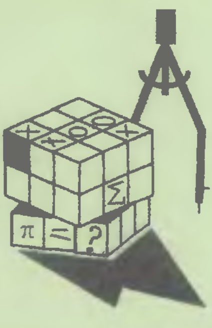
САМАРСКИЙ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ НАЯНОВОЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ПИФАГОР»
средним
учебным
заведениям
нового типа
4

А.А. Андреев,
А.И. Люлев,
А.Н. Савин,
М.Н. Саушкин

Серия А:
МАТЕМАТИКА

Самарские олимпиады



Выпуск 4

САМАРА
1998

САМАРСКИЙ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ НАЯНОВОЙ

А.А. Андреев, А.И. Люлев, А.Н. Савин, М.Н. Саушкин

САМАРСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

Серия А: Математика

Выпуск 4

Издательство «Пифагор»
Самара
1998

Серия А:
Математика

Андреев А. А., Люлев А. И., Савин А. Н., Саушкин М. Н.
Самарские олимпиады. Учебное издание. Серия А: Математика. Вып. 4. — Самара: Пифагор, 1998. — 108 с., ил.

Сборник задач может служить пособием для самостоятельной подготовки к олимпиадам по математике.

Сборник составлен из задач, предлагавшихся в последние годы на математических олимпиадах г. Самары: САММАТ, университета Наяновой, олимпиады СамГУ и СамГТУ для выпускников. К большинству задач даны краткие указания. Наиболее сложные задачи снабжены подробными решениями.

Задачник может быть рекомендован учащимся старших классов, преподавателям математики, а также лицам, интересующимся нестандартными задачами.

Учебное издание

Редактор серии канд. физ.-мат. наук., доцент *Андреев А А*

Рецензент докт. физ.-мат. наук., профессор *Кислов Н. В.*, кафедра математического моделирования, Московский Государственный Технический Университет (МЭИ)

Формат 60×84 1/16. Бумага писчая, белая. Печать офсетная. Объём 6,3 усл. печ. л.; 6,7 уч.-изд. л. Тираж 300 экз.
Издательство «Пифагор». 443001, Самара, ул. Молодогвардейская 196.

Предисловие

Тот, кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества.

Роджер Бэкон

Хорошо известно, что система образования в бывшем СССР в области естественных наук снискала себе славу одной из лучших в мире. Она оказывала и продолжает оказывать плодотворное влияние на развитие мировой науки. Хочется надеяться, что с распадом Советского Союза система образования России не только не пострадала бы, но и, используя уникальную для нашей страны политическую ситуацию, «Россия — открытое общество», — впитала в себя все новейшие образовательные технологии. При этом, конечно, не должны быть забыты старые, но эффективные методы обучения. Эта политическая ситуация, как говорят математики, неустойчивая, и «удержать Россию в лоне цивилизованных государств в состоянии лишь хорошо образованные люди».

Математические олимпиады — это хорошо себя зарекомендовавший способ не только выявления, но и обучения талантливой молодежи. Чем чаще участвует ученик в олимпиаде, тем больше он приобретает опыта, который играет не последнюю роль в достижении им хороших результатов. Ведь во всех этих олимпиадах, безусловно, присутствуют элементы спортивного соревнования.

В 1993 году несколько энтузиастов-преподавателей Самарских университетов решили провести олимпиаду по математике для средних учебных заведений нового типа, где изучают математику по расширенной программе. Причина была одна — областная олимпиада была построена таким образом, что в ней преобладали спортивные принципы, например, от города Самары в ней участвовало всего три человека, при этом нарушался принцип доступности.

Новая олимпиада получила название «САММАТ–93» — командное первенство по математике среди средних учебных заведений нового типа. Была выбрана следующая схема От школы выступала команда, состоящая из 20 человек, по 5 человек от каждого класса (с 8-го по 11-ый). Работы выполнялись индивидуально, а дипломы выдавались команде-победителю по каждой возрастной категории. Такая команда определялась по трем лучшим работам. Таким образом, награжденных было около 60, при общем числе участников около 200 человек.

Постоянные участники и победители этих олимпиад: школа №27, школа №33, школа №135, гимназия №1, медико-технический лицей, Самарский муниципальный «Университет Наяновой», аэрокосмический лицей.

Ни одна из олимпиад не состоялась бы без наших постоянных меценатов, которые всегда находили возможность в трудных экономических условиях поддержать столь полезное начинание.

Мы благодарим:

Туманова Николая Валентиновича, кандидата технических наук, выпускника школы-интерната №18 при МГУ;

Опочицкого Семена Яковлевича, бывшего учителя математики, а ныне — директора книготорговой фирмы «РАДОП»;

Сергеева Анатолия Михайловича, кандидата экономических наук, директора ООО «Потенциал» за материальную помощь и моральную поддержку в проведении этих олимпиад.

Эта книга обобщает пятилетнюю работу жюри и оргкомитета олимпиады «САММАТ». В ней приведены все задания этих олимпиад с решениями. Олимпиады показали нам, что некоторые типы задач многие учащиеся решают с удовольствием и успешно, а с нестандартными задачами, как правило, не справляются. Мы решили создать серию книг, помогающих старшеклассникам ликвидировать эти пробелы и развивающих интерес к нетрадиционным задачам. Первые выпуски этой серии уже были посвящены принципу Дирихле, целой и дробной части действительного числа и элементарным функциональным уравнениям.

Часть материалов для книги, предоставили профессор В. П. Радченко и доцент С. Я. Новиков, посвященные олимпиадам по математике для школьников в СамГТУ и СамГУ.

Авторы благодарны ректору Самарского муниципального «Университета Наяновой», академику РАЕН, *Марине Венедиктовне Наяновой*, без помощи которой эта серия не увидела бы свет.

САММАТ – 93

9-й класс

1. Разложите на множители $x^4 + 1993x^2 + 1992x + 1993$.

2. Постройте биссектрису угла, вершина которого расположена вне чертежа.

3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{1993}$ — натуральные числа, сумма которых делится на 30. Докажите, что $a_1^5 + a_2^5 + \ldots + a_{1993}^5$ делится на 30.

4. Найдите в целых числах решения уравнения $x + y = x^2 - xy + y^2$.

5. Решите неравенство: $1993(x-1)^4 - \sqrt{1-(x-1)^2} + x^2 \leqslant 2(x-1)$.

6. Задана последовательность $x_n = \dfrac{x_{n+1}-1}{x_{n+1}+1}$, $x_0=\alpha$. Найдите α, если $x_{1993} = \dfrac{1}{3}$.

7. На столе лежат 1993 спички. Двое по очереди могут брать m спичек ($1 \leqslant m \leqslant M$). Выигрывает тот, кто возьмёт последнюю спичку. Требуется выяснить, кто из игроков выиграет, если *а)* $M=2$; *б)* $M=5$, и как должен играть победитель.

8. Найдите все такие значения a, что при любом b найдётся c такое, что система $\begin{cases} bx - y = ac^2, \\ (b-6)x + 2by = c+1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

9. Из произвольной точки круглого бильярда пущен шар. Докажите, что внутри бильярда найдётся такая окружность, которую траектория шара ни разу не пересечёт. (Известно, что угол падения равен углу отражения.)

10. Может ли иррациональное число в иррациональной степени быть числом рациональным?

10-й класс

11. Решите уравнение: $\sin^2 2x + \left[\frac{x}{\pi}\right] = \cos^2 3x$. ($[a]$ — целая часть a.)

12. Постройте график функции $y = f(x)$, если $f(x)$ удовлетворяет тождеству: $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$.

13. Найдите решение уравнения $z^4 + 1994z^2 + 1993z + 1994 = 0$, имеющее наибольший модуль.

14. Решите уравнение: $\arcsin x(x+y) + \arcsin y(x+y) = \pi$.

15. Если сторона треугольника меньше среднего арифметического двух других его сторон, то угол, лежащий против этой стороны, меньше среднего арифметического двух других его углов. Докажите.

16. Что больше: $\min\limits_{y\in[-1,1]} \max\limits_{x\in[-1,1]} \left(x^2 + xy\right)$ или $\max\limits_{x\in[-1,1]} \min\limits_{y\in[-1,1]} \left(x^2 + xy\right)$?

17. При каких a система $\begin{cases} |x| + |y| = a\pi, \\ \cos x + \cos y = 0 \end{cases}$ имеет не более 1993 решений?

18. В цилиндре через диаметр провели плоскость под углом α к плоскости основания. Что представляет собой линия пересечения этой плоскости с цилиндрической поверхностью на развёртке цилиндра?

19. Последовательность $\{x_n\}$ задана следующим рекуррентным соотношением: $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + x_{n-2}\right)$, $x_0=1$, $x_1=7$. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

20. Числа a, b, c таковы, что при $|x| \leqslant 1$ выполнено $\left|ax^2 + bx + c\right| \leqslant 1$. Докажите, что $\left|cx^2 - bx + a\right| \leqslant 2$ при $|x| \leqslant 1$.

САММАТ - 94

7-й класс

21. Представьте число 1994 в виде разности квадратов двух целых чисел.

22. Является ли $1 + 1994^{1993^{1992}}$ простым числом?

23. На вопрос о количестве участников командного соревнования по математике *"САММАТ – 94"* председатель оргкомитета ответил, что приняло участие 55 человек, из которых 13 девушек, а председатель жюри сказал, что участников всего 31 и среди них 24 юноши. Как это может быть и сколько всего участников?

24. Найдите сумму $$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\cfrac{1}{1994}}}}}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\ddots+\cfrac{1}{1994}}}}}.$$

25. Постройте прямоугольный треугольник по высоте, опущенной на гипотенузу, и разности между суммой катетов и гипотенузой.

26. Докажите, что числа вида n^4+4 (n – натуральное, $n>1$) являются составными.

27. Решите уравнение $\overline{abc}=(\overline{ab})^2-c^2$.

28. Число лет некоторого человека в 1994 году равнялось сумме цифр года его рождения. Сколько ему лет?

29. Из книги *"Приключения Барона Мюнхгаузена"* известный двоечник Костя Петрушкин выдрал кусок, первая страница которого была под номером 231, а номер последней страницы состоял из тех же цифр. Сколько страниц вырвал Костик?

30. Решите систему уравнений $\begin{cases}2y=|x+1|-|x-1|,\\2x=|y+1|-|y-1|.\end{cases}$

8-й класс

31. Решите уравнение $\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{4}{x-3}+\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{3}{x-5}=0$.

32. В треугольнике ABC a, b и c — стороны, $\angle A=60°$. Докажите, что стороны связаны соотношением $\dfrac{3}{a+b+c}=\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}$.

33. Постройте прямоугольный треугольник по высоте, опущенной на гипотенузу, и периметру.

34. Решите систему уравнений $\begin{cases}x_1=\sqrt{x_2^2-x_1},\\x_2=\sqrt{x_3^2-x_2},\\\dots\dots\dots\\x_{1994}=\sqrt{x_1^2-x_{1994}}.\end{cases}$

35. Докажите, что многочлен $x^{1994}+x^{1993}+\ldots+1$ делится на $x^{398}+x^{397}+\ldots+1$.

36. Докажите, что $11^{10^{1993}}-1$ делится на 10^{1994}.

37. Дано квадратное уравнение: $(2a+1)x^2-ax+a-2=0$. При каких значениях a:

1) корни уравнения имеют разные знаки;

2) один из корней больше единицы, а другой меньше?

38. НОД(a, b) — наибольший общий делитель, НОК(a, b) — наименьшее общее кратное чисел a и b. Докажите, что

$$a+b \leqslant \text{НОД}(a,b)+\text{НОК}(a,b).$$

39. Что больше: $1995^{1993}\cdot 1993^{1995}$ или $1994^{2\cdot 1994}$?

40. Докажите, что функция $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$ определена для любого действительного x и является нечётной, т. е. $f(-x)=-f(x)$.

41. Разложите $2^{1994}+1$ на два натуральных множителя, каждый из которых не меньше 1000.

42. Числа a, b, c таковы, что $a>0$, $b>a+c$. Докажите, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных корня.

9-й класс

43. Найдите последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющую условиям: $x_1=1$, $x_{m+n}=x_m+x_n+mn$. Найдите $\sum\limits_{i=1}^{1994}\dfrac{1}{x_i}$.

44. Даны четыре отрезка a, b, c, d. Постройте с помощью циркуля и линейки отрезок $x=\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$.

45. Квадратный корень из двузначного числа имеет одинаковые первые четыре цифры (т. е. имеет вид $a,aaa\ldots$). Найдите это число, не пользуясь таблицами.

46. Отец Фёдор построил три свечных заводика в Самаре, сырьё для которых в количестве 60 тонн поровну находится на двух складах, удалённых от первого завода на 5 и 6 км, от второго на 6 и 5 км, от третьего на 6 и 3 км соответственно.

а) Как наиболее выгодно должен отец Фёдор организовать перевозку сырья, если потребности первого завода 20 тонн, второго 25 тонн, третьего 15 тонн?

б) Как наиболее выгодно для себя должен организовать перевозку водитель Адам Козлевич, если его зарплата прямо пропорциональна тонно-километрам?

47. Решите уравнение $x^3-(a+2)x+\sqrt{a+1}=0$.

48. См. задачу 22.

49. Докажите, что решение функционального уравнения $f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x)$ есть функция периодическая.

50. См. задачу 67(б).

51. Решите уравнение $x^3-[x]=3$. ($[x]$ — целая часть x.)

52. Докажите, что $19^{1993}+93^{1993}$ делится на 56.

53. Докажите, что $\cos 1°$ — число иррациональное.

54. Коэффициенты уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$ по модулю не превосходят 1993. Может ли это уравнение иметь корень, больший 1994?

10-й класс

55. Докажите, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{11}+4\sin\frac{3\pi}{11}=\sqrt{11}$.

56. При каких значениях a уравнение $x=a\{x\}$ имеет не более 1994 решений? ($\{x\}$ — дробная часть x.)

57. Назовём близнецами два простых числа с разностью, равной двум. Докажите, что если p и q — близнецы, то p^p+q^q кратно $p+q$.

58. Решите неравенство $\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}\leqslant 2x+9$.

59. Даны два отрезка: a и b. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок $x=\sqrt[4]{a^4+b^4-a^2b^2}$.

60. Найдите три последние цифры числа $3^{1994}\cdot 17^{1995}$.

61. Найдите наибольшее и наименьшее значения решения уравнения

$$\begin{cases} f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot\cos y, \\ f(0)=a, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=b. \end{cases}$$

62. Постройте график функции $y=\frac{1}{e^{\operatorname{tg}x}-1}$.

63. Задана функция $y=\min\{x^2, x^3\}$. Найдите все значения x, при которых $y'(x)\geqslant 1$.

64. См. задачу 67(б).

65. Каждая точка плоскости окрашена в один из трёх цветов. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.

11-й класс

66. Решите уравнение: $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$.

67. К числу 19931992 приписать справа: *а*) три цифры; *б*) две цифры; *в*) одну цифру так, чтобы полученное число делилось бы на 19 и 94.

68. См. задачу 60.

69. Вычислите $\sum\limits_{m=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{m} l^2$.

70. Докажите неравенство: $\frac{\log_b a^2}{a+b} + \frac{\log_c b^2}{b+c} + \frac{\log_a c^2}{c+a} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$, где a, b и c — положительные числа, расположенные на числовой прямой по одну сторону от 1.

71. Через диагональ грани куба постройте сечение, равновеликое грани.

72. Решите неравенство: $x^3 - (a+2)x + \sqrt{a+1} \leqslant 0$.

73. Найдите все решения уравнения $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, имеющие непрерывную производную.

74. Докажите, что на плоскости не существует равнобедренного треугольника с углом при вершине 45°, вершины которого находятся в точках с целочисленными координатами.

75. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(2+\sqrt{2}\right)^n\right\}$. ($\{z\}$ — дробная часть z.)

76. Докажите, что $19^{1993} + 93^{1993}$ делится на 7 и 8.

САММАТ - 95

8-й класс

77. Решите уравнение: $x^4 - 2x^3 + 6x - 9 = 0$.

78. Найдите a, b, c, если $\overline{abc}_5 = \overline{cba}_8$.

79. С помощью одной линейки проведите прямую, параллельную основаниям данной трапеции, так, чтобы её отрезок, заключённый внутри трапеции, делился диагоналями на три равные части.

80. Постройте трапецию по её боковым сторонам, углу между продолжениями боковых сторон и углу между диагоналями.

81. Докажите, что многочлен $x^{1994}+x+1$ можно представить в виде произведения двух многочленов, каждый из которых имеет степень не ниже первой.

82. На доске в декартовой системе координат была построена парабола $y=x^2$. На перемене кто-то стёр систему координат, оставив параболу. Требуется восстановить систему координат. используя только циркуль и линейку.

83. Постройте график функции $y=\left|\frac{5}{7}\cdot\frac{(x-a)^7-x^7+a^7}{(x-a)^5-x^5+a^5}-a^2\right|$.

9-й класс

84. Докажите, что при любом натуральном n имеет место неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$.

85. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 2. Найдите углы треугольника, зная, что наименьшая возможная сумма расстояний от точки внутри треугольника до его вершин равна $\sqrt{7}$.

86. Решите систему уравнений: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=x+y+z=\frac{13}{3}$; $xyz=1$.

87. Пусть ABC — треугольник со сторонами a, b, c, высотами h_a, h_b, h_c и площадью S. Докажите, что $S=\frac{abc(h_a+h_b+h_c)}{2(ab+bc+ca)}$.

88. Три однозначных числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию. Числа a, ab, cc также образуют арифметическую прогрессию. Найдите a, b, c.

89. Решите систему уравнений: $y^4+xy^3-2x^3=0$; $x+y=6$.

90. Постройте график функции

$$y=\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{x^3-3x-\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}}{2}}.$$

10-й класс

91. К трёхзначному числу справа приписано число на единицу больше. Найдите это трёхзначное число, зная, что полученное в результате приписывания число есть полный квадрат.

92. Вычислите $\arcsin(x-1)+2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$ при $0<x\leqslant 2$.

93. Число, кратное 35, в системе счисления с двузначным основанием записано в виде 1234. Найдите это число.

94. Дана функция $y=\sqrt{x+2\left(1+\sqrt{x+1}\right)}+\sqrt{x+2\left(1-\sqrt{x+1}\right)}$. Исследуйте и постройте график.

95. Докажите теорему: уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$ с действительными коэффициентами имеет чисто мнимый корень тогда и только тогда, когда $ad=bc$ и $ac>0$.

96. Что больше: $\frac{2}{201}$ или $\ln\frac{101}{100}$?

97. Найдите все непрерывные функции $f(x)$, если $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$ *а*) $f^2(x+y)=f^2(x)+f^2(y)$; *б*) $f^2(xy)=f^2(x)+f^2(y)$.

98. Докажите, что любое сечение куба плоскостью, проходящей через центр куба, имеет площадь, не меньшую площади грани куба.

11-й класс

99. Сумма длин боковых рёбер правильной пирамиды равна периметру основания. Найдите угол между смежными боковыми гранями пирамиды.

100. Упростите выражение ($x<-1$)

$$3\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}\frac{x^2-1}{2x}-\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2\left(1+x^2\right)}}.$$

101. Докажите, что уравнение $x^5-2x^3+2x+c=0$ ни при каком $c\neq 0$ не может иметь пять действительных корней.

102. Пусть 2α, 2β, 2γ – углы треугольника. Докажите, что

$$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+5}\leqslant 4\sqrt{3}.$$

103. См. задачу 3 для 1995-ти чисел.

104. Найдите все значения параметра a, при которых наибольшее значение функции

$$y=\left(a+2-\log_2(2+3\sqrt{4x-x^2})\right)\log_2(2+3\sqrt{4x-x^2})+a^2-3a+1$$

равно 3.

105. Что больше: *а*) $\log_3 16$ или $\log_{16} 729$; *б*) $\log_3 5$ или $\log_2 3$?

САММАТ - 96

8-й класс

106. Известно, что $a+b+c=1996$, $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=1$. Найдите $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$.

107. На доске написано число 97. Каждую секунду число на доске умножают на сумму его цифр. Какая цифра окажется на 1996-м месте от правого конца числа ровно через час?

108. Али–Баба пришёл в пещеру, где есть золото, алмазы и сундук, в котором их можно унести. Полный сундук золота весит 200 кг, полный сундук алмазов — 40 кг, пустой сундук ничего не весит. Килограмм золота стоит на базаре 20 динаров, килограмм алмазов — 60 динаров. Али–Баба может поднять и унести не более 100 кг. Сколько денег он может получить за сокровища, которые он принесёт из пещеры за один раз?

109. Внутри квадрата $ABCD$ находится точка O, причём $\angle OAB=\angle OBA=15°$. Докажите, что треугольник OCD — равносторонний.

110. Число 1996^{1995} разбили на 1994 целых слагаемых, возвели эти слагаемые в куб, сложили, и полученную сумму разделили на 6. Какой получился остаток?

111. Вычислите $\frac{1996}{199619961996^2-199619961995\cdot 199619961997}$.

112. Сколько есть делящихся на 9 десятизначных натуральных чисел, в десятичной записи которых участвуют только цифры 0 и 5?

113. Докажите, что если числа a, b и c таковы, что их сумма равна нулю, то $ab+bc+ca$ будет числом неположительным.

114. Решите уравнение в целых числах: $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{10}{7}$.

115. Из квадратного листа бумаги в клетку, содержащего целое число клеток, вырезали квадрат, содержащий целое число клеток, так, что осталось 1996 клеток. Сколько клеток мог содержать исходный лист бумаги?

9-й класс

116. Найдите все многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что $P(1995)=19^{96}$, $P(1997)=96^{19}$.

117. Решите уравнение $\left(x+2-2\sqrt{x+1}\right)^{1/2}+\left(x+5-4\sqrt{x+1}\right)^{1/2}=1$.

118. Два тела движутся по сторонам OX и OY прямого угла XOY со скоростями v_1 и v_2 по направлению к вершине O. В начале движения тело 1 находилось в точке $(a, 0)$, а тело 2 — в точке $(0, b)$, $a>0$, $b>0$. Найдите наименьшее расстояние между телами 1 и 2. (Дойдя до точки O, тела не останавливаются, а продолжают двигаться в том же направлении.)

119. Известно, что корнями квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ являются $x_1=\frac{c-a-b}{2a}$ и $x_2=\frac{a-b-c}{2a}$. Докажите, что один из корней по модулю равен 1.

120. Докажите, что если при любом x справедливо равенство $f(x+c)=\frac{f(x)+3}{1-f(x)}$, то $f(x)$ — периодичсская функция.

121. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причём $\angle BAM=\angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

122. Члены арифметической (a_n) и геометрической (b_n) прогрессий удовлетворяют условиям: $a_{30}=\sqrt{b_{10}b_{50}}$, $a_{40}+a_{100}=2b_{70}>0$. Что больше: a_{50} или b_{50}?

123. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до n. Разрешается к любым двум числам добавлять 1. Можно ли, применив эту операцию несколько раз, все числа сделать равными, если

а) $n=10$; б) $n=1996$?

124. Целые числа a, b и c таковы, что для некоторого натурального n многочлен $x^n + ax^2 + bx + c$ делится на $x^2 + x + 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca + 1$.

125. См. задачу 110 для числа 1994^{1995} и 1996-ти слагаемых.

10-й класс

126. Вычислите $\sum\limits_{k=-1996}^{1996}\frac{1}{3^k+1}$.

127. Найдите множество всех пар чисел (a, b), для каждой из которых при всех x справедливо равенство $a(\cos x - 1)+b^2 = \cos(ax + b) - 1$.

128. См. задачу 107 для числа 13.

129. Последовательность (x_n) такова, что $x_1=\alpha$, $x_{n+1}=x_1x_2\ldots x_n+1$. При каких действительных α в этой последовательности встретятся по крайней мере два равных члена?

130. Решите неравенство $\left(x+2-2\sqrt{x+1}\right)^{1/2}+\left(x+6-4\sqrt{x+2}\right)^{1/2}\leqslant 1$.

131. Найдите минимальное значение выражения $(x+y)(y+z)$, где $x, y, z > 0$ и $xyz(x+y+z)=1$.

132. В треугольнике ABC угол B равен $60°$, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что $OD=OE$.

133. Решите неравенство $\cos\left(x+3\operatorname{tg} y\right)+\left(\operatorname{tg} y-\operatorname{tg}^2 y\right)^2 \leqslant -1$.

134. См. задачу 110 для числа 1995^{1996} и 1994-х слагаемых.

135. Найдите наименьшее натуральное a, при котором уравнение $(ax)^2+(x^2-1996)(x-a)^2=0$ имеет не более двух решений.

11-й класс

136. Докажите, что функция $f(x)=\cos x+\cos\left(\sqrt{1996}\cdot x\right)$ не является периодической.

137. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_y\left|\log_y x\right| = \log_x\left|\log_x y\right|, \\ \lg^2 x+\lg^2 y=2. \end{cases}$

138. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 1/1996, если известно, что: *а*) среди чисел есть хотя бы два не равных между собой; *б*) все числа попарно различны?

139. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)$.

140. См. задачу 110 для числа 1996^{1996} и 1996-ти слагаемых.

141. Два тела движутся по сторонам OX и OY угла $XOY=\alpha$ со скоростями v_1 и v_2 по направлению к вершине O. В начале движения тело 1 находилось на расстоянии a от точки O, а тело 2 — на расстоянии b. Найдите наименьшее расстояние между телами 1 и 2.

142. Отрезки AB и CD — диаметры одной окружности. Из точки M этой окружности опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и CD соответственно. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M.

143. Решите неравенство $\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}+\sqrt[3]{x-c}\geqslant 0$, где a, b, c — параметры.

144. Пусть f, g, h — решения функционального уравнения

$$f(x+y)=g(x)+h(y),$$

имеющие непрерывную производную, причём $g(19)=h(96)$ и $g(96)=h(19)$. Докажите, что функция $f(x)$ — периодическая, и найдите её наименьший период.

145. При каких действительных a уравнение $\frac{x^3}{a} + 3x + a - 1 = 0$ имеет три действительных корня (возможно совпадающих)?

САММАТ - 97

8-й класс

146. Решите в натуральных числах уравнение $19x + 97y = 1997$.

147. В верхних углах доски 3×3 клетки находятся два белых шахматных коня, а в нижних углах той же доски стоят два чёрных шахматных коня. За какое наименьшее число ходов чёрные и белые кони могут поменяться местами?

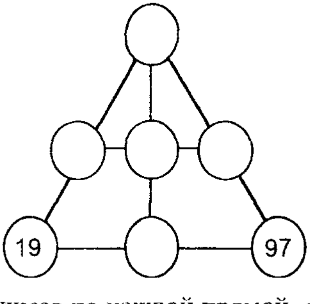
148. Решите систему: $\begin{cases} |x-1|+|y+1|=1, \\ |x+y|+|x-y|=2. \end{cases}$

149. Найдите 1997 знаков после запятой у числа $\sqrt{0,\underbrace{999...9}_{1997\text{ раз}}}$.

150. Докажите, что сумма трех последовательных степеней числа 3 делится на 13.

151. Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Коэффициенты a, b, c таковы, что $b^2 < (a + c)^2$ и $c^2 < bc \quad ac$. Докажите, что это уравнение имеет два различных корня, причём оба корня не являются целыми числами.

152. На основании AC равнобедренного треугольника ABC выбрали точку D, а на его продолжении за вершину C — точку E, причём $AD = CE$. Докажите, что $BD + BE > AB + BC$.



153. Пятизначное число A записывается только двойками и тройками, а пятизначное число B — только тройками и четвёрками. Может ли произведение AB записываться одними двойками ?

154. Семь кругов расположены в виде треугольника, как показано на рисунке. В нижних углах треугольника записаны числа 19 и 97. Расставьте в остальных кругах натуральные числа таким образом, чтобы сумма чисел по каждой прямой, содержащей 3 круга, была одна и та же. Сколько существует возможных расстановок?

155. Докажите, что для любого действительного числа α разность $\frac{[\alpha]}{1997}-\left[\frac{\alpha}{1997}\right]$ может принимать только следующие значения 0, $\frac{1}{1997}$, $\frac{2}{1997}, \dots, \frac{1996}{1997}$. (Здесь $[\alpha]$ — целая часть α.)

9-й класс

156. Найдите $[x]$ — целую часть x, если $x=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{1997^2}$.

157. Докажите, что сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел делится на 9.

158. Расположите числа в порядке возрастания:

$$x_1=\frac{19}{97},\ x_2=\frac{1918}{9797},\ x_3=\frac{191919}{979796}.$$

159. Пять лет прошло с тех пор, как 20% от пятитысячной гвардии самарских нумизматов были вовлечены в лапы трёх быстро растущих инвестиционных компаний: АО "МММ", "Русский Дом Селенга" (РДС) и "Русская Недвижимость" (РН). Из них 440 человек стали вкладчиками АО "МММ", 425 человек - вкладчиками "РДС" и 300 человек - вкладчиками "РН". 65 нумизматов отдали деньги одновременно в АО "МММ" и в "РДС". 40 - одновременно в АО "МММ" и в "РН" и 75 – в "РДС" и "РН". Сколько нумизматов состоит в обществе трижды обманутых вкладчиков?

160. Дана система с двумя неизвестными $\begin{cases}[x]=[y],\\ |x|+|y|=a.\end{cases}$

При каких a система имеет не более двух решений?

161. Найдите все однозначные числа x, y, удовлетворяющие неравенствам: $\frac{7}{9}<\frac{x}{y}<\frac{8}{9}$.

162. Докажите, что биссектрисы углов прямоугольника, пересекаясь, образуют квадрат.

163. Пусть α — корень уравнения $x^2+px+q=0$, β — корень уравнения $x^2-px-q=0$ (p, q - вещественные, $q\neq 0$).

Докажите, что уравнение $x^2+2px+2q=0$ имеет вещественный корень, заключенный между α и β.

164. Фирма *"Рога и копыта"* приобрела счётную машинку, которая производит только одну операцию $a*b=1-\frac{a}{b}$. Однако Остап Бендер научился с её помощью производить четыре арифметических действия. Как?

165. Докажите, что если стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, то её разность равна радиусу вписанной окружности.

10-й класс

166. Решите уравнение $\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\ldots}}}=1997$.

167. Найдите функцию $f(x)$, определённую для всех $x\neq 1$ и удовлетворяющую уравнению $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=2f(x)+x^2$.

168. С помощью циркуля и линейки постройте квадрат, две вершины которого лежат на данной окружности, а сторона, содержащая две другие его вершины, касается этой же окружности.

169. Решите неравенство $x^2-4[x]+3\geqslant 0$, где $[x]$ — целая часть числа x.

