, y_{O1} = kx_{O1} + l; x_{O2} = (b + d)/a, y_{O2} = kx_{O2} + l.}$

Если, $b^2 + ac = 0$, то прямая AB – касается окружности;

если, $b^2 + ac < 0$, то прямая AB не пересекает окружность.

Заменив второе уравнение системы уравнением второй окружности $(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 = r_p^2$, аналогично найдем координаты точек пересечения P_1 и P_2:

$x_{P1} = (b - d)/a$, $y_{P1} = kx_{P1} + l$; $x_{P2} = (b + d)/a$, $y_{P2} = kx_{P2} + l$, где k, l, a те же, а $b = x_p - ky_p - kl$, $c = r_p^2 - l^2 - x_p^2 - y_p^2 + 2ly_p$, $d = \sqrt{b^2 + ac}$ $(b^2 + ac \geq 0)$.

б) Окр $(O, r_o) \cap$ Окр (P, r_p).

$$\begin{cases}(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r_o^2, \\ (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 = r_p^2.\end{cases} \quad \begin{cases}x^2 - 2xx_o + x_o^2 + y_2 - 2yy_o + y_o^2 = r_o^2, \\ x^2 - 2xx_p + x_p^2 + y^2 - 2yy_p + y_p^2 = r_p^2.\end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$2x(x_p - x_o) + 2y(y_p - y_o) + x_o^2 + y_o^2 - x_p^2 - y_p^2 = r_p^2 - r_o^2.$

Отсюда $y = \dfrac{x_o - x_p}{y_p - y_o} \cdot x + \dfrac{r_o^2 - r_p^2 - x_o^2 - y_o^2 + x_p^2 + y_p^2}{2(y_p - y_o)} = kx + l$, где

$$k = \frac{x_o - x_p}{y_p - y_o}, \quad l = \frac{r_o^2 - r_p^2 - x_o^2 - y_o^2 + x_p^2 + y_p^2}{2(y_p - y_o)} \quad (*).$$

Теперь $kx + l$ вместо y подставим в первое уравнение системы, и дальнейшие преобразования будут повторяться (см. а)).

Значит, $\mathbf{x_{C1} = (b - d)/a, y_{C1} = kx_{C1} + l; x_{C2} = (b + d)/a, y_{C2} = kx_{C2} + l}$, где k и l вычисляются по формулам (∗).

в) Касательные AT_1 и AT_2.

Координаты точек касания T_1 и T_2 можно найти как координаты точек пересечения данной окружности и вспомогательной окружности с диаметром OA и центром в точке $\left(\dfrac{x_o + x_a}{2}, \dfrac{y_o + y_a}{2}\right)$, т.е. преобразования будут такими же, как и в случае б).

Примечание: аналогично можно вычислить координаты точки Y, симметричной точке X относительно прямой AB. В этом случае X и Y – точки пересечения двух окружностей Окр (A, AX) и Окр (B, BX) (*осевая симметрия*).

Алгоритм решения в "крупных" командах

1. Ввести данные в блоке констант: xo, yo, ro (1-я окружность), xa, ya (точка A), xb, yb (точка B), xp, yp, rp (2-я окружность) – переменные со стартовыми значениями. В блоке переменных описать вспомогательные переменные k, L, a, b, c, d вещественного типа.
2. Изобразить окружности, центры, вертикальные линии с шагом 50 точек по оси абсцисс для наблюдения координат на экране, закрашенный прямоугольник справа для вывода результатов (процедура Bar) и заданные точки A, B, O, P – процедура Init. Для вывода точек используется процедура Point с формальными параметрами x, y (координаты точки) и z (обозначение точки).
3. Вычислить координаты (переменные x1, y1, x2, y2) и изобразить точки пересечения прямой AB с окружностями – процедура Circle_AB. Параметры (координаты центра, радиус и порядковый номер) позволяют обращаться к ней многократно. В формулах используются вспомогательные переменные k, L, a, b, c, d.
4. Вычислить координаты (переменные x1, y1, x2, y2) и изобразить точки пересечения окружностей и точки касания – процедура Circles_Tangents. Булевский параметр tangents позволяет учесть различные значения переменных xp, yp, rp при обращениях к ней (при первом вызове процедуры они служат координатами центра и радиусом данной окружности, а при втором – вспомогательной). Используются те же имена вспомогательных переменных.

Примечания:

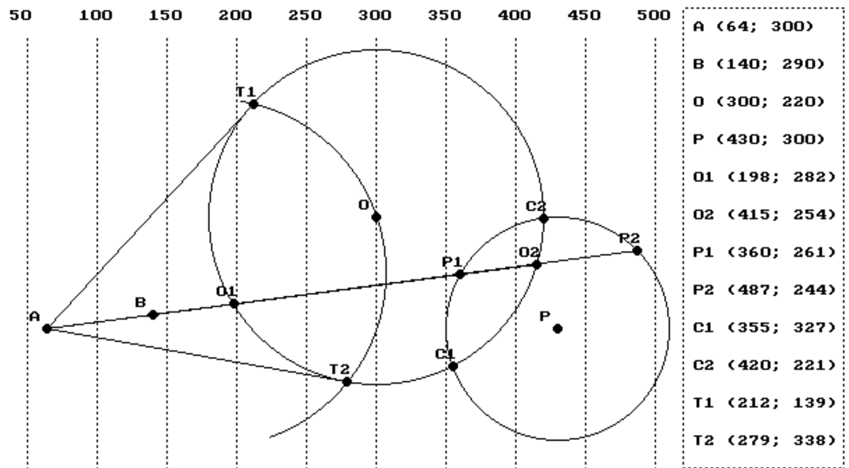
- Упражняясь в написании процедур с параметрами, замените процедуры Circle_AB и Circles_Tangents одной.
- Данные ниже представляются как константы с целью сокращения текстов программ. Данные можно вводить в программу различными способами: присваиванием значений, с помощью оператора ввода, с помощью датчика случайных чисел, чтением из внешних файлов.

```
Uses  Crt,Graph;
   { д а н н ы е: две окружности и две точки }
Const xo=310; yo=220; ro=120;
      xp:Real=430; yp:Real=300; rp:Real=80;
      xa= 14; ya=310;    { точка A }
      xb=130; yb=296;    { точка B }
Var   x1,y1,x2,y2,k,L,a,b,c,d: Real;
      u,v: String[10]; ch: Char;
```

```
Procedure Point(x,y:Real; z:String);
const  y0: Word=70;
var xi,yi: LongInt;
begin
  xi:=Round(x); yi:=Round(y);
  FillEllipse(xi,yi,3,3);
  OutTextXY(xi-12,yi-14,z);
  Str(xi,u); Str(yi,v);
  OutTextXY(530,y0,z+' ('+u+'; '+v+')');
  Inc(y0,30)
end; {Point}

Procedure Init;
var Gd,Gm,i: Integer;
begin
  Gd:=Vga; Gm:=VgaHi; InitGraph(Gd,Gm,'');
  SetColor(11); Circle(xo,yo,ro);
  Circle(Round(xp),Round(yp),Round(rp));
  SetLineStyle(1,1,1); i:=0;
  Repeat
    Line(i,30,i,460);
    Str(i,u); OutTextXY(i-12,20,u); Inc(i,50)
  Until i>500;
  SetFillStyle(1,1); Bar(520,20,640,460);
  SetFillStyle(1,11);
  Point(xa,ya,'A');  Point(xb,yb,'B');
  Point(xo,yo,'O');  Point(xp,yp,'P');
  SetColor(15); SetLineStyle(0,0,1);
  OutTextXY(230,465,'Press Enter'); ReadLn;
  SetPalette(11,15)
end; {Init}

Procedure Circle_AB(x,y,r: Real; n:Byte);
begin
  k:=(yb-ya)/(xb-xa); L:=ya-k*xa;
  a:=k*k+1; b:=x+k*(y-L);
  c:=r*r-x*x-y*y+l*(2*y-L);
  if b*b+a*c>0 then
  begin
    d:=sqrt(b*b+a*c);
    x1:=(b-d)/a; y1:=k*x1+L;
    x2:=(b+d)/a; y2:=k*x2+L;
    Line(xa,ya,Round(x2),Round(y2));
    if n=1 then ch:='O' else ch:='P';
    Point(x1,y1,ch+'1'); Point(x2,y2,ch+'2');
    WriteLn(#7,#7); ReadLn
  end {if}
end; {Circle_AB}
```



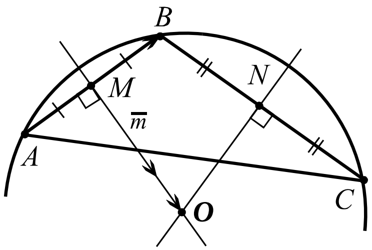
```
Procedure Circles_Tangents(tangents: Boolean);
begin
  if tangents then
  begin
    xp:=0.5*(xo+xa); yp:=0.5*(yo+ya);
    rp:=sqrt(sqr(xa-xp)+sqr(ya-yp));
  end;
  k:=(xp-xo)/(yo-yp);
  L:=(rp*rp-ro*ro+xo*xo+yo*yo-xp*xp-yp*yp)/(yo-yp)/2;
  a:=k*k+1; b:=xo+k*(yo-L);
  c:=ro*ro-xo*xo-yo*yo+L*(2*yo-L); d:=sqrt(b*b+a*c);
  x1:=(b-d)/a; y1:=k*x1+L;
  x2:=(b+d)/a; y2:=k*x2+L;
  if tangents then
    begin         {дуга вспомогательной окружности}
    Arc(Round(xp),Round(yp),290,440,Round(rp));
    Line(xa,ya,Round(x1),Round(y1));
    Line(xa,ya,Round(x2),Round(y2));   {касательные}
    ch:='T';
    end
    else ch:='C';
  Point(x1,y1,ch+'1'); Point(x2,y2,ch+'2');
  WriteLn(#7,#7); ReadLn
end;  {Circles_Tangent}

BEGIN
  Init;
  Circle_AB(xo,yo,ro,1);
  Circle_AB(xp,yp,rp,2);
  Circles_Tangents(false);
  Circles_Tangents(true); CloseGraph
END.
```



137. *Построение окружности, проходящей через 3 точки*

Найти координаты центра, радиус и построить окружность, проходящую через три точки, заданные координатами: A (x_a, y_a), B (x_b, y_b), C (x_c, y_c) (описанную окружность треугольника ABC).

Решение



Задача не имеет решения, если три точки лежат на одной прямой. Потребуем, например, $C \notin AB$ или $(x_c - x_b)(y_b - y_a) - (x_b - x_a)(y_c - y_b) \neq 0$ (координаты точки C не удовлетворяют уравнению прямой AB). Это уравнение охватывает все случаи.

Пусть M (x_m, y_m) и N $(x_n\ y_n)$ – середины сторон AB и BC.

O – точка пересечения серединных перпендикуляров MO и NO, поэтому ее координаты можно найти из системы линейных уравнений, составив уравнения этих прямых: $\begin{cases} y = \dfrac{x_a - x_b}{y_b - y_a}(x - x_m) + y_m, \\ y = \dfrac{x_b - x_c}{y_c - y_b}(x - x_n) + y_n. \end{cases}$

Система содержит угловые коэффициенты прямых ($k_{MO} = -1/k_{AB}$ и $k_{NO} = -1/k_{BC}$). В формулах для их вычисления имеются знаменатели $y_b - y_a$ и $y_c - y_b$, которые могут обращаться в нуль, что увеличивает количество проверяемых в программе условий.

Воспользуемся векторами. Если $\overline{m} = (y_b - y_a, x_a - x_b)$, то $\overline{m} \perp \overline{AB}$.

Действительно, $\overline{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$, $\overline{m} \cdot \overline{AB} = 0$. Тогда и вектор $k_1\overline{m}$ перпендикулярен $\overline{AB}$. Значит, существует значение коэффициента k_1, при котором $k_1\overline{m} = \overline{MO}$. Переходя к координатам, получим: $k_1(y_b - y_a) = x_o - x_m$, $k_1(x_a - x_b) = y_o - y_m$ или $x_o = x_m + k_1(y_b - y_a)$, $y_o = y_m + k_1(x_a - x_b)$.

Аналогично координаты центра выражаются через координаты точки N, вектора $\overline{n}$, перпендикулярного $\overline{BC}$, и коэффициент k_2: $x_o = x_n + k_2(y_c - y_b)$, $y_o = y_n + k_2(x_b - x_c)$.

Имеем систему: $\begin{cases} x_m + k_1(y_b - y_a) = x_n + k_2(y_c - y_b), \\ y_m + k_1(x_a - x_b) = y_n + k_2(x_b - x_c). \end{cases}$

Из второго уравнения $k_2 = \dfrac{(y_m - y_n) + k_1(x_a - x_b)}{x_b - x_c}$. Подставим полученное выражение в первое уравнение:

$$k_1(y_b - y_a) = (x_n - x_m) + \frac{(y_m - y_n)(y_c - y_b)}{x_b - x_c} + k_1\frac{(x_a - x_b)(y_c - y_b)}{x_b - x_c}.$$

Отсюда $k_1 = \dfrac{(x_n - x_m)(x_c - x_b) - (y_n - y_m)(y_c - y_b)}{(x_c - x_b)(y_b - y_a) - (x_b - x_a)(y_c - y_b)}$, причем выражение в знаменателе не обращается в 0 (см. условие $C \notin AB$).

По формулам для координат середины отрезка:

$x_m = (x_a + x_b) : 2$, $y_m = (y_a + y_b) : 2$, $x_n = (x_c + x_b) : 2$, $y_n = (y_c + y_b) : 2$.

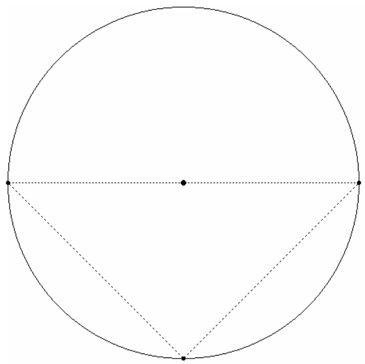
Итак, $\mathbf{O\ (\ x_m + k_1(y_b - y_a);\ y_m + k_1(x_a - x_b)\ ).}$

Радиус окружности найдем как длину отрезка OA:

$$R = OA = \sqrt{(x_a - x_o)^2 + (y_a - y_o)^2}.$$

```
Uses  Crt,Graph;
{д а н н ы е: координаты трех точек}
Const xa=120; xb=340; xc=560;
      ya=230; yb=450; yc=230;
      z = 'Окружность не существует!';
Var   xm,ym,xn,yn,k: Real;    {вспомогат. величины}
      xo,yo,R      : LongInt; { искомые величины }

Procedure Count;
begin
  { вычисление координат середин отрезков AB,BC }
  xm:=0.5*(xa+xb); ym:=0.5*(ya+yb);
  xn:=0.5*(xc+xb); yn:=0.5*(yc+yb);
  { вычисление координат центра и радиуса }
  k:=((xn-xm)*(xc-xb)-(yc-yb)*(ym-yn))/k;
  xo:=Round(xm+k*(yb-ya));
  yo:=Round(ym+k*(xa-xb));
  R:= Round(Sqrt(sqr(xo-xa)+sqr(yo-ya)));
  WriteLn('O (':30,xo,';',yo:5,')','R = ':10,R);
  WriteLn; WriteLn('Press Enter':45); ReadLn
end;  {Count}

Procedure Draw;
var Gd,Gm: Integer;
begin
  Gd:=Vga; Gm:=VgaHi; InitGraph(Gd,Gm,'');
  {изображение точек и треугольника}
  FillEllipse(xa,ya,2,2);
  FillEllipse(xb,yb,2,2);
```

```
  FillEllipse(xc,yc,2,2);
  SetLineStyle(1,0,0);
  MoveTo(xa,ya);
  LineTo(xb,yb); LineTo(xc,yc);
  LineTo(xa,ya);
  ReadLn;
  {построение окружности}
  SetColor(10);
  FillEllipse(xo,yo,3,3);
  Circle(xo,yo,R);
  ReadLn; CloseGraph
end;  {Draw}

BEGIN
  k:=(xc-xb)*(yb-ya)-(xb-xa)* (yc-yb);
  if k=0 then
         WriteLn(z,#7,#7)
         else
         begin
           Count;
           Draw
         end
END.
```



138. ***Окружность 9 точек и прямая Эйлера. Перпендикулярные прямые***

Заданы координаты вершин треугольника A (x_a, y_a), B (x_b, y_b), C (x_c, y_c). Найти координаты центра D, радиус и построить окружность 9 точек, проходящую через основания H_1, H_2, H_3 высот треугольника, середины его сторон M_1, M_2, M_3 и середины трех отрезков, соединяющих ортоцентр H с вершинами. Построить прямую Эйлера, содержащую точки O, M, D, H (O – центр описанной окружности, M – центроид).

Решение

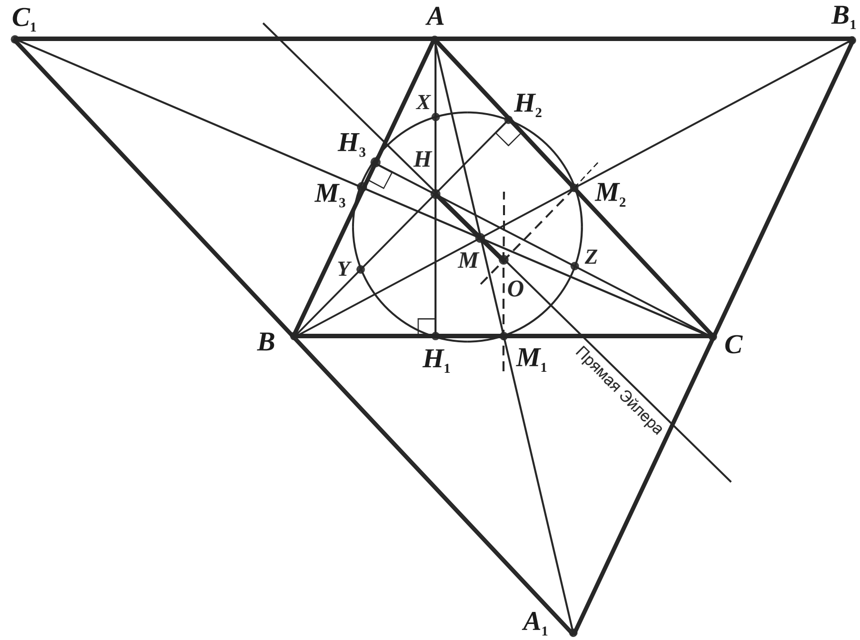
Рассмотрим основные теоретические сведения из планиметрии.

Через вершины Δ ABC проведем прямые, параллельные его сторонам. Отрезки этих прямых – стороны треугольника $A_1B_1C_1$.

$ABCB_1$ и ABA_1C – параллелограммы с общей стороной AB; $A_1B_1 = 2AB$, стороны $\Delta\, ABC$ – средние линии $\Delta\, A_1B_1C_1$.