170. Дана последовательность однозначных чисел, в которой известны первые четыре числа

$$6,\ 1,\ 3,\ 7,\ \ldots$$

Каждый очередной член последовательности есть последняя цифра суммы предыдущих четырёх членов. Докажите, что в этой последовательности встретится следующая комбинация цифр 1, 9, 9, 7.

171. Решите в целых числах уравнение $(x+1)(x^2+1)=y^3$.

172. Найдите все тройки действительных чисел a, b, c таких, что

$$a+\sqrt{a^2-bc}=b+\sqrt{b^2-ca}=c-\sqrt{c^2-ab}.$$

173. Было 13 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 3 части, некоторые из вновь полученных листов снова разрезали на 3 части. После тщательного подсчета всего оказалось 132 листа. Сколько листов бумаги разрезали? Найдите хотя бы одно решение.

174. Пусть x, y — решения неравенства

$$\sqrt{\cos(x-y)-\sin(x+y)-2}\leqslant\sqrt{3}.$$

Найдите все значения, которые может принимать следующее выражение:

а) $\cos(x-y)+\sin(x+y)$;

б) $\sin\left(x+\dfrac{y}{2}\right)+\cos\left(\dfrac{x}{2}+y\right)$.

175. Докажите, что биссектрисы внешних углов прямоугольника, пересекаясь, образуют квадрат.

11-й класс

176. Решите уравнение $315^x + 1972^x = 1997^x$.

177. Найдите все точки на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $\min\left(x^2, y\right) + \max\left(x, y^2\right) = 2$.

178. Известный археолог Кирилл Володин при раскопках в Жигулевских горах обнаружил древний научный манускрипт, в котором учёным доказана следующая теорема, переведённая на современный язык:

«Разность между трёхзначным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, является полным квадратом натурального числа. Таких чисел суть столько, что все их можно расположить в три ряда, не более чем по три числа в каждом.»

Удалось установить, что система летоисчисления у этого народа современная, и в конце этого научного сообщения стоит дата: июль 2742 года. Мог ли ученый во время доказательства любоваться с Жигулевских гор видами г. Самары?

179. При каких значениях a, b, c система

$$\begin{cases} |x-a| + |y-a-1| = c, \\ \left|x+y-b-b^2\right| + \left|x-y+b-b^2\right| = \dfrac{3}{4} - c \end{cases}$$

имеет единственное решение?

180. Найдите целую часть числа $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}$.

181. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через вершину A, середину ребра BC и центр грани DCC_1D_1. Найдите площадь сечения и узнайте, в каком отношении секущая плоскость разбивает объём куба.

182. Найдите обратную функцию, если

$$y = \begin{cases} x, & x < -1, \\ \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4}, & -1 \leqslant x < 1, \\ x^3, & 1 \leqslant x < 3, \\ 3^x, & x \geqslant 3. \end{cases}$$

183. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}$.

184. См. задачу 170.

185. Решите неравенство $(4x^3 - 8)(3^{\sin x} - 1) + (2^{x^3} - 4)\sin x > 0$.

Олимпиада 1993 года

4-й класс

186. Для награды победителей олимпиады приобретены 4 книги Все книги без первой стоят 840 рублей, без второй — 800 рублей, без третьей — 760 рублей, без четвертой — 720 рублей. Какова стоимость каждой книги?

187. Вычислите $2379 \cdot 23782378 - 2378 \cdot 23792379$.

188. Докажите, что из натуральных чисел от 1 до 1000 нельзя выбрать 71 число так, чтобы их сумма равнялась сумме остальных чисел.

189. Делимое в шесть раз больше делителя, а делитель в шесть раз больше частного. Чему равны делимое, делитель и частное?

190. Катя, Соня, Галя и Тамара родились 2 марта, 17 мая, 2 июля и 20 марта Соня и Галя родились в одном месяце, а у Гали и Кати день рождения обозначается одинаковыми числами. Кто какого числа и в каком месяце родился?

9-й класс

191. Докажите (без использования вычислительной техники), что произведение $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9999}{10000}$ меньше 0,01.

192. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2+4x-2|x-a|+2-a=0$ имеет ровно два решения.

193. Вычислите $\sqrt{\underbrace{11\ldots1}_{1996}-\underbrace{22\ldots2}_{998}}$.

194. Разложите на множители $2x-6y-\sqrt{xy}$.

195. Через центр квадрата проведена прямая. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин квадрата до этой прямой не зависит от положения прямой.

196. Даны четыре положительных числа, ни одно из которых не делится на 4. Докажите, что среди них найдутся хотя бы два числа, разность которых делится на 4.

197. Начертите два четырехугольника так, чтобы один был расположен внутри другого, и сумма диагоналей внутреннего четырехугольника была больше суммы диагоналей внешнего четырехугольника.

Олимпиада 1994 года

8-й класс

198. Найти последнюю цифру числа $19^{19!} + 94^{94!}$.

199. Имеются два сосуда ёмкостью 9 и 11 литров. Как, используя их, налить из крана 10 литров воды в 11-литровый сосуд?

200. При каких натуральных n число $6^n - 5^n$ является точным квадратом?

201. Решите в натуральных числах уравнение

$$(xz)^2 + 6(yt)^2 = 2(yz)^2 + 3(xt)^2.$$

202. В десятичной системе счисления разность между трёхзначным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, не может быть квадратом натурального числа. Докажите.

203. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и медиане, проведённой к этой стороне.

204. Докажите, что

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) \dots (1 + x^{2048}) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{4095}.$$

205. Найдите необходимое и достаточное условие того, чтобы дробь $\dfrac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}$ не зависела от x.

9-й класс

206. Докажите, что число

$$\sqrt{\underbrace{444\ldots4}_{1994}-11\cdot\underbrace{444\ldots4}_{997}+9}$$

целое, и найдите это число.

207. Разрежьте правильный шестиугольник на восемь равных частей. (Если возможно, приведите несколько решений.)

208. Корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, у которого $p + q = 198$, являются целыми числами. Найдите эти корни.

209. Сколько решений в целых числах имеет неравенство

$$1917 \leqslant |x| + |y| \leqslant 1994.$$

210. Найдите пятую цифру после запятой следующей суммы
$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{9}{10!},$$
записанной в десятичной форме.

211. Постройте график функции
$$y=\frac{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-1/2}+\dfrac{1}{x-1/3}}{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{2x-1}+\dfrac{3}{3x-1}}.$$

212. В некоторой системе счисления взято число вида
$$10\underbrace{11\ldots1}_{n}101.$$
Известно, что это число, будучи записано в десятичной системе счисления, при любом натуральном n делится на 61. При каком наименьшем основании системы счисления это возможно?

213. Докажите тождество
$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

10-й класс

214. На плоскости проведена окружность с центром O радиуса 1. Две соседние вершины квадрата лежат на этой окружности. На каком наибольшем расстоянии от точки O могут лежать две другие его вершины?

215. Коэффициенты a, b, c, d, e уравнения
$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$
по модулю не превосходят 1994. Может ли это уравнение иметь корень, больший 1995?

216. Постройте график функции
$$y=\lim_{n\to\infty}\underbrace{f(f\ldots(f(x))\ldots)}_{n\text{ раз}},\ \text{где}\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

217. Докажите, что если рациональные числа a и b связаны равенством $a^{2n-1}+b^{2n+1}=2a^nb^n$, то $1-ab$ есть квадрат рационального числа.

218. Что больше: $\operatorname{tg}50°-\operatorname{tg}40°$ или $\frac{\pi}{18}$?

219. С помощью одной линейки, разделите трапецию на две равновеликие части. (Линейкой можно проводить прямые.)

220. Можно ли замостить шашечную доску 10×10 плитками 4×1?

221. Решите уравнение: $\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}(x-1)=\frac{\pi}{12}$.

11-й класс

222. Докажите, что $x+2^x=y+2^y \Leftrightarrow x+\sin x=y+\sin y$.

223. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2=x_3^2, \\ x_2+x_3=x_4^2, \\ x_3+x_4=x_5^2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{1992}+x_{1993}=x_{1994}^2, \\ x_{1993}+x_{1994}=x_1^2, \\ x_{1994}+x_1=x_2^2. \end{cases}$$

224. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\cdot\pi}{n}\right)$.

225. Найдите непрерывные функции $f(x)$, $g(x)$, если известно, что они для любых x и y удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\begin{cases} f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y), \\ g(x+y)+g(x-y)=2g(x)f(y). \end{cases}$$

226. Что больше: $\log_2 3$ или $4-\sqrt{6}$?

227. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ удовлетворяет соотношению $a_n=a_{n-1}\cdot a_{n-3}$. Найдите a_{1994}, если $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=-1$.

228. См. задачу 220.

229. С помощью циркуля и линейки постройте радиус данного шара.

Летняя школа 1994 года

8–9-е классы

230. Сколько имеется четырёхзначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

231. Докажите. что выражение $\frac{k}{3}+\frac{k^2}{2}+\frac{k^3}{6}$ принимает только целые значения при любом целом k.

232. В ожесточенном бою 70 из 100 пиратов потеряли один глаз, 75 — один зуб, 80 — свернули шею и 85 — сломали нос. Каково минимальное число пиратов, потерявших глаз, зуб, свернувших шею и сломавших нос одновременно?

233. Лёва, Коля, Миша и Петя решили на экскурсии в Москве позавтракать в разных местах: в кафе, в закусочной, в столовой и в буфете. После завтрака выяснилось, что все они пили разные напитки: кофе, молоко, ряженку и чай. В столовой не было ряженки, в буфете было только молоко. Петя сказал, что был в столовой и пил там не чай, Лёва сказал, что он пил не ряженку, а Миша не был ни в закусочной, ни в буфете. Кто и где завтракал и что пил за завтраком, если в каждом из мест питания было только по одному напитку?

234. Как-то ребята отправились в лес по грибы. Когда они решили развести костер и выбрать костровых, стали бросать жребий. Ребята гадали кому он выпадет: Борис и Андрей, Андрей и Володя, Андрей и Галя, Галя и Даша, Даша и Сережа. Когда жребий бросили, то оказалось, что в четырех из этих предположений одно имя было угадано правильно, а еще в одном предположении оба имени названы неверно. Кто были костровыми?

235. Существуют ли треугольники, у которых середины трех высот лежат на одной прямой?

236. Докажите, что сумма трех последовательных натуральных чисел не может являться точным квадратом.

237. Найдите центр круга, пользуясь чертёжным треугольником.

238. Могут ли две хорды окружности, не являющиеся диаметрами, точкой пересечения взаимно делиться пополам?

239. Являются ли числа 5^{6^7} и 5^{7^6} точными квадратами?

240. Что больше: $\frac{37}{67}$ или $\frac{377}{677}$?

241. Где расположены все точки, равноудалённые от четырёх сторон ромба?

242. Разделите 90 на две части так, чтобы 40% одной части были на 15 больше 30% другой части.

243. Каким наименьшим числом плоскостей можно ограничить часть пространства?

244. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x+y|=1, \\ |x|+|y|=2, \end{cases}$$

при условии, что $x > y$.

10–12-е классы

245. Имеется p белых и q чёрных шаров. Сколькими способами можно выложить в ряд все шары так, чтобы никакие 2 черных шара не лежали рядом?

246. В квадратном уравнении $x^2 + px + q = 0$ свободный член q изменился на d. Оцените, на сколько изменятся корни уравнения.

247. При каких натуральных x многочлен $P(x) = x^4 + x^2 + 1$ принимает простые значения?

248. На контрольной работе по математике надо было решить 3 задачи: одну — по алгебре, одну — по арифметике и одну — по геометрии. Контрольную работу писали 36 учеников. На следующий день учитель сказал, что во всех работах была решена хотя бы одна задача, но среди этих работ не было ни одной, в которой были бы решены и алгебраическая, и геометрическая задачи. Кроме того, учитель сказал следующее:

а) число ребят, решивших геометрическую задачу, было на 4 меньше числа ребят, решивших алгебраическую;

б) сумма удвоенного числа ребят, решивших только геометрическую задачу, и утроенного числа ребят, решивших только алгебраическую задачу, равна 12;

в) число ребят, решивших алгебраическую задачу, в два раза меньше суммы числа 6 и числа тех ребят, которые из двух задач — арифметической и геометрической — решили хотя бы одну.

Учитель сказал, что тем, кто решил две задачи, он поставит оценку 4, а остальные, решившие только одну задачу, получат оценку 3. Сколько будет "четвёрок" за контрольную работу?

249. Найдите огибающую семейства кривых $l(c)$:

$$b(c^2 - 1)x + 2cay + ab(c^2 + 1) = 0,$$

b — заданные положительные числа.

250. Докажите, что если из какой-либо точки M, лежащей на строфоиде, провести к ней две касательные, касающиеся кривой в точках P и Q, то точки M, P и Q будут лежать на окружности, проходящей через начало координат.

251. Известно, что линейная функция $f(x, y, z)$ трёх переменных x, y, z в точке $A(1/8, 1/8, 1/8)$ принимает свое минимальное значение в тетраэдре $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x + y + z \leqslant 1$. Вычислите значение функции f в угловых точках тетраэдра.

Олимпиада 1995 года

10-й класс

252. См. задачу 221.

253. Найдите все арифметические прогрессии, у которых $\forall N \geqslant 1$ сумма N первых членов равна N^2.

254. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин куба до любой прямой, проходящей через его центр, не зависит от выбора прямой.

255. Докажите справедливость равенства

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{1995\text{ раз}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{1996}}.$$

256. Докажите, что уравнение $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ имеет корни $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}$.

257. Пусть $f(x)$ — непрерывное решение функционального уравнения

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)},$$

где $a \neq 0$ — фиксированная действительная постоянная. Докажите, что $f(x)$ — периодическая функция.

258. Найдите многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, обращающийся в нуль при $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}$, $x = \sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

259. Какое наибольшее значение может принимать $|z|$, если известно, что комплексное число z удовлетворяет условию $\left|z+\frac{1}{z}\right| = 1$.

11-й класс

260. Решите уравнение

$$\sqrt{4-x^2}+\sqrt{1+4x}+\sqrt{x^2+y^2-2y-3} = \sqrt{x^4-16}-y+5.$$

261. Докажите, что при всех допустимых неотрицательных x_1, x_2, ..., x_{1995}

$$x_1\sqrt{1-x_2}+x_2\sqrt{1-x_3}+\ldots+x_{1994}\sqrt{1-x_{1995}}+x_{1995}\sqrt{1-x_1} < \frac{1995}{2}.$$

262. Найдите предел последовательности, заданной рекуррентной формулой

$$\begin{cases} y_{n+1} = a\sin y_n, \\ y_1 = x, \end{cases} \qquad n \geqslant 1; \quad a \in [0;\ 1].$$

263. Укажите все вещественные числа a, для которых уравнение

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

имеет по крайней мере одно вещественное решение.

264. Найдите функцию $f(x)$, ограниченную на любом конечном интервале, удовлетворяющую функциональному уравнению

$$f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = x - x^2.$$

265. Любое сечение ограниченного тела плоскостью — круг. Докажите, что это тело — шар.

266. Дан треугольник и две точки внутри него. Как кратчайшим путем пройти из одной точки в другую, побывав на каждой стороне треугольника?

12-й класс

267. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

268. Пусть $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^2-1 \end{vmatrix}$. Докажите, что найдётся число $c \in (0,\ 1)$ такое, что $f'(c) = 0$.

269. Вычислите $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{1995}$.

270. Вычислите кратчайшее расстояние от окружности $x^2 + y^2 = 5$ до прямой $y = -2x + 10$.

271. Найдите периодические решения $y = y(x)$ уравнения

$$y(x) = 0{,}5\, y(x - 2\pi) + \sin x.$$

13-й класс

272. Постройте график функции

$$f(x)=\int\limits_0^x \cos t^2\,dt.$$

273. Что больше:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{36}} \quad \text{или} \quad 1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{27}}?$$

274. Вычислите $\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$.

275. Найдите координаты фокуса параболы $y = ax^2 + bx + c$.

276. Найдите предел последовательности

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2+\frac{1}{3},\ x_{n+1} = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x_{n-1}}},\ n \geqslant 2.$$

277. Найдите площадь поверхности

$$z^2 = 2xy,$$

расположенную внутри цилиндра

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Олимпиада 1996 года

6-й класс

278. На озере расцвела одна лилия. Каждый день число цветков удваивалось, и на 20-й день всё озеро покрылось цветами. На который день покрылась цветами половина озера?

279. Выясните, является ли число $19^{96} + 4$ простым.

280. Петя Иванов придумал новую теорему: число $n^2 + n + 1$ — простое при каждом натуральном n. Сможет ли он доказать свою теорему?

281. Шифр устроен следующим образом: каждой цифре сопоставлено по три буквы (см. таблицу), а знаку * две буквы и пробел.

Таблица.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*
а	г	ж	й	м	п	т	х	ш	ы	ю
б	д	з	к	н	р	у	ц	щ	ь	я
в	е	и	л	о	с	ф	ч	ъ	э	

Попробуйте расшифровать следующую запись:

5343934*150413*6*414724144414*8156215044414*305041080.

282. Найдите все натуральные числа n, для которых число $n^2 + 1$ делится на $n + 1$.

283. Действительное число x удовлетворяет уравнению

$$(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) = \tfrac{1}{2}x.$$

Докажите, что $x < 0$.

284. В треугольнике ABC сторона AC — наименьшая. На ней выбрана произвольная точка P. Докажите, что

$$BP > \frac{AB + BC - AC}{2}.$$

285. На чудо-яблоне садовник вырастил 25 бананов и 30 апельсинов. Каждый день он срывает два плода, и на их месте вырастает новый, причём если он срывает два одинаковых фрукта, то вырастает апельсин, а если два разных, то вырастает банан. Каким может оказаться последний фрукт на этом дереве?

286. Найдите все пары целых чисел a и b такие, что $ab = 1996a + b$.

287. Рассмотрим полный набор косточек домино, в котором числа на половинках косточек могут принимать значения от 0 до n. Какое наибольшее число косточек может быть выложено в соответствии с правилами?

7-й класс

288. Поезд проходит тоннель длиной 500 метров за 30 секунд, а мимо столба он проходит за 5 секунд. Найдите длину и скорость поезда

289. Мальчик прошёл 3/8 моста и услышал, что к мосту приближается автомобиль со скоростью 60 км/ч. Если мальчик побежит назад, то встретится с автомобилем в начале моста, если же он побежит вперёд, то автомобиль настигнет его в конце моста. С какой скоростью бегает мальчик?

290. Восстановите действия:

$$\begin{array}{r|l}
-\,{*}\,2\,{*}\,5\,{*} & 3\,2\,5 \\ \cline{2-2}
{*}\,{*}\,{*}\phantom{\,{*}\,{*}} & 1\,{*}\,{*} \\ \cline{1-1}
-\,{*}\,0\,{*}\,{*}\phantom{\,{*}} & \\
{*}\,9\,{*}\,{*}\phantom{\,{*}} & \\ \cline{1-1}
-\,{*}\,5\,{*} & \\
{*}\,5\,{*} & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

291. Придя на урок математики, ученики седьмого класса обмениваются рукопожатиями. Всего было сделано 55 рукопожатий. Сколько учеников отсутствовало на уроке, если в классе 25 человек?

292. Имеются 6 одинаковых по виду монет. Четыре из них настоящие, по 4 г каждая, а две фальшивые общим весом 8 г, одна чуть более тяжёлая, другая чуть полегче. Как с помощью четырёх взвешиваний на чашечных весах (без гирь) определить обе фальшивые монеты?

293. Докажите, что если произведение трёх положительных чисел равно единице, а сумма этих чисел строго больше суммы их обратных величин, то ровно одно из этих чисел больше единицы.

294. Можно ли сократить дробь $\frac{111n+5}{64n+3}$ при каком-нибудь целом n, и если да, то на какое число?

295. Выразите единицу, используя все десять цифр и операции сложения, вычитания, умножения и деления.

296. При каких значениях a уравнение $ax^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ имеет рациональный корень?

297. Может ли прямая пересечь все стороны

а) 10-угольника;

б) 11-угольника

ровно по одному разу (не проходя через вершины)?

8-й класс

298. На конференции 85% делегатов знают английский язык, и 75% — испанский. Какая часть делегатов наверняка знает и английский, и испанский?

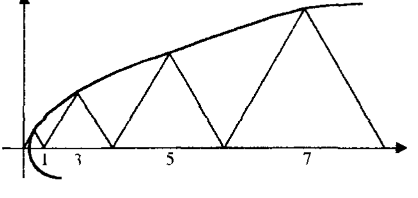
299. Какое из чисел больше:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1996}+\sqrt{1997}} \text{ или } \sqrt{1996}?$$

300. Все углы некоторого девятнадцатиугольника кратны 10°. Докажите, что у этого девятнадцатиугольника есть пара параллельных сторон.

301. В прямоугольнике 5×6 закрашено 19 клеток. Докажите, что в нём можно выбрать квадрат 2×2, в котором закрашено не менее трёх клеток.

302. Равносторонние треугольники со сторонами 1, 3, 5, ..., $2n-1$, ... расположены вдоль прямой линии, как показано на рисунке. Докажите, что все их вершины, не лежащие на этой прямой, лежат на параболе.



303. Известно, что при некотором натуральном n число $n^2 + n + 9$ делится на 7. Каким может быть остаток от деления этого числа на 49?

304. Найдите все значения a, при которых уравнения
$$x^2 + ax - 8 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + x + a = 0$$
имеют хотя бы один общий корень.

305. Решите уравнение $[x^3] + [x^2] + [x] = \{x\} - 1$, где $[x]$ — целая часть числа x, $\{x\}$ — дробная часть x.

306. В квадрате $ABCD$ проведены отрезки CE и CF, где E — середина AB, F — середина AD. Докажите, что CE и CF делят BD на три равные части.

307. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

10-й класс

308. Известный певец Элтон Джон убегает от толпы фанатов, которые хотят взять у него автограф. Расстояние между Элтоном Джоном и толпой составляло 20 км. Фанаты бегут со скоростью 15 км/ч, а Элтон Джон со скоростью 10 км/ч. В начальный момент погони от толпы к Элтону Джону со скоростью 25 км/ч выбежала собака. Добежав до певца, она поворачивает назад и бежит к фанатам, затем опять к Элтону Джону и т. д. Сколько километров она пробежит в направлении от толпы фанатов к профессору Элтону Джону, прежде чем фанаты получат долгожданный автограф?

309. Друг известного певца Элтона Джона Берни Топин знает только цифру 1. Докажите, что Берни сможет написать число, делящееся на 1997.

310. Докажите для положительных чисел x и y неравенство
$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \geqslant \frac{2^{5/4}}{\sqrt[4]{x+y}}.$$

311. В квадрате $ABCD$ проведены отрезки CE и CF, где E и F — точки отрезков AB и AD, делящие их в отношении 1:3, считая от вершины A. В каком отношении CE и CF делят диагональ BD на три части?

312. Как в квадрат 5×5 клеток вписать числа от 1 до 25, чтобы суммы чисел, стоящих в любом столбце, строке и на диагоналях, были равны между собой. (Магический квадрат.)

313. Решите уравнение $x^2 + 4x \cos(xy) + 4 = 0$.

314. Известно, что число $a^2 + b^2$ делится на 1996 (a, b — целые). Докажите, что остаток от деления числа $(a-1)^2 + (b-1)^2$ на 1996 равен 2.

315. При каких натуральных n число $\left[\left(\left(3+\sqrt{17}\right)/2\right)^n\right]$ чётно? (Здесь $[x]$ – целая часть x.)

316. Даны 20 различных натуральных чисел, не больших 50. Докажите, что найдутся два из них, разность которых равна 4, 5 или 9.

317. Найдите функцию $f(x)$, удовлетворяющую равенству

$$f(x) = \max_{y \in R}\left(xy - f(y)\right).$$

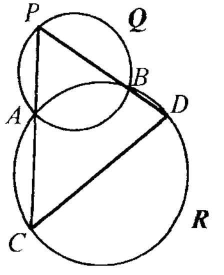
11-й класс

318. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде суммы нескольких (не менее двух) последовательных натуральных чисел.

319. Докажите, что функция $y = \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$ имеет наименьшее значение, равное 2, при $x = 0$.

320. Решите неравенство $x^2 + 4x\cos(xy) + 4 \leqslant 0$.

321. Предположим, что две окружности Q и R пересекаются в точках A и B (см. рис.). Точка P лежит на дуге окружности Q, расположенной вне окружности R. Она проектируется через точки A и B, определяя хорду CD на окружности R. Докажите, что независимо от того, где точка P взята на указанной дуге, длина хорды CD всегда одна и та же.



322. Решите уравнение $x^3 + x^2 = a$, зная, что его корни образуют арифметическую прогрессию.

323. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left[\sqrt{y-1}\right]^2 = x - 1, \\ 2\left[\sqrt{y + 2\sqrt{x}}\right] = y - 1, \end{cases}$$

где $[a]$ – целая часть числа a.

324. Пять отрезков таковы, что из любых трёх можно составить треугольник. Докажите, что хотя бы один из этих треугольников остроугольный.

325. Найдите все функции $\varphi(x)$, удовлетворяющие следующему функциональному уравнению $\varphi\left(\frac{1}{1-x}\right) + \varphi\left(\frac{x-1}{x}\right) - 2\varphi(x) = x + \frac{1}{x} - 1$.

326. Дан ряд чисел

$$12,\ 34,\ 56,\ 78,\ 910,\ 1112,\ 1314,\ 1516,\ \ldots$$

(члены ряда образуются приписыванием двух последовательных натуральных чисел). Докажите, что для любого члена a_n этого ряда выполнено соотношение

$$\lg\left(\frac{a_n-1}{2n-1}-1\right)=\left[\lg\frac{n}{5}\right]+2,$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

327. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 расположено n^2+1 точек. Докажите. что расстояние между некоторыми двумя из них меньше $1/n$.

12–13-е классы

328. Докажите, что функция $y=\min\{e^x-1;|x|\}$ является дифференцируемой при любом x. и найдите её производную.

329. Пусть $F(x)=\int\limits_0^x[t]\mathrm{d}t$, где $[t]$ — целая часть t.

а) Найдите $F(2{,}5)$, $F(-1{,}5)$.

б) Постройте график функции $y=F(x)$.

в) Решите уравнение $F(F(x))=x$.

330. Найдите формулу для вычисления A^m, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

331. Вычислите $\max\limits_{0<y<+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\cos\sqrt{\frac{y}{x}}\right|^{xy}$.

332. На прямой расположено n точек так, что расстояния между соседними одинаковы. Все они соединены отрезками с точкой, лежащей вне прямой. Для каких n из этих отрезков, перемещая их параллельными переносами, можно составить замкнутую ломаную?

333. Известно, что функция $f(x)=\left|x^3+px^2+qx+1\right|$ всюду дифференцируема. Вычислите p и q.

334. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

335. Может ли периодическая функция $f(x)$ удовлетворять условию

$$f''(x)f(x)>0,\quad -\infty<x<+\infty.$$

Олимпиада СамГУ – 1996

336. Пусть n — натуральное число такое, что $3n+1$ является точным квадратом. Докажите, что $n+1$ является суммой трёх точных квадратов

337. В зале музея собралось $2n$ человек. В зал входит новый посетитель, который начинает отыскивать знакомых среди собравшихся ранее. Докажите, что он обязательно найдет или n знакомых, или n незнакомых людей.

338. Из точки P, которая находится внутри треугольника ABC, опущены перпендикуляры на стороны треугольника: PD — на сторону BC PE — на сторону AC и PF — на сторону AB. Найдите все точки P, для которых выражение

$$\frac{BC}{PD}+\frac{AC}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

минимально.

339. Для каких значений a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 = y^2, \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет ровно 0, 1. 2, 3, 4 решения соответственно?

340. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC точка D является серединой BC. Из точки D опущен перпендикуляр на боковую сторону AC, и точка E — основание перпендикуляра Пусть F — середина отрезка DE. Докажите, что AF перпендикулярен BE.

341. Выразите сумму

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}$$

функцией от n.

342. Решите неравенство

$$|\sin nx| \leqslant n \sin x$$

на отрезке $[0, \pi]$; n — целое неотрицательное число.

343. Найдите все такие функции f, что для любых чисел x и y выполняется неравенство

$$f(x) - f(y) \leqslant (x-y)^2.$$

344. Решите уравнение

$$\cos(\sin 7x) = \frac{\pi}{7}.$$

345. Найдите отношение радиуса шара, описанного вокруг правильного тетраэдра, к радиусу шара, вписанного в этот тетраэдр.

Олимпиада СамГУ – 1997

346. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{x + \sin x} = \sqrt{x - \sin 2x}$$

на отрезке $[-\pi, \pi]$.

347. Для каких натуральных чисел выполняется неравенство

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1?$$

348. Определите, при каких значениях a решения неравенства

$$\sqrt{x + a} \geqslant x$$

образуют на числовой оси отрезок длины $2|a|$.

349. Может ли произведение трёх последовательных натуральных чисел быть кубом натурального числа?

350. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Докажите, что если n нечётно, то произведение

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \ldots (a_n - n)$$

— четное число.

351. Если a, b, c — длины сторон треугольника, то

$$3(ab + bc + ca) \leqslant (a + b + c)^2 \leqslant 4(ab + bc + ca).$$

Докажите

352. Найдите все пары натуральных чисел (m, n), удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} 2m + 47 < 22n - 2n^2, \\ 4n \geqslant 7m + 14. \end{cases}$$

353. Как измерить ширину реки, не имея возможности перебраться на другой берег?

354. Две окружности G_1 и G_2 вписаны в круговой сегмент так, что они касаются друг друга внешним образом в некоторой точке W. Пусть A — точка пересечения общей для G_1 и G_2 внутренней касательной с дугой сегмента, B и C — концы хорды. Докажите, что W является центром вписанной в треугольник ABC окружности.

355. В прямой круговой конус вписана сфера радиуса r. Найдите наименьшее возможное значение объёма конуса.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Олимпиада СамГТУ – 1995

356. Пусть P — произвольная точка основания ABC тетраэдра $SABC$. Через точку P проведены отрезки, параллельные боковым рёбрам, до пересечения с боковыми гранями. Пусть длины боковых рёбер равны a, b, c, а длины параллельных им отрезков соответственно равны x, y, z. Докажите, что $x/a + y/b + z/c = 1$.

357. Даны: угол и внутри него точки A и B. Постройте параллелограмм, для которого точки A и B — противоположные вершины, а две другие вершины лежат на сторонах угла.

358. Из пунктов A и B, расположенных на расстоянии 100 км, одновременно выезжают навстречу друг другу два велосипедиста, которые двигаются со скоростями 20 км/ч и 30 км/ч. Вместе с первым велосипедистом из пункта A вылетает муха-слепень со скоростью 50 км/ч и летит по направлению к пункту B до встречи со вторым велосипедистом, затем поворачивает и летит обратно до встречи с первым велосипедистом, снова поворачивает и т.д. Сколько километров пролетит слепень в направлении от пункта A к пункту B до того момента, как велосипедисты встретятся?

359. Ученики 11-го класса, пришедшие на первый урок, обмениваются рукопожатиями. Всего было сделано 253 рукопожатия. Сколько отсутствовало учеников на первом уроке, если известно, что в классе 25 человек?

360. Найдите кратчайшее расстояние от точек параболы $y = x^2 - 8x + 16$ до прямой $y = -2x + 1$.

361. Постройте график функции $y = f(x)$, если она удовлетворяет условиям: $f(x)=f(1/x)$, $f(x)=f(-x-1)$, и известно, что при $x \in [-1/2,\, 0]$ $f(x)=x$.

362. Сколько действительных корней имеет уравнение

$$x^{1995} + 1996x - 1997 = 0?$$

363. Решите неравенство $\left|x^5 - x\right| + \left|x^4 - x^3\right| \leqslant \left|x - x^3 + x^4 - x^5\right|$.

364. Имеет ли уравнение $\sin x = x^2 + x + 1$ хотя бы одно решение?

365. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x + 2[\operatorname{ctg} x] - 1995 = 0$, где $[a]$ — целая часть числа a.

366. Докажите неравенство ($x \in \boldsymbol{R}$) $2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geqslant 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

367. Докажите, что при любом действительном a уравнение

$$10ax^4 - 4ax^3 + a^2x^2 + 6x - 2 = 0$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $x \in [0, 1]$.

368. Бесконечная геометрическая прогрессия с положительными членами обладает тем свойством, что каждый её член, начиная со второго, больше суммы всех предыдущих. Какие значения может принимать знаменатель прогрессии?

369. Разложите на множители выражение

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n)^2 - x^n,$$

где n — натуральное число, $n \geqslant 3$.

370. Решите уравнение $\log_2^2(x+y) + \log_2^2(xy) + 1 = 2\log_2(x+y)$.

371. Решите уравнение $\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{b-x} = \sqrt[4]{a+b-2x}$.

372. Найдите уравнение общей касательной к параболам $y = x^2 + 4x + 8$ и $y = x^2 + 8x + 4$.

373. Решите уравнения:

а) $(x^2 - x + 1)^2 + 2(x^3 + 1) = (x+1)^2$;

б) $\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2\sqrt[3]{x^2 - 1} = 8\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

374. Решите функциональное уравнение $xf(x) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = 3, \quad x \neq 0$.

375. Сколько корней имеет уравнение $\left(\sqrt[3]{3}\right)^x = x$?

376. Решите неравенство $|\sin x - \sin y| + \sin x \cdot \sin y \leqslant 0$.

377. Определите знак числа $\sin 10\,000$.

378. Имеется двугранный угол φ $(0<\varphi<\pi/2)$. На одной его грани лежит прямая, составляющая угол α $(0<\alpha<\pi/2)$ с ребром двугранного угла. Найдите угол, который эта прямая составляет с другой гранью двугранного угла.

379. Существуют ли заданные на всей числовой оси функции f и g такие, что для всех x и y выполняется равенство $f(x) \cdot g(y) = x + y + 1$?

380. Найдите целочисленные решения уравнения $(x - y)^2 = x + y$, удовлетворяющие неравенствам $|x|<100$, $|y|<100$.

381. Какое из чисел больше: $\lg^2 11$ или $\lg 12$?

Олимпиада СамГТУ – 1996

382. Решите уравнения:

а) $3 \sin x - 4 \cos x = \cos 5x - 7$,

б) $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2$,

в) $\sin^2 x + \cos^2 4x = 2\sin^3 x \cdot \cos 4x$,

г) $4x^2 - 4x - 3 = 4\left[\dfrac{2x-1}{2}\right]$,

где $[y]$ — целая часть y (наибольшее целое число, не превосходящее y).

383. Задана функция $y = \max\left\{x^{1996}, |x|^{1997}\right\}$. Найдите все значения x, при которых $y'(x) \geqslant 1996$.

384. Диагонали делят трапецию на четыре треугольника. Пусть S — площадь трапеции, S_1 и S_2 — площади двух треугольников, которые примыкают к основаниям трапеции. Докажите, что $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$.

385. Действительные числа x, y, a таковы, что $x + y = a - 1$, $xy = a^2 - 7a + 14$. При каком значении a сумма $x^2 + y^2$ имеет наибольшее значение?

386. Инженер ежедневно приезжает поездом на вокзал в 7 часов утра. Точно в 7 часов утра к вокзалу подъезжает автомобиль и отвозит инженера на завод. Однажды инженер приехал на вокзал в 6 часов утра и пошел навстречу автомобилю. Встретив машину, он сел в нее и приехал на завод на 20 минут раньше, чем обычно. Определите показания часов в момент встречи инженера с автомобилем.

387. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y\sqrt{xy} = 36, \\ y^2 - x\sqrt{xy} = 72. \end{cases}$$

388. Задан отрезок a единичной длины. Постройте при помощи циркуля и линейки отрезок, длина которого в выбранном масштабе равна $\sin 18°$.

389. При каких значениях m неравенство

$$\frac{x^{1996} - 1997mx + 1998}{x^{1996} - 1995x + 1994} > 1$$

выполняется при всех $x \geqslant 0$.

390. Решите уравнение: $1 + 3^{\lg^2 (x-1)^2} = 2^{\frac{\lg^2 (x-1)^4}{2}}$.

391. Найдите все прямоугольные треугольники с катетами a и b и гипотенузой c, удовлетворяющие условиям: $a, b, c \in N$ (N — множество натуральных чисел). $\max\{a, b, c\} \leqslant 40$.

392. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{xy}{x^2 + y^2} + \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$ при положительных x, y.

393. Как нужно разместить в пространстве правильный тетраэдр, чтобы его ортогональная проекция на данную плоскость имела наибольшую площадь? Найдите значение этой площади, если ребро тетраэдра имеет длину a.

Олимпиада СамГТУ – 1997

394. Заданы точки $A(2, 0, 0)$, $B(32, 0, 0)$, $D(17, 3, 4)$. Отрезок AB разбит точками M и N на отрезки AM, MN и NB таким образом, что расстояние между серединами отрезков AM и NB равно 18. Найдите площадь треугольника MND.

395. Решите в целых числах уравнение

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1996}.$$

396. Постройте график функции

$$y=3^{\log_{\sqrt{3}}(\sin x+\cos x)}.$$

397. Пассажир метро спускается вниз по движущемуся эскалатору за 24 сек Если пассажир идет с той же скоростью, но по неподвижному эскалатору, то он спускается за 42 сек. За сколько секунд он спустится, стоя на ступеньке движущегося эскалатора?

398. Пусть функция $f(x)$ задана формулой

$$f(x)=(x^2-5x+6)^{200}\cdot x^7.$$

Если произвести все указанные действия, то $f(x)$ запишется в виде многочлена

$$f(x)=a_{407}x^{407}+a_{406}x^{406}+\ldots+a_1x+a_0.$$

Найдите следующие суммы:

$$S_1=a_{407}+a_{406}+\ldots+a_1+a_0,\qquad S_2=a_{407}+a_{405}+\ldots+a_3+a_1,$$
$$S_3=a_{406}+a_{404}+\ldots+a_2+a_0.$$

399. Решите уравнения:

$а)$ $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2,$

$б)$ $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2^x.$

400. Найдите $\log_3 10$, если известны:

$$\log_2 15=a,\quad \log_6 12=b.$$

401. («Честный купец») Один купец заметил, что на его весах (две чашки на коромысле), одно плечо коромысла немного длиннее другого. Обвешивать покупателя — грех, но и себя обижать не хочется! В лавку зашёл покупатель и попросил взвесить ему два фунта орехов. Чтобы не обманывать покупателя, купец произвел взвешивание в два приёма. Сначала он поставил на левую чашку весов фунтовую гирю и насыпал на правую чашку орехов, чтобы весы уравновесились. Отдав эти орехи покупателю, купец проделал ещё раз такую же процедуру с фунтовой гирей, поставив теперь её на правую чашку весов, а орехи — на левую чашку. Удалось ли купцу осуществить свои честные намерения, или кто-то остался в проигрыше?

402. Решите уравнение

$$2^{|x-5y|}-1=\ln\left(\frac{1}{1+\left|\sin^3 x+\cos^3 x-\sin^2 x-2\cos^2 x\right|}\right).$$

403. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. На ребре C_1D_1 построен отрезок $C_1L=0{,}75a$, на ребре A_1B_1 — отрезок $A_1M=0{,}5a$ и на ребре B_1B — отрезок $B_1N=0{,}25a$. Через точки L, M и N проведена плоскость. Определите периметр и площадь полученного сечения.

Решения, Указания, Ответы

1. *Ответ*: $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1993)$.

2. Выберем на одной стороне угла точки A и B, а на другой — точки C и D. Пусть биссектрисы углов с вершинами в точках A и C пересекаются в точке O_1, а биссектрисы углов при вершинах B и D пересекаются в точке O_2. Тогда O_1O_2 — биссектриса исходного угла. Решение основано на том свойстве, что биссектрисы углов любого треугольника пересекаются в одной точке.

3. Докажем, что для любого натурального a число $a^5 - a = (a - 1)a(a + 1)(a^2 + 1)$ делится на 30. Для этого заметим, что выражение $(a - 1)a(a + 1)$ является произведением трёх последовательных целых чисел, поэтому по крайней мере одно из них четно, и одно делится на 3. Следовательно, $a^5 - a$ делится на 6. Далее, если остаток при делении a на 5 равен 1, 0 или 4, то на 5 делится $a - 1$, a, $a + 1$ соответственно. Если же этот остаток равен 2 или 3, то на 5 делится $a^2 + 1$, поскольку

$$a^2 + 1 = (a - 2)(a + 2) + 5 = (a - 3)(a + 3) + 10.$$

Итак, $a^5 - a$ делится на 6*5=30. Сумма данных чисел $a_1 + ... + a_{1993}$ делится на 30 и $a_1^5 + \ldots a_{1993}^5 = \left(a_1^5 - a_1\right) + \ldots + \left(a_{1993}^5 - a_{1993}\right) + \left(a_1 + \ldots + a_{1993}\right)$, где каждое слагаемое делится на 30, поэтому сумма пятых степеней тоже делится на 30.

4. *Ответ*: (0, 0), (2, 2), (1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 1).

Первое решение. Приведём уравнение к виду

$$(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

Понятно, что в левой части этого уравнения одно слагаемое равно 0, а два других равны 1. Далее решение очевидно.

Второе решение. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x

$$x^2 - (y + 1)x + y^2 - y = 0.$$

Его дискриминант $D = 4 - 3(y - 1)^2$ является квадратом целого числа только тогда, когда $(y - 1)^2 = 0$ или $(y - 1)^2 = 1$.

5. *Ответ*: $x = 1$. Перепишем неравенство в виде

$$1993(x-1)^4 + (x-1)^2 + 1 \leqslant \sqrt{1-(x-1)^2}\,.$$

Поскольку левая часть не меньше 1, а правая не больше 1, то должно достигаться равенство. Это возможно только при $x = 1$.

6. *Ответ*: $\alpha = -1/2$. *Указание.* Докажите, что $x_n = x_{n+4}$.

7. *Ответ*: *а*), *б*) выиграет второй игрок. Тактика второго игрока такова: сколько бы спичек ни взял первый игрок ($1 \leqslant m \leqslant M$), второй берёт столько, чтобы в сумме с первым составило $M + 1$ спичку.

$$\overbrace{\text{I}}^{1}\ \overbrace{\underbrace{\text{III}}_{M+1}\ \underbrace{\text{III}}_{M+1}\cdots\underbrace{\text{III}}_{M+1}}^{1992}$$

Так как число 1993 при делении на $M + 1$ даёт остаток 1 (для $M = 2$ и $M = 5$), то в конечном счёте останется одна спичка, которую неизбежно возьмёт первый игрок.

8. *Ответ*: $-\frac{1}{16} \leqslant a \leqslant \frac{1}{12}$. Выражая y из первого уравнения системы и подставляя во второе, придём к уравнению

$$(2b^2 + b - 6)\,x = 2abc^2 + c + 1.$$

Если b таково, что $2b^2 + b - 6 \neq 0$, то всегда найдётся x, удовлетворяющее этому уравнению, а по нему однозначно определяется y из первого уравнения системы, так что система всегда имеет решение. Поэтому интерес представляют только те значения b, при которых $2b^2 + b - 6 = 0$, т. е. $b = -2$ и $b = 3/2$. В этом случае решение существует тогда и только тогда, когда $2abc^2 + c + 1 = 0$. Если $b = -2$, то такое c найдётся только при $a \geqslant -1/16$, а если $b = 3/2$, то только при $a \leqslant 1/12$ (докажите!).

9. Если траектория шара проходит через центр бильярда, то шар всё время будет находиться на одном диаметре, поэтому достаточно взять окружность, непересекающую этот диаметр.

Пусть траектория не проходит через центр бильярда. Обозначим через d расстояние от центра до любой хорды траектории. Поскольку при отскакивании шара от стенки бильярда расстояние от центра до траектории не меняется, то искомой является окружность с центром, совпадающим с центром бильярда, и радиусом, меньшим d.

10. *Ответ*: да, может.

Первое решение. Пусть $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Нельзя с уверенностью сказать, является α рациональным числом или иррациональным. Если предположить, что α — рационально, то оно является примером рационального числа, представимого в виде иррационального числа в иррациональной степени. Если же α — иррационально, то примером является число $\alpha^{\sqrt{2}} = 2$.

Второе решение. Пусть x такое число, что $2^x = 3$. Покажем, что x не может быть рациональным. Если $x = m/n$ (m, n – натуральные), то $2^{m/n} = 3$, откуда $2^m = 3^n$, что невозможно при натуральных m и n. Итак, x — иррационально, а, значит, $2x$ — тоже иррационально. Поэтому искомым примером является равенство $\sqrt{2}^{2x} = 3$.

11. Понятно, что $\left[\frac{x}{\pi}\right]$ может принимать лишь значения -1, 0 и 1, в противном случае решений нет. Таким образом, решение уравнения распадается на 3 возможных случая:

$$(\mathrm{I})\begin{cases}-\pi\leqslant x<0,\\ \sin^2 2x-1=\cos^2 3x;\end{cases}\quad(\mathrm{II})\begin{cases}0\leqslant x<\pi,\\ \sin^2 2x=\cos^2 3x;\end{cases}\quad(\mathrm{III})\begin{cases}\pi\leqslant x<2\pi,\\ \sin^2 2x+1=\cos^2 3x.\end{cases}$$

Совокупность решений данных трёх систем и образуют множество решений исходного уравнения: $\left\{\frac{\pi}{10},\frac{3\pi}{10},\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{10},\frac{9\pi}{10},\pi\right\}$.

12. Применив две подстановки $x\to\frac{1}{1-x}$ и $x\to 1-\frac{1}{x}$, получаем систему функциональных уравнений:

$$\begin{cases}f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x,\\ f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1-x},\\ f\left(1-\frac{1}{x}\right)+f(x)=1-\frac{1}{x},\end{cases}$$

решением которой является функция $f(x)=\frac{x^3-x+1}{2x(x-1)}$ или $f(x)=\frac{1}{2}\left(1+x+\frac{1}{x^2-x}\right)$.

13. Ответ: $z=\frac{1\pm 5i\sqrt{319}}{2}$. См. задачу 1.

14. Заметим, что

$$[\arcsin x(x+y)+\arcsin y(x+y)=\pi]\iff\begin{cases}\arcsin x(x+y)=\frac{\pi}{2},\\ \arcsin y(x+y)=\frac{\pi}{2};\end{cases}\iff$$

$$\iff\begin{cases}x(x+y)=1,\\ y(x+y)=1;\end{cases}\iff\begin{cases}\frac{x}{y}=1,\\ x(x+y)=1.\end{cases}$$

Отсюда $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

15. Обозначим углы треугольника α, β, γ, а противолежащие им стороны a, b, c. Соотношение $a<\frac{b+c}{2}$ означает, что угол α острый. (Если бы угол α был прямым или тупым, то сторона a была бы наибольшей и, значит, большей среднего арифметического двух других сторон треугольника.) Кроме того, угол $\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$ тоже острый. Из неравенства $a<\frac{b+c}{2}$ и теоремы синусов следует, что

$$\sin\alpha<\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{2}=\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\leqslant\sin\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Для острых углов $\sin x$ возрастает, поэтому $\alpha<\frac{\beta+\gamma}{2}$.

16. *Ответ*: $\min\limits_{y\in[-1;1]}\max\limits_{x\in[-1;1]}\left(x^2+xy\right)=1$, $\max\limits_{x\in[-1;1]}\min\limits_{y\in[-1;1]}\left(x^2+xy\right)=0$.

17. *Ответ*: $a\leqslant 249$, $a\notin N$.

18. *Ответ*: косинусоида $y=(R\operatorname{tg}\alpha)\cos(x/R)$, где R — радиус цилиндра.

19. *Первое решение.* Из условия задачи следует, что $x_n-x_{n-1}=$ $=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})$ для любого $n=2, 3, \ldots$ Положим $b_n=x_n-x_{n-1}$. Тогда $b_n=-\frac{1}{2}b_{n-1}$, и, следовательно, $b_2=-\frac{1}{2}b_1$, $b_3=-\frac{1}{2}b_2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2b_1$ и т. д.

По индукции получаем $b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}b_1$ для любого натурального n. Поэтому

$$b_1+b_2+\ldots+b_n=b_1+\left(-\frac{1}{2}\right)b_1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2b_1+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}b_1=b_1\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

С другой стороны, $b_1+b_2+\ldots+b_n=x_n-x_0$. Отсюда получаем, что

$$x_n=x_0+\frac{2}{3}(x_1-x_0)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0+\frac{2}{3}(x_1-x_0)=\frac{x_0+2x_1}{3}=5$.

Второе решение. Прежде всего покажем, что последовательность x_n сходится. Каждый очередной член последовательности расположен на числовой прямой точно посередине между предыдущими двумя членами, поэтому расстояние между соседними членами при увеличении n будет всё время уменьшаться в два раза, т. е. стремится к 0. Следовательно, последовательность имеет предел. Обозначим этот предел $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Перепишем соотношение задачи в следующем виде:

$$2x_n+x_{n-1}=2x_{n-1}+x_{n-2}.$$

Из этого условия видно, что выражение $2x_n+x_{n-1}$ остаётся постоянной величиной для любого значения n. Поэтому для любого n имеем

$$2x_n + x_{n-1} = 2x_1 + x_0.$$

Теперь перейдём к пределу при $n \to \infty$ в последнем равенстве, получим

$$2\alpha + \alpha = 2x_1 + x_0, \text{ откуда } \alpha = \frac{2x_1 + x_0}{3} = 5.$$

20. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда

$$|f(1)| = |a + b + c| \leqslant 1,\ |f(0)| = |c| \leqslant 1,\ |f(-1)| = |a - b + c| \leqslant 1.$$

Заметим, что

$$cx^2 - bx + a = c\left(x^2 - 1\right) + (a + b + c)\frac{1 - x}{2} + (a - b + c)\frac{1 + x}{2}.$$

Отсюда $|cx^2 - bx + a| \leqslant |c| \cdot |x^2 - 1| + |a + b + c| \cdot \left|\frac{1 - x}{2}\right| + |a - b + c| \cdot \left|\frac{1 + x}{2}\right| \leqslant$

$$\leqslant |x^2 - 1| + \left|\frac{1 - x}{2}\right| + \left|\frac{1 + x}{2}\right| = |x^2 - 1| + \frac{1 - x}{2} + \frac{1 + x}{2} = 1 + |x^2 - 1| \leqslant 2 \text{ при } |x| \leqslant 1,$$

что и требовалось доказать.

21. Пусть $1994 = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$, где m и n — целые числа. Числа $m - n$ и $m + n$ имеют одинаковую чётность и не могут быть нечётными, поскольку их произведение равно 1994. Значит, они оба чётные, и число $1994 = (m - n)(m + n)$ должно делиться на 4, что неверно. Поэтому 1994 нельзя представить в виде разности квадратов двух целых чисел.

22. *Указание.* Докажите, что число оканчивается цифрой 5.

23. Понятно, что числа записаны в разных системах счисления. Пусть председатель оргкомитета считает в системе счисления с основанием a, а председатель жюри — в системе с основанием b. Тогда получаем систему уравнений:

$$55_a = 31_b = 13_a + 24_b \text{ или } 5a + 5 = 3b + 1 = (a + 3) + (2b + 4),$$

решая которую, найдём $a = 7$, $b = 13$, и общее количество участников равно 40.

24. *Ответ*: 1. Исходное выражение равно $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + x}} + \dfrac{1}{2 + x}$, где x — дробь в знаменателе второго слагаемого.

25. *Первое решение.* Пусть a, b — катеты, c — гипотенуза искомого прямоугольного треугольника, h — высота, опущенная на гипотенузу, $d = a + b - c$ – разность между суммой катетов и гипотенузой. Для любого прямоугольного треугольника справедлива формула

$$a + b - c = 2r,$$

где r — радиус вписанной окружности. Построение проведем следующим образом. В прямой угол C впишем окружность радиуса $r = \frac{d}{2}$. Из точки C — вершины прямого угла — как из центра построим окружность радиуса h. Общая внешняя касательная двух построенных окружностей будет являться гипотенузой искомого прямоугольного треугольника. Построение возможно, если $0<h-r\leqslant r\sqrt{2}$, т. е. при условии $\frac{1}{2}<\frac{h}{d}\leqslant\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Второе решение. Пусть треугольник ABC — прямоугольный с гипотенузой AB. Отложим на этой гипотенузе отрезки $AA'=AC$ и $BB'=BC$. Тогда длина отрезка $A'B'$ равна разности между суммой катетов и гипотенузой, т. е. известная величина. Нетрудно показать также, что $\angle A'CB'=45°$. В этом случае построение ведется так. Сначала строим отрезок $A'B'$ Геометрическое место возможных положений точки C есть дуга окружности (подумайте, как ее построить). Конкретное положение точки C находится как точка пересечения этой дуги с прямой, отстоящей от отрезка $A'B'$ на расстояние h и параллельной ему (h — высота, опущенная на гипотенузу). Далее легко построить точки A и B. (См также решение задачи № 33.)

26.

$$n^4+4=\left(n^4+4n^2+4\right)-4n^2=\left(n^2+2\right)^2-(2n)^2=\left(n^2-2n+2\right)\left(n^2+2n+2\right),$$

где каждый сомножитель больше 1 при $n>1$

27. Перепишем уравнение в виде

$$10\overline{ab}+c=(ab)^2-c^2,\text{ или }\left(\overline{ab}-5\right)^2=c\,(c+1)+25.$$

Переменная c может принимать значения 0, 1, 2, .., 9 Простым перебором убеждаемся, что число $c(c+1)+25$ является квадратом целого числа только при $c=0$ и $c=7$

1) Если $c=0$, то $\left(\overline{ab}-5\right)^2=25$ и $\left|\overline{ab}-5\right|=5$, откуда $\overline{ab}=0$ или $\overline{ab}=$ 10

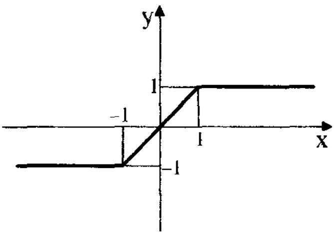
2) Если $c=7$, то $\left(\overline{ab}-5\right)^2=81$ и $\left|\overline{ab}-5\right|=9$, откуда $\overline{ab}=14$

Имеем три ответа. $a=0, b=0, c=0$; $a=1, b=0, c=0$; $a=1, b=4, c=7$.

28. *Ответ*: 25 лет. Так как сумма четырех цифр не превосходит 36, то этот человек родился в 20 веке. Пусть $\overline{19xy}$ — год его рождения. Тогда в 1994 году ему исполнится $(1994-\overline{19xy})$ лет, поэтому получаем уравнение: $1994-\overline{19xy}=1+9+x+y$, откуда $11x=2(42-y)$. Число $42-y$ делится на 11, только когда $y=9$, а, значит, $x=6$.

29. *Ответ*: 82 страницы. Ясно, что номер последней страницы начинается с цифры 3 и должен быть чётным, т. е. равен 312. Значит, было выдрано $312-231+1=82$ страницы

30. График функции $y = \dfrac{|x+1| - |x-1|}{2}$ изображен на рисунке. Ему



симметричен график $x = \dfrac{|y+1| - |y-1|}{2}$ относительно прямой $y = x$. Общей частью двух данных графиков является отрезок прямой $y = x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Таким образом, решением системы являются все пары (t, t), $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

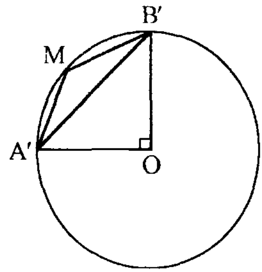
31. *Ответ*: $\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$, $\dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Складывая первую дробь с последней, вторую – с предпоследней, третью – с четвёртой в левой части исходного уравнения, получим

$$\frac{3(2x-5)}{x(x-5)} + \frac{2x-5}{(x-1)(x-4)} + \frac{4(2x-5)}{(x-2)(x-3)} = 0$$

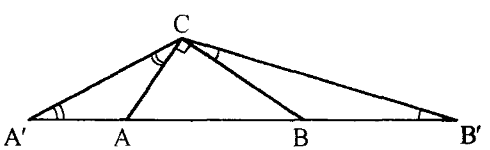
откуда $x = \dfrac{5}{2}$ или $\dfrac{3}{x^2-5x} + \dfrac{1}{x^2-5x+4} + \dfrac{4}{x^2-5x+6} = 0$. Обозначив теперь $x^2 - 5x = y$, придём к уравнению $\dfrac{3}{y} + \dfrac{1}{y+4} + \dfrac{4}{y+6} = 0$, решением которого являются значения $y = -\dfrac{9}{2}$ и $y = -2$ Дальнейшее ясно

32. После приведения к общему знаменателю равенство $\dfrac{3}{a+b+c} = \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c}$ переходит в равенство $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ Последнее соотношение есть теорема косинусов для треугольника со сторонами a, b и c и углом A, равным 60°



33. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами a, b и гипотенузой c Пусть h — высота, опущенная на гипотенузу, $P = a + b + c = 2p$ — периметр ΔABC Продлим гипотенузу AB в обе стороны и отложим отрезок $AA'=AC=b$ за точку A и отрезок $BB'=BC=a$ за точку B. Тогда $\angle A'CB'=135°$ (докажите!)

Построение можно провести, например, так. На отрезке $A'B'=P$ как на основании построим равнобедренный прямоугольный треугольник



$A'B'O$ и проведем окружность с центром O радиуса $OA'=OB'$. Все точки M, лежащие на меньшей дуге $A'\breve{B}'$ этой окружности, удовлетворяют тому свойству, что $\angle A'MB'=135°$. Точку C найдём как пересечение этой дуги с прямой, параллельной $A'B'$ и отстоящей от нее на расстояние h. Точки A и B строятся таким образом, чтобы $\angle A'CA'=\angle CA'A$ и $\angle B'CB=\angle CB'B$ (см. рисунок). Построение возможно, если $h+p\leqslant p\sqrt{2}$, т. е. $\frac{h}{p}\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

34. *Ответ*: $x_1 = x_2 = \ldots = x_{1994} = 0$. Из системы следует, что $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, ..., $x_{1994} \geqslant 0$. Возведя каждое уравнение в квадрат и сложив их, будем иметь $x_1 + x_2 + \ldots + x_{1994} = 0$, но поскольку все переменные неотрицательны, каждая из них равна 0.

35. $$\frac{x^{1994}+x^{1993}+\ldots+1}{x^{398}+x^{397}+\ldots+1}=\frac{(x^{1994}+x^{1993}+\ldots+1)(x-1)}{(x^{398}+x^{397}+\ldots+1)(x-1)}=\frac{x^{1995}-1}{x^{399}-1}=$$
$$=\frac{\left(x^{399}\right)^5-1}{x^{399}-1}=\left(x^{399}\right)^4+\left(x^{399}\right)^3+\left(x^{399}\right)^2+x^{399}+1.$$

36. Докажем по индукции, что $11^{10^n}-1$ делится на 10^{n+1} для любого целого $n\geqslant 0$. База индукции очевидна. Пусть $11^{10^n}-1$ делится на 10^{n+1} для некоторого $n\geqslant 0$.

Имеем $$11^{10^{n+1}}-1=\left(11^{10^n}\right)^{10}-1=x^{10}-1=(x-1)(x+1)\left(x^8+x^6+x^4+x^2+1\right),$$

где $x=11^{10^n}$. По предположению $x-1$ делится на 10^{n+1}. Кроме того, число $x+1$ чётно, а $x^8+x^6+x^4+x^2+1$ делится на 5. Следовательно, $11^{10^{n+1}}-1$ делится на 10^{n+2}.

37. а) *Ответ*: $-\frac{1}{2}<a<2$. Прежде всего уравнение должно иметь два различных корня. Для этого дискриминант $D=a^2-4(2a+1)(a-2)$ должен быть положительным, откуда находим $\frac{6-\sqrt{92}}{7}<a<\frac{6+\sqrt{92}}{7}$. Корни имеют разные знаки тогда и только тогда, когда их произведение отрицательно. Используя теорему Виета, получаем $\frac{a-2}{2a+1}<0$. Решением данного неравенства являются значения $-\frac{1}{2}<a<2$. Нетрудно проверить, что при всех этих значениях дискриминант уравнения действительно положителен, поскольку $\frac{6-\sqrt{92}}{7}<-\frac{1}{2}$ и $2<\frac{6+\sqrt{92}}{7}$.

б) Ответ: $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. Условие о том, что корни лежат по разные стороны от 1, можно записать в виде неравенства $(x_1-1)(x_2-1)<0$, т. е. $x_1x_2-(x_1+x_2)+1<0$. Из теоремы Виета получаем $\frac{a-2}{2a+1}-\frac{a}{2a+1}+1<0$, отсюда $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$. Эти значения a, как и раньше, попадают в промежуток положительности дискриминанта.

Заметим, что тот же результат можно получить по-другому. Выполнив замену $x-1=t$, задача сводится к предыдущему пункту.

38. Пусть $a = md$, $b = nd$, где d = НОД(a, b), а числа m и n взаимно просты. Тогда НОК(a, b) = mnd, и требуется доказать следующее неравенство: $mnd + d \geqslant md + nd$, равносильное $(m-1)(n-1)\,d \geqslant 0$.