M – общий центроид, $AM_1 \subset A_1A$, $A_1M = 2AM$.

1. $\Delta\, A_1B_1C_1 = H_M^{-2}(\Delta\, ABC)$ (*г о м о т е т и я*).
2. Высоты $\Delta\, ABC$ AH_1, BH_2, CH_3 пересекаются в одной точке.



3. $\boldsymbol{AH = 2OM_1}$.
4. $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ – формула Гамильтона.
5. Точки O, M, H лежат на одной прямой – прямой Эйлера, причем $\boldsymbol{MH = 2MO}$.
6. Если X, Y, Z – середины отрезков AH, BH, CH, то точки M_1, H_1, Y, M_3, H_3, X, H_2, M_2, Z лежат на одной окружности Окр (D, DM_1), называемой окружностью 9 точек. Ее центр D лежит на прямой Эйлера ($D = M_1X \cap MH$ – середина OH), а диаметр – радиус описанной окружности $\Delta\, ABC$ ($\boldsymbol{AO = 2DM_1}$), т.к. AOM_1X – параллелограмм и $M_1X = OA$.

Координаты ортоцентра x_h и y_h найдем как координаты точки пересечения прямых, проходящих через вершины A и B перпендикулярно BC и AC.

Соответствующая система линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x_b - x_c}{y_c - y_b}(x - x_a) + y_a, \\ y = \dfrac{x_a - x_c}{y_c - y_a}(x - x_b) + y_b \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = k_1 x + l_1, \\ y = k_2 x + l_2. \end{cases}$$

Приравняв правые части $k_1x + l_1$ и $k_2x + l_2$, найдем: $x_h = \dfrac{l_2 - l_1}{k_1 - k_2}$, $y_h = k_1x + l_1$, где $k_1 = \dfrac{-1}{k_{BC}} = \dfrac{x_b - x_c}{y_c - y_b}$, $k_2 = \dfrac{-1}{k_{AC}} = \dfrac{x_a - x_c}{y_c - y_a}$, $l_1 = y_b - k_1x_b$, $l_2 = y_a - k_2x_a$.

Координаты оснований высот найдем аналогично.

Например, для вычисления координат точки H_1 рассмотрим прямую BC и перпендикулярную ей прямую, проходящую через вершину A.

$$\begin{cases} y = \dfrac{y_c - y_b}{x_c - x_b}(x - x_b) + y_b, \\ y = \dfrac{x_b - x_c}{y_c - y_b}(x - x_a) + y_a, \end{cases} \quad \begin{cases} y = k_1 x + l_1, \\ y = k_2 x + l_2. \end{cases} \quad x_h = \frac{l_2 - l_1}{k_1 - k_2}, \; y_h = k_1x + l_1,$$

где $k_1 = k_{BC}$, $\dfrac{x_b - x_c}{y_c - y_b}$, $k_2 = \dfrac{-1}{k_{BC}}$, $l_1 = y_b - k_1x_b$, $l_2 = y_a - k_2x_a$.

Итак, при вычислении координат каждой из точек H, H_1, H_2, H_3 используются два коэффициента и координаты пары соответствующих точек.

Координаты 6 точек M_1, M_2, M_3, X, Y, Z, являющихся серединами отрезков, найдем по формулам $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Для вычисления координат центра тяжести M треугольника ABC воспользуемся формулами $x = \dfrac{x_a + x_b + x_c}{3}$, $y = \dfrac{y_a + y_b + y_c}{3}$.

Наконец, координаты центров O и D окружностей найдем как в предыдущей задаче.

<u>*Алгоритм решения в "крупных" командах*</u>

1. Ввести данные в блоке констант: xa, ya (вершина A), xb, yb (вершина B), xc, yc (вершина C).
2. Описать два вспомогательных массива x и y вещественного типа для хранения вычисляемых абсцисс и ординат.
3. Изобразить данный треугольник – процедура ABC.
4. В основной процедуре Points (переменная i со стартовым значением – счетчик индексов, константы kAB, kBC, kAC – угловые коэффициенты прямых AB, BC, AC):

   а) Создать процедуру Point для вычисления координат точек, изображения их на экране в последовательности H, H_1, H_2, H_3, M_1, M_2, M_3, X, Y, Z, M, O, D и изображения окружности 9 точек. Последние четыре параметра этой процедуры (переменные x1, y1, x2, y2) служат координатами точек. Первые два (a и b) – *коэффициентами* (см. вывод после решения систем) при первых четырех вызовах процедуры, *фиктивными числами* при последующих шести и *парой координат* при трех последних (вычисление центра тяжести и центров окружностей).

   б) Изображать медианы и высоты.

   в) Изображать 13 точек, а 9 точек, через которые проходит окружность, нумеровать.
5. Найти три равных отношения: $MH : MO$, $AO : DM_1$, $AH : OM_1$, каждое из которых должно равняться 2, изобразить равные отрезки AO и XM_1 – процедура Equal. В подчиненной процедуре Ratio найденное отношение преобразовывается в строку и выводится на экран. Ее параметрами служат индексы точек (переменные a, b, c, d) и буквенные обозначения концов отрезков (переменные z1, z2). Координатам xa, ya вершины A с этой целью присвоен индекс 14.
6. Изобразить прямую Эйлера как отрезок, концы которого являются точками, центрально симметричными точкам H и O относительно точек O и H соответственно – процедура Euler.

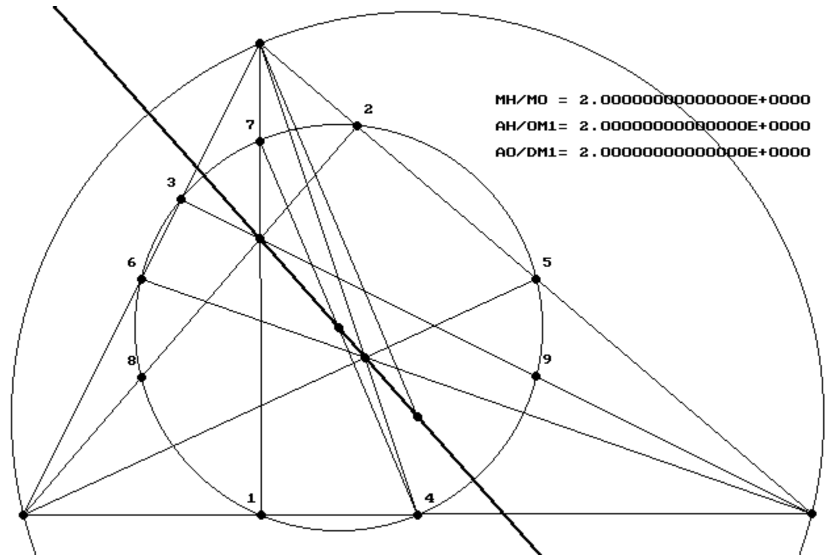
```
Uses  Crt, Graph;
     { д а н н ы е: вершины треугольника }
Const xa=200; xb=20;  xc=620;  { абсциссы различны !}
      ya=40;  yb=400; yc=399;  { ординаты различны !}

Var   x,y: Array [1..14] of Extended;
      z: String;
```

```
Procedure ABC;
var Gd,Gm: Integer;
begin
 Gd:=Vga; Gm:=VgaHi; InitGraph(Gd,Gm,'');
 SetColor(10); SetBkColor(2);
 SetFillStyle(1,10); FillEllipse(xa,ya,3,3);
 FillEllipse(xb,yb,3,3); FillEllipse(xc,yc,3,3);
 Line(xa,ya,xb,yb); Line(xb,yb,xc,yc); Line(xc,yc,xa,ya);
 OutTextXY(530,460,'Press Enter'); ReadLn;
 SetPalette(10,16); SetFillStyle(1,15)
end; { ABC }

Procedure Points;
const i: Byte=0;                    {    счетчик    }
      kAB=(yb-ya)/(xb-xa);          { угловые коэф.}
      kBC=(yc-yb)/(xc-xb);          {    прямых     }
      kAC=(yc-ya)/(xc-xa);          {  AB,BC и AC   }

Procedure Point(a,b,x1,y1,x2,y2: Extended);
 var L1,L2,xm,ym,xn,yn,k,r: Extended; w: ShortInt;
 begin
  Inc(i);
  Case i of
   1..4: begin                          {H,H1,H2,H3}
          L1:=y1-a*x1;
          L2:=y2-b*x2;
          x[i]:=(L2-L1)/(a-b);
          y[i]:=a*x[i]+L1;
        end;
  5..10: begin                      {X,Y,Z,M1,M2,M3}
          x[i]:=0.5*(x1+x2);
          y[i]:=0.5*(y1+y2);
         end;
     11: begin                                  {M}
          x[i]:=(a+x1+x2)/3;
          y[i]:=(b+y1+y2)/3
         end;
  12,13: begin                        {центры D и O}
          k:=(x2-x1)*(y1-b)-(x1-a)*(y2-y1);
          xm:=0.5*(a+x1);  ym:=0.5*(b+y1);
          xn:=0.5*(x1+x2); yn:=0.5*(y1+y2);
          k:=((xn-xm)*(x2-x1)-(y2-y1)*(ym-yn))/k;
          x[i]:=xm+k*(y1-b);
          y[i]:=ym+k*(a-x1);
          r:=Sqrt(sqr(x[i]-a)+sqr(y[i]-b));
          if i=13 then SetColor(14);
          Circle(Round(x[i]),Round(y[i]),Round(r));
        end;
  end; {Case}
```



```
  MoveTo(Round(x[i]),Round(y[i]));
  if i in [2,5] then LineTo(xa,ya);     { медианы }
  if i in [3,6] then LineTo(xb,yb);     {    и    }
  if i in [4,7] then LineTo(xc,yc);     {  высоты }
  if i in [2..10] then
  begin
    Str(i-1,z);
    if i in [3,5,6,10] then w:=6 else w:=-10;
    OutTextXY(Round(x[i])+w,Round(y[i]-16),z);
    Sound(222); Delay(22222); NoSound;
    SetFillStyle(1,14)
  end
  else SetFillStyle(1,15);
  FillEllipse(Round(x[i]),Round(y[i]),3,3);
  ReadLn
 end; {Point}

begin {Points}
  {   ортоцентр H     }
  Point(-1/kBC,-1/kAC, xa,ya, xb,yb);      { 1 - H}
  {   основания высот }
  Point(kBC,-1/kBC, xb,yb, xa,ya);         {2 - H1}
  Point(kAC,-1/kAC, xa,ya, xb,yb);         {3 - H2}
  Point(kAB,-1/kAB, xa,ya, xc,yc);         {4 - H3}
  {   середины сторон и отрезков    }
  Point(0, 0, xb,yb, xc,  yc);             {5 - M1}
  Point(0, 0, xa,ya, xc,  yc);             {6 - M2}
  Point(0, 0, xa,ya, xb,  yb);             {7 - M3}
  Point(0, 0, xa,ya, x[1],y[1]);           {8 -  X}
  Point(0, 0, xb,yb, x[1],y[1]);           {9 -  Y}
  Point(0, 0, xc,yc, x[1],y[1]);           {10 - Z}
  {   центр тяжести M }
  Point(xa,ya, xb,yb, xc,yc);              {11 - M}
  { центры, радиусы описанной окр. и окр. 9 точек }
  Point(xc,yc, xa,ya, xb,yb);              {12 - O}
  Point(x[5],y[5],x[6],y[6],x[7],y[7]);    {13 - D}
end; {Points}

Procedure Equal;  { MH:MO = AO:DM1 = AH:OM1 = 2:1 }
 Procedure Ratio(a,b,c,d: Byte; z1,z2: String);
 begin
   Str(Sqrt((sqr(x[a]-x[b])+sqr(y[a]-y[b]))/
            (sqr(x[c]-x[d])+sqr(y[c]-y[d]))), z);
   OutTextXY(380,15*(c-10), z1+'/'+z2+'='+z)
 end; {Ratio}
begin          { равные отношения и равные отрезки }
  x[14]:=xa;  y[14]:=ya;                   {14 - A}
  Ratio(1 ,11,11,12, 'MH', 'MO ');
  Ratio(14, 1,12, 5, 'AH', 'OM1');
```

```
  Ratio(14,12,13, 5, 'AO', 'DM1');
  SetColor(15);
  Line(xa,ya,Round(x[12]),Round(y[12])); {AO и XM1}
  Line(Round(x[8]),Round(y[8]),Round(x[5]),Round(y[5]))
end; {Equal}

Procedure Euler;                    { прямая Эйлера }
begin
  SetColor(14);
  Line(Round(2*x[1]-x[12]),Round(2*y[1]-y[12]),
       Round(2*x[12]-x[1]),Round(2*y[12]-y[1]));
  ReadLn; CloseGraph
end; {Euler}

BEGIN
  ABC; Points; Equal; Euler
END.
```



В последующих разделах при моделировании г.м.т. потребуется осуществлять обход отрезка и обход окружности, т.е. в цикле с определенным шагом вычислять координаты точек, принадлежащих отрезку или окружности. Например, в задаче 146: осуществить перебор пар точек отрезков *AB* и *CD* … (см. п.2).

Реализовать обход (построить отрезок или окружность по точкам) можно различными способами. Программы, приведенные ниже, читаются легко.

139. ***Обход отрезка AB. Построение отрезков, параллельного и перпендикулярного отрезку AB и проходящего через заданную точку C ($C \notin AB$).***

```
Uses  Crt, Graph;    {данные: точки A, B, C}
Const xa=200; ya=340; xb=440; yb=100; xc=320; yc=120;
      kAB=(yb-ya)/(xb-xa);  {угловой коэф. прямой AB}
Var   f,g: Text;

Procedure Init;
var Gd,Gm: Integer;
begin
  Gd:=Vga; Gm:=VgaHi; InitGraph(Gd,Gm,'d:\tp\bgi');
  FillEllipse(xa,ya,2,2); FillEllipse(xb,yb,2,2);
  FillEllipse(xc,yc,2,2);
  Assign(f,'d:\x_AB.txt'); Rewrite(f);
  Assign(g,'d:\y_AB.txt'); Rewrite(g);
end;

Procedure Segment(k: Double; a,b,c,w: Integer);
const step=1 {0.002};{шаг, влияющий на скорость вывода}
var x,y: Double;
begin
  x:= xa-w;
  Repeat
    y:=k*(x-a)+b;                      {вычисление ординаты}
    PutPixel(Round(x),Round(y),c);
    if c=15 then begin        {запись координат в файлы}
      Write(f,Round(x),' '); Write(g,Round(x),' ') end;
    x:=x+step
  Until x>xb+w
end;

BEGIN
  Init;
  Segment(kAB,   xa,ya, 15, 0);             {отрезок AB}
  Segment(kAB,   xc,yc, 11, 0);          {параллельный}
  Segment(-1/kAB,xc,yc, 11, 0);      {перпендикулярный}
  Segment(kAB,   xa,ya, 9, 60); {отрезок,содержащий AB}
  Close(f); Close(g); ReadLn; CloseGraph
END.
```

Программа создает текстовые файлы, содержащие целочисленные координаты точек отрезка *AB*. Если шаг (переменная step) равен 1, то каждая абсцисса записывается в файл x_AB один раз (т.е. 200, 201, 202,… , 440 для данных xa и xb); если шаг меньше – многократно. Проанализируйте, как в зависимости от ординат точек *A* и *B* при этом записываются в файл y_AB ординаты точек отрезка *AB*. Главный параметр k процедуры Segment – угловой коэффициент соответствующих прямых, а параметр w позволяет построить отрезок, который содержит отрезок *AB*.

140. *Обход окружности. Правильные многоугольники*

Если центр окружности совпадает с началом координат, то координаты её произвольной точки $M(t)$ находятся по формулам: $\boldsymbol{x = r\cos t}$, $\boldsymbol{y = r\sin t}$, где t – длина соответствующей дуги в радианах. Если же центр окружности находится в точке (x_0, y_0), то с учётом формул параллельного переноса получим: $\boldsymbol{x = x_0 + r\cos t}$, $\boldsymbol{y = y_0 - r\sin t}$ ($y_0 + r\sin t$ – обход по часовой стрелке).

Пусть (320, 240) – центр окружности радиуса 200.

```
t:=0; step:=0.00001;
Repeat
  x:= 320 + Round(200*cos(t));
  y:= 240 - Round(200*sin(t));
  PutPixel(x,y,15);
  t:= t + step;
Until t>2*pi;
```

В цикле скорость вывода пикселов регулируется значением переменной step – приращением параметра t в радианной мере.

Наиболее простой вариант обхода окружности с использованием градусной меры может быть таким:

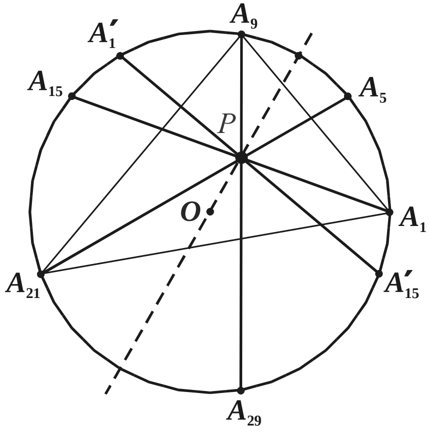
```
d:=pi/180;       {один градус}
for i:=1 to 360 do
begin
  x:= 320 + Round(200*cos(i*d));
  y:= 240 - Round(200*sin(i*d));
  PutPixel(x,y,15); Delay(2000)
end;
```

К приведенной ниже задаче в качестве упражнения по вычислению координат точек окружности напишем программу-демонстрацию.

Доказать, что в правильном 36-угольнике можно выбрать 4 диагонали, не проходящие через его центр, пересекающиеся в одной внутренней точке многоугольника.

Правильный 36-угольник является вписанным в окружность. Так как его центральный угол равен 10°, то концы выбранных последовательно дуг в 40°, 40°, 60°, 60°, 80°, 80° служат вершинами.

Обозначим эти вершины A_1, A_5, A_9, A_{15}, A_{21}, A_{29} и рассмотрим треугольник $A_1A_9A_{21}$. Диагонали A_1A_{15}, A_9A_{29}, $A_{21}A_5$ принадлежат биссектрисам его внутренних углов. Значит, все они проходят через центр P вписанной в него окружности, т.е. пересекаются в одной точке.

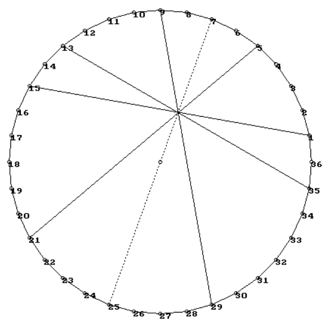


Остается выбрать 4-ю диагональ. Заметим, что диагонали A_9A_{29} и A_5A_{21} симметричны относительно диаметра окружности OP (или A_7A_{25}).

Следовательно, существует диагональ $A_1'A_{15}'$, симметричная диагонали A_1A_{15} относительно OP.

Нетрудно убедиться, что это диагональ, соединяющая 13-ю и 35-ю вершины, т.е. $A_{35}A_{13}$.

```
Uses  Graph;
Const x0=320; y0=240; r=222;                  {окружность}
      t=pi/18;                           {центральный угол}
Var   Gd,Gm,i: Integer;
      x,y: Array[1..36] of Integer; {координаты вершин}
      z  : String[2];

BEGIN
 Gd:=Vga; Gm:=VgaHi; InitGraph(Gd,Gm,' ');
 SetColor(11); FillEllipse(x0,y0,2,2);

 {правильный 36-угольник}
 MoveTo(x0+r, y0);
 for i:=1 to 36 do
 begin
   x[i]:= x0 + Round(r*cos(i*t));
   y[i]:= y0 - Round(r*sin(i*t));
   LineTo(x[i],y[i]);                          {стороны}
   FillEllipse (x[i],y[i],2,2);                {вершины}
  {нумерация вершин многоугольника}
   Str(i,z); OutTextXY(x[i],y[i],z);
 end;

 { четыре диагонали }
 Line(x[9], y[9], x[29],y[29]);
 Line(x[5], y[5], x[21],y[21]);
 Line(x[1], y[1], x[15],y[15]);
 Line(x[13],y[13],x[35],y[35]);
 {диаметр - ось симметрии}
 SetLineStyle(1,1,2);SetColor(14);
 Line(x[7], y[7], x[25],y[25]);
 ReadLn; CloseGraph
END.
```



9.2. Моделирование геометрических мест точек

В настоящем разделе рассмотрим технологию моделирования геометрических объектов на *учебных компьютерных* моделях. Такие модели полезны для глубокого понимания задачи и наглядного отображения результатов.

Компьютерную модель реализуем в программной среде – наиболее эффективном средстве, где модель представлена в форме программы на языке программирования.

Динамические модели позволяют наблюдать и анализировать *изменения объекта* или ход и последовательную *смену состояний процесса* во времени.

Постановку задачи компьютерного моделирования геометрического места точек будем осуществлять в одной из двух форм:

***Средствами среды программирования Turbo Pascal моделировать процесс построения геометрического места точек*:**

а) вычисляя координаты всех точек по математическим формулам;

б) выполняя сканирование экранной области для определения координат точек и проверки условий, полученных из математических соотношений.

Основа моделирования на экране компьютера – декартова прямоугольная система координат. Вычисления координат достаточно сложны. Дополнительные проблемы могут возникать в связи с точностью вычислений. В некоторых случаях для определения погрешности вычислений необходимы дополнительные знания разделов высшей математики. Поэтому математические модели упрощены.

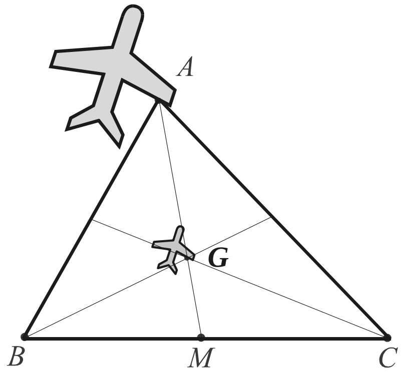
Написание моделирующих программ – хорошие упражнения в технике программирования: построение алгоритма, представление данных, типы данных, параметры процедур, анализ точности вычислений и скорости работы программы и т.д.

Проводя компьютерный эксперимент с моделью, обратите внимание на тестирование программы и погрешность вычислений.

Во всех геометрических задачах построению модели предшествует ее решение.

141. ***Произвольная фигура***. Найти г.м.т. пересечения медиан треугольников, которые имеют общую сторону, а множество противолежащих им вершин образует произвольную фигуру F.

Решение



Пусть BC – общая сторона треугольников, A – вершина, принадлежащая фигуре F, AM – медиана, G – центроид треугольника ABC. $GM : AM = 1 : 3$ по свойству медиан. Так как A – произвольная точка фигуры F, то множество точек G образует фигуру F', гомотетичную фигуре F с коэффициентом ⅓ и центром M.

Моделирование

Постановка задачи. Средствами среды программирования моделировать процесс построения г.м.т., выполняя сканирование экранной области для определения координат точек и проверки условий.

План моделирования

Для переменной точки A фигуры F вычислять координаты точек G треугольников ABC по формулам:

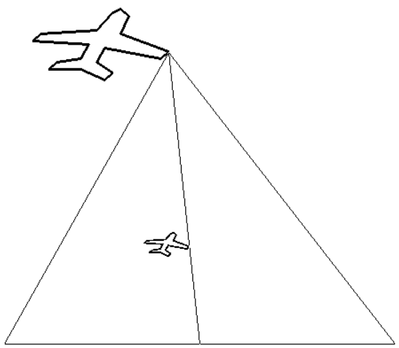
$$x_g = \frac{x_a + x_b + x_c}{3},\ y_g = \frac{y_a + y_b + y_c}{3}$$

Технология моделирования

1. Задать координаты xb, yb, xc, yc точек B, C и массивы коэффициентов приращений для рисования фигуры в блоке констант.
2. Изобразить сторону BC и фигуру – процедура BC_Figure.
3. В процедуре Homothetos, сканируя область экрана с использованием вложенных циклов (параметры xv и yv – координаты переменной точки A), при условии, что точка A принадлежит фигуре (для проверки применяется стандартная процедура GetPixel):

   изображать стороны треугольника – процедура AB_AC;
   вычислять для точек A фигуры координаты xg и yg;
   изображать точки G (xg, yg).

```
Uses  Crt, Graph;
Type  Rel = Array [1..18] of ShortInt;
      {д а н н ы е: сторона и фигура}
Const xb=100; yb=460; xc=540; yc=460;
   x: Rel=(1,3,1,-7,1,7,2,1,1,-1,6,-1,-7,-1,2, -1, -3,-4);
   y: Rel=(-2,-1,-4,-1,-2,-1,-5,-1,2,5,5,2,-3,4,3,2,-3,0);

Procedure BC_Figure;
var Gd,Gm,i: Integer;
begin
  Gd:=Vga; Gm:=VgaHi; InitGraph(Gd,Gm,'');
  SetBkColor(2); SetColor(15);
  SetLineStyle(0,0,3); Line(xb,yb,xc,yc);
  MoveTo(150,150);
  for i:=1 to 18 do LineRel(x[i]*9,y[i]*5)
end;

Procedure Homothetos(t: Integer);
var xv,yv,xg,yg,xl,yl: Integer;

 Procedure AB_AC(x,y: Integer);
 begin Line(x,y,xb,yb); Line(x,y,xc,yc) end;

begin
 SetLineStyle(0,0,1);
 SetWriteMode(XorPut);

 for xv:=100 to 350 do
  for yv:=50 to 200 do
  begin
   if GetPixel(xv,yv)=15 then
   begin
     AB_AC(xv,yv); Delay(t); AB_AC(xv,yv);
     xg:=Round((xv+xb+xc)/3);
     yg:=Round((yv+yb+yc)/3);
     PutPixel(xg,yg,14);
     xl:=xv; yl:=yv;
   end
  {else PutPixel(xv,yv,7);}
  end;

  AB_AC(xl,yl); {треугольник}
  ReadLn; CloseGraph
end;

BEGIN
  BC_Figure;
  Homothetos(3000)
END.
```



142. ***Окружность Аполлония***. Доказать, что геометрическим местом точек, расстояния которых до двух данных точек A и B относятся как $m : n$, есть окружность.

Доказательство

Пусть в прямоугольной системе координат на плоскости $AB = a$, $A\ (0,\ 0)$, $B\ (a,\ 0)$. $C\ (x,\ y)$ – произвольная точка искомого геометрического места точек, $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{m}{n}$. В последнем равенстве перейдем к координатам: $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = \dfrac{m}{n}$ или $n^2\ (x^2 + y^2) = m^2\ ((x - a)^2 + y^2)$. Преобразовывая, получим: $n^2x^2 + n^2y^2 = m^2x^2 + m^2y^2 + m^2a^2 - 2m^2ax$, $(m^2 - n^2)\ x^2 + (m^2 - n^2)\ y^2 + m^2a^2 - 2m^2ax = 0$.

Если $m = n$, то $m^2a^2 - 2m^2ax = 0$, $x = ½\ a$ – уравнение серединного перпендикуляра к прямой AB.

Если $m \neq n$, то, разделив почленно на $m^2 - n^2$, выделим полный квадрат относительно переменной x. $x^2 + y^2 + \dfrac{m^2a^2}{m^2-n^2} - \dfrac{2m^2ax}{m^2-n^2} = 0$,

$$x^2 - 2x\frac{am^2}{m^2-n^2} + \left(\frac{am^2}{m^2-n^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{am^2}{m^2-n^2}\right)^2 - \frac{m^2a^2}{m^2-n^2},$$

$$\left(x - \frac{am^2}{m^2-n^2}\right)^2 + (y-0)^2 = \frac{a^2m^2n^2}{(m^2-n^2)^2}.$$

Последнее уравнение задает окружность с центром в точке $\left(\dfrac{am^2}{m^2-n^2},\ 0\right)$ и радиусом $\dfrac{amn}{|m^2-n^2|}$, ч.т.д. Она пересекает прямую AB в точках $M\ \left(\dfrac{am}{m+n},\ 0\right)$, $N\ \left(\dfrac{am}{m-n},\ 0\right)$, делящих отрезок AB в отношении $m : n$ внутренним и внешним образом (См. задачу 111).

Моделирование

Постановка задачи. Средствами среды программирования моделировать процесс построения г.м.т., выполняя сканирование экранной области для определения координат точек и проверки условий, полученных из математических соотношений.

План моделирования

Для переменной точки *C* из области сканирования вычислять длины отрезков *CA* и *CB* по формуле $\sqrt{(x-x_c)^2+(y-y_c)^2}$, подставляя вместо x и y координаты точек *A* и *B*.

Искомое г.м.т. – множество точек *C*, удовлетворяющих условию *CA* : *CB* = *m* : *n*.

Технология моделирования

1. Задать координаты xa, ya, xb, yb точек *A* и *B*, числа *m* и *n* в блоке констант.

2. Изобразить отрезок *AB*, разделенный на $m + n$ частей – процедура Segments.

3. В процедуре Apollo с параметрами t и eps (длительность задержки в миллисекундах и заданная точность), сканируя область экрана с использованием вложенных циклов с параметрами xc и yc, координатами переменной точки *C*:

находить расстояния от точки *C* до заданных точек *A* и *B* – локальные переменные CA и CB;

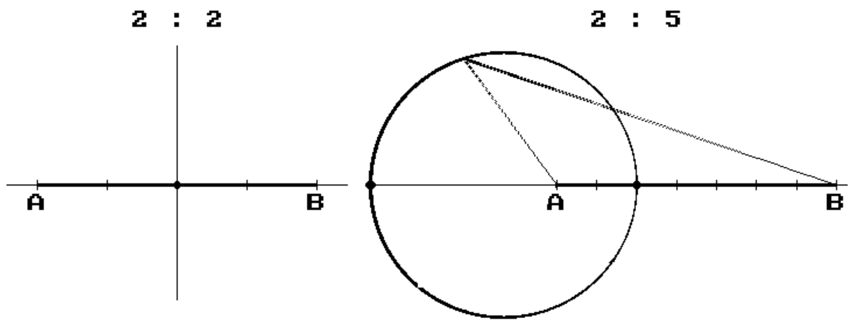
проверять условие в виде $|n\,CA - m\,CB| <$ eps;

изображать точки *C* (xc, yc), удовлетворяющие условию.

```
Uses  Crt, Graph;
Const m=2; n=5;             {числа, задающие отношение}
      xa=200; ya=240; xb=440; yb=240; {коорд. т. A и B}
Var   z,w: String;

Procedure Segments;
var Gd,Gm,i,x: Integer; step: Real;
begin
  Gd:=Vga; Gm:=VgaHi;
  InitGraph(Gd,Gm,'d:\tp\bgi_rus');
  SetBkColor(2); SetTextStyle(8,0,3);
  Str(m,z); Str(n,w); OutTextXY(290,20,z+' : '+w);
  OutTextXY(xa-8,ya,'A'); OutTextXY(xb-8,yb,'B');
  SetLineStyle(0,0,3); Line(xa,ya,xb,yb);
  SetLineStyle(0,0,1); Line(1,ya,640,yb);
  step:=(xb-xa)/(m+n);
  for i:=0 to m+n do  {деление отрезка на m+n частей}
  begin
    x:=Round(xa+i*step);
    Line(x,ya+3,x,ya-3)
  end
end; {Segments}
```



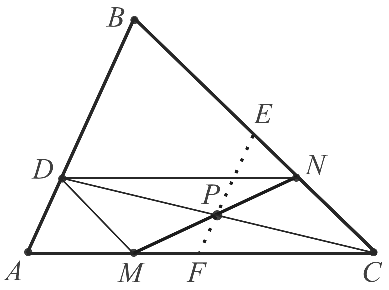
```
Procedure Apollo(t: Integer);
var CA,CB: Real; eps:Byte; xc,yc: LongInt;
 Procedure CA_CB;
 begin Line(xc,yc,xa,ya); Line(xc,yc,xb,yb) end;
begin
  if m=n
   then begin eps:=1; z:='Серединный перпендикуляр' end
   else begin eps:=3; z:='Окружность Аполлония' end;
  OutTextXY(140,435,z);
  OutTextXY(440,402,'Press Enter'); ReadLn;
  SetWriteMode(XorPut); SetPalette(7,48); {(7,16)}
  for xc:=0 to 640 do
  begin
   for yc:=80 to 400 do
   begin
     CA:=sqrt(sqr(xa-xc)+sqr(ya-yc));
     CB:=sqrt(sqr(xb-xc)+sqr(yb-yc));
     if Abs(n*CA-m*CB)<=eps
     then
     begin
       if yc=ya then FillEllipse(xc,yc,3,3)
                else PutPixel(xc,yc,14);
       CA_CB; Delay(t); CA_CB
     end
     else
     if GetPixel(xc,yc)<>15 then PutPixel(xc,yc,7);
   end; {for}
   OutTextXY(xc,400,Chr(195));
  end; {for}
  ReadLn; CloseGraph
end; {Apollo}

BEGIN
  Segments; Apollo(3000)
END.
```



Серединный перпендикуляр   Окружность Аполлония

143. ***Средняя линия***. Стороны AC и BC треугольника ABC делятся точками M и N в одном и том же отношении: $\frac{AM}{MC} = \frac{CN}{NB} = k$. Найти геометрическое место точек середин отрезков MN для всех положительных значений k.

Решение



Выберем на стороне AB точку D так, что $AD : DB = k$ и соединим ее с точками M и N.

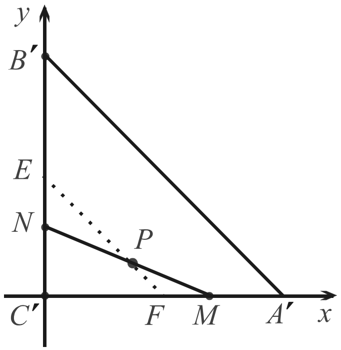
$DN \parallel AC$ и $DM \parallel BC$, поэтому $DNCM$ – параллелограмм.

Если P – середина MN, то она совпадает с серединой другой диагонали параллелограмма.

Значит, точка D принадлежит отрезку AB, P – середина DC, а искомое г.м.т. – средняя линия EF треугольника ABC, параллельная стороне AB, без ее концов.

(Метод координат).

Задача носит аффинный характер. Заменим данный треугольник его параллельной проекцией, подходящей для применения метода, например, равнобедренным прямоугольным треугольником.



Пусть $C'(0; 0)$, $A'(1; 0)$, $B'(0; 1)$.

$A'M = kMC'$, $kMC' + MC' = A'C'$, $MC' = \frac{1}{k+1}$, т.е. $M\left(\frac{1}{k+1}; 0\right)$. Тогда $N\left(0; \frac{k}{k+1}\right)$, $P\left(\frac{1}{2(k+1)}; \frac{k}{2(k+1)}\right)$.

Имеем: $y + x = ½$ (уравнение легко получить геометрически: сумма длин перпендикуляров, опущенных из точки P на оси координат, равна половине длины отрезка $A'C'$). Уравнение прямой, содержащей среднюю линию треугольника $A'B'C'$, параллельную $A'B'$, суть $y = -x + ½$, ч.т.д.

Легко убедиться, что любая точка средней линии принадлежит искомому г.м.т.

Моделирование

Постановка задачи. Средствами среды программирования моделировать процесс построения г.м.т., вычисляя координаты всех точек по математическим формулам.

План моделирования

1. Задавать значение коэффициента k.
2. Вычислять координаты текущих точек M и N сторон AC и BC по формулам: $x_m = \frac{x_a + kx_c}{1+k}$, $y_m = y_a$, $x_n = \frac{x_c + kx_b}{1+k}$, $y_n = \frac{y_c + ky_b}{1+k}$.
3. Находить координаты середин P всевозможных отрезков MN по формулам $x_p = \frac{x_m + x_n}{2}$, $y_p = \frac{y_m + y_n}{2}$.

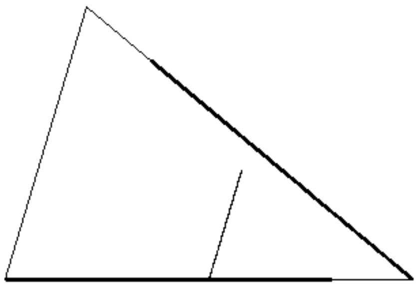
Искомое г.м.т. – множество точек P.