39. Обозначим первое число через A, второе — через B и рассмотрим их отношение:

$$\frac{A}{B}=\frac{1995^{1993}\cdot 1993^{1995}}{1994^{2\cdot 1994}}=\frac{1993}{1995}\cdot\left(\frac{1995\cdot 1993}{1994^2}\right)^{1994}=\frac{1993}{1995}\cdot\left(1-\frac{1}{1994^2}\right)^{1994}<1,$$

откуда $A < B$.

40. Поскольку $\sqrt{1+x^2}+x+1\geqslant|x|+x+1\geqslant 1$ для любого $x\in\boldsymbol{R}$, то данная функция определена для любого $x\in\boldsymbol{R}$. Умножим числитель и знаменатель функции $f(x)$ на $\sqrt{1+x^2}-x+1\geqslant 1$:

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x+1\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}+x+1\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-(x-1)^2}{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)^2-x^2}=\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}},$$

откуда видно, что $f(-x) = -f(x)$ для любого $x\in\boldsymbol{R}$.

41. *Указание.* Представьте данное число в виде разности двух квадратов: $2^{1994} + 1 = (2^{1994} + 2\cdot 2^{997} + 1) - 2^{998} = (2^{997} + 1)^2 - (2^{499})^2$.

42. *Первое решение.* Так как $a > 0$, ветви параболы $f(x) = ax^2 + bx + c$ направлены вверх. Кроме того, $f(-1) = a + c - b < 0$, т. е. по крайней мере одна точка параболы лежит ниже оси абсцисс. Значит, квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два различных корня.

Второе решение. Если $c < 0$, то дискриминант данного квадратного уравнения $D = b^2 + 4a(-c) > 0$. Если $c > 0$, то $b > a + c > 0$, откуда $b^2 > (a + c)^2 = (a - c)^2 + 4ac \geqslant 4ac$ и $D = b^2 - 4ac > 0$. В обоих случаях уравнение имеет два различных корня.

43. Подставляя $m = k - 1$, $n = 1$, получим $x_k = x_{k-1} + k$, и тогда

$$x_k = k + x_{k-1} = k + (k-1) + x_{k-2} = k + (k-1) + (k-2) + x_{k-3} = \ldots =$$

$$= k + (k-1) + (k-2) + \ldots + 3 + 2 + x_1 = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Нетрудно проверить, что эта последовательность действительно удовлетворяет условию. Далее имеем

$$\sum_{k=1}^{1994} \frac{1}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{1994} \frac{2}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{1994}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{1995}\right).$$

44. *Указание.* Постройте сначала отрезки $y = \dfrac{ab}{a+b}$ и $z = \dfrac{cd}{c+d}$, а затем отрезок $x = \dfrac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \dfrac{yz}{y+z}$.

45. Эту задачу было бы неразумно решать, извлекая квадратный корень последовательно из всех двухзначных чисел от 10 до 99, т. е. выполнив 90 проб. Число проб здесь можно значительно уменьшить следующим образом.

Обозначив искомое число через N, имеем $10 \leqslant N < 100$, или

$$3, \quad \leqslant N < 10.$$

откуда очевидно, что первыми одинаковыми цифрами квадратного корня могут быть: 3,3. ; 4,4...; 5,5.. ; 6,6. .; 7,7. ; 8,8...; 9,9...; и, таким образом, для исчерпывающего решения задачи требуется выполнить только 7 проб.

Пусть $\sqrt{N} = 3{,}3\ldots$, тогда $N > 10{,}89$, т. е. $N = 11$; 12; . ; но $\sqrt{11} \approx 3{,}31 < 3{,}33$, $\sqrt{12} \approx 3{,}46 > 3{,}33$, следовательно, не существует двузначного числа, первые четыре цифры квадратичного корня из которого записываются только тройками.

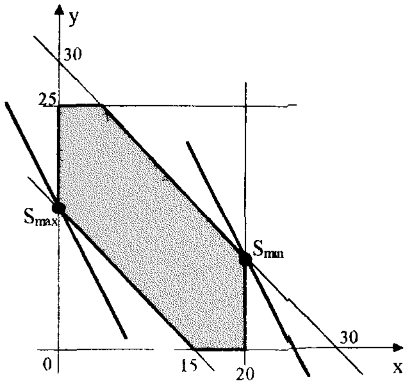
Выполнив подобным образом все пробы. найдем, что искомое число 79, квадратный корень из которого равен 8,888... .

46. Предположим, что с первого склада будет перевезено x тонн сырья в первый завод и y тонн во второй завод. Тогда в третий завод будет перевезено $30 - x - y$ тонн сырья, поскольку на каждом складе находится 30 тонн сырья. Соответственно для второго склада получим следующий план перевозок: $20 - x$ тонн в первый завод, $25 - y$ тонн во второй завод и $x + y - 15$ тонн в третий завод. С учётом расстояний от складов до заводов найдем, что общая стоимость перевозок в тонно-километрах равна

$$S = 5x + 6(20 - x) + 6y + 5(25 - y) + 6(30 - x - y) + 3(x + y - 15) =$$
$$= 380 - 4x - 2y.$$

Таким образом задача сводится к нахождению минимума (пункт (*а*)) и максимума (пункт (*б*)) функции $S = 380 - 4x - 2y$ при условии, что все приведённые выше величины неотрицательны, т. е.

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ 20 - x \geqslant 0, \\ 25 - y \geqslant 0, \\ 30 - x - y \geqslant 0, \\ x + y - 15 \geqslant 0. \end{cases}$$



Множество решений (x, y) данной системы неравенств изображается на координатной плоскости в виде многоугольника (см. рис.).

Чтобы определить, какие значения может принимать функция $S = 380 - 4x - 2y$, нужно найти при каких S прямая $4x + 2y = 380 - S$ проходит хотя бы через одну точку построенного многоугольника. Максимальное значение S достигается, когда эта прямая проходит через точку $S_{max}(x = 0, y = 15)$, а минимальное значение соответственно достигается в точке $S_{min}(x = 20, y = 10)$, поскольку при меньших S прямая $4x + 2y = 380 - S$ расположена выше, а при бóльших — ниже. План перевозок, выгодный отцу Фёдору показан в таблице А, а выгодный водителю Адаму Козлевичу — в таблице Б.

Таблица А.

	1 завод	2 завод	3 завод
I склад	20	10	0
II склад	0	15	15

Таблица Б.

	1 завод	2 завод	3 завод
I склад	0	15	15
II склад	20	10	0

47. Преобразуем исходное уравнение

$$x^3 - (a+1)x - x + \sqrt{a+1} = 0, \qquad x\left[x^2 - (a+1)\right] - \left(x - \sqrt{a+1}\right) = 0,$$

$$\left(x - \sqrt{a+1}\right)\left(x^2 + \sqrt{a+1}\,x - 1\right) = 0.$$

Его корнями являются $x = \sqrt{a+1}$ и $x = \dfrac{-\sqrt{a+1} \pm \sqrt{a+5}}{2}$.

49. Так как $f(x+1) = \sqrt{2} f(x) - f(x-1)$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$, имеем

$$f(x+4) = \sqrt{2} f(x+3) - f(x+2) = \sqrt{2}\left[\sqrt{2} f(x+2) - f(x+1)\right] - f(x+2) =$$

$$= f(x+2) - \sqrt{2} f(x+1) = -f(x),$$

но тогда $f(x + 8) = -f(x + 4) = f(x)$, т. е. $f(x)$ — периодическая функция с периодом 8.

51. Перепишем уравнение в виде $x^3 - 3 = [x]$. Построив графики функций $y = x^3 - 3$ и $y = [x]$ и найдя их точку пересечения, убеждаемся, что $[x] = 1$. Данное соотношение можно получить и аналитическим путем. Обозначим $[x] = n$, $n \in \mathbf{Z}$, тогда $n \leqslant x < n + 1$, откуда $n^3 \leqslant x^3 < (n+1)^3$. С другой стороны, из уравнения находим $x^3 = n + 3$, следовательно,

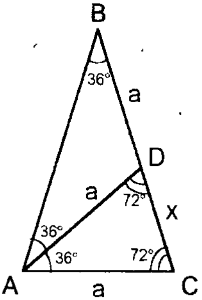
$$n^3 \leqslant n + 3 < (n+1)^3.$$

Единственным целым числом, удовлетворяющим данному двойному неравенству, является значение $n = 1$, т. к. при $n \leqslant 0$ имеем $(n+1)^3 < n + 3$, а при $n \geqslant 2$ имеем $n + 3 < n^3$. Итак, мы показали, что $[x] = 1$, и уравнение приобретает вид $x^3 - 4 = 0$, откуда $x = \sqrt[3]{4}$.

52. Поскольку $a^n + b^n$ делится на $a + b$ при нечётном n, а 1993 — нечётное число, то $19^{1993} + 93^{1993}$ делится на $19 + 93 = 112 = 2 \cdot 56$.

53. Предположим, что $\cos 1°$ — рациональное число.

Из формул $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ и $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ следует, что если $\cos\alpha$ — рациональное число, то $\cos 3\alpha$ и $\cos 2\alpha$ также рациональные числа. Принимая это во внимание, последовательно находим, что каждое из чисел $\cos 3°$, $\cos 9°$, $\cos 18°$, $\cos 36°$, $\cos 72°$ является рациональным.



Покажем противное, $\cos 72°$ — иррациональное число. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом при основании $\angle A = \angle C = 72°$ и проведем биссектрису AD в этом треугольнике. Нетрудно видеть, что треугольник CAD подобен треугольнику ABC, кроме того $AC = AD = BD$. Обозначим $AC = a$, $CD = x$. Тогда из подобия вытекает соотношение $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{a+x}$, откуда находим $\dfrac{x}{a} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Теперь из треугольника CAD получим: $\cos 72° = \dfrac{x/2}{a} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ — иррациональное число. Получили противоречие. Значит число $\cos 1°$ иррационально.

54. Покажем, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, в котором $|a| \leqslant 1993$, $|b| \leqslant 1993$, $|c| \leqslant 1993$, не может иметь корень, больший 1994. Предположим противное: пусть $x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ и $x_1 > 1994$. Тогда

$$x_1^3 = -ax_1^2 - bx_1 - c \leqslant |a| \cdot x_1^2 + |b| \cdot x_1 + |c| \leqslant 1993\left(x_1^2 + x_1 + 1\right) =$$

$$= \frac{1993}{x_1 - 1} \cdot \left(x_1^3 - 1\right) < \frac{1993}{1994 - 1} \cdot \left(x_1^3 - 1\right) = x_1^3 - 1,$$

и поэтому $x_1^3 < x_1^3 - 1$, что невозможно. Следовательно, сделанное предположение не может иметь места.

55. Умножим обе части на $\cos\frac{\pi}{11}$, возведем равенство в квадрат, а затем преобразуем произведения в суммы.

$$\sin^2\frac{\pi}{11} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{11},$$

$$8\sin\frac{\pi}{11}\sin\frac{3\pi}{11}\cos\frac{\pi}{11} = 4\sin\frac{2\pi}{11}\sin\frac{3\pi}{11} = 2\cos\frac{\pi}{11} - 2\cos\frac{5\pi}{11},$$

$$16\sin^2\frac{3\pi}{11}\cos^2\frac{\pi}{11} = 4\left(1-\cos\frac{6\pi}{11}\right)\left(1+\cos\frac{2\pi}{11}\right) =$$

$$= 4 - 4\cos\frac{6\pi}{11} + 4\cos\frac{2\pi}{11} - 2\cos\frac{4\pi}{11} - 2\cos\frac{8\pi}{11},$$

$$11\cos^2\frac{\pi}{11} = \frac{11}{2} + \frac{11}{2}\cos\frac{2\pi}{11}.$$

Перенеся косинусы в левую часть, а константы в правую, и учитывая, что $\cos\frac{\pi}{11} = -\cos\frac{10\pi}{11}$ и $\cos\frac{5\pi}{11} = -\cos\frac{6\pi}{11}$, придём к равенству

$$2\cos\frac{2\pi}{11} + 2\cos\frac{4\pi}{11} + 2\cos\frac{6\pi}{11} + 2\cos\frac{8\pi}{11} + 2\cos\frac{10\pi}{11} = -1.$$

Теперь умножим обе части на $\sin\frac{\pi}{11}$ и заменим произведения на разность синусов.

56. *Ответ*: $-1993 \leqslant a \leqslant 1994$.

57. Докажем утверждение задачи для любых нечетных натуральных чисел (не обязательно простых) с разностью, равной двум.

Пусть $p = 2k - 1$, $q = 2k + 1$, тогда

$$p^p + q^q \equiv (-q)^p + q^q = q^{2k-1}\left(q^2 - 1\right) \pmod{p+q},$$

и это равно $q^{2k-1}(q-1)(q+1) = q^{2k-1}2k(2k+2)$, что делится на $4k = p + q$.

58. *Ответ*: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{45}{8}\right] \setminus \{0\}$.

Допустимыми значениями x являются $x \geqslant -1/2$, $x \neq 0$. Умножим числитель и знаменатель дроби в левой части неравенства на $\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2$. Имеем

$$\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2 \leqslant 2x + 9,$$

далее, выполнив операцию возведения в квадрат в левой части полученного неравенства, найдём $\sqrt{1+2x} \leqslant \frac{7}{2}$, откуда $x \leqslant \frac{45}{8}$.

59. Ввиду симметричности выражения для x относительно a и b можно считать, что $b \geqslant a$. Обозначим $u=\sqrt{b^2-a^2}$. Тогда

$$x=\sqrt[4]{a^4+b^2\left(b^2-a^2\right)}=\sqrt[4]{a^4+b^2u^2}=\sqrt[4]{a^2\left(a^2+\left(\frac{bu}{a}\right)^2\right)}.$$

Таким образом, построение проводится в следующем порядке. Сначала строим отрезок u, затем отрезки $v=\dfrac{bu}{a}$ и $w=\sqrt{a^2+v^2}$, и, наконец, отрезок $x=\sqrt[4]{a^2w^2}=\sqrt{aw}$.

60. Применим бином Ньютона:

$$3^{1994}\cdot 17^{1995}=17(3\cdot 17)^{1994}=17(1+50)^{1994}=$$
$$=17\left(1+C_{1994}^1\cdot 50+C_{1994}^2\cdot 50^2+\ldots+50^{1994}\right)$$

Каждое слагаемое, стоящее в скобках последнего выражения, начиная с $C_{1994}^3\cdot 50^3$, оканчивается по крайней мере тремя нулями, и не будет влиять на три последние цифры суммы. Таким образом, достаточно найти три последние цифры выражения:

$$17\left(1+C_{1994}^1\cdot 50+C_{1994}^2\cdot 50^2\right)=17\left(1+1994\cdot 50+\frac{1994\cdot 1993}{2}\cdot 50^2\right)=\ldots 417$$

61. Применяя последовательно подстановки $x=0$, $y=0$; $x=\frac{\pi}{2}+t$, $y=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}+t$, из исходного уравнения получаем соответственно уравнения

$$f(t)+f(-t)=2a\cos t,$$
$$f(\pi+t)+f(t)=0 \text{ и}$$
$$f(\pi+t)+f(-t)=2b\cos(\pi/2+t)=-2b\sin t,$$

где $f(0)=a$, $f(\pi/2)=b$. Отсюда путём вычитания из суммы первых двух уравнений третьего уравнения получаем $2f(t)=2a\cos t+2b\sin t$. Решением исходного уравнения является функция $f(x)=a\cos x+b\sin x$. Ее наибольшее значение есть $\sqrt{a^2+b^2}$, наименьшее есть $-\sqrt{a^2+b^2}$.

65. Предположим, что любые две точки, лежащие на расстоянии 1, окрашены в разные цвета. Рассмотрим правильный треугольник ABC со стороной 1; все его вершины разного цвета. Пусть точка A_1 симметрична A относительно прямой BC. Так как $A_1B=A_1C=1$, то цвет точки A_1 отличен от цветов точек B и C, т. е. она окрашена в тот же цвет, что и точка A. Эти рассуждения показывают, что если $AA_1=\sqrt{3}$, то точки A и A_1 одного цвета. Поэтому все точки окружности радиуса $\sqrt{3}$ с центром A одного цвета. Ясно, что на этой окружности найдутся две точки, расстояние между которыми равно 1. Получено противоречие.

66. *Ответ*: уравнение имеет три решения $x_1 = 1/4$, $x_2 = b$, $x_3 = 1/2$, где b находится из соотношения $\left(\frac{1}{16}\right)^b = b$, $b \approx 0{,}3642498898$. Подробное решение данного уравнения изложено в статье Н. Виленкина "Три точки, три точки, три точки...", ж-л КВАНТ. 1980, №1.

67. *Ответ*: *а*) 180; *б*) 18; *в*) нет решений.

Изложим решение *б*). Пусть число $\overline{19931992ab}$ делится на 19 и 94 и, следовательно, на $19 \cdot 94 = 1786$ (ввиду взаимной простоты 19 и 94). Имеем $\overline{19931992ab} = 1786 \cdot 1116012 + \left(1768 + \overline{ab}\right)$, поэтому $1768 + \overline{ab}$ должно делиться на 1786. Это возможно только при $\overline{ab} = 18$.

Результат пункта *а*) непосредственно вытекает из *б*); пункт *в*) решается подобным же методом.

69. Воспользуемся следующими формулами:

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2.$$

Имеем $\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} l^2 = \sum_{m=1}^{n}\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6}\right) =$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+2)(n+1)^2}{12}.$$

70. При решении будет использовано неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$\frac{x + y + z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}, \text{ где } x > 0, y > 0, z > 0. \qquad (*)$$

Так как $\log_b a^2 > 0$, $\log_c b^2 > 0$, $\log_a c^2 > 0$, то воспользовавшись неравенством (*) для слагаемых в левой части исходного неравенства с учётом тождества $\log_b a^2 \cdot \log_c b^2 \cdot \log_a c^2 = 8$, получим, что левая часть не меньше чем $\dfrac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$. Осталось доказать, что

$$\frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geqslant \frac{9}{a+b+c}.$$

Последнее неравенство сводится к (*), если обозначить $a+b=z$, $b+c=x$, $c+a=y$, тогда $a+b+c=\frac{x+y+z}{2}$.

72. См. решение задачи 47.

73. Продифференцируем исходное уравнение по y, имеем:

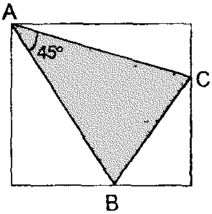
$$f'(y)=f'\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\frac{1+x^2}{(1-xy)^2}.$$

Положим в последнем соотношении $y=0$, тогда, обозначив $f'(0)=A$, получим

$$f'(x)=\frac{A}{1+x^2},$$

откуда $f(x)=A\operatorname{arctg}x+B$. Непосредственной подстановкой в исходное функциональное уравнение устанавливаем, что $B=0$. Таким образом, решением является любая функция вида $f(x)=A\operatorname{arctg}x$, где A — произвольное действительное число.

74. Пусть дан треугольник ABC, $AB=AC$, $\angle A=45°$, с вершинами в целочисленных точках. Дополним треугольник ABC до прямоугольника так, чтобы его стороны были параллельны осям координат, а точки A, B, C лежали на его сторонах (см рис.)



Площади прямоугольных треугольников, дополняющих треугольник ABC до прямоугольника, а также площадь самого прямоугольника являются рациональными числами, поскольку координаты точек A, B, C — целые числа. Значит, площадь треугольника ABC тоже рациональна. Однако

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB^2\sin 45^\circ=\frac{1}{2\sqrt{2}}AB^2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2\right],$$

где $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ — координаты точек A, B, т. е. целые числа. Так что $S_{\triangle ABC}$ иррациональна. Получили противоречие.

75. Число $N_n=\left(2+\sqrt{2}\right)^n+\left(2-\sqrt{2}\right)^n$ является целым при любом натуральном n. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(2+\sqrt{2}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{N_n-\left(2-\sqrt{2}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{-\left(2-\sqrt{2}\right)^n\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\left\{\left(2-\sqrt{2}\right)^n\right\}\right)=1,$$

так как $\{-z\}=1-\{z\}$, если z — не целое число, и $\left|2-\sqrt{2}\right|<1$.

76. См. решение задачи 52.

77. *Ответ*: $x = \pm\sqrt{3}$. *Указание.* Перепишите уравнение в виде

$$(x^2 - x)^2 - (x - 3)^2 = 0.$$

78. *Ответ*: $a = b = 3$, $c = 1$. Равенство задачи означает, что

$$25a + 5b + c = 64c + 8b + a, \text{ т. е. } b = 8a - 21c,$$

причём $1 \leqslant a \leqslant 4$, $0 \leqslant b \leqslant 4$, $1 \leqslant c \leqslant 4$, ведь a, b, c — цифры 5-ричной системы счисления, a, c — первые цифры натуральных чисел. Из неравенств

$$8a - 21c \geqslant 0 \text{ и } c \geqslant 1$$

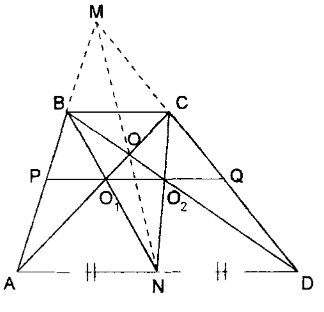
находим, что $a \geqslant 3$, т. е. $a = 3$ или 4. Значение $a = 3$ даёт единственное решение, значение $a = 4$ образует неразрешимую в целых числах систему для b и c.

79. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с большим основанием AD, O — точка пересечения ее диагоналей, N — середина AD. Покажем, что если O_1 и O_2 — точки пересечения отрезков NB и NC соответственно с диагоналями трапеции. то O_1O_2 — искомая прямая.

1) Поскольку O_1 — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCN$, а O_2 — точка пересечения диагоналей трапеции $NBCD$, то

$$\frac{NO_1}{O_1B} = \frac{AN}{BC} \text{ и } \frac{NO_2}{O_2C} = \frac{ND}{BC}, \text{ откуда } \frac{NO_1}{O_1B} = \frac{NO_2}{O_2C},$$

так как N — середина AD По теореме о пропорциональных отрезках отсюда следует, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции.



2) Пусть прямая O_1O_2 пересекает боковые стороны AB и CD в точках P и Q соответственно. В любой трапеции отрезок прямой, проходящей через точку пересечения её диагоналей параллельно основаниям, делится этой точкой пересечения пополам. Поэтому из трапеции $ABCN$ находим, что $PO_1 = O_1O_2$, а из трапеции $NBCD$ находим. что $O_1O_2 = O_2Q$.

Итак, O_1O_2 — искомая прямая. Осталось построить середину основания AD (точку N) с помощью одной линейки Для этого продолжим боковые стороны AB и CD исходной трапеции до пересечения в точке M. Известно, что прямая MO делит оба основания трапеции пополам.

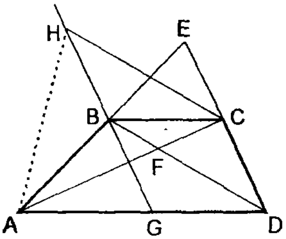
80. Анализ Допустим, что $ABCD$ (см. рис.) искомая трапеция. где

$$AB = a,\ CD = b,\ \angle AED = \alpha,\ \angle AFD = \beta$$

Выполним следующее вспомогательное построение проведем $BG \parallel CD$ и $CH \parallel BD$ Тогда

$$BG = CD = b;\ \angle ABG = \angle AED = \alpha;\ \angle ACH = \angle AFB = \beta \text{ и } BH = CD = b.$$

Отсюда вытекает следующий способ построения:



1) строим треугольник ABG по двум сторонам и углу между ними;

2) на продолжении GB отложим $BH = GB$;

3) на отрезке AH строим сегмент, вмещающий угол β;

4) через точку B проводим $BC \parallel AG$ и определяем точку C;

5) отложив $GD = BC$, получим точку D.

81. Имеем

$$x^{1994} + x + 1 = x^2\left(x^{1992} - 1\right) + \left(x^2 + x + 1\right).$$

Первое слагаемое делится на $x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$, поэтому исходный многочлен делится на $x^2 + x + 1$.

82. Последовательно проводим: 1) две параллельные прямые, каждая из которых пересекает параболу в двух точках; 2) прямую через середины получающихся отрезков; 3) перпендикуляр к этой прямой, пересекающий параболу в двух точках A и B; 4) серединный перпендикуляр к отрезку AB — это ось Oy. Ось Ox перпендикулярна Oy в точке пересечения с параболой. Единица масштаба — абсцисса пересечения прямой $y = x$ с параболой.

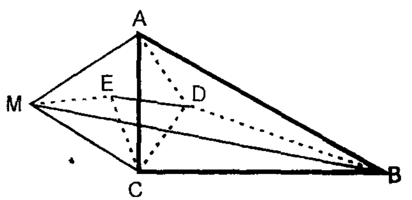
83. *Указание*. Докажите, что $y = \left|x^2 - ax\right|$.

84. Каждое слагаемое левой части неравенства (кроме первого) допускает следующую оценку $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, и, следовательно, левая часть неравенства оценивается таким образом

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

а это и требовалось доказать.

85. *Ответ*: 30° и 60°. Рассмотрим произвольную точку D, которая расположена внутри треугольника ABC (см. рис.). Повернем треугольник ABC около вершины C на 60°, тогда точка A займет положение M, точка D — положение E,



$$\angle MCA = 60°,\ \angle DCE = 60°,$$
$$ME = AD,$$
$$EC = DC = ED.$$

Таким образом, сумма расстояний от точки D до вершин треугольника ABC равна длине ломаной $MEDB$.

Наименьшая возможная величина этой суммы — отрезок MB. По условию $MB=\sqrt{7}$. Пусть $AC=x$, тогда из соотношений

$$MC=x,\ CB=\sqrt{4-x^2},\ MB^2=MC^2+CB^2-2\cdot MC\cdot CB\cdot\cos 150^\circ$$

находим: $7=4-2x\sqrt{4-x^2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ или $x\sqrt{4-x^2}=\sqrt{3}$. Отсюда $x=\sqrt{3}$ или $x=1$, т. е. $AC=\sqrt{3}$ или 1; соответственно $BC=1$ или $\sqrt{3}$. В обоих случаях острые углы ΔABC составляют 30° и 60°.

86. *Ответ*: $(1, 3, \frac{1}{3})$, $(1, \frac{1}{3}, 3)$, $(3, 1, \frac{1}{3})$, $(3, \frac{1}{3}, 1)$, $(\frac{1}{3}, 1, 3)$, $(\frac{1}{3}, 3, 1)$.

Поскольку $xyz\neq 0$, умножим первое уравнение на xyz, получим $yz+zx+xy=\frac{13}{3}xyz$ или, заменяя $xyz=1$, $yz+zx+xy=\frac{13}{3}$. Теперь по теореме Виета для кубического уравнения находим, что x, y и z являются корнями уравнения $u^3-\frac{13}{3}u^2+\frac{13}{3}u-1=0$. Решая его, получим $u_1=1$, $u_2=3$, $u_3=\frac{1}{3}$.

87. Складывая равенства $h_a=\frac{2S}{a}$, $h_b=\frac{2S}{b}$, $h_c=\frac{2S}{c}$, будем иметь $h_a+h_b+h_c=2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, откуда $S=\dfrac{h_a+h_b+h_c}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}=\dfrac{abc(h_a+h_b+h_c)}{2(ab+bc+ca)}$.

88. Условие этой задачи можно записать в двух вариантах: (I) a, ab, c^2; (II) a, $\overline{ab}$, $\overline{cc}$. Поэтому рассмотрим оба варианта.

В случае (I) имеем систему: $\begin{cases}2b=a+c,\\ 2ab=a+c^2,\end{cases}$ или $\begin{cases}2ab=a^2+ac,\\ 2ab=a+c^2,\end{cases}$ откуда $a^2+ac=a+c^2$. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно c: $c^2-ac-a^2+a=0$. Его дискриминант $D=a(5a-4)$ должен быть точным квадратом, поскольку a и c — целые числа. Проверяя все однозначные a, находим что это условие выполняется для $a=0$, 1 и 4. Далее нетрудно найти соответствующие b и c. Получим три решения: (0, 0, 0), (1, 1, 1) и (4, 5, 6).

В случае (II) имеем систему: $\begin{cases}2b=a+c,\\ 20a+2b=a+11c,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}3a=2b,\\ 2a=c.\end{cases}$ Поэтому a — четное число и может принимать значения 0, 2 или 4, так как $2a=c\leqslant 9$. Получаем три решения: (0, 0, 0), (2, 3, 4) и (4, 6, 8).

89. *Ответ*: $x=\dfrac{6\sqrt[3]{3}}{1+\sqrt[3]{3}}$, $y=\dfrac{6}{1+\sqrt[3]{3}}$.

90. Преобразуем функцию к следующему виду:

$$y=\sqrt[3]{\left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^3}+\sqrt[3]{\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^3}=\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}+\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}=x,$$

где $|x|\geqslant 2$.

91. Обозначим искомое число буквой N. Согласно условию имеем: $1000N+(N+1)=A^2$ или $1001N=A^2-1$. Так как $100\leqslant N\leqslant 998$ (число 999 не удовлетворяет условию), то $1001\cdot 100+1\leqslant A^2\leqslant 1001\cdot 998+1$, откуда $317\leqslant A\leqslant 999$. Из этих значений требуется выбрать такие A, что A^2-1 делится на 1001, т. е. $(A-1)(A+1)$ делится на $7\cdot 11\cdot 13$. Никакое из чисел $A-1$ и $A+1$ не может делится на 7, 11 и 13 одновременно ($A\leqslant 999$), поэтому одно из них имеет один делитель (из чисел 7, 11 и 13), а другое — два остальных. Рассмотрим все возможные случаи.

(1) Пусть $(A-1)$ кратно 7, $(A+1)$ кратно $11\cdot 13=143$. Тогда $143(A-1)$ делится на 1001 и $7(A+1)$ делится на 1001, а, следовательно, и разность $143(A-1)$ $20\cdot 7(A+1)=3A-283$ делится на 1001. Учитывая ограничения на A, нетрудно проверить, что это возможно только для $A=428$, при этом действительно $(A-1)$ кратно 7, $(A+1)$ кратно 143. Соответствующее значение N равно 183.

(2) Наоборот, $(A-1)$ кратно $11\cdot 13=143$, $(A+1)$ кратно 7 Аналогично (1) устанавливаем, что $3A+283$ делится на 1001. Отсюда $A=573$ и $N=328$.

(3) $(A-1)$ кратно 11, $(A+1)$ кратно $7\cdot 13=91$. В этом случае разность $91(A-1)-8\cdot 11(A+1)=3A-179$ делится на 1001, так как $91(A-1)$ и $11(A+1)$ кратны 1001. Находим $A=727$ и $N=528$.