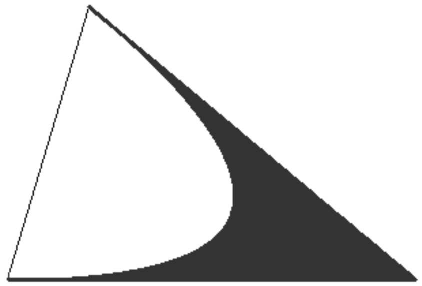
Технология моделирования

1. Изобразить данный треугольник (координаты вершин xa, ya, xb, yb, xc, yc – целочисленные константы).
2. В цикле:
   - вычислять значение коэффициента k;
   - находить координаты xm, ym, xn, yn точек M и N;
   - находить координаты xp, yp точек P;
   - изображать точки P – искомое г.м.т.

```
Uses  Crt,Graph;
Const xa=80;  xb=250; xc=580;
      ya=400; yb=100; yc=400;
Var   Gd,Gm,i: Integer; xm,ym,xn,yn,xp,yp,k: Real;

BEGIN
 Gd:=Vga; Gm:=VgaHi; InitGraph(Gd,Gm,'');
 SetBkColor(2); SetColor(10); SetFillStyle(1,10);
 Line(xa,ya,xb,yb); Line(xb,yb,xc,yc); Line(xc,yc,xa,ya);

 k:=0.001;
 Repeat
   xm:=(xa+k*xc)/(k+1);  ym:=ya;
   xn:=(xc+k*xb)/(k+1);  yn:=(yc+k*yb)/(k+1);
   Circle(Round(xm),Round(ym),1);
   Circle(Round(xn),Round(yn),1);
   { построение огибающей (см. 9.3)}
   {Line(Round(xm),Round(ym),Round(xn),Round(yn));}
```

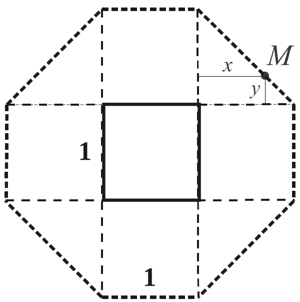
```
   xp:=0.5*(xm+xn); yp:=0.5*(ym+yn);
   PutPixel(Round(xp),Round(yp),14);
   k:=1.0001*k;
 Until k>xb-xa;

 WriteLn(#7,#7); ReadLn; CloseGraph
END.
```





144. 8 *отрезков*. Дан квадрат со стороной 1. Найти множество всех точек M, сумма расстояний от которых до сторон квадрата или их продолжений равна 4.

Решение



Для точек, лежащих внутри квадрата и на его сторонах, сумма указанных расстояний очевидно равна 2. Для точек вне квадрата: $(1 + x) + x + (1 + y) + y = 4$, т.е. $x + y = 1$ (см. рис.) или $x + (x + 1) + \quad + y + (1 - y) = 4$, т.е. $x = 1$ (либо $y = 1$).

Равенства выполняются для точек 2-х вертикальных, 2-х горизонтальных и 4-х наклонных отрезков, т.е. г.м.т. – 8 отрезков, длины которых составляют периметр 8-угольника и равны 1 и $\sqrt{2}$. Каждый его угол равен 135°, площадь равна 7.

Моделирование

Постановка задачи. Средствами среды программирования моделировать процесс построения г.м.т., выполняя сканирование экранной области для определения координат точек и проверки условий, полученных из математических соотношений.

План моделирования

1. Находить коэффициенты a, b, c уравнения $ax + by + c = 0$ прямой линии, если она проходит через две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \quad x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0.$$

$$a = y_1 - y_2, \quad b = x_2 - x_1, \quad c = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Для переменной точки (x_v, y_v):

2. Вычислять четыре расстояния до прямых, содержащих стороны квадрата по формуле:

$$d = \frac{|ax_v + by_v + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(y_1 - y_2)x_v + (x_2 - x_1)y_v + x_1y_2 - x_2y_1|}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2}}.$$

3. Находить сумму расстояний, учитывая, что знаменатели в последней формуле равны как длины сторон квадрата.

Искомое г.м.т. – множество точек, удовлетворяющих условию $(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) : m = 4m$, где m – длина стороны квадрата.

Технология моделирования

1. Изобразить квадрат, стороны которого не параллельны осям координат, используя цикл с параметром. dx, dy – приращения координат, (xc, yc) – центр квадрата; вершины – элементы целочисленных массивов-констант *x, y* типа Coord – процедура Square.

2. В процедуре Segments (параметры – коэффициент, задержка):

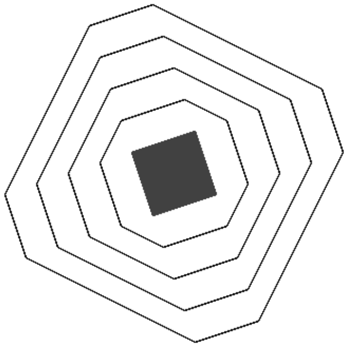
вычислить постоянную величину km^2 (переменная m);

сканировать область экрана, используя вложенные циклы с параметрами xv и yv (для вычисления суммы d четырех числителей использовать третий внутренний цикл с параметром i);

изобразить точки, удовлетворяющие условию |d – m| < eps, обращаясь к процедуре Segments в цикле (см. рис. ниже).

```
Uses  Crt, Graph;
Type  Coord = Array [1..5] of LongInt;
Const xc=320; yc=240; dx=30; dy=60; c=yellow;
      x: Coord=(xc-dx,xc-dy,xc+dx,xc+dy,xc-dx);
      y: Coord=(yc+dy,yc-dx,yc-dy,yc+dx,yc+dy);
Var   Gd,Gm,xv,yv,i,k: Integer;

Procedure Square;
begin
 Gd:=Vga; Gm:=VgaHi; InitGraph(Gd,Gm,'');
 SetColor(c); MoveTo(x[4],y[4]);
 for i:=1 to 4 do LineTo(x[i],y[i])        {квадрат}
end;
```

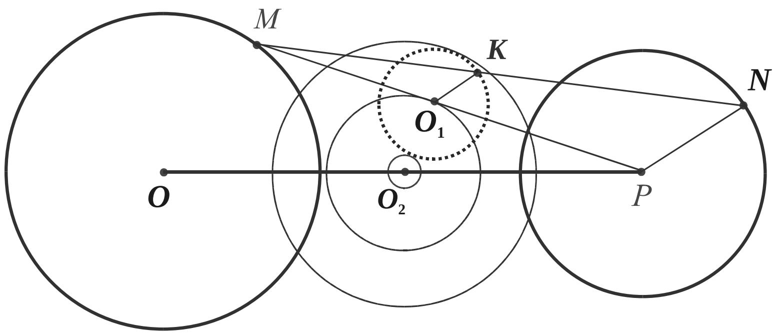
```
Procedure Segments(k,t: Integer);
var m,d: LongInt;
begin
 m:=k*(sqr(x[2]-x[1])+sqr(y[2]-y[1]));      { k*m*m }
 for xv:=90 to 550 do
  for yv:=40 to 440 do
  begin
   d:=0;
   for i:=1 to 4 do
     d:= d + Abs((y[i]-y[i+1])*xv+(x[i+1]-x[i])*yv
           + x[i]*y[i+1]-x[i+1]*y[i]);
   if d=m  { Abs(d-m)<=500 }
    then PutPixel(xv,yv,c)
    else if GetPixel(xv,yv)<>c
       then PutPixel(xv,yv,2);
   Delay(t)
 end;
 SetPalette(2,48)
end;

BEGIN
  Square;
  for k:=2 to 5 Segments(k,3);
  ReadLn; CloseGraph
END.
```



145. ***Кольцо.*** Даны две окружности. Найти г.м.т. середин всевозможных отрезков с концами на этих окружностях.

Решение

Пусть Окр (O, R_1), Окр (P, R_2) – данные окружности.



Зафиксируем точку M на Окр (O, R_1). Если точка N описывает Окр (P, R_2), то середины отрезков MN – точки K – описывают окружность с центром в точке O_1 – середине PM и радиусом ½ R_2.

При перемещении точки M по первой окружности точка O_1 опишет окружность с центром в точке O_2 – середине OP и радиусом ½ R_1. Рассматривая множество отрезков MN с концами на этих окружностях, получим: точки K описывают всевозможные окружности радиусом ½ R_2, а их центры, точки O_1, описывают окружности радиусом ½ R_1 с центром в точке O_2.

Значит, искомое г.м.т. – кольцо с центром в точке O_2, внутренний и внешний радиусы которого равны ½ ($R_1 - R_2$) и ½ ($R_1 + R_2$).

Моделирование

Постановка задачи. Средствами среды программирования моделировать процесс построения г.м.т., вычисляя координаты всех точек по математическим формулам.

План моделирования

1. Вычислять координаты текущих точек M и N окружностей Окр (O, R_1) и Окр (P, R_2) по формулам: $x_m = x_o + R_1 \cdot \cos\alpha$, $y_m = y_o + R_1 \cdot \sin\alpha$, $x_n = x_p + R_2 \cdot \cos\alpha$, $y_n = y_p + R_2 \cdot \sin\alpha$ для всех значений α от 1° до 360°.

2. Находить координаты середин всевозможных отрезков MN по формулам $\dfrac{x_m + x_n}{2}, \dfrac{y_m + y_n}{2}$.

Искомое г.м.т. – множество середин отрезков MN.

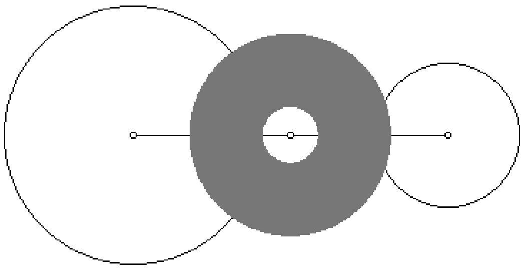
Технология моделирования

1. Изображать данные окружности – процедура Circles.
2. В процедуре Ring:

вычислять в цикле с параметром i и шагом в один дуговой градус вспомогательные величины (косинусы и синусы углов от 1° до 360° – элементы массивов c и s вещественного типа;

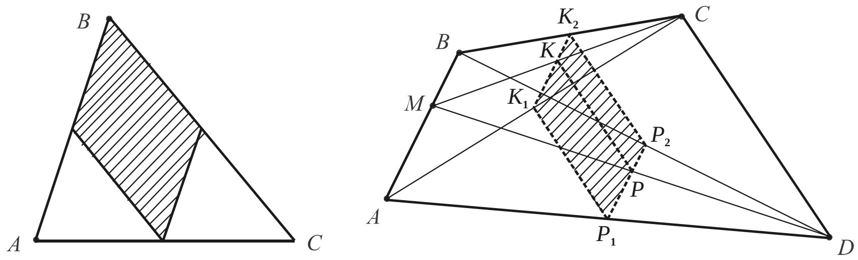
осуществлять обход двух окружностей, используя вложенные циклы с указанным выше шагом: во внешнем цикле с параметром xv вычислять координаты xm, ym точек M (фиксация точек первой окружности); во внутреннем с параметром yv – xn, yn точек N (перемещение по второй окружности при фиксированной точке на первой) изображать отрезки MN с некоторым шагом, используя подчиненную процедуру MN (задержка t – параметр процедуры Ring); изображать середины отрезков MN, элементы г.м.т., с помощью стандартной процедуры PutPixel.

```
Uses  Crt, Graph;
Const xo=200; yo=240; ro=110;  {первая окружность}
      xp=500; yp=240; rp= 70;  {вторая окружность}
Var   Gd,Gm,i,j: Integer;
      xm,ym,xn,yn: Real;

Procedure Circles;
begin
  Gd:=Vga; Gm:=VgaHi; InitGraph(Gd,Gm,'');
  SetBkColor(2); SetColor(10);
  Circle(xo,yo,ro); Circle(xp,yp,rp); {окружности}
  Line(xo,yo,xp,yp);       {линия центров, центры}
  FillEllipse(xo,yo,2,2); FillEllipse(xp,yp,2,2);
  FillEllipse((xo+xp) div 2,(yo+yp) div 2, 2, 2);
  OutTextXY(300,440,'Press Enter'); ReadLn

end;

Procedure Ring(t: Word);
const d: Real=pi/180; q:LongInt=0;
var c,s: Array [1..360] of Real;
Procedure MN;
 begin Line(Round(xn),Round(yn),Round(xm),Round(ym)) end;
begin
  SetWriteMode(XorPut); SetColor(14); SetPalette(10,16);
  {вычисление синусов и косинусов}
  for i:=1 to 360 do
  begin c[i]:=cos(i*d); s[i]:=sin(i*d) end;
  for i:=1 to 360 do
  begin
    xm:=xo+ro*c[i]; ym:=yo+ro*s[i];
    for j:=1 to 360 do
    begin
      xn:=xp+rp*c[j]; yn:=yp+rp*s[j];
      if i mod 10=0 then
      if j mod 5=0 then begin MN; Delay(t); MN end;
      {if i mod 1=0 then if j mod 5=0 then}
      PutPixel(Round(0.5*(xm+xn)),Round(0.5*(ym+yn)),14)
    end
  end;
  ReadLn;
  CloseGraph
end;

BEGIN
  Circles;
  Ring(1000)
END.
```



146. ***Параллелограмм.*** Найти геометрическое место точек середин всевозможных отрезков, концы которых расположены а) на сторонах AB и BC треугольника ABC; б) на противолежащих сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$.

Решение



Искомое г.м.т. в обоих случаях – параллелограмм. Остановимся подробнее на второй задаче.

Зафиксируем точку M на стороне AB. Середины всевозможных отрезков MN, где точка N пробегает сторону CD, опишут среднюю линию KP треугольника MCD.

Если точка M совпадает с A или B, получим средние линии K_1P_1 и K_2P_2 треугольников ACD и BCD. Это крайние случаи. Значит, при перемещении точки M по стороне AB множество средних линий заполнит параллелограмм $K_1P_1P_2K_2$.

Моделирование

Постановка задачи. Средствами среды программирования моделировать процесс построения г.м.т., вычисляя координаты всех точек по математическим формулам.

План моделирования

Находить координаты середин всевозможных отрезков MN по формулам для координат середины отрезка.

Технология моделирования

1. Изобразить четырехугольник с координатами вершин (xa, ya), (xb, yb), (xc, yc), (xd, yd) и его диагонали – процедура ABCD.

2. В процедуре Paral, параметры которой шаг и задержка (переменные step и t):

осуществлять перебор пар точек отрезков *AB* и *CD*, используя вложенные циклы и производящие параметры (переменные t1, t2). Во внешнем цикле вычислять координаты xm, ym точек *M* (фиксация точек стороны *AB*); во внутреннем – xn, yn точек *N* (перемещение по стороне *CD*);

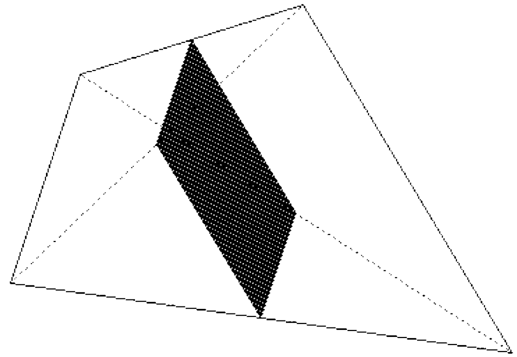
изображать отрезки *MN* с некоторым шагом – подчиненная процедура MN;

изображать середины отрезков *MN*, элементы г.м.т., с помощью процедуры PutPixel.

```
Uses  Crt,Graph;
    { д а н н ы е: координаты вершин }
Const xa=80;  xb=200; xc=500; xd=550;
      ya=320; yb=120; yc=50;  yd=440;

Procedure ABCD;
var Gd,Gm: Integer;
begin
  Gd:=Vga; Gm:=VgaHi; InitGraph(Gd,Gm,'');
  SetBkColor(2); SetColor(15);
  Line(xb,yb,xc,yc); Line(xa,ya,xd,yd);   {BC и AD}
  SetLineStyle(0,0,3);
  Line(xa,ya,xb,yb); Line(xc,yc,xd,yd);   {AB и CD}
  SetLineStyle(1,2,1);
  Line(xa,ya,xc,yc); Line(xb,yb,xd,yd);   {AC и BD}
  OutTextXY(300,440,'Press Enter'); ReadLn
end;

Procedure Paral(step: Extended; t: Integer);
var xm,ym,xn,yn,t1,t2: Extended;

 Procedure MN;
 begin
   Line(Round(xn),Round(yn),Round(xm),Round(ym))
 end;

begin
 SetWriteMode(XorPut);
 SetColor(14); SetPalette(15,16);
 t1:=0;
 Repeat
  xm:=xa+t1*(xb-xa);
  ym:=ya+t1*(yb-ya);
  t2:=0;
  Repeat
   xn:=xc+t2*(xd-xc);
   yn:=yc+t2*(yd-yc);
```

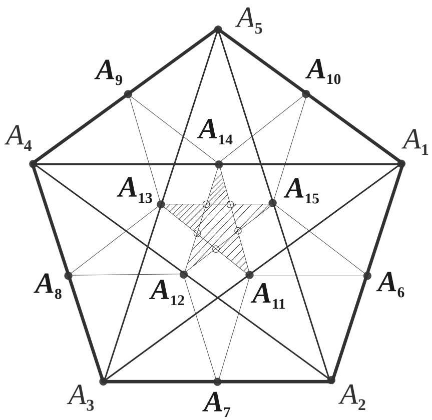


```
   PutPixel(Round(0.5*(xm+xn)),Round(0.5*(ym+yn)),14);
   if Round(ym) mod 10=0 then
   begin
     MN;
     Delay(t);
     MN
   end;
   t2:=t2+step;
  Until t2>1;
  t1:=t1+step;
 Until t1>1;
 ReadLn;
 CloseGraph
end;

BEGIN
  ABCD;

  Paral(0.01, 1000)
END.
```



147. ***Пятиконечная звезда***. Найти геометрическое место точек внутри правильного пятиугольника, каждая из которых является серединой не менее чем трех отрезков с концами на различных сторонах этого пятиугольника.

Решение



Рассмотрим правильный пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Каждая его сторона с одной из смежных сторон и диагональю образует треугольник (A_1A_2 со стороной A_1A_5 и диагональю A_5A_2), а с двумя смежными сторонами и диагональю – четырехугольник (A_1A_2 со сторонами A_1A_5, A_2A_3 и диагональю A_5A_3).

Используем результат предыдущей задачи. Ромбы-г.м.т. внутри указанных четырехугольников пересекаются. Искомое г.м.т. содержит точки, принадлежащие по крайней мере трем таким ромбам, которые заполняют пятиконечную звезду (выделена на рисунке). При этом граница звезды, за исключением 5 точек, обозначенных кружками (вершин малого правильного пятиугольника), не входит в г.м.т.

Моделирование

Постановка задачи. Средствами среды программирования моделировать процесс построения г.м.т., вычисляя координаты всех точек по математическим формулам.

План моделирования

1. Найти координаты вершин правильного пятиугольника по формулам $x_i = x_0 + r\cos\left(\frac{2\pi}{5}i - \frac{\pi}{2}\right) = x_0 + r\sin\frac{2\pi\cdot i}{5}$,

$$y_i = y_0 + r\sin\left(\frac{2\pi}{5}i - \frac{\pi}{2}\right) = y_0 - r\cos\frac{2\pi\cdot i}{5},\quad i = 1, \ldots, 7$$

(для удобства дальнейших вычислений в циклах будем считать, что $x_6 = x_1$, $y_6 = y_1$, $x_7 = x_2$, $y_7 = y_2$).

2. Применяя результат предыдущей задачи, имитировать построение искомого г.м.т. как пересечения пяти параллелограммов (ромбов), каждый из которых – г.м.т. середин всевозможных отрезков, концы которых расположены на противолежащих сторонах соответствующих равнобедренных трапеций внутри правильного пятиугольника.

Технология моделирования

1. Вычислить координаты вершин (элементы массивов x и y вещественного типа с индексами от 1 до 7) и изобразить правильный пятиугольник и его диагонали – процедура Pentagon (центр, радиус описанной окружности и центральный угол заданы в ней константами).

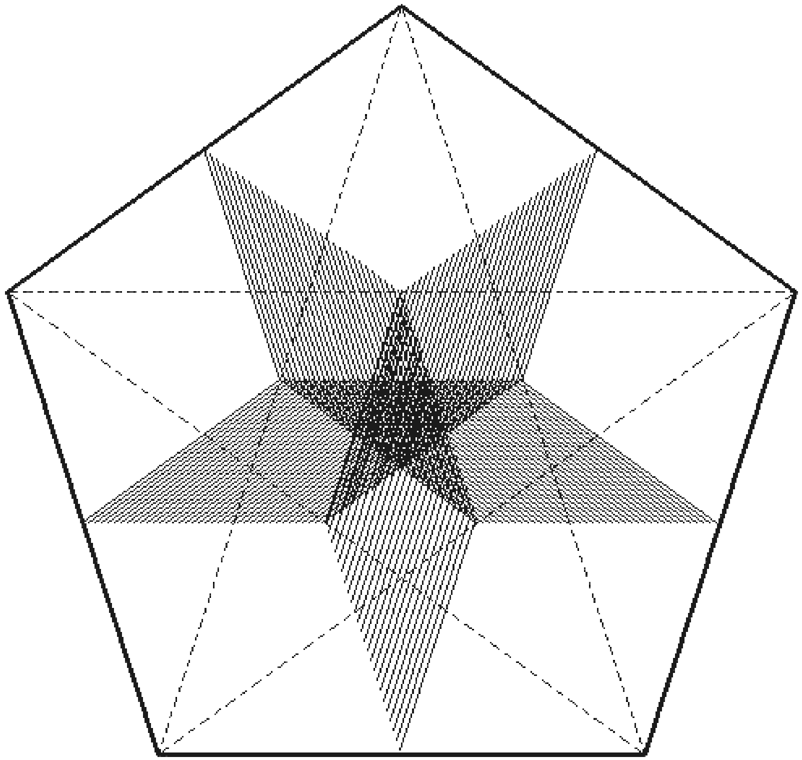
2. В процедуре InterSection (переменные step (шаг), k (коэффициент), t (задержка) – параметры):

а) создать вложенную процедуру Rhomb, параметры которой a, b, c, d являются индексами координат x[i], y[i] вершин равнобедренных трапеций. Координаты служат параметрами стандартной процедуры Line для построения наклонных отрезков, заполняющих ромбы. Величина step влияет на расстояние между точками, а коэффициент k задает расстояние между рядами точек, которые имитируют параллельные прямые;

б) вызвать процедуру Rhomb 5 раз с требуемыми параметрами.

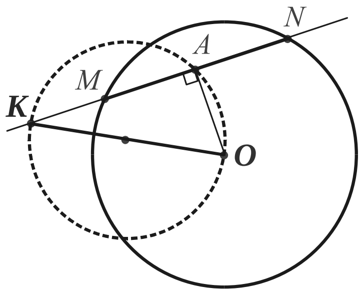

```
Uses Crt, Graph;
Var  x,y: Array [1..7] of Extended;


Procedure Pentagon; { r=700,   шаг 0.0005     }
const x0=320; y0=262; r=260; { центр и радиус }
      degree=2*pi/5;         {центральный угол}
var   Gd,Gm,i: Integer;
begin
  Gd:=Vga; Gm:=VgaHi;
  InitGraph(Gd,Gm,'');
  SetBkColor(15);
  SetColor(12);
  SetLineStyle(0,0,3);
  MoveTo(x0,y0-r);
  for i:=1 to 7 do
  begin
    x[i]:=x0+r*sin(i*degree);
    y[i]:=y0-r*cos(i*degree);
    LineTo(Round(x[i]),Round(y[i]))
  end;
  SetLineStyle(2,1,1);
  for i:=1 to 5 do    { диагонали }
  Line(Round(x[i]),Round(y[i]),
      Round(x[i+2]),Round(y[i+2]))
end; {Pentagon}

Procedure InterSection (step:Extended; k,t:Byte);

 Procedure Rhomb (a,b,c,d: Byte);
 var xm,ym,xn,yn,t1,t2: Extended;
 begin
  t1:=0;
  Repeat
    xm:=x[a]+t1*(x[b]-x[a]);
    ym:=y[a]+t1*(y[b]-y[a]);
    t2:=0;
    Repeat
      xn:=x[c]+t2*(x[d]-x[c]);
      yn:=y[c]+t2*(y[d]-y[c]);
      PutPixel(Round(0.5*(xm+xn)), Round(0.5*(ym+yn)),12);
      t2:=t2+step;
      Delay(t);
    Until t2>1;
    t1:=t1+k*step;
  Until t1>1;
 end; {Rhomb}
```

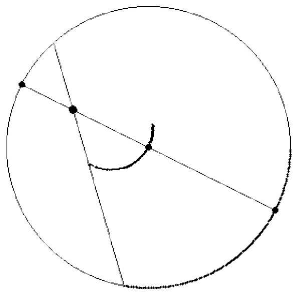
```
begin
  Rhomb (2, 1, 3, 4);
  Rhomb (3, 2, 4, 5);
  Rhomb (2, 3, 1, 5);
  Rhomb (5, 1, 4, 3);
  Rhomb (5, 4, 1, 2);
  ReadLn; CloseGraph
end; {InterSection}

BEGIN
  Pentagon;   { step,  k, t }
  InterSection(0.001, 33, 10)
END.
```



148. ***Окружность***. Найти геометрическое место точек середин хорд данной окружности, если прямые, содержащие хорды, проходят через данную точку.

Решение





Пусть прямая, проходящая через данную точку K, пересекает данную окружность с центром O в точках M и N. Если A – середина хорды MN, то $OA \perp MN$ (задача-теорема 1).

Так как все углы OAK прямые, то по замечательному свойству окружности искомое г.м.т. – окружность с диаметром OK.

Моделирование

Постановка задачи. Средствами среды программирования моделировать процесс построения г.м.т., вычисляя координаты всех точек по математическим формулам.

План моделирования

1. Найти координаты концов диаметра – точек C и D как точек пересечения прямой OK с окружностью (не обязательно).

$$\begin{cases} y = \dfrac{y_k - y_o}{x_k - x_o}(x - x_o) + y_o, \\ (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r_o^{\ 2}. \end{cases} \qquad (x - x_o)^2 + (x - x_o)^2\left(\dfrac{y_k - y_o}{x_k - x_o}\right)^2 = r^2.$$

Если $k = \dfrac{y_k - y_o}{x_k - x_o}$, то $(x - x_o)^2\,(k^2 + 1) = r^2$, $x_{C,D} = x_o \pm \dfrac{r}{\sqrt{k^2 + 1}}$,

$y_{C,D} = k\,(x_{C,D} - x_k) + y_k$.

2. Вычислять координаты переменных точек M данной окружности с помощью тригонометрических функций синус и косинус.

3. Вычислять координаты точек *N* окружности как точек пересечения прямых *MK* с данной окружностью радиуса *r* (см. 59).

4. Находить координаты середин хорд *MN*, применяя формулы для координат середины отрезка.

Искомое г.м.т. – множество середин отрезков *MN*.

Технология моделирования

1. Ввести данные как целочисленные константы: xo, yo, r (окружность), xk, yk (точка *K*), изобразить окружность и точку – процедура Data.

2. Найти координаты xc, yc, xd, yd концов диаметра *CD* – процедура Coords_C_D.

3. В основной процедуре Circles в цикле с выбранным шагом выполнить обход данной окружности (параметр *t* – длительность задержки). При этом:

вычислять координаты xm, ym точек *M* и изображать их;

вычислять координаты xn, yn точек *N* – вложенная процедура Coords_N (*k, l, a, b, c, d* – промежуточные переменные вещественного типа);

изображать хорду *MN* – вложенная процедура *MN* (используется стандартная процедура SetWriteMode с параметром XorPut);

рисовать окружность, диаметр, точки *O*, *K*, *C*, *D*;

изображать середины хорд *MN*, координаты которых служат параметрами стандартной процедуры PutPixel.

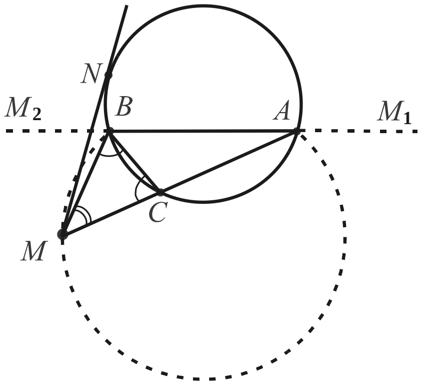
```
Uses  Crt,Graph;
Const xo=320; yo=240; r=230; {данная окружность   }
      xk=170; yk=180;        {данная точка: xk<>xo}
Var   xc,yc,xd,yd,xm,ym,xn,yn,k,d,i: Real;

Procedure Data;
var Gd,Gm: Integer;
begin
  Gd:=Vga; Gm:=VgaHi; InitGraph(Gd,Gm,'');
  SetColor(10); Circle(xo,yo,r);
  FillEllipse(xo,yo,3,3); FillEllipse(xk,yk,3,3);
  OutTextXY(40,440,'Press Enter'); ReadLn
end;

Procedure Coords_C_D;
begin
  k:=(yk-yo)/(xk-xo);
  d:=r/Sqrt(1+k*k);
```



```
  xc:=xo-d;  yc:=k*(xc-xk)+yk;
  xd:=xo+d;  yd:=k*(xd-xk)+yk;     {диаметр CD}
  Line(Round(xc),Round(yc),Round(xd),Round(yd));
  FillEllipse(Round(xc),Round(yc),4,4);
  FillEllipse(Round(xd),Round(yd),4,4);
end;

Procedure Circles(t: Integer);
const degree=pi/180;
 Procedure MN;
 begin
   Line(Round(xm),Round(ym),Round(xn),Round(yn))
 end;
 Procedure Coords_N;
 const eps=0.1;
 var L,a,b,c: Double;
 begin
   k:=(ym-yk)/(xm-xk);
   if Abs(xm-xk)>eps then
   begin
     L:=yk-k*xk;
     a:=k*k+1; b:=xo+k*(yo-L);
     c:=r*r-xo*xo-yo*yo+L*(2*yo-L);
     d:=sqrt(b*b+a*c);
     if xm>xk then d:=-d;
     xn:=(b+d)/a;  yn:=k*xn+L
   end;
 end; {Coords_N}
begin
  SetWriteMode(XorPut); SetPalette(10,2); {(10,48)}
  i:=0;
  Repeat
    xm:=xo+r*cos(i*degree);
    ym:=yo+r*sin(i*degree);
    SetColor(2); Circle(Round(xm),Round(ym),2);
    Coords_N;
    SetColor(14);
    MN; Delay(t); MN;
    PutPixel(Round((xm+xn)/2),Round((ym+yn)/2),14);
    i:=i+0.5
  Until KeyPressed;
  FillEllipse((xo+xk)div 2,(yo+yk)div 2,2,2);
  MN;
  ReadLn; ReadLn; CloseGraph
end; {Circles}

BEGIN
  Data; Coords_C_D; Circles(5000)
END.
```

149. <u>Дуга и лучи</u>. На окружности даны точки A и B. Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых $MA \cdot MB = MN^2$ (MN – касательная к окружности в точке N).

<u>Решение</u>



Из задачи-теоремы 24 следует, что г.м.т. удовлетворяют точки лучей AM_1 и BM_2.

Если луч MA пересекает окружность в точке C, то по условию $MA \cdot MB = MN^2$, а по задаче-теореме $MA \cdot MC = MN^2$. Отсюда $MB = MC$, т.е. треугольник MBC – равнобедренный и $\angle MCB = \angle MBC$.

Имеем: $\angle BMC = 180° - 2\angle MCB = 180° - 2(180° - \angle ACB) = 2\angle ACB - 180°$.

Полученная разность постоянна. Значит, г.м.т. удовлетворяют также точки, которые служат вершинами равных углов, опирающихся на отрезок AB заданной длины, т.е. точки дуги (без ее концов) другой окружности, проходящей через точки A, B, M.

Таким образом, искомое г.м.т. – объединение лучей AM_1, BM_2 и дуги AMB, расположенной вне данной окружности.

<u>Моделирование</u>

<u>Постановка задачи</u>. Средствами среды программирования моделировать процесс построения г.м.т., выполняя сканирование экранной области для определения координат точек и проверки условий, полученных из математических соотношений.

<u>План моделирования</u>

1. Задать координатами две точки A и B данной окружности с центром O и радиусом r_o: $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r_o^2$.

Пусть $y_a = y_b = y_o + r_o h$. Тогда $(x - x_o)^2 = r_o^2 - (r_o h)^2$. Отсюда $x = \pm r_o\sqrt{1-h^2} + x_o$, т.е. $x_a = x_o + r_o\sqrt{1-h^2}$, $x_b = x_o - r_o\sqrt{1-h^2}$.

Для текущей точки $M(x_m, y_m)$, сканируя экранную область:

2. Вычислять координаты точек касания N (см. задачу 136).

3. Находить длины отрезков MA, MB и величину MN^2, применяя формулу для вычисления длины отрезка.

Искомое г.м.т. – множество точек M, удовлетворяющих условию $MA \cdot MB = MN^2$.

<u>Технология моделирования</u>

1. Ввести данные xo, yo, ro в блоке констант.
2. Изобразить данную окружность – процедура Init.
3. Найти координаты xa, ya, xb, yb точек окружности A и B (используя параметр h), изобразить окружность и эти точки – процедура Coords_A_B.
4. В процедуре Omega (параметры задержка и точность), сканируя экранную область для переменной точки M с координатами xm, ym:

находить координаты xn, yn точек N – вложенная процедура Coords_N (k, l, a, b, c, d – промежуточные переменные вещественного типа, xp, yp, rp – координаты центра и радиус вспомогательной окружности);

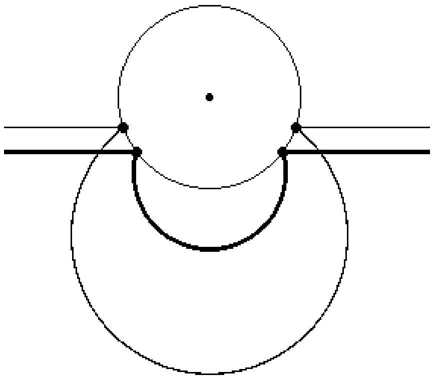
вычислять величины MA, MB и MN^2;

изображать точки, удовлетворяющие условию $MA \cdot MB = MN^2$.

5. Вызвать в теле программы процедуры Coords_A_B и Omega с различными параметрами.

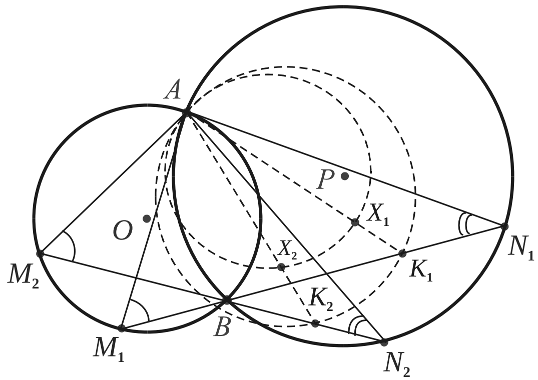
```
Uses  Crt, Graph;
Const xo=320; yo=120; ro=100;
Var   xa,ya,xb,yb,xn,yn: Extended;

Procedure Init;
var Gd,Gm: Integer;
begin
  Gd:=Vga; Gm:=VgaHi; InitGraph(Gd,Gm,'');
  SetColor(10); SetBkColor(2);
  Circle(xo,yo,ro);
  SetFillStyle(1,10); FillEllipse(xo,yo,2,2);
  SetWriteMode(XorPut)
end;

Procedure Coords_A_B (h: Extended);
var dx: Extended;
begin
  ya:=yo+ro*h; yb:=ya;
  dx:=ro*sqrt(1-sqr(h));
  xa:=xo+dx; xb:=xo-dx;
```

```
  FillEllipse(Round(xa),Round(ya),3,3);
  FillEllipse(Round(xb),Round(ya),3,3);
  OutTextXY(280,460,'Press Enter'); ReadLn;
  Write(#7); SetPalette(10,48)
end;

Procedure Omega(t: Byte; eps: Extended);
var MA,MB,MN_2: Extended;
    xm,ym: LongInt;
 Procedure Coords_N;
 var xp,yp,rp,k,l,a,b,c,d: Extended;
 begin
   xp:=0.5*(xo+xm); yp:=0.5*(yo+ym);
   rp:=sqr(xo-xp)+sqr(yo-yp);
   k:=(xp-xo)/(yo-yp);
   L:=0.5*(rp-ro*ro-xp*xp-yp*yp+xo*xo+yo*yo)/(yo-yp);
   a:=k*k+1; b:=xo+k*(yo-L);
   c:=ro*ro-xo*xo-yo*yo+L*(2*yo-L);
   d:=sqrt(b*b+a*c);
   xn:=(b-d)/a; yn:=k*xn+L
 end; {Coords_N}
begin
 for xm:=60 to 580 do
  for ym:=yo+1 to 440 do
  begin
   if sqr(xm-xo)+sqr(ym-yo)>sqr(ro) then
   begin
    Coords_N;
    MA:=sqrt(sqr(xa-xm)+sqr(ya-ym));
    MB:=sqrt(sqr(xb-xm)+sqr(yb-ym));
    MN_2:=sqr(xn-xm)+sqr(yn-ym);
    if Abs(MA*MB-MN_2)<eps
    then PutPixel(xm,ym,14
    else
    if GetPixel(xm,ym)<>14
    then PutPixel(xm,ym,10)
   end; {if}
   Delay(t)
  end; {for}
end; {Omega}

BEGIN
  Init;
  Coords_A_B(0.33);
  Omega(5,50);
  Coords_A_B(0.6);
  Omega(5,150);
  ReadLn; CloseGraph
END.
```



150. ***Окружности***. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Через точку B проведена произвольная прямая, пересекающая одну окружность в точке M, а другую – в точке N, отличных от общих точек этих окружностей. Найти геометрическое место центров окружностей, описанных около AMN.

Решение



Заметим, что углы $\Delta\, AMN$ имеют постоянные величины. Действительно, углы AMN и ANM вписанные и опираются на одну и ту же дугу AB соответствующей окружности.

Отсюда следует, что все треугольники AMN подобны. Кроме того, углы AKN будут сохранять постоянное значение, если K – точка, делящая MN в одном и том же отношении. Следовательно, точка K опишет окружность.

Точка X, делящая AK в одном и том же отношении, будет описывать гомотетичную ей окружность. Центр гомотетии – точка A, коэффициент – AX/AK.

Центр описанной окружности треугольника – точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к его сторонам, поэтому искомое г.м.т. также окружность.