(4) $(A-1)$ кратно $7\cdot 13=91$. $(A+1)$ кратно 11. Подобно (3) получаем, что $3A+179$ делится на 1001, откуда $A=274$ и $N=75$, что не удовлетворяет условию (N — трехзначное число).

(5) $(A-1)$ кратно 13, $(A+1)$ кратно $7\cdot 11=77$. Всё так же, разность $6\cdot 13(A+1)-77(A-1)=A+155$ делится на 1001, т. е. $A=846$ и $N=715$.

(6) $(A-1)$ кратно $7\cdot 11=77$. $(A+1)$ кратно 13. В этом случае найдем, что $A-155$ делится на 1001 Это, очевидно, невозможно при $317\leqslant A\leqslant 999$.

Итак, условию задачи удовлетворяют четыре числа:

$183\,184=428^2$; $328\,329=573^2$; $528\,529=727^2$; $715\,716=846^2$.

92: *Ответ*: $\dfrac{\pi}{2}$. Положим $x-1=\sin\varphi$, где $-\dfrac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. Тогда

$$\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2}=\cos\varphi$$

и $$\frac{\sqrt{2x-x^2}}{x}=\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}=\operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2}.$$

Отсюда данное выражение принимает вид:

$$\arcsin(\sin\varphi)+2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2}\right)=\varphi+\frac{2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{2}=\frac{\pi}{2},$$

поскольку $0\leqslant\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2}<\frac{\pi}{2}$.

93. Пусть основанием системы служит число $10x + y$. Тогда будем иметь: $(10x + y)^3 + 2(10x + y)^2 + 3(10x + y) + 4 = 35\cdot N$, где N — частное от деления искомого числа на 35 Отсюда вытекает, что число $y^3 + 2y^2 + 3y + 4$ должно делиться на 5. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что это возможно только при $y = 1$ и $y = 6$.

Пусть $y = 1$, тогда $1000x^3 + 500x^2 + 100x + 10 = 35\cdot N$ или $200x^3 + 100x^2 + 20x + 2 = 7\cdot N$. Перепишем это равенство так:

$$7(28x^3 + 14x^2 + 3x) + (4x^3 + 2x^2 - x + 2) = 7\cdot N.$$

Число $4x^3 + 2x^2 - x + 2$ делится на 7 только при $x = 1$ и $x = 8$.

Подобным же образом убеждаемся, что при $y = 6$ значением x может быть только число 4.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа:

$$11^3 + 2\cdot 11^2 + 3\cdot 11 + 4 = 1610;$$
$$46^3 + 2\cdot 46^2 + 3\cdot 46 + 4 = 101\,710;$$
$$81^3 + 2\cdot 81^2 + 3\cdot 81 + 4 = 544\,810.$$

94. Областью определения является интервал $[-1, +\infty)$. Упростим функцию

$$y=\sqrt{\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}=\sqrt{x+1}+1+\left|\sqrt{x+1}-1\right|=\begin{cases}2\sqrt{x+1}, x>0,\\ 2 \quad x\le 0\end{cases}$$

Ее график состоит из полупрямой и ветви параболы.

95. Пусть число αi — чисто мнимый корень уравнения ($\alpha\in\boldsymbol{R}$). Обозначим левую часть данного уравнения через $f(x)$. Приравняв нулю действительную и мнимую части числа $f(\alpha i)$, получим

$$\begin{cases}d-b\alpha^2=0,\\ c\alpha-a\alpha^3=0.\end{cases}$$

Исключив из системы α, найдём $ad = bc$. Из равенства $ac = a^2\alpha^2$ следует $ac > 0$ ($a \neq 0$). Необходимость условий $ad = bc$, $ac > 0$ доказана.

Докажем достаточность этих условий. Пусть $ad = bc$ и $ac > 0$. Умножим данное уравнение почленно на $a \neq 0$: $ax(ax^2 + c) + abx^2 + ad = 0$. Учитывая условие, получим

$$ax(ax^2 + c) + abx^2 + bc = 0, \text{ или } (ax^2 + c)(ax + b) = 0.$$

Уравнение $ax^2 + c = 0$ имеет корни $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} = \pm\frac{\sqrt{ac}}{a}i$. Итак, данное уравнение имеет чисто мнимый корень при $ad = bc$, $ac > 0$, и достаточность условий доказана.

96. *Ответ*: $\ln 1{,}01 > 2/201$. Функция $y = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$ возрастает при $x > 0$, поскольку её производная $y' = \frac{x^2}{(1+x)(x+2)^2} > 0$ при $x > 0$

Поэтому $y(1/100) > y(0)$ или $\ln 1{,}01 - 2/201 > 0$.

97. *а*) Полагая $x = y = 0$, найдём $f(0) = 0$. Полагая теперь $x = -y$, имеем $f^2(0) = f^2(x) + f^2(-x)$ или $0 = f^2(x) + f^2(-x)$, откуда $f(x) \equiv 0$.

б) Полагая $y = 0$, имеем $f^2(0) = f^2(x) + f^2(0)$ или $f(x) \equiv 0$.

100. *Ответ*: $-\frac{3\pi}{4}$. Положим $x = \operatorname{tg}\alpha$, где $-\frac{\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{4}$ (ведь $x < -1$).

Тогда $\frac{x^2-1}{2x} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{tg}\alpha} = -\operatorname{ctg}2\alpha = \operatorname{ctg}(-2\alpha)$ и $\frac{1-x}{\sqrt{2(1+x^2)}} = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}} =$

$= \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2/\cos^2\alpha}} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)$. Поэтому исходное выражение принимает вид

$$3\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) + \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-2\alpha)) - \arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)\right) =$$

$$= 3\alpha + (-2\alpha) - \left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) = -\frac{3\pi}{4},$$

так как $\frac{\pi}{2} < -2\alpha < \pi$ и $\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} + \alpha < \frac{\pi}{2}$.

101. Допустим, что все пять корней данного уравнения действительны. Сумма корней уравнения (равная коэффициенту при x^4 с обратным знаком) равна нулю. Кроме того, все корни ненулевые, ведь $c \neq 0$ Поэтому среди корней должны быть как положительные, так и отрицательные Пусть, например, $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$ Представим исходное уравнение в виде:

$$x[(x^2 - 1)^2 + 1] = -c.$$

Подставляя в это равенство $x_1 > 0$, получим $(-c) > 0$, а подставляя $x_2 < 0$, получим $(-c) < 0$. Противоречие.

102. Подставляя в известное неравенство $(x+y+z)^2 \leqslant 3(x^2+y^2+z^2)$ вместо x, y, z выражения $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 5}$, $\sqrt{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 5}$ и $\sqrt{\operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha + 5}$ соответственно, получим

$$\left(\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 5} + \sqrt{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 5} + \sqrt{\operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha + 5}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 3\left(\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha + 15\right).$$

Так как по условию 2α, 2β, 2γ — углы треугольника, то $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$ и $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$. Поэтому имеем: $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$. Домножив обе части на $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$, находим: $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\gamma = 1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$ или $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha = 1$. Теперь из последнего неравенства получаем:

$$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 5} + \sqrt{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 5} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + 5} \leqslant 4\sqrt{3}.$$

104. *Ответ*: $a = 1-\sqrt{2}$, $a = 2$ Из неравенства

$$0 \leqslant \sqrt{4x - x^2} \leqslant 2.$$

получаем

$$1 \leqslant \log_2(2 + 3\sqrt{4x - x^2}) \leqslant 3.$$

Введем новую неизвестную $t = \log_2(2 + 3\sqrt{4x - x^2})$. Тогда требуется найти все значения параметра a, при которых наибольшее значение функции

$$y = (a + 2 - t)t + a^2 - 3a + 1$$

на отрезке $1 \leqslant t \leqslant 3$ равно 3. Наибольшее значение данной параболы достигается либо в её вершине, либо на концах отрезка $[1, 3]$. Имеем

$$y_b = \frac{5a^2 - 8a + 8}{4}, \qquad y(1) = a^2 - 2a + 2, \qquad y(3) = a^2 - 2,$$

и $\max\{y_b, y(1), y(3)\} = 3$. Поскольку $y_b \geqslant y(3)$ при любом a, то нужно найти такие a, при которых

$$\max\left\{\frac{5a^2 - 8a + 8}{4}, a^2 - 2a + 2\right\} = 3.$$

Первое выражение под знаком max равно 3 при $a = 2$ и $a = -2/5$, но только при $a = 2$ оно является действительно наибольшим. Аналогично второе выражение равно 3 при $a = 1 \pm \sqrt{2}$, но подходит только значение $a = 1 - \sqrt{2}$.

105. *а*) Покажем, что $\log_3 4 > \frac{5}{4}$. Действительно, $4^4 = 256 > 243 = 3^5$, откуда $4 > 3^{5/4}$ и $\log_3 4 > \log_3 3^{5/4} = \frac{5}{4}$. Поэтому

$$\log_3 16 = 2\log_3 4 > \frac{5}{2} > \frac{3}{5/4} > \frac{3}{\log_3 4} = \log_4 27 = \log_{16} 729.$$

б) $\log_3 5 < \frac{3}{2} < \log_2 3$.

106.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \left(\frac{a+b+c}{b+c} - 1\right) + \left(\frac{a+b+c}{c+a} - 1\right) + \left(\frac{a+b+c}{a+b} - 1\right) =$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) - 3 = 1993$$

107. *Ответ*: цифра 0. Выпишем несколько первых чисел, появляющихся на доске (в скобках указана сумма цифр числа).

Поскольку $40\times25=1000$, то далее числа будут повторяться через одно с точностью до приписывания трех нулей в конце числа. (Т.е. если на доске было записано число A, то через 2 секунды — число 1000A.) Через час на доске появится число $7101952\cdot10^{3(1800-2)}$.

97	(16)
1552	(13)
20176	(16)
322816	(22)
7101952	(25)
177548800	(40)
7101952000	(25)

108. *Ответ*: 3000 динаров. Пусть Али-Баба унес из пещеры x кг золота и y кг алмазов. В этом случае он сможет получить $20x + 60y$ динаров. Поскольку Али-Баба может поднять не более 100 кг, то $x + y \leqslant 100$ (*). 1 кг золота занимает 1/200 часть сундука, 1 кг алмазов — 1/40 часть сундука. Значит, взятые Али-Бабой сокровища займут $\frac{x}{200} + \frac{y}{40}$ часть сундука, поэтому $\frac{x}{200} + \frac{y}{40} \leqslant 1$ и $x + 5y \leqslant 200$ (**). Сложим (*) и (**): $2x + 6y \leqslant 300$ или $20x + 60y \leqslant 3000$. Следовательно, Али-Баба сможет получить за сокровища не более 3000 динаров. Равенство достигается при $x = 75$, $y = 25$.

109. Решение с конца. Построим точку O' внутри квадрата так, чтобы $\Delta O'CD$ был равносторонним. Тогда $BC = O'C$ и $\angle BCO' = 30°$. Из равнобедренного треугольника BCO' находим $\angle CBO' = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$, откуда $\angle ABO' = 15°$. Аналогично, $\angle BAO' = 15°$. Значит, точки O и O' совпадают.

110. *Ответ*: остаток 4. Если a — целое число, то $a^3 - a$ делится на 6, т. к. $a^3 - a = (a-1)\,a\,(a+1)$, но среди трех последовательных целых чисел одно — четно и одно — кратно 3.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{1994} = 1996^{1995}, \; x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{1994}^3 = N,$$
$$N - 1996^{1995} = \left(x_1^3 - x_1\right) + \left(x_2^3 - x_2\right) + \ldots + \left(x_{1994}^3 - x_{1994}\right).$$

Последнее выражение кратно 6, поэтому числа N и 1996^{1995} дают одинаковые остатки при делении на 6. $N \equiv 1996^{1995} \equiv 1996 \equiv 4 \pmod 6$.

111. Пусть x = 199619961996. Тогда исходное выражение равно

$$\frac{1996}{x^2 - (x-1)(x+1)} = 1996$$

112. *Ответ*: 9 чисел. У таких чисел сумма цифр будет делиться на 5 и на 9 и, значит, равна 45.

113. $ab + bc + ca = \dfrac{(a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2}{2} = -\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \leqslant 0$.

114. *Ответ*: (1, 2, 3) и (2, –2, 4). Если $y + \frac{1}{z} > 1$, то число $\frac{10}{7}$ должно представляться в виде суммы двух чисел, одно из которых целое (это x), а другое неотрицательно и меньше 1. Такое разложение единственно — это сумма его целой и дробной части: $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$, откуда $x = 1$, $y + \frac{1}{z} = \frac{7}{3}$. Далее легко находим, что $y = 2$, $z = 3$. Если $y + \frac{1}{z} < -1$, то аналогично получаем $x = 2$, $y + \frac{1}{z} = -\frac{7}{4}$, далее $y = -2$, $z = 4$. Случай $\left|y + \frac{1}{z}\right| = 1$ невозможен, иначе получили бы, что число x не целое. Случай $\left|y + \frac{1}{z}\right| < 1$ выполняется, только когда $y = 0$, –1 или 1. Каждый из этих вариантов не дает других решений.

115. *Ответ*: 500^2 клеток. Пусть $m \times m$ — исходный квадрат, $n \times n$ – вырезанный квадрат. Тогда $m^2 - n^2 = 1996$, $(m-n)(m+n) = 1996$. Числа $(m - n)$ и $(m + n)$ одинаковой чётности и не могут быть одновременно нечётными, значит оба чётны. Число 1996 единственным образом разлагается в произведение двух чётных чисел $1996 = 2 \cdot 998$, т. е. $m - n = 2$, $m + n = 998$, откуда $m = 500$.

116. $P(1997) - P(1995) = 96^{19} - 19^{96}$ нечетно, но $P(1997) - P(1995)$ должно делится на 1997 – 1995 = 2. Противоречие. Значит, таких $P(x)$ не существует.

117. *Ответ*: [0, 3]. *Указание*. Приведите уравнение к виду

$$\left|\sqrt{x+1} - 1\right| + \left|\sqrt{x+1} - 2\right| = 1.$$

118. *Ответ*: $\dfrac{|av_2 - bv_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$. Обозначим через $d(t)$ расстояние между телами в момент времени t. Тогда

$$d^2 = (a - v_1 t)^2 + (b - v_2 t)^2 = \left(a^2 + b^2\right) - 2(av_1 + bv_2)t + \left(v_1^2 + v_2^2\right)t^2.$$

Минимум d достигается при $t_0 = \dfrac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2}$. Имеем

$$d_{\min}^2 = \left(a^2 + b^2\right) - \frac{(av_1 + bv_2)^2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{(av_2 - bv_1)^2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

119. По условию $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm (a - c)}{2a}$, с другой стороны $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, так что $D = b^2 - 4ac = (a - c)^2$;

$$(a + c)^2 - b^2 = 0, \quad (a - b + c)(a + b + c) = 0, \quad f(-1) f(1) = 0.$$

Значит, $f(-1) = 0$ или $f(1) = 0$, т. е. либо -1, либо 1 является корнем.

120.

$$f(x + 2c) = \frac{f(x + c) + 3}{1 - f(x + c)} = \frac{\dfrac{f(x) + 3}{1 - f(x)} + 3}{1 - \dfrac{f(x) + 3}{1 - f(x)}} = \frac{f(x) - 3}{1 + f(x)},$$

$$f(x + 3c) = \frac{f(x + 2c) + 3}{1 - f(x + 2c)} = \frac{\dfrac{f(x) - 3}{1 + f(x)} + 3}{1 - \dfrac{f(x) - 3}{1 + f(x)}} = f(x).$$

Итак, $f(x + 3c) = f(x)$, значит, функция $f(x)$ периодическая с периодом $3c$.

121. Повернем квадрат $ABCD$ вокруг точки A на 90° по часовой стрелке. Точка M переходит в M'; $\angle DAM' = \angle BAM = \angle MAK$, следовательно, $\angle KM'A = \angle BMA = \angle MAD = \angle KAM'$, т. е. $\Delta AKM'$ — равнобедренный. Значит, $AK = KM' = KD + DM' = KD + BM$.

122. Условия можно переписать так: $a_{30} = |b_{30}|$, $a_{70} = b_{70} > 0$. Поскольку $b_{30} = \dfrac{b_{70}}{q^{40}} > 0$, то $a_{30} = b_{30}$; Поэтому

$$a_{50} = \frac{a_{30} + a_{70}}{2} = \frac{b_{30} + b_{70}}{2} = b_{50}\frac{q^{-20} + q^{20}}{2} > b_{50},$$

т. к. $q^{-20} + q^{20} > 2$ при $|q| \neq 1$. Таким образом, $a_{50} \geqslant b_{50}$, причём равенство достигается при $|q| = 1$.

123. *Ответ*: *а*) нельзя; *б*) можно. Вычислим сумму всех чисел:

$$S = 1 + 2 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

При добавлении к двум числам по 1 сумма увеличивается на 2.

а) Пусть после K операций все числа стали равными A. Тогда новая сумма всех чисел: $S_n = \frac{n(n+1)}{2} + 2K = An$. Положим $n = 10$, получим $55 + 2K =$
$= 10A$ (слева стоит нечетное число, справа — чётное).

б) 1, 2, 3, 4, ..., 1995, 1996. Увеличим 1-ое и 2-ое числа на 1994 (т. е. 1994 раза прибавим к ним по 1), 3-е и 4-е числа увеличим на 1992, 5-е и 6-е на 1990 и т. д. Получим: 1995, 1996, 1995, 1996, ..., 1995, 1996. Всего будет стоять чётное количество чисел 1995. Разобьем их на пары и прибавим к каждому по 1. Все числа станут равными 1996.

124. Пусть $px^2 + qx + r$ делится на $x^2 + x + 1$, тогда $(px^2 + qx + r) - p(x^2 + x + 1) = (q - p)x - (r - p)$ также делится на $x^2 + x + 1$. Это возможно, только когда $q = p$ и $r = p$, т. е. при $p = q = r$.

(I) Если $n = 3k$, то $x^n - 1 = x^{3k} - 1$ делится на $x^3 - 1$ и, значит, на $x^2 + x + 1$. Поскольку по условию $\left(x^n - 1\right) + \left(ax^2 + bx + c + 1\right)$ кратно $x^2 + x + 1$, то $ax^2 + bx + c + 1$ тоже кратно $x^2 + x + 1$. Следовательно, $a = b = c + 1$.

(II) Если $n = 3k + 1$, то $x^n - x$ делится на $x^2 + x + 1$. Аналогично, $a = b + 1 = c$.

(III) Если $n = 3k + 2$, то $x^n - x^2$ делится на $x^2 + x + 1$. Аналогично, $a + 1 = b = c$.

Во всех трёх случаях выполнено равенство задачи.

125. *Ответ*: остаток 2. См. решение задачи 110.

126. *Ответ*: $1996\frac{1}{2}$. *Указание*. $\frac{1}{3^{-k}+1} + \frac{1}{3^k+1} = 1$.

127. *Ответ*: (0, 0), (1, 0). Положим $x = 0$: $b^2 = \cos b - 1$, откуда $b = 0$. Так требуется найти все a, для которых при всех x выполнено равенство

$$a(\cos x - 1) = \cos ax - 1.$$

Поскольку $\cos x - 1 \leqslant 0$, $\cos ax - 1 \leqslant 0$, то $a \geqslant 0$.

1) Значение $a = 0$ удовлетворяет условию.

2) При $a > 0$ имеем $\cos ax - 1 = a(\cos x - 1) \geqslant -2a$, т. к. $\cos x - 1 \geqslant -2$. Значит, для любого $x \in \mathbf{R}$ выполнено неравенство $\cos ax \geqslant 1 - 2a$, в частности при $x = \frac{\pi}{a}$ находим, что $a \geqslant 1$. Аналогично,

$\cos x-1=\frac{1}{a}(\cos ax-1)\geqslant-\frac{2}{a}$, т. е. $\cos x\geqslant 1-\frac{2}{a}$ для любого $x\in\mathbf{R}$. Положив $x=\pi$, найдём, что $a\leqslant 1$ Следовательно, $a=1$.

129. *Ответ*: $\alpha=0$ или -1. При $n\geqslant 2$ имеем

$$x_{n+1}=(x_1x_2\ldots x_{n-1})x_n+1=(x_n-1)x_n+1=x_n^2-x_n+1\geqslant x_n,$$

причём равенство достигается при $x_n=1$.

Итак, $x_1<x_1+1=x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant\ldots\leqslant x_n\leqslant\ldots$. Пусть $x_n=x_m$ $(n<m)$. Тогда $x_n=x_{n+1}=\ldots=x_m=1$, $x_1x_2\ldots x_{n-1}=x_n-1=0$, поэтому одно из чисел x_1, x_2, ..., x_{n-1} равно нулю.

Если $x_k=0$ $(k>2)$, то $x_k=x_{k-1}^2-x_{k-1}+1=0$, что невозможно. Значит, $x_1=0$ или $x_2=0$. В первом случае $\alpha=0$, а во втором $\alpha=x_1=x_2-1=-1$.

130. *Ответ*: $\left[-\frac{7}{16},\frac{161}{64}\right]$. *Указание*. Приведите неравенство к виду

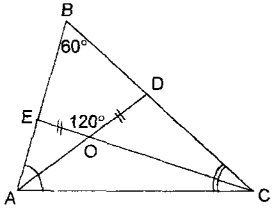
$$\left|\sqrt{x+1}-1\right|+\left|\sqrt{x+2}-2\right|\leqslant 1.$$

131. *Ответ*: 2.

$$(x+y)(y+z)=xy+xz+y^2+yz=(x+y+z)y+xz=\frac{1}{xz}+xz\geqslant 2.$$

Равенство достигается, когда $xz=1$ и $(x+y+z)y=1$, что выполнено, например, при $x=z=1$, $y=\sqrt{2}-1>0$.

132. $\angle AOC=180^\circ-\frac{\angle A}{2}-\frac{\angle B}{2}=90^\circ+\frac{\angle B}{2}=120^\circ$, поэтому четырёхугольник $BDOE$ — вписанный (ведь $\angle DBE+\angle DOE=180^\circ$). Так как BO — биссектриса $\angle DBE$, то вписанные углы DBO и EBO равны и, значит, опираются на равные дуги. Хорды OD и OE опираются на эти же равные дуги, следовательно, тоже равны.



133. *Ответ*: $\left[\begin{array}{l}x=\pi+2\pi k,\\ y=\pi n;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\pi-3+2\pi k,\\ y=\frac{\pi}{4}+\pi n\end{array}\right.$

Первое слагаемое в левой части неравенства не меньше -1, второе не меньше 0, следовательно, исходное неравенство равносильно следующей системе уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l}\cos(x+3\operatorname{tg}y)=-1,\\ \operatorname{tg}y-\operatorname{tg}^2y=0.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+3\operatorname{tg}y=\pi+2\pi k,\\ \operatorname{tg}y=0\text{ или }\operatorname{tg}y=1.\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad а) \begin{cases} \operatorname{tg} y = 0, \\ x = \pi + 2\pi k. \end{cases} \qquad б) \begin{cases} \operatorname{tg} y = 1, \\ x = \pi - 3 + 2\pi k. \end{cases}$$

134. *Ответ*: остаток 3. См. решение задачи 110.

135. *Ответ*: $a_{\min} = 16$. Разделим уравнение на $(x-a)^2$ ($x = a$ — не является корнем при натуральном a, поэтому делить можно).

$$\left(\frac{ax}{x-a}\right)^2 + x^2 = 1996.$$

Дополним левую часть до квадрата суммы:

$$\left(\frac{ax}{x-a} + x\right)^2 - 2\frac{ax}{x-a}x = 1996, \qquad \left(\frac{x^2}{x-a}\right)^2 - 2a\frac{x^2}{x-a} - 1996 = 0.$$

Обозначив $y = \frac{x^2}{x-a}$, получим уравнение $y^2 - 2ay - 1996 = 0$. Его дискриминант $\frac{1}{4}D_y = a^2 + 1996 > 0$, поэтому уравнение всегда разрешимо относительно y, причём $y_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 + 1996}$ ($y_1 < 0$, $y_2 > 0$). Таким образом, задача сводится к решению двух квадратных уравнений $x^2 - y_{1,2}x + ay_{1,2} = 0$. Дискриминант первого $D_x^{(1)} = y_1^2 - 4ay_1 = y_1(y_1 - 4a) > 0$, так как $y_1 < 0$ и $y_1 = a - \sqrt{a^2 + 1996} < 4a$ при положительном a. Следовательно, значению y_1 соответствует два различных решения исходного уравнения. Исходное уравнение будет иметь не более двух решений, если мы потребуем, чтобы не нашлось значений x, отвечающих y_2. Это выполняется, когда

$$D_x^{(2)} = y_2^2 - 4ay_2 = y_2(y_2 - 4a) < 0,$$

т. е. если $y_2 - 4a = \left(a + \sqrt{a^2 + 1996}\right) - 4a < 0$ (ведь $y_2 > 0$). Из последнего неравенства следует, что $8a^2 > 1996$, но поскольку a – натуральное, то $a \geqslant 16$

136. Допустим, что функция $f(x)$ — периодическая и T — её период. Тогда $f(0) = f(T)$. Так как $f(0) = 2$, то и $f(T) = \cos T + \cos\left(\sqrt{1996} \cdot T\right) = 2$ Последнее соотношение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \cos T = 1, \\ \cos\left(\sqrt{1996} \cdot T\right) = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = 2\pi k, \\ \sqrt{1996} \cdot T = 2\pi n. \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1996} = \frac{n}{k}.$$

Итак, получили, что $\sqrt{1996}$ – рациональное число. Противоречие.

137. *Ответ*: $(10, 10)$, $(10, \frac{1}{10})$, $(\frac{1}{10}, 10)$, $(\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$.

Обозначим $\lg x = a$, $\lg y = b$, тогда система перепишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\lg\left|\dfrac{\lg x}{\lg y}\right|}{\lg y} = \dfrac{\lg\left|\dfrac{\lg y}{\lg x}\right|}{\lg x}, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\lg\left|\dfrac{a}{b}\right|}{b} = \dfrac{\lg\left|\dfrac{b}{a}\right|}{a}, \\ a^2 + b^2 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\left(\lg|a| - \lg|b|\right) = b\left(\lg|b| - \lg|a|\right), \\ a^2 + b^2 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b|, \\ a^2 + b^2 = 2. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $|a| = |b| = 1$, т. е. $|\lg x| = |\lg y| = 1$.

138. *а*) Пусть $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = \frac{1}{n}$, $x_n = x_{n+1} = \frac{1}{2n}$. Тогда

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} = 1, \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = \frac{2n-1}{2n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2},$$

и при $n > 1996$ сумма квадратов меньше 1/1996.

б) Пусть $x_1 = \frac{1}{S}$, $x_2 = \frac{2}{S}$, ..., $x_n = \frac{n}{S}$, где $S = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Тогда

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{S^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6S^2} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}.$$

Числитель последней дроби пропорционален n, а знаменатель $\sim n^2$, поэтому при достаточно большом n эта дробь меньше 1/1996.

139. *Ответ*: $2\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n-1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k, \text{ где } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad x_k = \frac{k}{n}, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}.$$

Этот предел равен $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{1+x}\Big|_0^1 = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

140. *Ответ*: остаток 4. См. решение задачи 110.

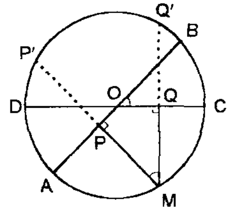
141. *Ответ*: $\dfrac{|av_2 - bv_1| \cdot |\sin\alpha|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha}}$. Обозначим через $d(t)$ расстояние между телами в момент времени t. Тогда по теореме косинусов

$$d^2 = (a - v_1t)^2 + (b - v_2t)^2 - 2(a - v_1t)(b - v_2t)\cos\alpha =$$

$$=\left(a^2+b^2-2ab\cos\alpha\right)-2\left(av_1+bv_2-av_2\cos\alpha-bv_1\cos\alpha\right)t+$$
$$+\left(v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha\right)t^2.$$

Минимум d достигается при $t_0=\dfrac{av_1+bv_2-av_2\cos\alpha-bv_1\cos\alpha}{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha}$. Имеем

$$d_{\min}^2=\left(a^2+b^2-2ab\cos\alpha\right)-\frac{\left(av_1+bv_2-av_2\cos\alpha-bv_1\cos\alpha\right)^2}{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha}=$$
$$=\frac{\left(av_2-bv_1\right)^2\sin^2\alpha}{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha}.$$



142. *Первое решение.* В четырёхугольнике $OPMQ$ углы $\angle P$ и $\angle Q$ равны 90°, т. е. их сумма 180°. Поэтому четырёхугольник $OPMQ$ — вписанный. Тогда $\angle PMQ = 180° - \angle POQ$, т. е. величина угла PMQ не зависит от положения точки M и равна углу между диаметрами. Продолжим MP и MQ до пересечения с окружностью в точках P' и Q'. Известно, что P — середина хорды MP', Q — середина хорды MQ', следовательно, PQ — средняя линяя $\Delta P'MQ'$ и $PQ=\frac{1}{2}P'Q'$. Осталось заметить, что длина дуги $\cup P'Q'$ и, значит, хорды $P'Q'$ не зависит от положения точки M, а определяется только величиной угла $P'MQ'$.

Второе решение. Четырёхугольник $OPMQ$ вписан в окружность Ω с диаметром $OM=r$ (r – радиус исходной окружности). Длина дуги $\cup PQ$, на которую опирается угол PMQ, определяется величиной этого угла. Так как диаметр окружности Ω и величина $\angle PMQ$ не зависят от положения точки M на исходной окружности, то PQ = const

143. Пусть $f(x)=\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}+\sqrt[3]{x-c}$. Функция $f(x)$ монотонно возрастает (почему?). Найдем точку x_0 такую, что $f(x_0)=0$. Для этого решим уравнение:

$$\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}+\sqrt[3]{x-c}=0.$$

Имеем

$$\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}=-\sqrt[3]{x-c}\ \text{(возводим в куб)},$$
$$(x-a)+(x-b)+3\sqrt[3]{x-a}\,\sqrt[3]{x-b}\left(\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}\right)=-(x-c),$$
$$(x-a)+(x-b)+(x-c)=3\sqrt[3]{x-a}\sqrt[3]{x-b}\sqrt[3]{x-c},$$
$$\left(x-\frac{a+b+c}{3}\right)^3=(x-a)(x-b)(x-c),$$

$$x^3-(a+b+c)x^2+\frac{(a+b+c)^2}{3}x-\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=$$
$$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$$

После приведения подобных получаем линейное относительно x уравнение, из которого находим

$$x_0=6\cdot\frac{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3-abc}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}.$$

Если $a=b=c$, то $x_0=a$.

Исходное неравенство имеет вид $f(x)\geqslant f(x_0)$, значит, решением являются все $x\geqslant x_0$ (ведь функция $f(x)$ — возрастающая).

144. Пусть $g(0)=\alpha$, $h(0)=\beta$. Положим в функциональном уравнении $y=0$, получим: $g(x)=f(x)-\beta$; аналогично, при $x=0$ получаем $h(y)=f(y)-\alpha$, так что

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-(\alpha+\beta). \qquad (*)$$

Продифференцируем функциональное уравнение (*) по y: $f'(x)=f'(0)$. Пусть $f'(0)=A$, тогда $f'(x)=A$ и $f(x)=Ax+B$. Подставляя в уравнение (*), найдём $B=\alpha+\beta$. Таким образом, решением функционального уравнения (*) являются функции

$$f(x)=Ax+\alpha+\beta,\quad g(x)=Ax+\alpha,\quad h(x)=Ax+\beta,$$

где A, α, β — произвольные действительные числа.

Из условий $g(19)=h(96)$, $g(96)=h(19)$ найдём, что $A=0$, $\alpha=\beta$. Следовательно, $f(x)=2\alpha=\text{const}$ — периодическая функция, не имеющая наименьшего периода.

145. *Ответ*: $a=-1$.

Первое решение. При $a=-1$ уравнение имеет три корня: 1; 1 и 2. Пусть теперь $a\neq-1$. Сделаем замену $x=(a+1)y+1$. После упрощений приходим к уравнению: $(a+1)y^3+3y^2+3y+1=0$ или $ay^3+(y+1)^3=0$, которое имеет только одно решение.

Второе решение. Укажем только идею решения. Кубическая парабола $p(x)=\frac{x^3}{a}+3x+a-1$ (или любая другая) имеет три действительных корня, если она имеет две точки экстремума x_1 и x_2, которые находятся из уравнения $p'(x)=0$, причём $p(x_1)\cdot p(x_2)\leqslant 0$. Неравенство $p(x_1)\cdot p(x_2)<0$ означает, что экстремумы параболы $p(x)$ лежат по разные стороны от оси абсцисс, в этом случае $p(x)$ пересекает ось абсцисс в трёх различных точках, т. е. имеет три различных действительных корня. Если $p(x_1)\cdot p(x_2)=0$, то парабола касается оси абсцисс в точке экстремума, и в этой точке касания наблюдается совпадающий действительный корень (корень кратности 2).

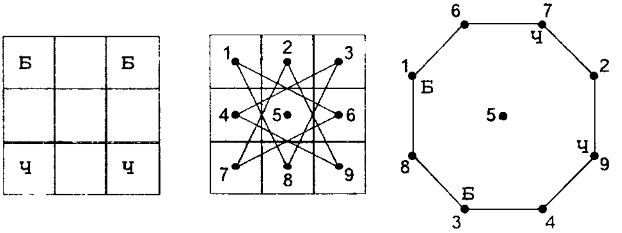
В нашем примере $x_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$, и неравенство $p(x_1)\cdot p(x_2) \leqslant 0$ записывается в виде $\left(\sqrt{-a}+1\right)^2\left(\sqrt{-a}-1\right)^2 \leqslant 0$, что возможно, если только $\sqrt{-a} = 1$.

146. *Ответ*: (3, 20), (100, 1). Перепишем уравнение в виде

$$97(y-1) = 19(100-x).$$

Левая часть уравнения неотрицательна при натуральном y и делится на 97, следовательно, правая часть тоже должна быть неотрицательной и делиться на 97. Из взаимной простоты чисел 19 и 97 следует, что $100 - x \geqslant 0$ и кратно 97. Это выполняется только в двух случаях: $x = 3$ и $x = 100$.

147. *Ответ*: за 16 ходов. Пронумеруем клетки доски числами от 1 до 9 и соединим пары клеток, если из одной в другую можно пройти ходом коня. Мы получим граф, содержащий "цикл" из восьми клеток и одну изолированную клетку (см. рис.). Перемещение коней по доске соответствует движению по рёбрам этого цикла. Ясно, что при движении по циклу нельзя изменить порядок следования коней. Двигаясь "по кругу" белые и чёрные кони поменяются местами не менее чем за 16 ходов.



148. *Ответ*: $x = 1$, $y = 0$ и $x = 0$, $y = -1$. График первого уравнения системы представляет собой квадрат с центром в точке $(1, -1)$, с диагональю 2 и со сторонами, наклонёнными к осям координат под углом 45°. График второго уравнения — также квадрат со стороной 2, с центром в начале координат, стороны которого параллельны осям координат. Эти два квадрата имеют только две общие точки $(1, 0)$ и $(0, -1)$.

149. Если $0 < x < 1$, то $x < \sqrt{x} < 1$, поэтому число в условии задачи имеет также 1997 девяток после запятой.

150. $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} = 3^n\left(1 + 3 + 3^2\right) = 3^n \cdot 13$.

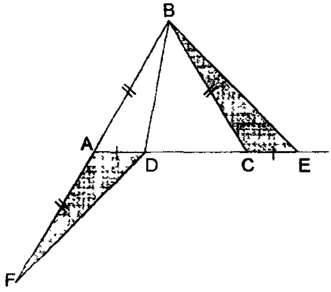
151. Перепишем неравенства задачи в виде

$$(a-b+c)(a+b+c) > 0, \qquad (a-b+c)\,c < 0,$$

или, если обозначить $f(x) = ax^2 + bx + c$,

$$f(-1)\cdot f(1) > 0, \quad f(-1)\cdot f(0) < 0.$$

Отсюда видно, что значения параболы $f(x)$ в точках -1 и 1 имеют один и тот же знак, причём отличный от знака значения параболы в нуле. Следовательно, парабола $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух различных точках: первый корень лежит в интервале $(-1, 0)$, второй — в интервале $(0, 1)$, т. е. оба корня не являются целыми.

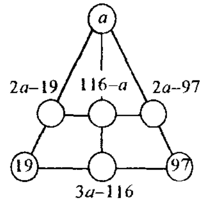


152. На продолжении отрезка AB за вершину A отложим отрезок $AF = BC$ (см. рис.). Треугольники ADF и BCE равны. Теперь

$$BD + BE = BD + DF > BF = AB + AF = AB + BC.$$

153. Произведение этих чисел заключено в промежутке от 22222×33333 до $33333\cdot 44444$, т. е. от 740725926 до 1481451852. Поэтому первая цифра произведения — не 2.

154. Обозначим через a число, записанное в самом верхнем круге, и пусть сумма чисел в каждой тройке кругов, расположенных на одной прямой, равна S. Тогда сумма всех чисел в кругах равна с одной стороны $2S + a$ (сумма чисел на двух горизонтальных прямых и числа, расположенного в верхней вершине), а с другой стороны $3S - 2a$ (сумма чисел на трёх прямых, содержащих верхнюю вершину a за вычетом удвоенного числа в этой вершине, поскольку в этой сумме она учитывается трижды). Таким образом, $2S + a = 3S - 2a$, откуда $S = 3a$. Теперь без труда можно выразить через a числа в остальных кругах (см. рис.). Осталось потребовать, чтобы все числа были натуральными, т. е.



$$a \geqslant 1,\ \ 2a - 19 \geqslant 1,\ \ 2a - 97 \geqslant 1,$$
$$116 - a \geqslant 1,\ \ 3a - 116 \geqslant 1$$

Из данной системы неравенств устанавливаем $49 \leqslant a \leqslant 115$ (a — натуральное), так что всего существует $(115 - 49) + 1 = 67$ различных расстановок.

155. Для любого α имеем $\alpha - 1 < [\alpha] \leqslant \alpha$, так что

$$[\alpha] - 1997\left[\frac{\alpha}{1997}\right] < \alpha - 1997\left(\frac{\alpha}{1997} - 1\right) = 1997,$$

$$[\alpha] - 1997\left[\frac{\alpha}{1997}\right] > \alpha - 1 - 1997\frac{\alpha}{1997} = -1,$$

т. е. целое число $[\alpha] - 1997\left[\frac{\alpha}{1997}\right]$ может равняться только **0, 1, ..., 1996**.

Осталось поделить все числа на 1997.

156. Для любого натурального $n \geqslant 2$ справедлива оценка
$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$
Применим эту оценку ко всем слагаемым числа x, начиная со второго:
$$x < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{1996} - \frac{1}{1997}\right) = 2 - \frac{1}{1997} < 2.$$
Так как $1 < x < 2$, то $[x] = 1$.

157. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 = 3n(n^2+5) + 9(n^2+1)$.

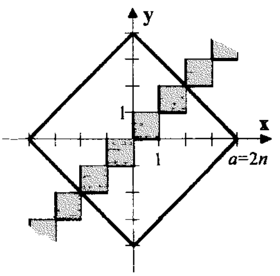
Так нужно доказать, что $n(n^2+5)$ делится на 3. Если n кратно 3, то это очевидно, Если же n не кратно 3, то на 3 делится $n^2 + 5$, поскольку
$$n^2 + 5 = (3k \pm 1)^2 + 5 = 9k^2 \pm 6k + 6 = 3\cdot(3k^2 \pm 2k + 2).$$

158. Если числитель и знаменатель дроби x_1 умножить на 101 (при этом значение дроби не меняется), а затем к числителю полученной дроби прибавить 1 (увеличив, таким образом, значение дроби), то получится дробь x_2. Значит, $x_1 < x_2$

Аналогично, умножив числитель и знаменатель x_1 на 10101 и затем вычтя из знаменателя 1, получим x_3. Значит, $x_1 > x_3$

159. *Ответ*: 15. Всего вкладчиками стало 1000 нумизматов (20% от 5000). Среди них вкладчиками сразу трёх компаний стало
$$1000 - (440 + 425 + 300) + (65 + 40 + 75) = 15 \text{ человек.}$$

160. Ответ: $a = 2n$, $n \in \mathbf{Z}$. Множество точек, удовлетворяющих уравнению $[x] = [y]$, представляет собой серию квадратов
$$M_k = \{k \leqslant x < k+1, k \leqslant y < k+1\} \quad (k \in \mathbf{Z})$$



с открытыми верхней и правой границами. Графическое представление второго уравнения системы есть ромб с центром в начале координат, с полудиагональю, равной a, и со сторонами, наклонёнными к осям координат под углом 45° (см. рис.). Эти два множества имеют не более двух общих точек, когда a — целое чётное число.

161. *Ответ*: $(x = 4, y = 5)$; $(x = 5, y = 6)$; $(x = 6, y = 7)$; $(x = 7, y = 8)$.

Из неравенство задачи следует, что $x < y$. Перепишем его в виде $7y < 9x < 8y$. Поскольку $x > \frac{7}{9}y$, то $y - x < y - \frac{7}{9}y = 2\frac{y}{9} \leqslant 2$. Таким образом, $0 < y - x < 2$, следовательно, $y - x = 1$. Теперь требуется отыскать все x такие, что $7(x+1) < 9x < 8(x+1)$. Отсюда находим, что $4 \leqslant x \leqslant 7$.

163. Числа α и β удовлетворяют соотношениям:

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0, \quad \beta^2 - p\beta - q = 0,$$

и поскольку $q \neq 0$, то $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Обозначим $f(x) = x^2 + 2px + 2q$. Тогда

$$f(\alpha) = \alpha^2 + 2p\alpha + 2q = 2(\alpha^2 + p\alpha + q) - \alpha^2 = -\alpha^2,$$
$$f(\beta) = \beta^2 + 2p\beta + 2q = 3\beta^2 - 2(\beta^2 - p\beta - q) = 3\beta^2.$$

Таким образом, квадратный трёхчлен $f(x)$ принимает в точках α и β значения разных знаков, значит, парабола $f(x)$ пересекает ось абсцисс в точке, заключённой между α и β.

164. Применим операцию * к числам a, b, c:

$$(a*b)*c = 1 - \frac{a*b}{c} = 1 - \frac{1}{c}\left(1 - \frac{a}{b}\right) = 1 - \frac{1}{c} + \frac{a}{bc}.$$

В частности, при $c = 1$ получаем операцию деления:

$$\frac{a}{b} = (a*b)*1.$$

Операцию умножения можно получить при помощи деления следующим образом:

$$ab = \frac{a}{1/b} = \left(a*\frac{1}{b}\right)*1 = \left(a*\left[(1*b)*1\right]\right)*1.$$

Вычитание можно свести к умножению так:

$$b - a = \frac{b-a}{b}\cdot b = \left(1 - \frac{a}{b}\right)\cdot b = (a*b)\cdot b.$$

Самое сложное действие — сложение. Его можно заменить умножением и вычитанием:

$$b + a = 2\cdot b - (b - a).$$

Остапу Бендеру остаётся пожелать лучшего.

165. Пусть a, $a + d$, $a + 2d$ ($d > 0$) — стороны прямоугольного треугольника. По теореме Пифагора $a^2 + (a+d)^2 = (a+2d)^2$. Решив это квадратное уравнение относительно d, найдём $d = \frac{a}{3}$ Тогда стороны прямоугольного треугольника равны a, $\frac{4}{3}a$, $\frac{5}{3}a$. По формуле для радиуса вписанной окружности r треугольника $r = S/p$ (S — площадь, p — полупериметр) находим $r = \frac{a}{3}$, т. е. $d = r$.

166. *Ответ*: $x = 1997$. Перепишем уравнение в виде

$$x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3^2}}\cdot x^{\frac{2}{3^3}}\cdot\ldots = 1997, \quad x^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\ldots} = 1997.$$

Поскольку сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots$ равна 1, то $x = 1997$.

167. Выполнив подстановку $x \to \frac{x}{x-1}$, приходим к уравнению:

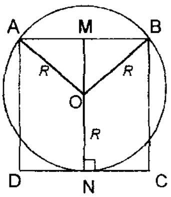
$$f(x) = 2f\left(\frac{x}{x-1}\right) + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2.$$

Вместе с исходным это уравнение образует линейную систему относительно $f(x)$ и $f\left(\frac{x}{x-1}\right)$, из которой находим $f(x) = -\frac{1}{3}x^2\left[2 + \frac{1}{(x-1)^2}\right]$.

168. Пусть $ABCD$ — искомый квадрат, точки A и B лежат на данной окружности с центром O и радиусом R, сторона CD касается окружности в точке N. Продолжим отрезок $ON \perp CD$ за точку O до пересечения со стороной AB квадрата в точке M. Пусть $AB = a$. Тогда

$$AM = \frac{a}{2}, \quad OM = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad MN = OM + ON = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} + R = a,$$

откуда $a = \frac{8}{5}R$.



Для построения квадрата определяем сначала точку O, как точку пересечения серединных перпендикуляров любого вписанного в окружность треугольника. Далее делим радиус R на 5 равных частей (как?) и строим отрезок $a = \frac{8}{5}R$. Хорду $AB = a$ легко достроить до искомого квадрата.

169. *Ответ*: $(-\infty, 2) \cup [\sqrt{5}, +\infty)$ Найдём все x, удовлетворяющие обратному неравенству

$$x^2 - 4[x] + 3 < 0, \qquad (*)$$

тогда значения x, которые ему не удовлетворяют, будут являться решением неравенства задачи.

Пусть x удовлетворяет (*) и $n = [x]$. Из неравенства (*) следует, что $x^2 + 3 < 4n$, и, значит, $n > 0$. В таком случае, используя неравенство $n \leqslant x$, получаем

$$n^2 + 3 \leqslant x^2 + 3 < 4n, \text{ откуда } n^2 - 4n + 3 < 0.$$

Решением последнего неравенства являются значения $1 < n < 3$, но n — целое, так что годится лишь значение $n = 2$. Следовательно, $x \geqslant 2$ Далее, из неравенства $x^2 + 3 < 4n = 8$ устанавливаем, что $x < \sqrt{5}$. Нетрудно проверить, что все значения x из промежутка $[2, \sqrt{5})$ удовлетворяют (*), поэтому значения $(-\infty, 2) \cup [\sqrt{5}, +\infty)$ являются решением исходного неравенства.

170. Существует конечное количество четвёрок подряд идущих чисел от 0 до 9, поэтому по принципу Дирихле рано или поздно какая-то четвёрка повторится. Покажем, что первой повторится начальная четвёрка 6, 1, 3, 7. Допустим противное: первой повторится четвёрка, стоящая на n-ой позиции от начала последовательности, а повторение начнётся с $(n+p)$-ой позиции. Будем двигаться по последовательности назад (это возможно, т. к. предыдущая цифра последовательности однозначно восстанавливается по последующим четырём). Если обозначить члены последовательности a_i, то будем иметь

$$\left(a_n = a_{n+p}\right) \mapsto \left(a_{n-1} = a_{n+p-1}\right) \mapsto \left(a_{n-2} = a_{n+p-2}\right) \mapsto \ldots \mapsto$$
$$\mapsto \left(a_4 = a_{p+4}\right) \mapsto \left(a_3 = a_{p+3}\right) \mapsto \left(a_2 = a_{p+2}\right) \mapsto \left(a_1 = a_{p+1}\right).$$

Получили противоречие: на $(p+1)$-ой позиции стоит начальная четвёрка 6, 1, 3, 7, т. е. она повторится раньше. Найдём четыре цифры, стоящие перед ней. Это и будут цифры 1, 9, 9, 7.

171. *Ответ*: $(x=-1, y=0)$, $(x=0, y=1)$. Запишем уравнение в виде

$$x^3 + (x^2 + x + 1) = y^3.$$

Так как $x^2 + x + 1 > 0$, то $y > x$ и, значит, $y \geqslant x+1$. Теперь имеем

$$x^3 + x^2 + x + 1 = y^3 \geqslant (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,$$
$$2x^2 + 2x \leqslant 0, \quad -1 \leqslant x \leqslant 0.$$

Число x — целое, поэтому $x=-1$ или 0. Для каждого из этих x находим соответствующее значение $y = 0$ или 1.

172. *Ответ*: равенствам удовлетворяют тройки $\{(a, b, c) \mid M\}$, где условие M — одно из следующих: $\{a=b=c\}$, $\{a=b=0,\ c>0\}$, $\{b=c=0, a<0\}$, $\{a=c=0, b<0\}$, $\{a=b=-\frac{4}{5}c<0\}$.

Пусть $x = a + \sqrt{a^2 - bc} = b + \sqrt{b^2 - ca} = c - \sqrt{c^2 - ab}$. Тогда число x является общим корнем трёх квадратных уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 2ax + bc = 0, \\ x^2 - 2bx + ca = 0, \\ x^2 - 2cx + ab = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2ax - bc = 2bx - ca = \\ = 2cx - ab. \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)x = -\frac{c}{2}(a-b), \\ (b-c)x = -\frac{a}{2}(b-c), \\ (c-a)x = -\frac{b}{2}(c-a). \end{cases}$$

Если числа a, b, c различны, то из последней системы после сокращений находим $x = -\frac{a}{2} = -\frac{b}{2} = -\frac{c}{2}$, т. е. $a=b=c$, что противоречит предположению. Значит, среди чисел a, b, c есть по крайней мере два равных. Исключим из дальнейшего рассмотрения тривиальный случай $a=b=c$, который подходит под условие задачи.

(I) Пусть $a=b$ и числа a, b отличны от c. Тогда из последней системы $x=-\frac{a}{2}$. Подставим это значение x в любое из приведённых квадратных уравнений, получим: $\frac{a^2}{4}+a^2+ca=0$, откуда $a=0$ или $c=-\frac{5}{4}a$. В первом случае, заменив в равенствах задачи $a=b=0$, получим $0=c-|c|$, откуда $c \leqslant 0$. Рассмотрим второй вариант. Положим в исходных равенствах $a=t$, $b=t$, $c=-\frac{5}{4}t$, имеем:

$$t+\sqrt{t^2+\frac{5}{4}t^2}=-\frac{5}{4}t-\sqrt{\frac{25}{16}t^2-t^2}, \quad t+\frac{3}{2}|t|=-\frac{5}{4}t-\frac{3}{4}|t|, \quad |t|=-t, \quad t\leqslant 0.$$

Следовательно, значения $a=b=-\frac{4}{5}c \leqslant 0$ удовлетворяют условию.

(II) Пусть $b=c\neq a$. Тогда $x=-\frac{b}{2}$ и $\frac{b^2}{4}+ab+b^2=0$, откуда $b=0$ или $a=-\frac{5}{4}b$. При $b=c=0$ получим $a+|a|=0$, значит, $a\geqslant 0$. Как и выше устанавливаем, что случай $a=-\frac{5}{4}b$ возможен, если только $a=b=c=0$.

(III) Рассмотрение случая $a=c\neq b$ аналогично (II).

173. После разрезания одного куска бумаги на 3 части общее количество кусков увеличивается на 2, поэтому получаем соотношение

$$13+2k=132,$$

где k — общее число разрезов. Понятно, что это равенство не выполнимо в десятичной системе счисления, однако в любой системе счисления с нечётным основанием, большим 4, значение k находится без труда.

174. *Ответ*: *а*) 0; *б*) четыре значения $\pm\sqrt{1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Из области определения следует, что

$$\cos(x-y)-\sin(x+y)-2\geqslant 0. \Leftrightarrow \begin{cases}\cos(x-y)=1,\\ \sin(x+y)=-1.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=2\pi k,\\ x+y=-\frac{\pi}{2}+2\pi n.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\cos(x-y)+\sin(x+y)=0.\right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-\frac{\pi}{4}+\pi(n+k),\\ y=-\frac{\pi}{4}+\pi(n-k).\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+\frac{y}{2}=-\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{2}(3n+k),\\ \frac{x}{2}+y=-\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{2}(3n-k).\end{cases}$$

Выражения $\sin\left(x+\frac{y}{2}\right)$ и $\cos\left(\frac{x}{2}+y\right)$ в зависимости от значений $n, k \in \mathbf{Z}$ принимают следующие значения:

l (mod 4)	0	1	2	3
$\sin\left(-\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{2}l\right)$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
$\cos\left(-\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{2}l\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Поэтому сумма $\sin\left(x+\frac{y}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}+y\right)$ может принимать значения:

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Каждое из этих значений достигается, например, для следующих комбинаций n и k: ($n=1, k=1$), ($n=0, k=0$), ($n=0, k=2$), ($n=1, k=-1$).

Упростим полученное выражение. Пусть $a=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. После возведения в квадрат, имеем

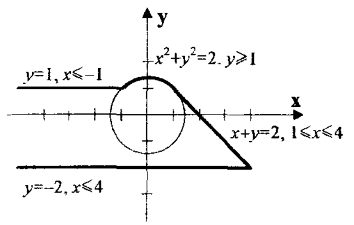
$$a^2=\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\pm2\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}+2-\sqrt{2}\right)=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда $a=\pm\sqrt{1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

176. *Ответ*: $x=2$. Подставив в уравнение значение $x=2$, убеждаемся, что оно является его корнем. Перепишем уравнение в виде

$$\left(\frac{315}{1997}\right)^x+\left(\frac{1972}{1997}\right)^x=1.$$

В левой части данного уравнения стоит строго монотонная функция, следовательно, уравнение имеет единственное решение.



177. Для построения множества точек (x, y), удовлетворяющих равенству задачи, нужно рассмотреть 4 возможных случая положения точки (x, y) относительно двух парабол $y=x^2$ и $x=y^2$. Результат анализа приведён на рисунке.

178. Для того, чтобы задача имела смысл, все числа в условии должны быть восприняты в системе счисления с основанием меньше 10. Кроме того, в указанной дате использована цифра 7, поэтому система счисления как минимум 8-ричная. Имеем: $2742_8=1506$, $2742_9=2063$, так что 9-ричная система не подходит и можно утверждать, что в манускрипте использована восьмеричная система счисления.

Теперь нужно проверить корректность задачи, т. е. доказать справедливость указанной теоремы.

$$(\overline{abc})_8 - (\overline{cba})_8 = N^2,$$
$$(64a + 8b + c) - (64c + 8b + a) = N^2,$$
$$9 \cdot 7(a - c) = N^2,$$

следовательно, $7(a-c)$ — квадрат натурального числа. Значит, $a-c$ делится на 7, и поскольку $0 \leqslant a \leqslant 7$, $0 \leqslant c \leqslant 7$, то $a = 7$, $c = 0$. Таким образом, условию теоремы удовлетворяют числа $(\overline{7b0})_8$, где b — произвольная 8-ричная цифра. Всего таких чисел 8 (< 3·3). Теорема верна, а город Самара основан позже 1506 года.

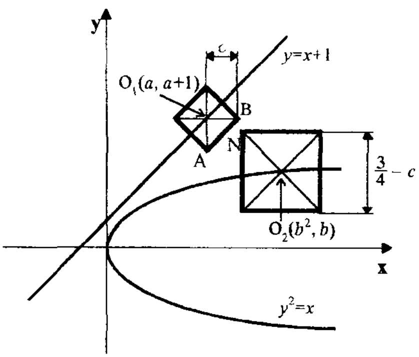
179. *Ответ*: $\left\{-\frac{1}{8}-\frac{c}{2}\leqslant a\leqslant -\frac{1}{8}+\frac{c}{2},\ b=\frac{1}{2},\ 0\leqslant c\leqslant\frac{3}{4}\right\}$.

Множество точек, удовлетворяющих уравнениям системы, представляет собой контуры двух квадратов, первый — со сторонами параллельными прямым $y = \pm x$, второй — со сторонами параллельными осям координат. Центр первого квадрата расположен в точке $(a, a+1)$, т. е. лежит на прямой $y = x + 1$, и длина половины его диагонали равна c. Центр второго квадрата — точка (b^2, b) — лежит на параболе $x = y^2$, и длина его стороны равна $\frac{3}{4} - c$.

Найдём наименьшее расстояние между параболой $x = y^2$ и прямой $y = x + 1$. По формуле расстояния от точки (b^2, b) до прямой $x - y + 1 = 0$ находим, что

$$\rho = \frac{|b^2 - b + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{(b-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{3}{4\sqrt{2}}, \quad \rho_{\min} = \frac{3}{4\sqrt{2}} \text{ при } b = \frac{1}{2}.$$

Пусть A, B — вершины первого квадрата, лежащие ниже прямой $x = y - 1$, N — левая верхняя вершина второго квадрата, O_1, O_2 — их центры. Покажем, что точка N при любых значениях параметров a, b, c лежит не выше прямой AB. Действительно, расстояние от точки O_1 до прямой AB равно $\frac{c}{\sqrt{2}}$, поэтому расстояние от точки O_2 до прямой AB не меньше



$$\rho_{\min} - \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{4} - c\right) = O_2N.$$

Если точка N лежит ниже прямой AB, то и весь контур второго квадрата лежит ниже этой прямой; в этом случае квадраты не имеют общих точек, и, значит, система не имеет решений. Для разрешимости системы нужно потребовать, чтобы точка N лежала на отрезке AB. Необходимым для этого условием является $b=\frac{1}{2}$, поскольку лишь в этом случае расстояние от точки O_2 до прямой AB достигает $\rho_{\min}$. Это условие равносильно принадлежности точки N прямой AB. Точка N будет лежать между A и B, если её абсцисса (ордината) будет заключена между абсциссами (ординатами) точек A и B. Таким образом,

$$a\leqslant b^2-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-c\right)\Bigg|_{b=\frac{1}{2}}\leqslant a+c,\qquad a\leqslant -\frac{1}{8}+\frac{c}{2}\leqslant a+c,$$

$$\text{отсюда } -\frac{1}{8}-\frac{c}{2}\leqslant a\leqslant -\frac{1}{8}+\frac{c}{2}.$$

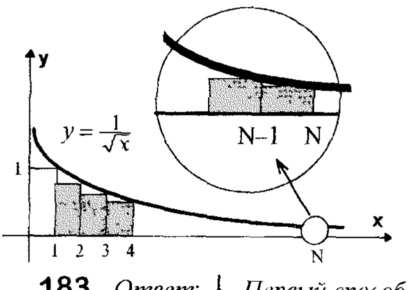
Отметим, что ограничения на параметр c непосредственно следуют из исходной системы: $0\leqslant c\leqslant\frac{3}{4}$.

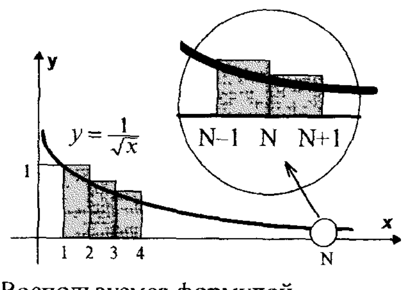
180. *Ответ*: 1997. Обозначим $N=1\,000\,000$. Рассмотрим функцию $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ и область, расположенную ниже её графика, опишем прямоугольниками с избытком и с недостатком. На рисунках площадь заштрихованных областей равна $\sum\limits_{k=2}^{N}\frac{1}{\sqrt{k}}$. Поэтому

$$\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{\sqrt{k}}<\int_1^N\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_1^N=2\sqrt{N}-2=1998,$$

$$\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{\sqrt{k}}>\int_2^{N+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_2^{N+1}=2\sqrt{N+1}-2\sqrt{2}>1997.$$

Если $1997<x<1998$, то $[x]=1997$.





183. *Ответ*: $\frac{1}{3}$. *Первый способ*. Воспользуемся формулой

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})}{n^3}=\frac{1}{3}.$$

Второй способ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)=\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}.$$

185. *Указание*. Слагаемые в левой части неравенства имеют одинаковые знаки, поэтому исходное неравенство равносильно следующему:

$$\left(x^3-2\right)\sin x>0.$$

191. Рассмотрим вместе с данным выражением

$$P=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9997}{9998}\cdot\frac{9999}{10000}$$

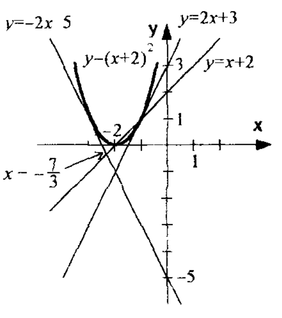
следующее:

$$Q=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{9998}{9999}\cdot 1.$$

Поскольку каждый из сомножителей произведения P меньше соответствующего сомножителя Q, то $P<Q$ и, следовательно, $P^2<PQ=\frac{1}{100^2}$, то есть $P<\frac{1}{100}$.