Моделирование

Постановка задачи. Средствами среды программирования моделировать процесс построения г.м.т., вычисляя координаты всех точек по математическим формулам.

План моделирования

1. Найти координаты точек A и B (см. задачу 136).
2. Вычислять координаты точек N окружности Окр (P, rp) с помощью тригонометрических функций синус и косинус.
3. Вычислять координаты точек M окружности Окр (O, ro) как точек пересечения прямых NB с ней (см. задачу 136).

4. Находить координаты точек C – центров описанных окружностей треугольников AMN (см. задачу 137).

5. Вычислять косинус угла A по формуле $\cos A = \dfrac{\overline{AM} \cdot \overline{AN}}{\left|\overline{AM}\right| \cdot \left|\overline{AN}\right|}$.

6. Находить координаты середин сторон AN и AM, применяя формулы для координат середины отрезка.

Искомое г.м.т. – множество центров С.

Технология моделирования

1. Ввести данные путем присваивания значений переменным xo, yo, ro, xp, yp, rp, изобразить окружности – процедура Circles.
2. Найти координаты xa, ya, xb, yb точек пересечения A и B, изобразить точки – процедура Coords_A_B.
3. В процедуре Centers в цикле с шагом в один дуговой градус, пока не будет нажата любая клавиша:

вычислять координаты xn, yn точек N;

вычислять координаты xm, ym точек M – вложенная процедура Coords_M (k, l, a, b, c, d – промежуточные переменные вещественного типа);

изображать перемещение точек M, N по окружностям и треугольники AMN (для рисования и удаления последних применяется процедура SetWriteMode) – вложенная процедура AMN;

вычислять координаты xc, yc точек C, центров описанных окружностей, изображать их – вложенная процедура C_e_n_t_e_r (параметр t этой процедуры – длительность задержки для регулирования скорости вывода движущихся объектов);

находить косинус угла A (величину, которая должна быть постоянной) для наблюдения за погрешностью вычислений – вложенная процедура Cos_A;

вычислять координаты середин сторон AN и AM, описывающие окружности, изображать эти точки.

```
Uses  Crt, Graph;
     {д а н н ы е: пересекающиеся окружности}
Const xo=135; yo=270; ro=130;
      xp=415; yp=230; rp=220;
Var   Gd,Gm,x,y: Integer;
      xa,ya,xb,yb,xc,yc,xm,ym,xn,yn,
      xv,yv,xw,yw,k,L,a,b,c,d,i: Real;
```

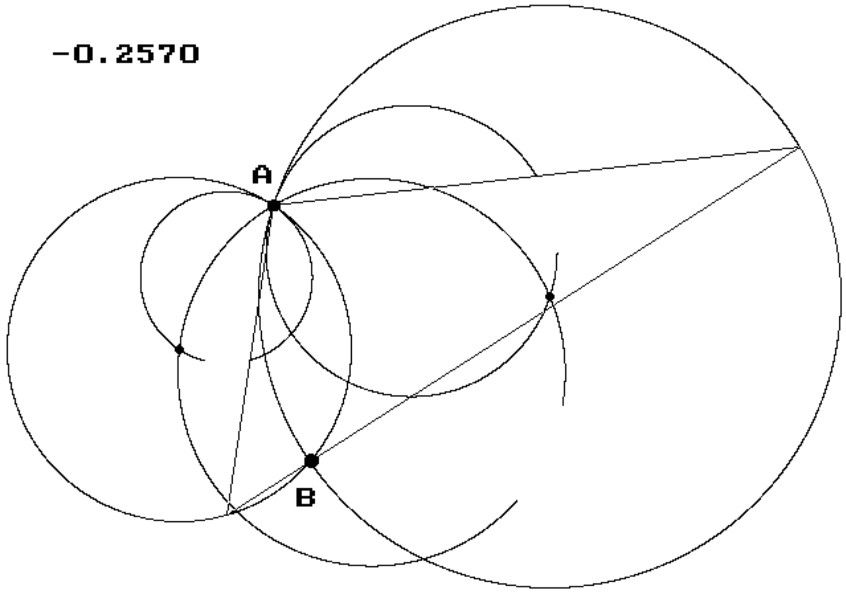


```
Procedure Circles;
begin
  Gd:=Vga; Gm:=VgaHi; InitGraph(Gd,Gm,'');
  SetColor(10);
  Circle(xo,yo,ro); FillEllipse(xo,yo,3,3);
  Circle(xp,yp,rp); FillEllipse(xp,yp,3,3);
  SetTextStyle(DefaultFont,HorizDir,2);
  OutTextXY(40,440,'Press Enter'); ReadLn
end; {Circles}

{вычисление координат точек пересечения окружностей}
Procedure Coords_A_B;
begin
  k:=(xp-xo)/(yo-yp);
  L:=(rp*rp-ro*ro+xo*xo+yo*yo-xp*xp-yp*yp)/(yo-yp)/2;
  a:=Sqr(k)+1; b:=xo+k*(yo-L);
  c:=ro*ro-xo*xo-yo*yo+L*(2*yo-L);
  d:=Sqrt(b*b+a*c);
  xa:=(b-d)/a; ya:=k*xa+L;
  xb:=(b+d)/a; yb:=k*xb+L;
  FillEllipse(Round(xa),Round(ya),4,4);
  FillEllipse(Round(xb),Round(yb),4,4);
  OutTextXY(Round(xa)-15,Round(ya)-30,'A');
  OutTextXY(Round(xb)-10,Round(yb)+20,'B');
  ReadLn
end; {Coords_A_B}

Procedure Centers(t: Word);
const degree=pi/180;
      del=#219+#219+#219;
var   z: String[7];
 {вычисление координат точки M второй окружности}

 Procedure Coords_M;
 const eps=0.001;
 begin
   k:=(yb-yn)/(xb-xn);
   if Abs(xb-xn)>eps then
   begin
     L:=yb-k*xb;
     a:=Sqr(k)+1;
     b:=xo+k*(yo-L);
     c:=ro*ro-xo*xo-yo*yo+L*(2*yo-L);
     d:=Sqrt(b*b+a*c);
     if xm>xb then d:=-d;
     xm:=(b-d)/a;
     ym:=k*xm+L
   end
 end; {Coords_M}
```

```
 Procedure AMN;         {текущий треугольник AMN}
 begin
   Line(Round(xn),Round(yn),Round(xm),Round(ym));
   Line(Round(xm),Round(ym),Round(xa),Round(ya));
   Line(Round(xa),Round(ya),Round(xn),Round(yn));
 end; {AMN}

{вычисление координат центра описанной окружности}
 Procedure Center;
 begin
    k:=(xn-xm)*(ym-ya)-(xm-xa)*(yn-ym);
   {k=0, если точки M и N совпадают с точкой A}
   xv:=(xa+xm)/2; yv:=(ya+ym)/2;
   xw:=(xn+xm)/2; yw:=(yn+ym)/2;
   k:=((xw-xv)*(xn-xm)-(yn-ym)*(yv-yw))/k;
   xc:=xv+k*(ym-ya); yc:=yv+k*(xa-xm);
   PutPixel(Round(xc),Round(yc),14)
 end; {Center}

 Procedure Cos_A; {вычисление косинуса угла A}
 var AM,AN,scalar,ratio: Real;
 begin
   AM:=Sqrt(sqr(xm-xa)+sqr(ym-ya));
   AN:=Sqrt(sqr(xn-xa)+sqr(yn-ya));
   scalar:=(xm-xa)*(xn-xa)+(ym-ya)*(yn-ya);
   ratio:=scalar/(AM*AN);
   Str(ratio:1:4, z);
   SetColor(14); OutTextXY(40,40, z);
 end; {Cos_A}

begin {Centers}
  SetWriteMode(XorPut);
  SetPalette(10,48);  {(10,2), (10,16)}

  i:=0;
  Repeat          {   обход большей окружности   }
   {вычисление координат точки N первой окружности}
    xn:=xp+rp*cos(i*degree);
    yn:=yp+rp*sin(i*degree);
    PutPixel(Round(xn),Round(yn),15);
    Coords_M;
    PutPixel(Round(xm),Round(ym),2);
    {изображение треуг. и центра описанной окр. }
    Center;
    Cos_A;
    AMN; Delay(t); AMN;  { AMN;}
    {середины сторон треуг. описывают окружности}
    PutPixel(Round((xa+xn)/2),Round((ya+yn)/2),5);
    PutPixel(Round((xa+xm)/2),Round((ya+ym)/2),5);
```



```
    SetColor(0); OutTextXY(40,40,del+del+del);
    i:=i+0.333  {i:=i+5}
  Until KeyPressed;
  ReadLn; CloseGraph
end; {Centers}

BEGIN
  Circles;
  Coords_A_B;
  Centers(3000)
END.
```



Примечания:

- Данные представлены как константы с целью сокращения текстов программ. Данные можно вводить в программу различными способами: присваиванием значений, с помощью оператора ввода, с помощью датчика случайных чисел, чтением из внешних файлов.
- SetWriteMode(XorPut) устанавливает специальный режим записи для рисования линий, что позволяет при повторном обращении к одной из стандартных процедур рисования DrawPoly, Line, LineTo, LineRel, Rectangle (или процедуре, использующей их) и после установленной для демонстрации задержки стирать уже нарисованные линии.

9.3. Огибающие и траектории

Интерактивная компьютерная графика и "геометрические эффекты" привлекают математиков, исследователей, программистов. Рациональность и эстетичность здесь нередко сочетаются с магической непредсказуемостью и сложностью.

Айвэн Сазерленд – пионер применения компьютеров для построения и обработки изображений – заметил как-то о своем излюбленном предмете: "Дисплей представляется мне окном в Алисину страну чудес, где программист может изображать либо объекты, описываемые хорошо известными законами природы, либо чисто воображаемые объекты, подчиняющиеся законам, записанным в программе. С помощью дисплея я сажал самолет на палубу движущегося авианосца, следил за движением элементарной частицы в потенциальной яме, летал в ракете с околосветной скоростью и наблюдал за таинствами внутренней жизни вычислительной машины".

Машинная графика сегодня – привычный инструмент, применяемый от стандартной формы связи с компьютером до дизайна веб-страниц и создания зрительных эффектов в компьютерных программах, телерекламы, фильмов и т.д.

Специфические кривые построимы в полярной системе координат. Они могут быть спиралями, розами, самопересекающимися. Много геометрии в алгоритмах построения правильных паркетов на плоскости. Непредсказуемы фрактальные "обои для ума" и развитие конфигурации в моделирующей игре "Жизнь" [30].

В заключительном разделе, продолжая моделирование г.м.т. и "добавляя кинематики", рассмотрим огибающие некоторых семейств линий, а также вращения и траектории точек. Соответствующий теоретический материал и задачи с решениями замечательно изложены в книгах [21] – [23].

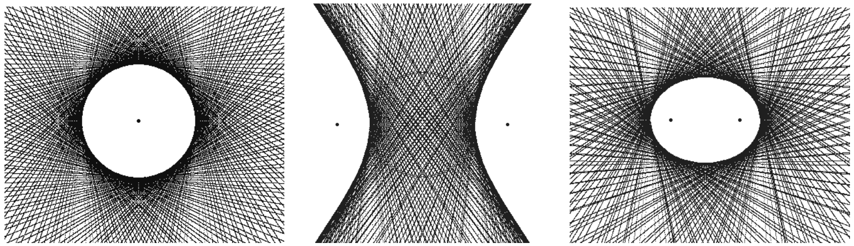
Огибающая семейства линий на плоскости – линия, которая в каждой своей точке касается одной линии семейства (множества).

Например, для семейства окружностей одинакового радиуса с центрами на прямой огибающая состоит из двух параллельных прямых. Теория огибающих используется в математике, в физике для решения различных научных задач.

Кривая линия – есть след движущейся точки (прямая линия – частный случай кривой). Некоторые кривые естественно определяются как *траектории* точек окружности, катящейся по прямой линии или окружности. Изучением траекторий сложных круговых движений еще в древности занимались астрономы.

151. ***<u>Окружность, эллипс, гипербола</u>***

Даны окружность и точка *A*. Через каждую точку *M* окружности проведена прямая, перпендикулярная отрезку *MA*. *Огибающей* этого семейства прямых будет: 1) *окружность*, если *A* совпадает с центром; 2) *гипербола*, если *A* лежит вне окружности; 3) *эллипс*, если *A* лежит внутри окружности.



```
Uses  Crt, Graph;
Const {1)}  { r=160; z='Окружность'; w=0;    }
      {2)}  { r=80;  z='Гипербола';  w=130;  }
      {3)}    r=180; z='Эллипс';     w=130;
      { w - расстояние от центра до фокусов  }
      xmin=40; xmax=640;      {область вывода}

Procedure Init;
var Gd,Gm: Integer;
begin
  Gd:=Vga; Gm:=VgaHi;
  InitGraph(Gd,Gm,'d:\tp\bgi_rus');
  SetColor(11); SetBkColor(1);
  Circle(320+xmin div 2,240,r);
  SetLineStyle(3,0,1);
  SetTextStyle(1,1,4);
  SetFillStyle(1,15);
  SetWriteMode(XorPut)
end;

Procedure Figure(xa,ya: Integer);
const t=pi/45;
      step=0.02;    {шаг, регулирующий скорость вывода}
var   k: Double;              {коэф. перпендик. прямой}
      i,xm,ym: Integer;       {коорд. точек окружности}

 Procedure P_Line;
 var x,y: Double;
 begin
   x:=xmin;
```

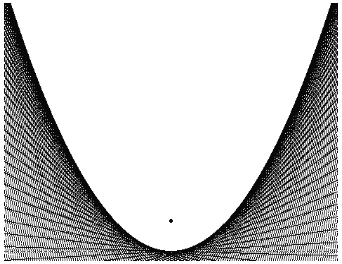
```
   Repeat              {прямые линии строятся по точкам}
     y:=k*(x-xm)+ym;
     PutPixel(Round(x),Round(y),9);
     x:=x+step
   Until x>xmax;
   Bar(0,0,xmin,480);
 end; {P_Line}

begin
  FillEllipse(xa,ya,2,2);                 {фокусы или центр}
  OutTextXY(0,150,'Press Enter');
  ReadLn;
  for i:=1 to 90 do
  begin
    xm:=Round(320+xmin div 2+r*cos(i*t));
    ym:=Round(240+r*sin(i*t));
    Line(xa,ya,xm,ym);             {изображается отрезок AM}
    if Abs(ya-ym)>0.1 then k:=(xm-xa)/(ya-ym);
    P_Line;       {изображается перпендикулярная прямая}
    Line(xa,ya,xm,ym)                 {стирается отрезок AM}
  end;
  WriteLn(#7#7)
end; {Figure}

BEGIN
  Init;
  Figure(320+xmin div 2+w, 240);
  Figure(320+xmin div 2-w, 240);

  OutTextXY(0,150,z);
  ReadLn; CloseGraph
END.
```

В программе в блоке констант задаются радиус r данной окружности, слово z для вывода ответа и расстояние w от центра окружности до фокусов эллипса или гиперболы. Ясно, что для окружности, как огибающей, w = 0.

Прямые линии строятся по точкам без использования стандартной процедуры Line. В цикле с шагом в 4° (t = pi/45) изображаются текущие прямые семейства и перпендикуляры *AM*. Скорость вывода точек регулируется значением переменной step.

Процедура Figures вызывается дважды, т.е. две совпадающие огибающие строятся для точки *A* и точки, симметричной ей относительно центра данной окружности. Эта пара точек служит фокусами для эллипса и гиперболы.

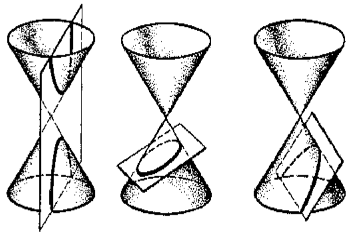
152. ***Парабола***. Даны прямая *l* и точка *A*. Через каждую точку *M* данной прямой *l* проведена прямая, перпендикулярная отрезку *MA*. *Огибающей* этого семейства прямых является *парабола*.



Предлагаем читателю самостоятельно построить огибающую, изменив тело процедуры Figures в предыдущей программе.

На рисунке слева изображена парабола, построенная с приращением абсциссы прямой *l*, равным 3.

В предыдущем разделе подобная огибающая возникла в задаче 143.



Замечательные кривые известны уже более 20 веков. Их основные свойства описаны в сочинении "О конических сечениях" Аполлония Пергского, жившего почти в одно время с Евклидом.

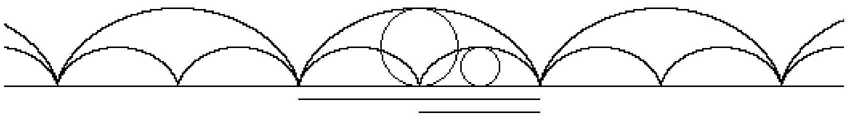
"Античная математика оставила будущим поколениям мало кривых. Главные кривые античности – окружность, а также эллипс, гипербола и парабола, появившиеся у Аполлония. И все. Счастье, что первые законы механики не вывели за пределы этого запаса кривых: планеты движутся по эллипсам, а брошенные тела летят по параболам… Долгое время все крупнейшие математики XVII века оттачивали свои новые методы исследования на циклоиде: проводили касательные, находили площади под ней, вычисляли длины ее дуг и т.п… Циклоида стала первой "неантичной" кривой, которая оказалась связанной с законами природы. Выяснилось, что именно циклоида, а не окружность, как писал Галилей, обладает тем свойством, что тело, скользящее по ней без трения, совершает колебания периода, не зависящего от начального положения. Это свойство циклоиды – ее *таутохронность* (т.е. равновременность) – открыл Гюйгенс" [22].

"Разнообразные задачи из физики, механики, математики, связанные с конкретными кривыми, послужили пробным камнем для мощных аналитических методов, созданных в XVII веке Декартом, Лейбницем, Ньютоном, Ферма и другими учеными. Эти методы дали возможность перейти от частных задач, связанных с замечательными кривыми, к общим закономерностям, присущим целым классам кривых" [23].

Так, описывая планетарные движения с помощью сложных циклоидальных кривых, И. Кеплер установил, что траектории планет с большой точностью – эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце; Ньютон, используя кривые, сформулировал и решил сложную аэродинамическую задачу [22, с.65].

153. ***<u>Циклоида</u>*** (от греч. слова *kykloeides* – "кругообразный") – плоская кривая, являющаяся *траекторией* точки окружности, катящейся без скольжения по некоторой прямой. Окружность называют порождающей, а прямую – направляющей.

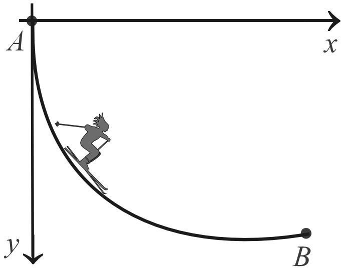
Огибающей диаметров порождающей окружности является циклоида вдвое меньшего размера.