192. *Ответ*: $a<-\frac{7}{3}$ и $a>-2$. Запишем уравнение в виде

$$(x+2)^2=2|x-a|+a+2.$$



Решением уравнения являются точки пересечения параболы $y=(x+2)^2$ и графика функции модуля $y=2|x-a|+a+2$ с вершиной в точке $(a, a+2)$, которая лежит на прямой $y=x+2$. Построим две касательные к параболе $y=(x+2)^2$, параллельные лучам функции модуля, т. е. с коэффициентами $k=2$ и $k=-2$. Это будут прямые $y=2x+3$ и $y=-2x-5$, поскольку первая из них проходит через точку $(-1, 1)$ параболы, вторая — через точку $(-3, 1)$, и все точки параболы, отличные от указанных, лежат выше данных прямых:

$$(x+2)^2\geqslant 2x+3 \quad \text{и} \quad (x+2)^2\geqslant -2x-5 \quad \forall x\in\mathbf{R}$$

Из рисунка теперь сразу следует, что при $a<-\frac{7}{3}$ и $a>-2$ графики параболы и функции модуля имеют две точки пересечения, при $a=-\frac{7}{3}$ и $a=-2$ — три точки пересечения, при $-\frac{7}{3}<a<-2$ — четыре точки пересечения.

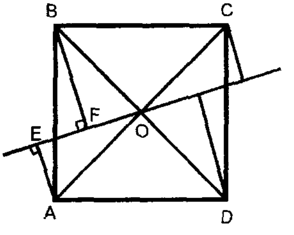
193. Поскольку $\underbrace{11\ldots1}_{1996} = 1 + 10 + 10^2 + 10^{1995} = \dfrac{10^{1996} - 1}{9}$ и, аналогично,

$\underbrace{22\ldots2}_{998} = \dfrac{2(10^{998} - 1)}{9}$, то подкоренное выражение равно

$$\frac{10^{1996} - 2 \cdot 10^{998} + 1}{9} = \left(\frac{10^{998} - 1}{3}\right)^2.$$

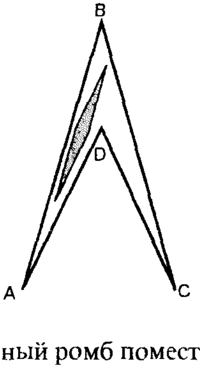
Таким образом, исходное выражение равно $\dfrac{10^{998} - 1}{3}$.

194. *Ответ*: $\left(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}\right)$.



195. Пусть в квадрате $ABCD$ смежные вершины A и B лежат по разные стороны от прямой, проходящей через его центр (см. рис), AE и BF — расстояния от вершин квадрата до этой прямой. Треугольники AEO и BFO равны (равны все углы и $AO = BO$), следовательно, $FO = AE$. По теореме Пифагора $BF^2+FO^2 = BF^2+AE^2 = BO^2$. Так как длина BO не зависит от положения прямой, то сумма квадратов расстояний от вершин квадрата до этой прямой постоянна.

196. Так как данные четыре числа не делятся на 4, то они принадлежат множеству чисел $\{4k+1,\ 4k+2,\ 4k+3,\ k \in Z\}$. Таким образом, в полученном множестве есть три класса чисел, значит, найдутся как минимум два числа, относящиеся к одному классу множества. Как легко убедиться, разность таких чисел кратна 4.



197. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, показанный на рисунке. Будем постепенно сближать пары точек A, C и B, D Тогда сумма диагоналей $AC + BD$ данного четырёхугольника будет уменьшаться, так что можно добиться, чтобы она стала меньше любого наперёд заданного числа ρ. Осталось вложить в полученный четырёхугольник другой четырёхугольник с суммой диагоналей, большей ρ. Для примера можно взять ромб, у которого одна диагональ очень мала, а другая имеет величину больше ρ и подобрана таким образом, чтобы данный ромб поместился внутри одной ветви четырёхугольника $ABCD$.

198. Так как 19! и 94! — чётные числа, а 19 и 94 в четной степени оканчиваются на 1 и 6 соответственно, то число $19^{19!}+94^{94!}$ оканчивается цифрой 7.

200. *Ответ*: $n = 1$. Покажем, что при $n \geqslant 2$ число $6^n - 5^n$ не может быть точным квадратом. При $n \geqslant 2$ число 6^n делится на 4, а число 5^n при делении на 4 даёт остаток 1, поэтому $6^n - 5^n = 4k + 3$. Заметим, что квадрат натурального числа при делении на 4 даёт в остатке 0 или 1, значит, $4k + 3$ не является точным квадратом.

201. Запишем уравнение в виде

$$3t^2(2y^2 - x^2) = z^2(2y^2 - x^2).$$

Отсюда следует, что либо $x = \sqrt{2}y$, либо $z = \sqrt{3}t$. Из этих равенств видно, что числа x, y, z и t не могут одновременно быть натуральными, значит, уравнение не имеет решений в натуральных числах.

202. Рассмотрим разность чисел

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99(a - c) = 3^2\ 11(a - c).$$

Если эта разность — точный квадрат, то число $11(a - c)$ является квадратом натурального числа, причём $a - c$ кратно 11 Но это невозможно, так как $|a - c| < 10$.

203. Пусть в ΔABC известны $\angle A$, сторона BC и медиана AM. Легко построить равнобедренный $\Delta A'BC$, где $\angle A' = \angle A$. Опишем около $\Delta A'BC$ окружность. Точка A лежит на этой окружности. Проведём дугу с центром в точке M радиусом AM, которая пересечёт описанную окружность в точке A.

204. *Указание.* Умножьте левую и правую части равенства на $1 - x$.

205. Так как дробь не зависит от x, то $\dfrac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p} = k$, где k — константа. Следовательно, $ax^2 + bx + c = kmx^2 + knx + kp$ и

$$(a - km)x^2 + (b - kn)x + (c - kp) = 0.$$

Последнее соотношение выполнено для любого x тогда и только тогда, когда в его левой части стоит нулевой многочлен. Таким образом, $a = km$, $b = kn$, $c = kp$, где k — произвольная постоянная. Кроме того, хотя бы одно из чисел m, n, p должно быть ненулевым.

206. Рассмотрим подкоренное выражение:

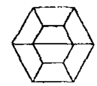
$$4\cdot\left(1+10+100+\ldots+10^{1993}\right)-11\cdot4\cdot\left(1+10+100+\ldots+10^{996}\right)+9=$$

$$=4\cdot\frac{10^{1994}-1}{9}-44\cdot\frac{10^{997}-1}{9}+9=\left(\frac{2\cdot10^{997}-11}{3}\right)^2$$

Таким образом, исходное выражение равно

$$\frac{2\cdot10^{997}-11}{3}=2\cdot\frac{10^{997}-1}{3}-3=2\cdot\underbrace{33\ldots3}_{996\text{ троек}}-3=\underbrace{666\ldots663}_{995\text{ шестерок}}.$$

206. Возможное разбиение шестиугольника показано на рисунке. Доказательство равенства фигур разбиения оставляется читателю.



207. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения ($x_1 \leqslant x_2$). Так как $p=-x_1-x_2$ и $q=x_1x_2$, то из условия следует, что

$$x_1x_2-x_1-x_2=198 \text{ или } (x_1-1)(x_2-1)=199,$$

отсюда либо $x_1-1=1$, $x_2-1=199$, либо $x_1-1=-199$, $x_2-1=-1$. Соответственно получаем два варианта ответа: $x_1=2$, $x_2=200$ и $x_1=-198$, $x_2=0$.

208. Найдём число целочисленных решений уравнения $|x|+|y|=N$, где N — некоторое натуральное число. Если $x\geqslant0$, $y\geqslant0$, то получаем следующие решения $(0, N)$, $(1, N-1)$, .. , $(N, 0)$ Все остальные решения получаются из приведённых поочерёдной заменой знаков у элементов пары. Каждая пара (x, y), $x\neq0$, $y\neq0$, образует четыре различных решения: (x, y), $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$, если же одно из чисел x, y равно 0, то эта пара даёт только два новых решения. В итоге всего получается $4(N-1)+2+2=4N$ решений.

Исходя из этого устанавливаем, что количество решений в целых числах неравенства $1917\leqslant|x|+|y|\leqslant1994$ равно

$$4\left(1917+\ldots+1994\right)=4\left[\frac{1994\cdot1995}{2}-\frac{1916\cdot1917}{2}\right]=610116.$$

209. Все слагаемые суммы можно представить в следующем виде $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$. Поэтому исходная сумма равна

$$\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{9!}-\frac{1}{10!}\right)=1-\frac{1}{10!}.$$

Так как $10!>10^5$, то $1-\frac{1}{10!}>1-10^{-5}=0{,}99999$. Следовательно, пятая цифра после запятой — девятка.

212. Пусть a — основание системы счисления. Данное в условии число представимо в виде

$$1+a^2+a^3+\ldots a^{n+1}+a^{n+3}=1+a^2\frac{a^n-1}{a-1}+a^{n+3}=$$
$$=\frac{a^{n+4}-a^{n+3}+a^{n+2}-a^2+a-1}{a-1}=\frac{(a^2-a+1)(a^{n+2}-1)}{a-1}=$$
$$=\left(a^2-a+1\right)\left(a^{n+1}+a^n+\ldots+a+1\right).$$

Получившийся многочлен делится на 61 независимо от n, следовательно, выражение a^2-a+1 кратно 61. Это возможно при наименьшем основании системы счисления a, равном 14.

213. Перенесём x^2 из правой части тождества в левую и обозначим получившееся в левой части выражение через $P(x)$. Требуется доказать, что $P(x)\equiv 0$. Во-первых, понятно, что $P(x)$ - многочлен не выше второй степени. Более того, $P(a)=0$, $P(b)=0$ и $P(c)=0$. Но, как известно, многочлен степени не выше 2, не равный тождественно нулю, не может иметь более двух корней, следовательно, $P(x)\equiv 0$.

214. Пусть 2φ — угол, под которым из точки O видна сторона квадрата с вершинами на окружности, r — расстояние от центра окружности, до вершин квадрата, не лежащих на окружности Тогда

$$r^2=\sin^2\varphi+(\cos\varphi+2\sin\varphi)^2=1+2\sin 2\varphi+4\sin^2\varphi=$$
$$=3+2(\sin 2\varphi-\cos 2\varphi)=3+2\sqrt{2}\sin\left(2\varphi-\tfrac{\pi}{4}\right)\leqslant 3+2\sqrt{2},$$

при этом наибольшее значение r^2 достигается при $\varphi=\dfrac{3\pi}{8}$, следовательно, $r_{\max}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$.

215. См. решение задачи 54.

216. По индукции устанавливается, что

$$\underbrace{f(f\ldots(f}_{n\text{ раз}}(x))\ldots)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

Следовательно, предел равен нулю.

217. Имеем

$$\left(a^{2n+1}-b^{2n+1}\right)^2=\left(a^{2n+1}+b^{2n+1}\right)^2-4a^{2n+1}b^{2n+1}=$$
$$=4a^{2n}b^{2n}-4a^{2n+1}b^{2n+1}=4a^{2n}b^{2n}(1-ab).$$

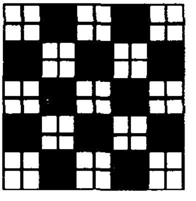
Если $ab\neq 0$, то $1-ab=\left(\frac{a^{2n+1}-b^{2n+1}}{2a^nb^n}\right)^2$, причём дробь в скобках является рациональным числом в силу рациональности a и b. Поэтому $1-ab$ есть квадрат рационального числа. Если же $ab=0$, то $1-ab=1^2$. (Последний случай возможен только при $a=b=0$.)

218. Воспользуемся формулой разности тангенсов:

$$\operatorname{tg}50^\circ-\operatorname{tg}40^\circ=\frac{\sin\left(50^\circ-40^\circ\right)}{\cos 50^\circ\cos 40^\circ}=\frac{\sin 10^\circ}{\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=$$
$$=\frac{2\sin 10^\circ}{\sin 80^\circ}=\frac{2\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}=2\operatorname{tg}10^\circ=2\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}.$$

Так как $\operatorname{tg}x>x$, $\forall\, x\in(0,\pi/2)$, то $2\operatorname{tg}(\pi/18)>2\pi/18>\pi/18$.

219. *Указание.* Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и точку пересечения продолжений боковых сторон трапеции, делит основания этой трапеции пополам.



220. Разобьём доску 10×10 на чёрные и белые поля (см. рис). Любая плитка 4×1 будет покрывать две клетки чёрного и две клетки белого полей, так что если было бы возможно замостить доску такими плитками, то было бы покрыто одинаковое количество чёрных и белых клеток. Однако белых полей больше чем чёрных, значит, указанным образом замостить доску не получится.

221. Покажем, что $0<\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}(x-1)<\pi$ при любом значении x. Во-первых, функция $\operatorname{arctg}x$ — возрастающая, так что левое неравенство выполнено, поскольку $x+1>x-1$. Правое неравенство выполнено ввиду того, что $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2}$ при любом x, следовательно, исходная разность меньше π.

Применим функцию тангенса к обеим частям уравнения, получим равносильное ему уравнение. Действительно, из условий $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$, $0<\alpha<\pi$ следует, что $\alpha=\frac{\pi}{12}$. Имеем

$$\frac{2}{x^2}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}.$$

Так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos(\pi/6)}{\sin(\pi/6)}=2-\sqrt{3}$, то $x=\pm\left(\sqrt{3}+1\right)$.

222. Функция $x+2^x$ является возрастающей как сумма двух возрастающих функций. Следовательно, равенство $x+2^x=y+2^y$ выполнено тогда и только тогда, когда $x=y$. Аналогично, функция $x+\sin x$ возрастающая, поскольку её производная $1+\cos x \geqslant 0$, поэтому равенство $x+\sin x=y+\sin y$ равносильно $x=y$.

223. *Ответ*: $(0, 0, \ldots, 0)$ и $(2, 2, \ldots, 2)$. *Указание*. Докажите, что все переменные равны между собой.

224. Пределом данной суммы является $\int\limits_0^1 \sin \pi x\, dx$, равный $\dfrac{2}{\pi}$.

225. Положим в системе $y=0$:

$$\begin{cases} 2f(x)=2f(x)g(0), \\ 2g(x)=2g(x)f(0). \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что либо $f(x)\equiv 0$, либо $g(0)=1$. Если $f(x)\equiv 0$, и в частности $f(0)=0$, то из второго уравнения $g(x)\equiv 0$. Если же $g(0)=1$, то, подставляя во второе уравнение $x=0$, находим $f(0)=1$. Таким образом, исключив тривиальное решение $f(x)=g(x)\equiv 0$, будем иметь

$$f(0)=g(0)=1. \qquad (*)$$

Положим теперь в исходной системе $x=0$, с учётом (*) получим:

$$\begin{cases} f(y)+f(-y)=2g(y), \\ g(y)+g(-y)=2f(y). \end{cases}$$

Если в последней системе заменить y на $-y$, то левые части уравнений не изменятся, а в правых частях $f(y)$ заменится на $f(-y)$, $g(y)$ — на $g(-y)$. Следовательно, $f(y)=f(-y)$ и $g(y)=g(-y)$, т. е. функции f и g — чётные. Более того, из последней системы имеем $2f(y)=2g(y)$, значит, функции f и g равные.

Для отыскания непрерывных функций f и g, удовлетворяющих исходной системе, нужно решить следующее функциональное уравнение:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y). \qquad (**)$$

Поскольку $f(0)=1>0$, то найдётся такое число $c>0$, что функция $f(x)>0$ на всём промежутке $[0, c]$. Имеем или $0<f(c)\leqslant 1$, или же $f(c)>1$. В первом случае найдётся число θ, для которого

$$f(c)=\cos\theta, \quad \theta\in[0, \tfrac{\pi}{2}),$$

во втором случае найдётся θ, для которого

$$f(c)=\operatorname{ch}\theta, \quad \theta>0.$$

Оба случая исследуются аналогичным образом. Мы остановимся на первом из них.

Подставляя в (**) $x = y = \frac{1}{2}c$, получим

$$\left[f\left(\tfrac{1}{2}c\right)\right]^2 = \frac{f(c)+f(0)}{2} = \frac{\cos\theta+1}{2} = \left[\cos\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)\right]^2.$$

Учитывая, что $f(x) > 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и $\cos x > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant \theta$, имеем

$$f\left(\tfrac{1}{2}c\right) = \cos\left(\tfrac{1}{2}\theta\right).$$

Аналогично, подставляя в (**) $x = y = \frac{1}{2^2}c$, будем иметь

$$\left[f\left(\frac{1}{2^2}c\right)\right]^2 = \frac{f\left(\frac{1}{2}c\right)+f(0)}{2} = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)+1}{2} = \left[\cos\left(\frac{1}{2^2}\theta\right)\right]^2,$$

$$f\left(\frac{1}{2^2}c\right) = \cos\left(\frac{1}{2^2}\theta\right).$$

Продолжая этот процесс далее, по индукции устанавливаем

$$f\left(\frac{1}{2^n}c\right) = \cos\left(\frac{1}{2^n}\theta\right).$$

Перепишем уравнение (**) в виде

$$f(x+y) = 2f(x)\cdot f(y) - f(x-y),$$

в котором последовательно полагая

$$x = \frac{1}{2^n}c,\ y = \frac{1}{2^n}c;$$
$$x = \frac{2}{2^n}c,\ y = \frac{1}{2^n}c;$$
$$x = \frac{3}{2^n}c,\ y = \frac{1}{2^n}c;$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x = \frac{m}{2^n}c,\ y = \frac{1}{2^n}c,$$

получим

$$f\left(\frac{2}{2^n}c\right) = 2\left[f\left(\frac{1}{2^n}c\right)\right]^2 - f(0) = 2\left[\cos\left(\frac{1}{2^n}\theta\right)\right]^2 - 1 = \cos\left(\frac{2}{2^n}\theta\right);$$

$$f\left(\frac{3}{2^n}c\right) = 2f\left(\frac{2}{2^n}c\right)f\left(\frac{1}{2^n}c\right) - f\left(\frac{1}{2^n}c\right) =$$
$$= 2\cos\left(\frac{2}{2^n}\theta\right)\cos\left(\frac{1}{2^n}\theta\right) - \cos\left(\frac{1}{2^n}\theta\right) = \cos\left(\frac{3}{2^n}\theta\right),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f\left(\frac{m}{2^n}c\right) = \cos\left(\frac{m}{2^n}\theta\right),$$

ввиду формулы $2\cos(m-1)\alpha\cos\alpha - \cos(m-2)\alpha = \cos m\alpha$.

Итак, для любых двоичных x, т. е. представимых в виде $\frac{m}{2^n}$,

$$f(cx) = f\left(\frac{m}{2^n}c\right) = \cos\left(\frac{m}{2^n}\theta\right) = \cos(\theta x).$$

Для недвоичных значений x, используя непрерывность функции $f(x)$, предельным переходом получим:

$$f(cx) = \lim_{d_n \to x} f(cd_n) = \lim_{d_n \to x} \cos(\theta d_n) = \cos(\theta x).$$

Заменим здесь x на $\frac{x}{c}$, $\frac{\theta}{c}$ на a, тогда

$$f(x) = \cos(ax).$$

Эта формула справедлива и для отрицательных значений x, так как ($t < 0$)

$$f(t) = f(-t) = \cos(-at) = \cos(at).$$

Справедливость формулы для $x = 0$ следует из (*).

Таким образом, в разобранном нами случае общим непрерывным решением (**) является $f(x) = \cos(ax)$. В другом случае, допускающем вполне аналогичную трактовку, получается решение

$$f(x) = \mathrm{ch}(ax).$$

Постоянное решение $f(x) \equiv 1$ является предельным случаем этих решений для $a = 0$. Кроме этих решений, удовлетворяет уравнению и исключённая нами функция $f(x) \equiv 0$.

226. $\log_2 3 > \frac{11}{7} > 4 - \sqrt{6}$.

227. *Ответ*: $a_{1994} = a_6 = 1$. *Указание*. Докажите, что последовательность периодична с периодом 7.

253. *Первое решение*. Сумма первых N членов арифметической прогрессии равна

$$\frac{(2a_1 + d(N-1))N}{2} = N^2,$$

откуда

$$2a_1 - d = N(2-d).$$

Если $d \neq 2$, то правая часть последнего равенства при достаточно больших N может принимать довольно большие по абсолютной величине значения, в то время как левая часть — некоторое конечное число. Поэтому $d = 2$, и, следовательно, $a_1 = 1$. Таким образом, единственная арифметическая прогрессия, удовлетворяющая условию — это последовательность нечётных чисел: 1, 3, 5, 7, ...

Второе решение. Обозначим через S_N сумму первых N членов арифметической прогрессии. Тогда

$$a_1 = S_1 = 1, \text{ и } a_N = S_N - S_{N-1} = N^2 - (N-1)^2 = 2N - 1, N \geqslant 2.$$

Значит, (a_N) — последовательность нечётных чисел.

254. Расположим куб с ребром p в пространстве так, чтобы его центр находился в начале координат, а грани были параллельны координатным плоскостям. Тогда координаты его вершин — $\left(\pm\frac{p}{2},\pm\frac{p}{2},\pm\frac{p}{2}\right)$. По формуле расстояния от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до прямой l: $ax + by + cz = 0$, проходящей через центр куба,

$$\rho(M,l)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

найдём, что сумма квадратов расстояний от вершин куба до прямой l равна $2p^2$, т. е. не зависит от положения прямой.

255. Справедливость равенства легко доказывается по индукции для любого количества n корней, в частности для $n = 1995$, используя тождество

$$2\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2+2\cos\alpha}.$$

256. Корни уравнения равны $\pm\sqrt{2}\pm 1$. Далее, воспользовавшись формулой $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$, получим выражения для тангенсов данных углов.

257. Имеем $f(x+2a)=\dfrac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=\dfrac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\dfrac{1}{f(x)}$,

$$f(x+4a)=-\frac{1}{f(x+2a)}=f(x).$$

Таким образом, функция $f(x)$ — периодическая с периодом $4a$.

258. *Ответ*: $p(x) = x^{10}-16x^8-6x^7+73x^6+24x^5-125x^4+354x^3+2x^2-36x+1$.

1) Построим многочлен с целыми коэффициентами, имеющий корень $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Получаем $x^2=5+2\sqrt{6}$; $\left(x^2-5\right)^2=24$; $x^4-10x^2+1=0$.

2) Аналогично, построим многочлен с целыми коэффициентами, имеющий корень $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$. Получаем

$$\left(x-\sqrt{2}\right)^3=3;\ x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2\sqrt{2}=3;\ \left(x^3+6x-3\right)^2=2\left(3x^2+2\right)^2,$$

$$x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0.$$

Перемножив два построенных многочлена получим искомый многочлен.

259. *Ответ*: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Пусть $z=a+bi$, где a и b — действительные числа. Требуется найти наибольшее значение величины $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, при условии, что

$$\left|a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right|=1,\ \text{т. е.}\ \left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2=1.$$

Раскроем скобки в последнем равенстве, имеем:

$$a^2+\frac{2a^2}{a^2+b^2}+\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}+b^2-\frac{2b^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}=1,$$

или, сгруппировав члены с $(a^2+b^2)^2$ в знаменателе,

$$a^2+b^2+\frac{a^2-3b^2}{a^2+b^2}+\frac{1}{a^2+b^2}=0,$$

отсюда

$$\left(a^2+b^2\right)^2-3\left(a^2+b^2\right)+1=-4a^2\leqslant 0.$$

Решив полученное квадратное неравенство относительно a^2+b^2, находим:

$$a^2+b^2\leqslant\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,\qquad \sqrt{a^2+b^2}\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

причём равенство достигается только при $a=0$, $b=\pm\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

260. Исследуя область определения переменной x, получаем, что $x=2$. Далее находим: $y=3/2$.

261. По области определения $x_i\in[0,1]$. Воспользовавшись неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом и заметив, что $x_i^2-x_i\leqslant 0$, получим

$$x_1\sqrt{1-x_2}+x_2\sqrt{1-x_3}+\ldots+x_{1995}\sqrt{1-x_1}\leqslant\frac{x_1^2+1-x_2}{2}+\frac{x_2^2+1-x_3}{2}+\ldots+$$
$$+\frac{x_{1995}^2+1-x_1}{2}=\sum_{i=1}^{1995}\frac{x_i^2-x_i}{2}+\frac{1995}{2}\leqslant\frac{1995}{2}.$$

Осталось показать, что не может достигаться равенство. Равенство возможно только тогда, когда, во-первых, каждая переменная равна либо 0, либо 1, и, во-вторых, выполнены следующие соотношения, вытекающие из применения неравенства о среднем арифметическом и геометрическом:

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{1-x_2},\\ x_2=\sqrt{1-x_3},\\ \quad\ldots\ldots\ldots\\ x_{1995}=\sqrt{1-x_1}.\end{cases}$$

Если $x_1=0$, то находим $x_2=1$, $x_3=0$, ..., $x_{1994}=1$, $x_{1995}=0$ Получаем противоречие с последним равенством. Таким же образом, положив $x_1=1$, приходим к противоречию. Значит, равенство достигаться не может.

262. Если $x = 0$ или $a = 0$, то все члены последовательности, начиная со второго, равны 0, и, значит, предел равен 0. Пусть $x \neq 0$, $a > 0$. Так как $|y_{n+1}| = a|\sin y_n| \leqslant |\sin y_n| = \sin|y_n| < |y_n|$, то последовательность $|y_n|$ убывает и ограничена снизу нулём, следовательно, она имеет предел y. Переходя к пределу в соотношении $|y_{n+1}| = a\sin|y_n|$ и решая полученное уравнение, находим $y = 0$, т. е. $|y_n| \to 0$. Итак, предел y_n существует и равен 0.

262. Выполним ряд тригонометрических преобразований:

$$\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = a\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right),$$

$$(1-a)\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) = \sin^2 x\cos^2 x,$$

$$(1-a)\left(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right) = \sin^2 x\cos^2 x.$$

Пусть $z = 4\sin^2 x\cos^2 x = \sin^2 2x$, тогда $0 \leqslant z \leqslant 1$ и

$$(1-a)\left(1-\frac{z}{2}\right) = \frac{z}{4}, \qquad z = \frac{4-4a}{3-2a}, a \neq 3/2.$$

Уравнение имеет хотя бы одно решение при $0 \leqslant \dfrac{4-4a}{3-2a} \leqslant 1$, т. е. при $\dfrac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$.

263. Напрашивается искать функцию f в виде квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$. После подстановки его в функциональное уравнение найдём, что $a = -\frac{8}{7}$, $b = \frac{4}{3}$, $c = 0$, так что функция

$$f(x) = -\tfrac{8}{7}x^2 + \tfrac{4}{3}x$$

является решением, ведь она ограничена на любом конечном интервале. Докажем, что никакая другая функция не является решением. Для этого в функциональном уравнении сделаем замену

$$g(x) = f(x) + \tfrac{8}{7}x^2 - \tfrac{4}{3}x.$$

Тогда уравнение для функции g будет иметь вид:

$$g(x) = \tfrac{1}{2}g\left(\tfrac{x}{2}\right). \qquad (*)$$

Если функция $f(x)$ на интервале (a, b) ограничена константой M ($|f(x)| \leqslant M$), то функция $g(x)$ также ограничена на этом интервале, т. к.

$$|g(x)| = \left|f(x) + \tfrac{8}{7}x^2 - \tfrac{4}{3}x\right| \leqslant |f(x)| + \left|\tfrac{8}{7}x^2 - \tfrac{4}{3}x\right| \leqslant M + \max_{[a,b]}\left|\tfrac{8}{7}x^2 - \tfrac{4}{3}x\right| = M_1.$$

Покажем, что в предположении ограниченности из (*) следует $g(x) \equiv 0$.

Пусть $|g(x)| \leqslant C$ при $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, и пусть существует такое число x_0, что

$$g(x_0) = A, \quad A \neq 0.$$

Из (*) по индукции легко установить, что для любого натурального n

$$g(x) = \frac{1}{2^n} g\left(\frac{x}{2^n}\right),$$

в частности при $x = x_0$

$$A = g(x_0) = \frac{1}{2^n} g\left(\frac{x_0}{2^n}\right).$$

При достаточно большом $n \geqslant N_0$ имеем $\left|\frac{x_0}{2^n}\right| < \varepsilon$, т. е. $\frac{x_0}{2^n} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, в этом случае выполнена оценка для A

$$|A| = \frac{1}{2^n}\left|g\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2^n} C,$$

справедливая для любого $n \geqslant N_0$. При $A \neq 0$ это невозможно.

265. Выберем сечение $\sigma_{\max}$ максимальной площади (если таких несколько, то рассмотрим любое из них). По условию это сечение — круг. Пусть R — радиус, а точка O — центр данного круга. Покажем, что любая точка на поверхности тела удалена от точки O на расстояние R. Построим новое сечение α, проходящее через произвольную точку на поверхности и произвольный диаметр D выбранного круга $\sigma_{\max}$. Отрезок D в построенном сечении также должен являться диаметром. В самом деле, если это не так, т. е. отрезок D является хордой, то диаметр этого сечения будет больше D, а, следовательно, его площадь будет больше площади выбранного круга $\sigma_{\max}$, что невозможно. Таким образом, точка O (середина отрезка D) является также центром в построенном круге α. значит, произвольно выбранная точка на поверхности тела удалена на расстояние R от точки O. По определению тело, ограниченное сферой, является шаром.

266. *Указание.* Пусть внутри треугольника даны точки P и Q и пусть $PABCQ$ – наименьшая из тех ломаных, для которых точки A, B, C лежат на различных сторонах треугольника. Отразим исходный треугольник относительно стороны, на которой лежит точка A, получим второй треугольник, при этом точки B, C, Q перейдут в точки B_1, C_1, Q_1. Отразим теперь второй треугольник относительно своей стороны, содержащей точку B_1, получим третий треугольник, при этом точки C_1, Q_1 перейдут в точки C_2, Q_2. Наконец, отразим третий треугольник относительно своей стороны, содержащей точку C_2, получим четвёртый треугольник, при этом точка Q_2 перейдёт в точку Q_3. Тогда точки P, A, B_1, C_2, Q_3 лежат на одной прямой.

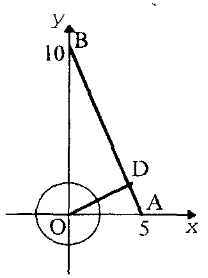
267. Данный предел равен $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

268. Так как $f(0) = f(1) = 0$ и $f(x)$ — дифференцируема на $(0, 1)$, то по теореме Ролля существует $c \in (0, 1)$, что $f'(c) = 0$.

269. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда $A^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 2^3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$.

Пользуясь методом полной математической индукции, легко показать, что $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Тогда $A^{1995} = \begin{pmatrix} 2^{1995} & 2^{1995} - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{1995} \end{pmatrix}$.

270. Проведем $OD \perp AB$. Нетрудно убедиться, что $OD = \dfrac{OB \cdot OA}{AB} = \dfrac{10 \cdot 5}{\sqrt{10^2 + 5^2}} = 2\sqrt{5}$. Таким образом. расстояние от окружности до прямой равно $\sqrt{5}$.



271. Методом математической индукции нетрудно доказать формулу

$$y(x) = 0{,}5^n y(x - 2\pi n) + \sin x \sum_{k=0}^{n-1} 0{,}5^k .$$

Так как функция $y(x)$ ограничена, то, переходя к пределу в последнем равенстве при $n \to \infty$, получим

$$y(x) = \sin x \sum_{k=0}^{\infty} 0{,}5^k = 2\sin x.$$

278. *Ответ*: на 19 день.

279. *Указание*. Докажите, что число $19^{96} + 4$ оканчивается цифрой 5.

280. При $n = 4$ указанное число не является простым.

281. "Сколько граней у неочиненного шестигранного карандаша".

282. *Ответ*: $n = 1$. Поскольку $n^2 + 1 = (n + 1)(n - 1) + 2$, то $n + 1$ должно делить число 2. При натуральном n это выполняется только при $n = 1$.

283. После раскрытия скобок исходное уравнение приобретает вид:

$$x^5 + \tfrac{1}{2}x + 1 = 0.$$

Если $x \geqslant 0$, то левая часть уравнения положительна, что невозможно. Поэтому $x < 0$

284. Из ΔABP и ΔCBP ввиду неравенства треугольника следует $AB < BP + AP$ и $BC < BP + PC$. Складывая эти неравенства получаем $AB + BC < 2BP + (AP + PC) = 2BP + AC$, откуда вытекает неравенство задачи. Условие о том, что сторона AC — наименьшая, является излишним.

285. Каждый день число бананов либо уменьшается на 2, либо не изменяется, поэтому всегда остаётся нечётным числом. Значит, последним фруктом на дереве может быть только банан.

286. *Указание.* Записав равенство в виде $(a-1)(b-1996) = 1996$, устанавливаем, что числа $a-1$ и $b-1996$ являются делителями числа 1996, т. е. равны ±1, ±2, ±4, ±499, ±998, ±1996. Всего существует 12 различных решений.

287. В случае чётного n все косточки домино могут быть выложены в одну цепочку. Такую укладку нетрудно осуществить. Если же n нечётно, то каждое из чисел от 0 до n встречается уже нечётное число раз. При составлении цепочки каждое число, кроме двух стоящих на концах цепочки, встречается чётное число раз, поскольку на стыке двух косточек стоят одинаковы числа. Значит, останется не меньше $n-1$ чисел (заметим, что чисел от 0 до n ровно $n+1$). Поэтому останется не меньше $\frac{n-1}{2}$ косточек. Осталось посчитать общее количество косточек и вычесть из него $\frac{n-1}{2}$. Общее количество косточек равно $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$, поэтому искомое число равно $\frac{n^2+2n+3}{2}$. Необходимую расстановку этих косточек нетрудно осуществить.

289. Если мальчик пробежит 3/8 моста вперёд, то автомобиль окажется в начале моста. За то время, пока мальчик пробежит оставшуюся 1/4 часть моста, автомобиль проедет весь мост, значит, мальчик бегает со скоростью в четыре раза меньше скорости автомобиля, т. е. 15 км/ч.

290. *Ответ*: $52650 : 325 = 162$.

291. Если на урок пришло n человек, то количество попарных рукопожатий равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Из соотношения $\frac{n(n-1)}{2} = 55$ находим $n = 11$, так что отсутствовало 14 человек.

292. Разобьём монеты на две кучки по три монеты и взвесим их. Если чаши уравновесятся, то обе фальшивые монеты находятся в одной кучке (и в этой кучке все три монеты разного веса), а в другой кучке все монеты настоящие. В этом случае вторым взвешиванием любых двух монет из одной кучки мы определяем, в какой из них фальшивые монеты. За два оставшихся взвешивания сравниваем две из трёх монет из кучки с фальшивыми монетами с настоящей монетой из другой кучки и окончательно определяем фальшивые монеты. В другом случае, если чаши не уравновесятся, известно, в какой кучке более тяжёлая монета, а в какой более лёгкая. Рассмотрим более тяжёлую кучку. Взвесим любые две монеты из этой кучки. Если их вес одинаков, то третья монета фальшивая, если разный, то фальшивой является более тяжёлая монета. Аналогично определяется лёгкая монета. Во втором случае достаточно трёх взвешиваний.

293. Пусть a, b, c – данные числа. Тогда $abc = 1$ и

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc - ab - bc - ac + a + b + c - 1 = a + b + c - \tfrac{1}{a} - \tfrac{1}{b} - \tfrac{1}{c} > 0,$$

следовательно, из трёх чисел $(a - 1)$, $(b - 1)$, $(c - 1)$ два отрицательных, а одно положительное (все три не могут быть положительными, поскольку $abc = 1$).

294. Пусть дробь $\frac{111n+5}{64n+3}$ сократима на натуральное число $d > 1$. Тогда $111n + 5 = dk_1$, $64n + 3 = dk_2$ ($k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$). Поскольку

$$111\cdot(64n + 3) - 64\cdot(111n + 5) = 13,$$

то $d\cdot(111k_2 - 64k_1) = 13$ и $d \mid 13$, следовательно, $d = 13$. Исходная дробь сократима на 13 при целом n вида $3 + 13m$, $m \in \mathbf{Z}$.

295. Эта задача имеет много решений, приведём одно из них:

$$1 = \tfrac{148}{296} + \tfrac{35}{70}.$$

296. Переписав уравнение в виде $(a-1)x^3 + (x+1)^3 = 0$ и разложив левую часть на множители по формуле суммы кубов, найдём, что единственный действительный корень исходного уравнения находится из линейного уравнения $\sqrt[3]{a-1}\,x + x + 1 = 0$. Это $x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{a-1}}$. Число x является рациональным, если $\sqrt[3]{a-1}$ — рациональное число, отличное от –1. Итак, уравнение имеет рациональный корень, если $a = 1 + q^3$, $q \in \mathbf{Q}$, $q \neq -1$.

297. а) Из рисунка видно, как построить n-угольник и прямую, пересекающую все его стороны, при любом чётном n.

б) Пусть прямая пересекает все стороны многоугольника. Рассмотрим все вершины, лежащие по одну сторону от неё. Каждой из этих вершин можно поставить в соответствие пару сторон, из неё выходящих. При этом получим разбиение всех сторон многоугольника на пары. Поэтому если прямая пересекает все стороны n-угольника, то n чётно.

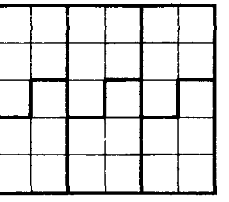
299. Избавляясь от иррациональности в знаменателях дробей первого числа, получаем, что оно равно

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\ldots+\left(\sqrt{1997}-\sqrt{1996}\right)=\sqrt{1997}-1,$$

при этом $\sqrt{1997}-1<\sqrt{1996}$.

300. Возьмём круг, который разделён 18-ю диаметрами на 36 равных секторов, притом такой, что один из диаметров параллелен одной из сторон заданного 19-угольника. Но тогда каждая сторона многоугольника будет параллельна одному из диаметров, а так как сторон 19, а диаметров 18, то найдутся две стороны, параллельные одному диаметру и, следовательно, параллельные между собой.

301. Разделим прямоугольник на 6 частей по 5 клеток (см. рис.). В одной из этих частей будет закрашено не менее 4 клеток (если бы в каждой части было закрашено не более 3 клеток, то во всём прямоугольнике было бы не более $6 \cdot 3 = 18$ закрашенных клеток). Тогда в квадрате 2×2, содержащемся в этой части, закрашено либо 3, либо 4 клетки. Это и будет искомый квадрат.



302. Обозначим вершины, указанные в условии, по порядку A_1, A_2, ... Тогда A_1 имеет координаты $\left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$. Поскольку длина основания n-го треугольника равна $2n-1$, координата x вершины A_n равна

$$x=1+3+5+\ldots+(2n-3)+\tfrac{1}{2}(2n-1),$$

откуда легко вывести, что $x=\left(n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$. Координата y вершины A_n есть просто в $2n-1$ раз увеличенная ордината точки A_1:

$$y=(2n-1)\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\sqrt{3}.$$

Из этого мы получаем $n-\frac{1}{2}=\frac{y}{\sqrt{3}}$, что даёт $x=\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{4}$. Таким образом, указанные точки лежат на параболе с осью, расположенной вдоль оси x, и вершиной в точке $(1/4, 0)$.

303. *Ответ*: 21. По условию число $(n-3)^2+7n$ делится на 7, поэтому $(n-3)^2$ и, следовательно, $n-3$ делятся на n. Итак, $n=7k+3$. Тогда

$$(n-3)^2+7n=49k^2+49k+21.$$

304. *Ответ*: $a=-2$. Пусть x — общий корень уравнений. Вычитая из первого уравнения второе, найдём, что $x=\frac{a+8}{a-1}$. Теперь подставим это значение в любое из уравнений, тогда придём к кубическому уравнению относительно a:

$$a^3+24a+56=0,$$

которое имеет единственный действительный корень $a = -2$.

305. Левая часть данного уравнения — целое число. Поэтому число $\{x\}$ — тоже целое. Поскольку всегда $0 \leqslant \{x\} < 1$, то $\{x\} = 0$. Следовательно, x — целое число, т. е. $[x^3] = x^3$, $[x^2] = x^2$, $[x] = x$. Значит, данное уравнение эквивалентно уравнению $x^3 + x^2 + x = -1$, откуда получаем $(x+1)(x^2+1) = 0$.

Единственное решение уравнения $x = -1$.

307. Обозначим $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{b}}$, $z = \frac{1}{\sqrt{c}}$. Тогда неравенство примет вид $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant yz + zx + xy$, откуда получаем неравенство

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geqslant 0,$$

справедливое для любых $x, y, z \in \mathbf{R}$.

309. *Первое решение.* Рассмотрим остатки, которые дают числа 1, 11, 111, ..., 111...11, ... при делении на 1997. Поскольку чисел бесконечно много, а остатков конечное количество (0, 1, 2, ..., 1996), то найдутся два числа, дающие одинаковые остатки, поэтому их разность кратна 1997. Их разность равна ($n > m$)

$$\underbrace{111\ldots11}_{n} - \underbrace{11\ldots1}_{m} = \underbrace{11\ldots1}_{n-m}\underbrace{00\ldots0}_{m}.$$

Если в конце данного числа зачеркнуть нули, то это не повлияет на делимость числа на 1997, так как числа 10^m и 1997 взаимно просты. Поэтому число, состоящее из $n - m$ единиц, делится на 1997.

Второе решение. Поскольку 1997 — простое число, то по малой теореме Ферма $10^{1996} \equiv 1 \pmod{1997}$, т. е. $10^{1996} - 1$ делится на 1997. Число $10^{1996} - 1$ состоит из 1996 девяток. Если мы разделим его на 9, то полученное число, будучи записанным 1996 единицами, по прежнему будет кратно 1997.

310. В доказательстве дважды применяется неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Поскольку $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$, то $\sqrt[4]{x+y} \geqslant 2^{1/4}\sqrt[8]{xy}$. Используя это неравенство, выводим

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y}} \geqslant 2\frac{1}{\sqrt[8]{xy}} \geqslant 2\frac{2^{1/4}}{\sqrt[4]{x+y}} = \frac{2^{5/4}}{\sqrt[4]{x+y}}.$$

313. *Ответ*: $x = -2$, $y = \pi n$; $x = 2$, $y = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Выделим полный квадрат в левой части уравнения

$$\left(x + 2\cos(xy)\right)^2 + 4\left(1 - \cos^2(xy)\right) = 0.$$

Поскольку оба слагаемых неотрицательны, то их сумма равна 0 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x + 2\cos(xy) = 0, \\ 1 - \cos^2(xy) = 0. \end{cases}$$

314. Лемма. Если число $a^2 + b^2$ (a, b — целые) делится на простое число вида $4k - 1$, то a и b также делятся на это простое число.

Доказательство леммы. Пусть p — простое нечётное число. Ясно, что если одно из чисел a или b делится на p, то и второе тоже делится на p. Предположим, что оба числа a и b не делятся на p. Тогда по малой теореме Ферма

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p, \qquad b^{p-1} \equiv 1 \pmod p,$$

откуда $a^{p-1} + b^{p-1} \equiv 2 \pmod p$ и, следовательно, число $a^{p-1} + b^{p-1}$ не делится на p. Поэтому, если $p = 4k - 1$, то $a^{4k-2} + b^{4k-2} = \left(a^2 + b^2\right)\left(a^{4k-4} - \ldots\right)$ не кратно p и, значит, p не делит число $a^2 + b^2$. Лемма доказана.

По условию число $1996 = 4\cdot 499$ делит $a^2 + b^2$, следовательно, по лемме числа a и b кратны простому числу 499. Кроме того, числа a и b либо оба чётны, либо оба нечётны, в противном случае число $a^2 + b^2$ было бы нечётным и не могло делиться на чётное число 1996. Отсюда получаем, что сумма $a + b$ кратна $2\cdot 499$, тогда $2(a + b)$ делится на 1996. Окончательно

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 = a^2 + b^2 - 2(a+b) + 2 \equiv 2 \pmod{1996}.$$

315. Покажем, что $w_n = \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$ при любом натуральном n есть целое нечётное число. Поскольку числа $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ и $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ являются корнями квадратного уравнения $x^2 = 3x + 2$, то последовательность $\{w_n\}$ удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$w_{n+2} = 3w_{n+1} + 2w_n.$$

(Справедливость данного равенства можно доказать также по индукции.) Первые члены последовательности $w_1 = 3$, $w_2 = 13$ — целые нечётные числа, поэтому из указанного соотношения следует, что все последующие члены тоже являются целыми нечётными числами, что и требовалось доказать.

Тогда

$$\left[\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n\right] = \left[w_n - \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n\right] = w_n + \left[-\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n\right].$$

Заметим теперь, что $-1<\frac{3-\sqrt{17}}{2}<0$, поэтому целая часть числа $-\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$ равна -1 при чётном n и равна 0 при нечётном n. Таким образом, исходное число чётно при чётном n.

316. Наряду с данными 20 числами $a_1, a_2, ..., a_{20}$ рассмотрим также числа $a_1+4, a_2+4, ..., a_{20}+4$, $a_1+9, a_2+9, ..., a_{20}+9$. Всего имеем 60 натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 59, значит, среди них найдутся два одинаковых. Тогда либо $a_i=a_j+4$, либо $a_i=a_j+9$, либо $a_i+4=a_j+9$ $(i,j=\overline{1,20}, i\neq j)$. В каждом из этих случаев разность чисел a_i и a_j равна 4, 9 и 5 соответственно, т. е. a_i и a_j — искомые числа.

317. Так как $f(x)=\max\limits_{y\in\mathbf{R}}[xy-f(y)]$, то при любом $y\in\mathbf{R}$ выполняется неравенство $f(x)\geqslant xy-f(y)$, отсюда $f(x)+f(y)\geqslant xy$. Положив здесь $y=x$, получим

$$f(x)\geqslant\frac{x^2}{2}. \tag{1}$$

Умножив неравенство (1) на -1 и заменив x на y, имеем $-f(y)\leqslant-\frac{y^2}{2}$, откуда $xy-f(y)\leqslant xy-\frac{y^2}{2}$. В последнем неравенстве будем рассматривать функции, стоящие в его левой и правой частях, как функции относительно y, а x будем считать параметром. Тогда график функции, записанной в левой части, расположен ниже (по крайней мере, не выше) графика функции в правой части неравенства. То же самое можно сказать и о точках наибольшего значения этих двух функций (в самом деле, значение левой функции в точке, в которой достигается наибольшее значение, меньше значения правой функции в той же самой точке, которое в свою очередь меньше максимального значения правой функции). Следовательно,

$$\max_{y\in\mathbf{R}}(xy-f(y))\leqslant\max_{y\in\mathbf{R}}\left(xy-\frac{y^2}{2}\right). \tag{2}$$

В левой части (2) согласно условию стоит функция $f(x)$, в правой же имеем $x\cdot x-\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}$, так как максимум параболы $xy-\frac{y^2}{2}$ достигается в ее вершине при $y=x$. Таким образом, (2) преобразуется к виду

$$f(x)\leqslant\frac{x^2}{2}. \tag{3}$$

Сравнивая условия (1) и (3) находим окончательно, что

$$f(x)=\frac{x^2}{2}.$$

318. Очевидно, что число 1 нельзя представить в виде суммы нескольких натуральных чисел, а любое другое натуральное нечётное число — можно. Действительно, $2k+1=k+(k+1)$. Перейдём к чётным числам. Пусть чётное число представимо в виде суммы последовательных чисел от n до m, тогда оно равно $\frac{(n+m)(m+1-n)}{2}$. Каждое из чисел $(n+m)$ и $(m+1-n)$ не меньше двух, и эти числа имеют разную чётность. Поэтому чётное число, чтобы быть представленным в виде суммы последовательных чисел, должно иметь нечётный множитель, больший единицы. Отсюда следует, что степени числа 2 не могут быть представлены в указанном виде.

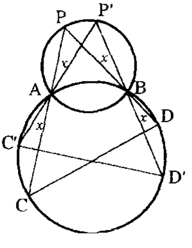
Покажем, что остальные чётные числа представимы в виде суммы последовательных натуральных чисел. Представим чётное число в виде $2^k(2p+1)$, где k и p — натуральные числа. Если $2^k>p$, то наше число представляется в виде суммы $2p+1$ натуральных чисел, начиная с числа 2^k-p. Если же $2^k\leqslant p$, то наше число представляется в виде суммы 2^{2k} последовательных натуральных чисел, начиная с числа $p-2^k+1$. Итак, не представимы лишь 1 и числа вида 2^n.

319. $y^2=2x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}\geqslant 4$, где равенство достигается при $x=0$. Учитывая, что $y\geqslant 0$, получим $y\geqslant 2$.

320. См. решение задачи 313.

321. Рассмотрим другую точку P' и соответствующую ей хорду $C'D'$. Имеем

$$\angle PAP'=\angle PBP',$$
$$\angle PAP'=\angle CAC',$$
$$\angle PBP'=\angle DBD',$$



что даёт равенство $\angle CAC'=\angle DBD'$. Это означает, что дуга CC' равна дуге DD'. Прибавляя дугу CD' к каждой из них, получаем, что дуга $C'D'$ равна дуге CD, откуда мы имеем, что и длины хорд тоже равны: $C'D'=CD$.

322. Пусть x_1-d, x_1, x_1+d — корни кубического уравнения. По формуле Виета сумма корней кубического уравнения равна коэффициенту при x^2 с обратным знаком. Итак, $3x_1=-1$, так что один корень $x_1=-1/3$. Подставляя этот корень в уравнение, определяем значение a, равное $2/27$. Теперь решим уравнение

$$x^3+x^2=\frac{2}{27},$$

в котором известен один корень $x_1=-\frac{1}{3}$. Два других его корня — это $x_2=-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_3=-\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}$, так что корни действительно образуют арифметическую прогрессию.

323. Обозначим $k=\left[\sqrt{y-1}\right]$. Поскольку $\sqrt{y-1}\geqslant 0$, то $k\geqslant 0$. Из определения целой части получаем

$$k\leqslant\sqrt{y-1}<k+1,\qquad 1+k^2\leqslant y<1+(k+1)^2. \qquad (*)$$

Из уравнения $x=1+k^2$ и предыдущего неравенства выводим неравенство

$$1+k^2+2\sqrt{1+k^2}\leqslant y+2\sqrt{x}<1+(k+1)^2+2\sqrt{1+k^2},$$

$$(k+1)^2<y+2\sqrt{x}<(k+2)^2,$$

$$k+1<\sqrt{y+2\sqrt{x}}<k+2,$$

значит, $\left[\sqrt{y+2\sqrt{x}}\right]=k+1$. Из второго уравнения системы заключаем, что $y=2k+3$. Подставляя полученное выражение вместо y в (*), учитывая определение целого числа k, находим оттуда $k=2$, $x=5$, $y=7$.

324. Из отрезков $x\leqslant y\leqslant z$ можно составить треугольник, если $z<x+y$, причём он будет остроугольным, если $z^2<x^2+y^2$. Предположим, что существуют пять отрезков $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4\leqslant a_5$ таких, что из любых трёх составляется не остроугольный треугольник. Тогда

$$a_5^2\geqslant a_4^2+a_3^2,\qquad a_4^2\geqslant a_3^2+a_2^2,\qquad a_3^2\geqslant a_2^2+a_1^2,$$

и поэтому

$$a_5^2\geqslant 2a_3^2+a_2^2\geqslant 3a_2^2+2a_1^2>a_2^2+2a_1a_2+a_1^2=(a_2+a_1)^2,$$

то есть $a_5>a_2+a_1$ и, следовательно, из отрезков a_1, a_2, a_5 нельзя составить треугольник.

325. Выполнив подстановки $x\to\frac{1}{1-x}$, $x\to\frac{x-1}{x}$, приходим к системе функциональных уравнений:

$$\begin{cases}\varphi\left(\frac{1}{1-x}\right)+\varphi\left(\frac{x-1}{x}\right)-2\varphi(x)=x+\frac{1}{x}-1,\\ \varphi\left(\frac{x-1}{x}\right)+\varphi(x)-2\varphi\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x}-x,\\ \varphi(x)+\varphi\left(\frac{1}{1-x}\right)-2\varphi\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x-1}-1.\end{cases}$$

Если сложить первые два уравнения, то получится третье (с обратным знаком), следовательно, функция $\varphi(x)$ из системы однозначно не находится. Будем рассматривать первые два уравнения как линейные относительно $\varphi\left(\frac{1}{1-x}\right)$ и $\varphi\left(\frac{x-1}{x}\right)$:

$$\begin{cases} \varphi\left(\frac{1}{1-x}\right)+\varphi\left(\frac{x-1}{x}\right)=2\varphi(x)+x+\frac{1}{x}-1, \\ 2\varphi\left(\frac{1}{1-x}\right)-\varphi\left(\frac{x-1}{x}\right)=\varphi(x)+x-\frac{1}{1-x}. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} \varphi\left(\frac{1}{1-x}\right)=\varphi(x)+\frac{1}{3}\left(2x+\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}-1\right), \\ \varphi\left(\frac{x-1}{x}\right)=\varphi(x)+\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}-2\right). \end{cases} \qquad (*)$$

Функцию $\varphi(x)$ можно задать произвольным образом на одном из промежутков $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ или $(1, +\infty)$, а равенства (*) определяют значения функции на других двух промежутках.

326. Имеем $a_n=\overline{(2n-1)(2n)}=(2n-1)\cdot 10^k+2n$, где k — количество цифр в числе $2n$. Значит, $10^{k-1}\leqslant 2n<10^k$, $k-1\leqslant \lg 2n<k$, отсюда

$$k=[\lg 2n+1]=\left[\lg\tfrac{n}{5}+2\right]=\left[\lg\tfrac{n}{5}\right]+2.$$

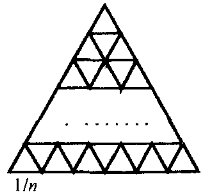
Теперь получаем

$$a_n-1=(2n-1)\cdot 10^k+2n-1=(2n-1)\cdot(10^k+1),$$

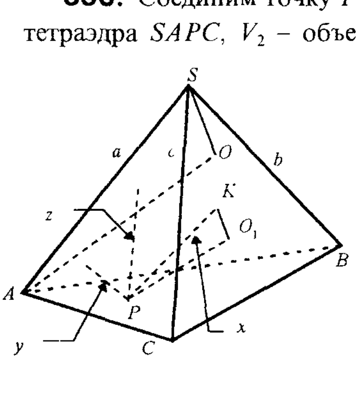
$$\frac{a_n-1}{2n-1}-1=10^k, \quad \lg\left(\frac{a_n-1}{2n-1}-1\right)=k,$$

что и является соотношением задачи.

327. Разобьём равносторонний треугольник со стороной 1 на n^2 меньших равносторонних треугольников со стороной $1/n$, как показано на рисунке. Из этих треугольников найдётся хотя бы один, в котором будет расположено не менее двух точек (принцип Дирихле). Осталось заметить, что расстояние между любыми двумя точками, расположенными внутри равностороннего треугольника, не превосходит длины его стороны.



356. Соединим точку P с вершинами тетраэдра. Пусть V_1 – объем тетраэдра $SAPC$, V_2 – объем тетраэдра $SCPB$, V_3 – объем тетраэдра $SAPB$, V – объем тетраэдра $SABC$. Имеем $V=V_1+V_2+V_3$. У тетраэдров $SABC$ и $SCPB$ общая грань SBC. Пусть её площадь равна q, AO, PO_1 – соответствующие высоты тетраэдров. Тогда $V_2=q\cdot PO_1/3$, $V=q\cdot AO/3$, отсюда



$$V_2/V=PO_1/AO=x/a,$$

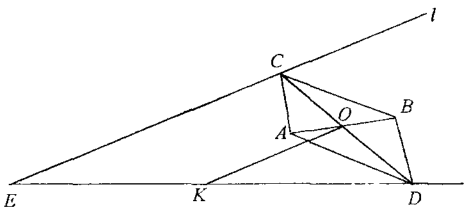
поскольку $\Delta PKO_1\sim\Delta ASO$. Аналогично,

$$V_1/V=y/b,\ V_3/V=z/c.$$

Таким образом,

$$x/a + y/b + z/c = V_1/V + V_2/V + V_3/V = 1.$$

357. Точка O – середина AB, O – точка пересечения диагоналей, $OK \parallel l$. Отложим $KD = EK$. Тогда OK – средняя линия ΔCED, следовательно, $OC = OD$.



358. До встречи велосипедисты ехали $100/(20+30) = 2$ часа. Это время муха была в полете и пролетела $2 \cdot 50 = 100$ км. От пункта A она сместилась на $2 \cdot 20 = 40$ км. Пусть x км муха пролетела в направлении от A к B, а y км – в направлении от B к A. Тогда $x + y = 100$ и $x - y = 40$, откуда $x = 70$.

359. См. решение задачи 291.

360. *Ответ*: $6/\sqrt{5}$. *Первое решение*. Проведем к параболе касательную, параллельную прямой $y = -2x + 1$: $y' = 2x - 8 = -2$, отсюда $x = 3$, т. е. касательная проходит через точку $(3, 1)$ параболы, значит, имеет уравнение $y = -2x + 7$. Теперь нетрудно найти расстояние между прямыми $y = -2x + 1$ и $y = -2x + 7$.

Второе решение. Пусть точка (x_0, y_0) лежит на параболе. Расстояние от неё до прямой $y = -2x + 1$ вычисляется по формуле

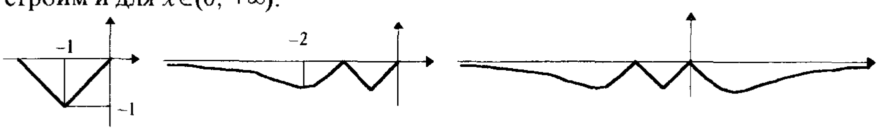
$$\rho = \frac{|2x_0 + y_0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}.$$

Поскольку $y_0 = x_0^2 - 8x_0 + 16$, то

$$\rho = \frac{|x_0^2 - 6x_0 + 15|}{\sqrt{5}} = \frac{|(x_0 - 3)^2 + 6|}{\sqrt{5}} \geqslant \frac{6}{\sqrt{5}},$$

причём равенство достигается только при $x_0 = 3$.

361. Из $f(x) = f(-x - 1)$ следует, что прямая $x = -1/2$ — ось симметрии графика. Действительно $f(-1/2 + x) = f(-1/2 - x)$. Значит, можно построить график при $x \in [-1, -1/2]$. Из $f(x) = f(1/x)$ следует возможность построения графика при $x \in (-\infty, -1]$, затем, используя симметрию, строим и для $x \in (0, +\infty)$.



362. Число 19^{95} нечетное, поэтому функция в левой части уравнения возрастает всюду. Значит, есть всего один действительный корень $x = 1$.

363. Имеем известное неравенство $|a+b| \leqslant |a|+|b|$, причём знак равенства имеет место, когда числа a и b одного знака, т. е. при $ab \geqslant 0$. Применительно к нашему случаю ($a = x - x^5$, $b = x^4 - x^3$) это означает, что $(x-x^5)(x^4-x^3) \geqslant 0$. Отсюда легко получить ответ: $x \in (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup \{1\}$.

364. Поскольку $\sin x \leqslant 1$, то $x^2 + x + 1 \leqslant 1$, т. е. $x \in [-1, 0]$. Однако при этих значениях x левая часть уравнения не больше 0, а правая строго положительна. Итак, корней нет.

365. $\operatorname{ctg} x = 1995 - 2[\operatorname{ctg} x]$, т.е. $\operatorname{ctg} x$ целое число и $[\operatorname{ctg} x] = \operatorname{ctg} x$. Тогда из уравнения находим $\operatorname{ctg} x = 665$, откуда $x = \operatorname{arcctg} 665 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

366. $2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geqslant 2\sqrt{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}} = 2\sqrt{2^{\sin x + \cos x}} =$

$$= 2\sqrt{2^{\sqrt{2}\sin(x+\pi/4)}} = 2^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x+\pi/4)} \geqslant 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

так как $\sin(x + \pi/4) \geqslant -1$.

397. *Указание.* $S_1 = f(1)$, $2S_2 = f(1) - f(-1)$, $2S_3 = f(1) + f(-1)$.

401. Купец обманул себя! Пусть l_1 – длина левого коромысла, l_2 – правого. Пусть действительный вес орехов в первом взвешивании равен x. Тогда $l_1 \cdot 1 = l_2 \cdot x$, откуда $x = l_1/l_2$ (фунтов), $x \neq 1$. Пусть действительный вес орехов во втором взвешивании равен y. Тогда $l_1 \cdot y = l_2 \cdot 1$, откуда $y = l_2/l_1 = 1/x$ (фунтов), $y \neq 1$. Значит, купец отвесил покупателю $x + 1/x$ фунтов орехов. Но при $x > 0$, $x \neq 1$ имеем $x + 1/x > 2$ всегда.

402. *Указание.* Левая часть уравнения неотрицательна, а правая часть неположительна, поэтому обе части уравнения равны 0.

Содержание

Предисловие 3
Командные соревнования по математике САММАТ
САММАТ–93 5
САММАТ–94 6
САММАТ–95 10
САММАТ–96 13
САММАТ–97 16
Математические олимпиады «Университета Наяновой»
Олимпиада 1993 года 20
Олимпиада 1994 года 21
Летняя школа 1994 года 23
Олимпиада 1995 года 26
Олимпиада 1996 года 28
Олимпиады Самарского Государственного Университета
Олимпиада СамГУ–1996 34
Олимпиада СамГУ–1997 35
Математические олимпиады Технического Университета
Олимпиада СамГТУ–1995 36
Олимпиада СамГТУ–1996 37
Олимпиада СамГТУ–1997 39
Решения, Указания, Ответы 41