Сложное движение точки, описывающей циклоиду, разлагается на вращательное и поступательное с одинаковыми скоростями. Длина арки циклоиды равна $8r$ ($8r > 2\pi r$ приблизительно в 1,27 раза: длины изображенных на рисунке вверху отрезков соответствуют длинам порождающих окружностей).

Кривая бесконечна, как и направляющая прямая.

Циклоида имеет много интересных и важных свойств, но самой знаменитой является *задача о брахистохроне* (от греческих слов "брахистос" – кратчайший и "хронос" – время), связання с ней.



В вертикальной плоскости даны точки A и B. Определить путь, AMB, спускаясь по которому под действием собственной тяжести, тело M, начав двигаться из точки A, достигнет точки B <u>в кратчайшее время</u>.

Увлекательный рассказ об истории возникновения (И. Бернулли, 1696 г.) и решениях этой задачи читайте в рассказе "Брахистохрона" [22]. Кривой наибыстрейшего спуска является циклоида!

Уравнение циклоиды удобно записывать в параметрической форме, выражая декартовы координаты x и y через производящий параметр t.

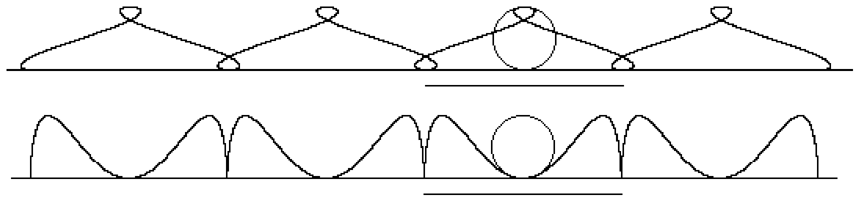
Тогда $x = r\,(t - \sin t)$, $y = r\,(1 - \cos t)$, $-\infty < t < +\infty$ (угол качения), r – радиус окружности.

Используем это в программе, придав параметру t (переменная со стартовым значением 0) определенный шаг (переменная step).


```
Uses  Crt, Graph;
Const k=6; r=20;          {число арок и радиус окружности}
      t: Double=0;                    { п а р а м е т р }
      step=0.00007;              {приращение параметра}
Var   Gd,Gm: Integer;
      x,y  : Double;             {декартовы координаты}

BEGIN
 Gd:=Vga; Gm:=VgaHi;
 InitGraph(Gd,Gm,'d:\tp\bgi_rus');
 SetViewPort(320,240,320,240,ClipOff); {графическое окно}
 SetColor(3); Line(-320,0,320,0);   {направляющая прямая}
 Circle(Round(pi*r),-r, r);      {порождающая окружность}

 Repeat
   x:=t-sin(t);                              { sin(2*t); }
   y:=1-cos(t);                              { cos(2*t); }
   PutPixel(Round(r*(x-k*pi)),-Round(r*y),11);
   t:=t+step
 Until t>k*2*pi;

 Line(0,10,Round(2*pi*r),10);          {длина окружности}
 OutTextXY(-60,60, 'Ц И К Л О И Д А');
 ReadLn; CloseGraph
END.
```

Начало системы координат находится в центре экрана, т.е. адресация отрицательных координат "видима". С этой целью применена стандартная процедура **SetViewPort.** Число выводимых арок кривой зависит от радиуса r и коэффициента k.

Вводя коэффициент λ перед выражениями **sin(t)** и **cos(t)** в формулах для вычисления координат, получим трохоиды – укороченные ($\lambda < 1$) или удлиненные ($\lambda > 1$) циклоиды.



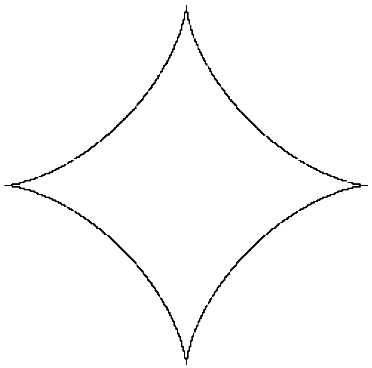
Изображенные выше кривые – удлиненные циклоиды при $\lambda = 2$. Выражения **sin(t), cos(t)** заменялись поочередно выражениями **sin(2*t), cos(2*t)**.

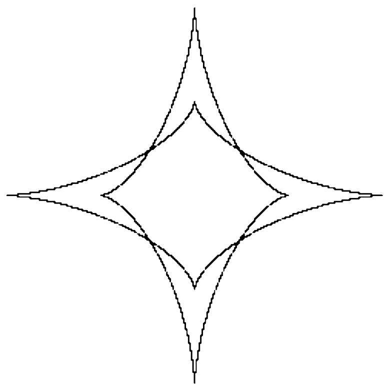
154. ***Астроида*** (от греч. слова *astra* – "звезда") – *огибающая* семейства отрезков постоянной длины, концы которых расположены на двух взаимно перпендикулярных прямых (по внутренней стороне неподвижной окружности катится окружность вдвое меньшего радиуса; диаметр этой окружности, жестко связанный с ней, скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым и заметает астроиду).

Астроида – это *траектория* точки подвижной окружности, катящейся без скольжения по внутренней стороне неподвижной окружности вчетверо большего радиуса.

Параметрические уравнения астроиды имеют вид: $x = 4r \cos^3 t$, $y = 4r \sin^3 t$, где r – радиус окружности, $t \in [0; 2\pi)$.

Изменив требуемым образом программу построения циклоиды и применив эти формулы, постройте различные астроиды.





На рисунке выше изображены стандартная астроида и две, наложенные друг на друга астроиды, которые получены при одном и том же радиусе r поочередным удвоением одной из координат – аргументов стандартной процедуры **PutPixel**, т.е. в цикле

```
PutPixel(Round(2*r*x)),- Round(r*y),   11) и
PutPixel(Round(r*x)),  - Round(2*r*y), 11).
```

Постройте также астроиду как огибающую и как траекторию точки окружности.

155. ***Кардиоида*** (от греч. слова *kardia* – "сердце"). Замкнутая кривая, о которой пойдет речь в этой задаче, по форме похожа на очертание сердца или срез яблока – отсюда и ее название. Она имеет множество красивых определений. Ниже приведены некоторые из них.

1) Кардиоида – это множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки A данной окружности на всевозможные касательные к ней.

2) Кардиоида – это множество точек, симметричных данной точке A окружности относительно всевозможных касательных к этой окружности.

3) Кардиоида – это траектория точки подвижной окружности, совершающей сложное движение: окружность катится без скольжения по неподвижной окружности того же радиуса (*эпициклоида*: направляющая кривая – окружность; см. 153).

4) Кардиоида – это траектория точки подвижной окружности, катящейся без скольжения по неподвижной окружности вдвое меньшего радиуса, которая касается подвижной окружности изнутри (если окружности поменять местами, то траектория будет прямой линией).

5) Кардиоида как "огибающая окружностей". Область, ограниченная кардиоидой – это объединение всех окружностей, имеющих центры на данной окружности и проходящих через данную точку этой окружности.

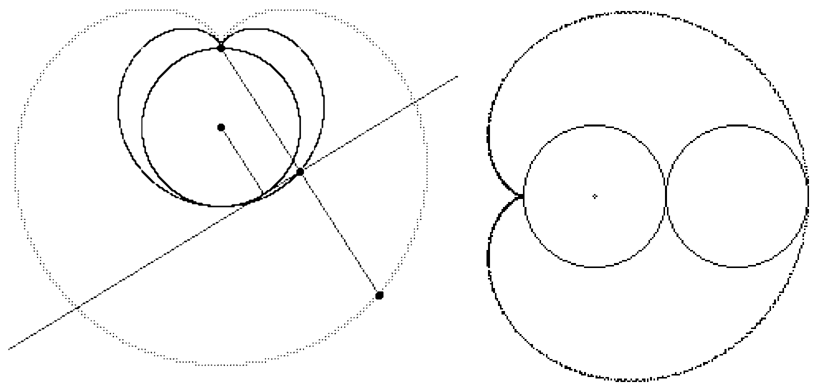
6) Кардиоида как огибающая лучей. Из фиксированной точки окружности в произвольную точку окружности попадает луч света и отражается от окружности (угол падения равен углу отражения). Огибающая отраженных лучей – кардиоида.

7) Кардиоида – элегантная кривая, порождённая хордами.

Пусть окружность разделена на 144 равные дуги. Перенумеруем точки деления, обходя окружность дважды. При первом обходе ставятся номера от 1 до 144. При втором обходе нумерация точек продолжается: точка 1 получает номер 145, точка 2 номер 146 и т.д. Построим хорду, соединяющую точки 1 и 2, и отправим её в путешествие по кругу так, чтобы она соединяла последовательно точки 2 и 4, затем 3 и 6, 4 и 8, ... , 144 и 288. На последнем шаге хорда вырождается в точку. Путешествие окончено, и на наш взгляд явственно воспринимается контур кардиоиды.

```
                  Program _155_1_2;
Uses  Crt,Graph;
Const xO=320; yO=170; r=100; xA=320; yA=yO-r;    {данные}

Procedure Init;
var Gd,Gm: Integer;
begin
  Gd:=Vga; Gm:=VgaHi; InitGraph(Gd,Gm,'');
  SetColor(2); Circle(xO,yO,r);
  FillEllipse(xO,yO,2,2); FillEllipse(xA,yA,2,2);
  OutTextXY(10,10,'Press Enter'); ReadLn
end; {Init}

Procedure Homothetos (step: Real);
const done: Boolean = false;
var i,k,xB,yB,xM,yM: Extended;  x,y: Integer;
begin
  i:=-pi/2;
  Repeat
    i:=i+step;
    xB:=xO+r*cos(i); yB:=yO+r*sin(i);
    {B - текущая точка окружности}
    PutPixel(Round(xB),Round(yB),10);
    if Abs(xB-xO)>step then k:=(yB-yO)/(xB-xO);
    xM:=(yB-yA+k*xA+xB/k)/(k+1/k);
    yM:=k*(xM-xA)+yA;
    x:=Round(xM); y:=Round(yM);
    PutPixel(x,y,14);               { элемент г.м.т. I  }
    PutPixel(2*x-xA,2*y-yA,14);     { элемент г.м.т. II }
    {демонстрация касательной, перпендикуляров
     и симметричных точек в процессе построения         }
    if (i>1) and Not(done) then
    begin
      SetColor(7);
      Line(Round(xB),Round(yB),xO,yO);            {радиус}
      Line(8*Round(xB)-7*x,8*Round(yB)-7*y,
           6*x-5*Round(xB),6*y-5*Round(yB));{касательная}
      Line(xA,yA,2*x-xA,2*y-yA);   {перпендикуляры к ней}
      SetFillStyle(1,14);
      FillEllipse(2*x-xA,2*y-yA,3,3);{симметричная точка}
      FillEllipse(x,y,3,3);          {основание перпенд.}
      Sound(500); Delay(65000); NoSound;
      ReadLn; done:=true
    end;
  Until i>1.5*pi;
  ReadLn; CloseGraph
end; {Homothetos}

BEGIN  Init; Homothetos(0.00002)  END.
```


Программа **Program _155_1_2** строит две кардиоиды как множества точек, используя определения 1 и 2. Кривые очевидно оказываются гомотетичными с коэффициентом 2 (слева на рис.). Сложное условие **(i>1) and Not(done)** в команде ветвления гарантирует разовое исполнение серии команд, демонстрирующей текущее положение касательной, перпендикуляров и симметричных точек в процессе построения кривых.



"Понятие касательной – одно из важнейших в математическом анализе. Изучение прямых, касательных к кривым линиям, во многом определило пути развития математики. В XVII веке французские ученые Р. Декарт и П. Ферма исследовали касательные к спиралям и циклоиде… Р. Декарт на задаче построения касательных к кривым отрабатывал свой аналитический метод в геометрии. Продолжая его исследования, Г.В. Лейбниц одновременно с И. Ньютоном пришел к открытию дифференциального исчисления, явившемуся революцией в развитии математики" [33].

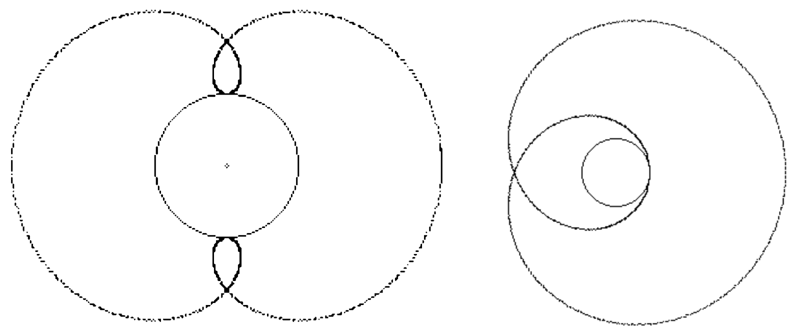
```
                  Program _155_3;
Uses  Crt, Graph;
Const r=70; x0=320; y0=240;      {данная окружность}

Procedure Init;
var Gd,Gm:Integer;
begin
  Gd:=Vga; Gm:=VgaHi; InitGraph(Gd,Gm,'d:\tp\bgi');
  SetBkColor(2);  Circle(x0,y0,r); Circle(x0,y0,1);
  OutTextXY(10,10,'Press Enter');  ReadLn
end;

Procedure Trajectory (t:Word);
const k=2;                           {для кардиоиды k=2}
      degree=pi/720;        {шаг - 1/4 дугового градуса}
```

```
var   i,j,q,x,y: Integer;
      alpha    : Double;
      A,B      : Array [1..1440] of Integer;
begin
  for i:=1 to 1440 do
  begin
    {неподвижная окружность}
    SetColor(14); Circle(x0,y0,r);
    {катящаяся окружность}
    alpha:=i*degree;
    x:=Round(x0+2*r*cos(alpha));            {абсцисса и}
    y:=Round(y0-2*r*sin(alpha));       {ордината центра}
    Circle(x,y,r);
    {запоминание координат}
    A[i]:=Round(x+r*cos(k*alpha));
    B[i]:=Round(y-r*sin(k*alpha));
    {изображение фиксированной точки и радиуса}
    if i<800 then q:=1 else q:=600;
    for j:=q to i do PutPixel(A[j],B[j],15);
    Line(x,y,A[i],B[i]);
    Delay(t);
    {стирание}
    SetColor(2);
    Circle(x,y,r);
    Line(x,y,A[i],B[i])
  end; {for}
  SetColor(10); Circle(x0+2*r,y,r);
  for i:=1 to 1440 do PutPixel(A[i],B[i],10);
  ReadLn; CloseGraph
end; {Trajectory}

BEGIN
  Init;
  Trajectory(1000)
END.
```

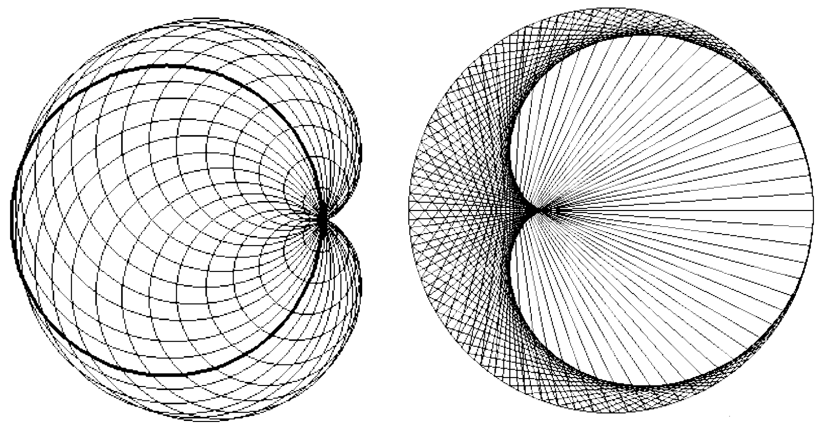
Катящаяся окружность стирает выводимые на экран точки кривой, поэтому ее координаты запоминаются в массивах A и B для вывода на экран в цикле `for j:=q to i do … ,` а также после прохода основного цикла (см. рис. справа вверху).

Исполните программу несколько раз, придавая различные значения коэффициенту k в процедуре Trajectory (k = 1, 2, 3, 4,…). При k = 1 получим окружность. Убедитесь, что его значение для кардиоиды должно равняться 2. При k = 3 получим кривую, изображенную слева на нижнем рисунке. Добавив множитель 3 перед радиусом в формулах для вычисления A[i] и B[i], получим

улитку Паскаля, частным случаем которой является кардиоида (справа на рисунке).



Еще на двух рисунках ниже изображены кардиоиды, построенные с использованием определений 5 и 7. Постройте эти и другие кардиоиды (см. определения 4 и 6) самостоятельно.



Рассмотренные кривые имеют достаточно сложные уравнения в декартовых координатах, где являются соответственно трансцендентной кривой и кривыми 6-го и 4-го порядков.

Циклоида: $r \cos x\,(x + \sqrt{y(2r - y)}\,/r) = r - y$;

астроида: $x^{2/3} + y^{2/3} = (4\,r)^{2/3}$;

кардиоида: $(x^2 + y^2)\,(x^2 + y^2 - 2rx) - r^2y^2 = 0\ \ (r > 0)$.

Постройте кривые в декартовых координатах, используя, например, программу Advanced Grapher.

Задачи для самостоятельного решения к главе 9

1. Найдите координаты и изобразите центр масс данного треугольника, прямоугольника, произвольного четырехугольника.

2. Найдите координаты и изобразите центр вписанной в данный треугольник окружности, вписанную окружность и ее радиусы.

3. Постройте г.м.т. середин отрезков, абсциссы концов которых находятся соответственно в полосах от 40 до 140 и от 500 до 600.

4. Постройте г.м.т. середин отрезков, координаты концов которых находятся соответственно в прямоугольниках 120 x 90, расположенных в противоположных углах дисплея.

5. Постройте эллипс, гиперболу и параболу как множества точек, используя сканирование экранной области (см. 9.1) и определения: а) эллипс – множество точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до двух фиксированных точек (фокусов) одна и та же; б) гипербола – множество точек плоскости, разность расстояний каждой из которых до двух фиксированных точек (фокусов) одна и та же; в) парабола – множество точек плоскости, одинаково удаленных от точки (фокуса) и от не проходящей через нее прямой (директрисы).

6. Постройте огибающую семейства прямых, отсекающих от первого координатного угла треугольник постоянной площади (*ветвь гиперболы*).

7. Постройте кардиоиду, используя ее параметрическое задание: $x = r\cos t\,(1 + \cos t)$, $y = r\sin t\,(1 + \cos t)$, где r – радиус окружности, $t \in [0; 2\pi)$ – параметр.

8. Постройте кардиоиду, используя определение: если стороны OP и OQ ($OP = 2OQ$) вращаются вокруг точки O с угловыми скоростями ω и 2ω, то траектория четвертой вершины M параллелограмма $OPMQ$ – кардиоида.

9. Постройте прямые Симпсона данного треугольника (см. 17.3).

10. К. Фейербах выяснил, что окружность 9 точек имеет еще четыре точки, тесно связанные с геометрией любого данного треугольника. Это точки ее касания с четырьмя окружностями. Одна из этих окружностей – вписанная, остальные три – вневписанные. Точки касания этих окружностей с окружностью 9 точек называются точками Фейербаха. Постройте все 13 точек окружности.

Средние величины

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\,.$$

Эти неравенства связывают известные в математике средние величины: ***среднее гармоническое, среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее квадратичное*** (равенство имеет место лишь при $a = b$, $a > 0$, $b > 0$).

Для их геометрических доказательств подходят различные конфигурации. Используя две, приведенные ниже, докажите все неравенства.

Трапеция и средние величины

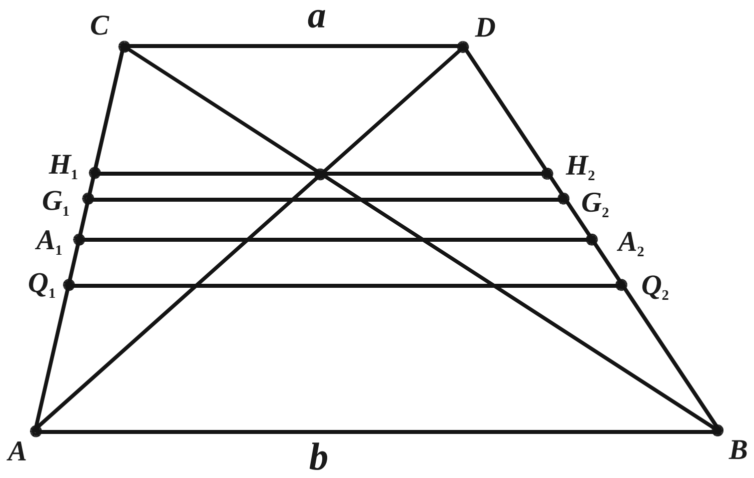
(№ 2339, № 2305). $ABCD$ – трапеция, $\boldsymbol{CD = a}$, $\boldsymbol{AB = b}$.

$\boldsymbol{H_1H_2} = \dfrac{2ab}{a+b}$ – проходит через точку пересечения диагоналей;

$\boldsymbol{G_1G_2} = \sqrt{ab}$ – делит трапецию на две подобные;

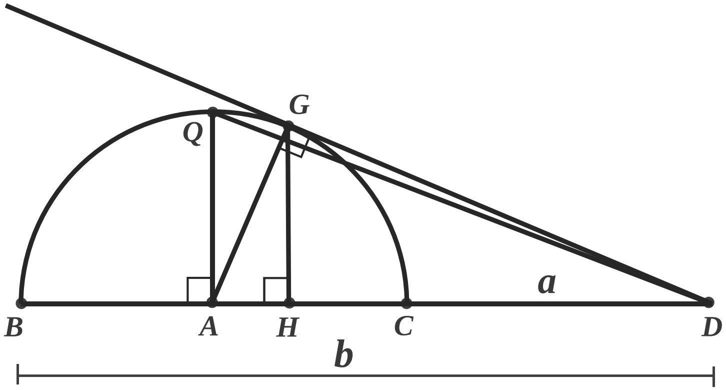
$\boldsymbol{A_1A_2} = \dfrac{a+b}{2}$ – средняя линия;

$\boldsymbol{Q_1Q_2} = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ – делит трапецию на две равновеликие.



Полуокружность и средние величины

Дана полуокружность с центром A и радиусом AQ.
D – произвольная точка на продолжении диаметра BC,
DG – касательная к полуокружности,
$AQ \perp BC$, $GH \perp BC$.
$\boldsymbol{CD = a, BD = b}$.



$\boldsymbol{DH} = \dfrac{2ab}{a+b}$ – среднее гармоническое,

$\boldsymbol{DG} = \sqrt{ab}$ – среднее геометрическое,

$\boldsymbol{DA} = \dfrac{a+b}{2}$ – среднее арифметическое,

$\boldsymbol{DQ} = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ – среднее квадратичное.

Указатель некоторых применяемых символов

$A \in a$ ($A \notin a$)	– точка A принадлежит (не принадлежит) прямой a;
$AH \perp CD$	– прямые (лучи, отрезки) AH и CD взаимно перпендикулярны;
$AH \parallel CD$	– прямые (лучи, отрезки) AH и CD параллельны;
$\Phi_1 \cap \Phi_2$ ($\Phi_1 \cup \Phi_2$)	– пересечение (объединение) фигур Φ_1 и Φ_2;
$\Phi_1 \subset \Phi_2$ ($\Phi_1 \not\subset \Phi_2$)	– фигура Φ_1 является (не является) подмножеством фигуры Φ_2;
a, b, c	– стороны BC, AC, AB треугольника ABC;
h_a	– высота, проведенная к стороне a;
m_a	– медиана, проведенная к стороне a;
l_a	– биссектриса, проведенная к стороне a;
r	– радиус вписанной окружности треугольника;
R	– радиус описанной окружности треугольника;
S_{ABC} (S_{ABCD})	– площадь треугольника ABC (четырехугольника $ABCD$);
$\Delta ABC = \Delta MNK$	– треугольники ABC и MNK равны;
$\Delta ABC \sim \Delta MNK$	– треугольники ABC и MNK подобны;
$\angle A$, $\angle BAC$	– угол A, угол BAC;
Окр (O, r)	– окружность с центром O и радиусом r;
$\Rightarrow$	– следование;
$\Leftrightarrow$	– равносильность;
$\overline{AB}$	– вектор AB;
$\overline{0}$	– нулевой вектор;
H_M^k	– гомотетия с центром в точке M и коэффициентом k;
🗍	– другой способ решения задачи.

Геометрический словарь

Геометрия – наука о свойствах геометрических фигур.

Планиметрия (*стереометрия*) – раздел геометрии, в котором изучаются фигуры на плоскости (в пространстве).

Геометрическая фигура – любое множество точек.

Множество – общематематическое неопределяемое понятие (синонимы в обыденной речи: набор, стая, коллекция и др.).

Основные геометрические понятия (вводятся без определений) – точка, прямая, расстояние, плоскость.

Аксиомы – предложения, принимаемые без доказательства. В аксиомах выражены свойства основных понятий.

Определения раскрывают содержание новых понятий, сводя их к уже известным (формулируются для всех понятий, кроме основных).

Теоремы – предложения, истинность которых доказывается.

Дедуктивный метод – логическое выведение закономерностей из небольшого числа основных положений (определений, аксиом).

Индуктивный метод – установление общих закономерностей на основе частных эмпирических наблюдений.

Метрические свойства фигур – свойства фигур, которые связаны с измерениями.

Аффинные свойства фигур – свойства фигур, сохраняющиеся при параллельном проектировании на плоскость.

Равновеликие фигуры – фигуры, имеющие равные площади.

Равносоставленные фигуры – фигуры, каждую из которых можно разбить на части, соответственно равные частям другой фигуры.

Изопериметрические фигуры – фигуры, которые имеют равные периметры.

Выпуклый многоугольник – многоугольник, лежащий в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

Пентагон – пятиугольник.

Гексагон – шестиугольник.

Триангуляция фигуры – разбиение фигуры на отдельные части – грани (симплексы).

Пифагорова тройка – тройка натуральных чисел, удовлетворяющая уравнению $a^2 + b^2 = c^2$.

Египетский треугольник – треугольник со сторонами 3, 4 и 5.

Ортотреугольник – треугольник, вершинами которого служат основания высот данного треугольника.

Серединный перпендикуляр – прямая, проходящая через середину отрезка перпендикулярно к нему.

Серединный треугольник – треугольник, вершинами которого служат середины сторон данного треугольника.

Конкурентные прямые – прямые, имеющие общую точку.

Коллинеарные точки – точки, принадлежащие одной прямой.

Антиподы – диаметрально противоположные точки окружности.

Инцентр – центр вписанной окружности.

Ортоцентр – точка пересечения высот треугольника.

Центроид – точка пересечения медиан треугольника.

Чевиана – отрезок, соединяющий вершину треугольника с некоторой точкой на противоположной стороне или на её продолжении (медиана – частный случай чевианы).

Средний пропорциональный отрезок (средний геометрический) между двумя другими отрезками – это отрезок, квадрат длины которого равен произведению длин двух других отрезков.

Золотое сечение отрезка – деление отрезка на две неравные части такие, что большая часть так относится к целому, как меньшая – к большей.

Прямая Эйлера – прямая, на которой лежат центр описанной окружности, ортоцентр и центроид одного и того же треугольника.

Прямая Симпсона – прямая, на которой лежат основания перпендикуляров, опущенных из точки описанной окружности на стороны треугольника или их продолжения.

Базис (на прямой, на плоскости или в пространстве) – система упорядоченных векторов, через которую однозначно выражаются остальные векторы.

Трисектриса угла – луч, выходящий из вершины угла и делящий его в отношении 1 : 2 (две трисектрисы угла делят его на три равные части).

Классические задачи древности – трисекция угла, квадратура круга, удвоение куба (три знаменитые задачи на построение, решаемые в Древней Греции). Известно, что ни одна из этих задач не разрешима с помощью циркуля и линейки.

Формулы геометрии

Треугольник	$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ – сумма углов.
	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ – теорема косинусов.
	$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ – теорема синусов.
	$m_a = \sqrt{\dfrac{b^2}{2} + \dfrac{c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}}$ – длина медианы.
	$h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{bc \cdot \sin A}{a}$ – длина высоты.
	$l_a = \sqrt{bc - b_1c_1} = \dfrac{2bc \cdot \cos A/2}{b+c}$ – длина биссектрисы.
	$S = ½\, ah_a = ½\, ab \sin\alpha = rp = p(p - a) \operatorname{tg} A/2 = \dfrac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – площадь $p - a = \dfrac{b+c-a}{2}$.
	$r = \dfrac{S}{p}$ – радиус описанной окружности, $R = \dfrac{abc}{4S}$ – радиус вписанной окружности.
a, b, c, A, B, C – стороны и углы треугольника, p – полупериметр, r, R – радиусы вписанной и описанной окружностей, S – площадь.	

Окружность и круг	$C = 2\pi R = \pi D$ – длина окружности.
	$S = \pi R^2 = \dfrac{\pi D^2}{4}$ – площадь круга.
	$l = \dfrac{\pi R\alpha}{180} = R\varphi$ – длина дуги.
	$S = \dfrac{\pi R^2\alpha}{360}$ – площадь сектора.
R – радиус, D – диаметр, α – величина дуги в градусах, φ – величина дуги в радианах, l – длина дуги окружности.	

Правильные многоугольники	$\frac{180^\circ\cdot(n-2)}{n}$ – величина внутреннего угла.
	$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$ – длина стороны $a_3 = R\sqrt{3}$, $a_4 = R\sqrt{2}$, $a_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $a_6 = R$, $a_{10} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
	$S = \frac{n}{2}ar$ – площадь.
n – число сторон, a – длина стороны, r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей, S – площадь.	

Четырехугольники	$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ – сумма углов.
	$S = ½\, d_1d_2 \sin\alpha$ (произвольный), $S = rp$ (описанный), $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ (вписанный), $ac + bd = d_1d_2$ (вписанный), $S = \frac{a+b}{2}h = ch$ (h – высота, c – средняя линия трапеции), $S = ½\, d_1d_2 = a^2\sin\alpha$ (ромб), $S = ab$ (прямоугольник), $S = a^2 = ½\, d^2$ (квадрат), $S = ah_a = ab\sin\alpha$ (параллелограмм).
	$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ (параллелограмм).
a, b, c, d – длины сторон, p – полупериметр, S – площадь, d, d_1, d_2 – диагонали, r – радиус вписанной окружности, α – величина угла.	

Формулы тригонометрии

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$ ($\alpha \ne \frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$), $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$, $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$, $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ ($\alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n\in Z$), $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ ($\alpha \ne \pi n$, $n\in Z$)
$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$, $\sin(45^\circ + x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x + \sin x)$, $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta\ μ\ \sin\alpha\sin\beta$, $\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\,μ\,\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ ($\alpha\pm\beta \ne \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n\in Z$), ($\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}$))
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$, $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ ($\alpha \ne \pi n$, $\alpha \ne \pi + 2\pi n$, $n\in Z$).
$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha/2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha/2}$, $\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha/2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha/2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha/2}{1-\operatorname{tg}^2\alpha/2}$
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$
$\sin\alpha\sin\beta = ½(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$ $\sin\alpha\cos\beta = ½(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$ $\sin\alpha\cos\beta = ½(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

Список использованной и рекомендованной литературы

1. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Уч. пособие / Под ред. М.И. Сканави. – 4-е изд. – М.: Высшая школа, 1980. – 541 с., ил.
2. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И.Ф. Шарыгин, Р.К. Гордон. – М.: ООО "Издательство Астрель": ООО "Издательство АСТ", 2001. – 400 с., ил.
3. Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф. Сборник конкурсных задач по математике (с методическими указаниями и решениями): Уч. пособие. – 2-е изд. – М.: Наука, 1986. – 384 с.
4. Геометрия: Учебник для 7-11 кл. сред. шк. / Погорелов А.В. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1992. – 383 с., ил.
5. Геометрия: Учебное пос. для 9 и 10 кл. / Клопский В.М., Скопец З.А., Ягодовский М.И. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 1982. – 256 с., ил.
6. Геометрия для 10-11 класов: Учебное пос. для уч. шк. и кл. с углубл. изуч. математики / Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. – 3-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 1992. – 464 с., ил.
7. Шарыгин И.Ф. Математика. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы. – М.: Дрофа, 1999. – 304 с., ил.
8. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. (Планиметрия). – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1986. – 224 с. – (Б-чка "Квант". Вып. 17).
9. Шарыгин И.Ф. Учимся решать задачи по геометрии // Математика в школе. – 1989. №2. – С. 87-101; №3. – С. 95-103.
10. Шарыгин И.Ф. Математика. Для поступающих в вузы: Учебн. пособие. – М.: Дрофа, 1995. – 416 с., ил.
11. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч.1. – 2-е изд., переработ. и доп. – М.: Наука, 1991. – 320 с.
12. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч.2. – 2-е изд., переработ. и доп. – М.: Наука, 1991. – 240 с., ил.
13. Факультативный курс по математике: Учеб. пособие для 7-9 кл. сред. шк. / Сост. И.Л. Никольская. – М.: Просвещение, 1991. – 383 с., ил.
14. Факультативный курс по математике: Решение задач. Учеб. пособие для 11 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1991. – 384 с., ил.
15. Готман Э.Г., Скопец З.А.. Задача одна – решения разные. – К.: Рад. шк., 1988. – 173 с.
16. Скопец З.А. Геометрические миниатюры / Сост. Г.Д. Глейзер. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с., ил.
17. Кушнір І.А. Методи розв'язування задач з геометрії. Книга для вчителя. – К.: Абрис, 1994. – 464 с., іл.
18. Кушнир И.А. Геометрия. Теоремы и задачи. Том 1. Планиметрия. – К.: ООО "Астарта", 1996. – 480 с.
19. Кушнир И.А. Координатный и векторный методы решения задач. – К.: ООО "Астарта", 1996. – 414 с.
20. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. / Новые встречи с геометрией. (Серия "Библ. математич. кружка") – М.: Наука, 1978. – 224 с., ил.
21. Маркушевич А.И. Замечательные кривые. (Серия "Популярные лекции по математике". Выпуск 4.) – М.: Наука, 1978. – 48 с.
22. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 192 с. – Библ. "Квант". Выпуск 56).
23. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые. (Серия "Библ. физико-математич. школы". Выпуск 4.) – М.: Наука, 1978. – 160 с.
24. Габович И.Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач. – К.: Рад. школа, 1989. – 160 с.
25. Крайзман М.Л. Розв'язування геометричних задач методом координат. Посібник для вчителів. – К.: Рад. школа, 1983. – 127 с.
26. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1972. – 528 с., ил.
27. Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К. Задачи вступительных экзаменов по математике. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
28. Мазур К.И. Решебник основных конкурсных задач по математике из сборника под ред. М.И. Сканави – К., 1998. – 672 с.
29. Ф. Препарата, М. Шеймос. Вычислительная геометрия: Введение. – М.: Мир, 1989. – 478 с.
30. Зеленяк О.П. Практикум программирования на Turbo Pascal. Задачи, алгоритмы, решения. – 3-е издание, испр. и доп. – СПб.: ДиаСофтЮП, М.: ДМК Пресс, 2007. – 320 с.
31. Броудер Ф. Роздуми про майбутнє математики // У світі математики. – 2003. – №2. – С. 1-7.
32. Экманн Б. Математика: питання та відповіді // У світі математики. – 1996. – №1. – С. 3-8.
33. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А.П. Савин – М.: Педагогика, 1989. – 352 с., ил.
34. Энциклопедия элементарной математики. Книга IV – геометрия / Под ред. В.Г. Болтянский, И.М. Яглом. – М.: Наука, 1963. – 568 с., ил.
35. Энциклопедия элементарной математики. Книга V – геометрия / Под ред. В.Г. Болтянский, И.М. Яглом. – М.: Наука, 1966. – 624 с., ил.

Предметный указатель

Оглавление

Книги издательства «ДМК Пресс» можно заказать в торгово-издательском холдинге «АЛЬЯНС-КНИГА» наложенным платежом, выслав открытку или письмо по почтовому адресу: **123242, Москва, а/я 20** или по электронному адресу: **post@abook.ru**.

При оформлении заказа следует указать адрес (полностью), по которому должны быть высланы книги; фамилию, имя и отчество получателя. Желательно также указать свой телефон и электронный адрес.

Эти книги вы можете заказать и в Internet-магазине: **www.abook.ru**.

Оптовые закупки: тел. **(495) 258-91-94, 258-91-95**; электронный адрес **abook@abook.ru**.

Книги издательства ДиаСофт на Украине можно заказать, выслав открытку или письмо по почтовому адресу: **03055, Украина, Киев, а/я 100**, позвонив по телефону: **(044) 247-42-69** или отправив заказ на e-mail: **books@diasoft.kiev.ua** или **bim@diasoft.kiev.ua**.

Учебное издание

Зеленяк Олег Петрович

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем

Моделирование в среде Turbo Pascal

Идательство ДМК Пресс
books@dmk-press.ru

Главный редактор *Мовчан Д. А.*
dm@dmk-press.ru

Дизайн обложки *Мовчан А. Г.*

ООО «ДиаСофтЮП»
books@diasodt.kiev.ua

Заведующий редакцией *Устычук Н. Ю.*

Подписано в печать 14.01.2008. Формат 60х84/16.
Бумага типографская. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Печ. л. 19,53.
Тираж 2000 экз. Заказ №