12.54 Запишем производную в виде $S'(x)=2(5-x)^{-1/2}$. Тогда, используя правило 3^0 в), находим

$$S(x)=2\frac{1}{-1}\frac{(5-x)^{1/2}}{\frac{1}{2}}+C=-4\sqrt{5-x}+C.$$

Полагая $x=1$, получим $S(1)=-4\cdot 2+C=-1$, откуда $C=7$. Итак, $S(x)=7-4\sqrt{5-x}$.

12.55 Возведя выражение $\sin 2t-\cos 2t$ в квадрат и используя известные тригонометрические формулы, находим

$$\int_0^{\pi/4}(\sin 2t-\cos 2t)^2\,dt=$$

$$=\int_0^{\pi/4}\left(\sin^2 2t-2\sin 2t\cos 2t+\cos^2 2t\right)dt=$$

$$=\int_0^{\pi/4}dt-\int_0^{\pi/4}\sin 4t\,dt=\left(t+\frac{1}{4}\cos 4t\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{\pi-2}{4}.$$

Ответ: $0{,}25(\pi-2)$.

12.56 Имеем

$$\int_0^{7/3}\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx=\int_0^{7/3}\frac{3(x+1)}{3\sqrt[3]{3x+1}}dx=\frac{1}{3}\int_0^{7/3}\frac{3x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx+$$

$$+\frac{1}{3}\int_0^{7/3}\frac{2}{\sqrt[3]{3x+1}}dx=\frac{1}{3}\left(\int_0^{7/3}(3x+1)^{2/3}dx+2\int_0^{7/3}(3x+1)^{-1/3}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\frac{(3x+1)^{5/3}}{\frac{5}{3}}\Bigg|_0^{7/3}+\frac{2}{3}\frac{(3x+1)^{2/3}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_0^{7/3}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\left(8^{5/3}-1\right)+\left(8^{2/3}-1\right)\right)=\frac{46}{15}.$$

Ответ: $\frac{46}{15}$.

12.57 Указание. В числителе подынтегральной функции прибавить и вычесть 1, а затем разбить на два интеграла от степени функции $x+1$.

Ответ: $\frac{1}{8}$.

12.58 Указание. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби.

Ответ: 12.

12.59 Сначала построим график функции $y = x^3 - 4x$ при $x \geq 0$. Находим точки экстремума: $y' = 3x^2 - 4$; $3x^2 - 4 = 0$; $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \approx \pm 1{,}1$. При $x \geq 0$ функция убывает на $\left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, возрастает

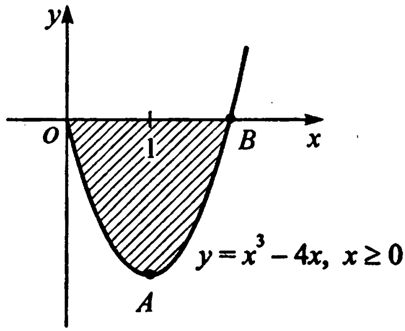


Рис. 12.11

на $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \infty\right)$, а $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ – точка минимума, причем $y_{\min} = -\frac{16}{3\sqrt{3}} \approx -3$. Итак, требуется найти площадь фигуры OAB (рис. 12.11). Так как функция $y = x^3 - 4x$ принимает на $(0, 2)$ отрицательные значения, то $S = \left|\int\limits_0^2 \left(x^3 - 4x\right) dx\right|$. Имеем

$$\int\limits_0^2 \left(x^3 - 4x\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = -4,$$

откуда получаем $S = 4$ (кв. ед.).

Ответ: 4 кв. ед.

12.60 Сначала составим уравнение касательной к параболе. Так как $y' = 4x - 2$, то при $x_0 = 2$ получим $k = y'(2) = 6$.

Находим ординату точки касания:

$y_0 = 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

Следовательно, уравнение касательной имеет вид

$y - 5 = 6(x - 2)$,

или

$y = 6x - 7$.

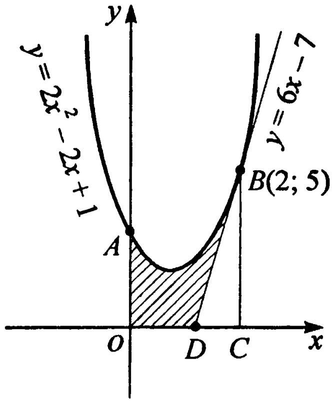


Рис. 12.12

Фигура, площадь которой требуется определить, на рис. 12.12 заштрихована. Имеем $S_{OABD} = S_{OABC} - S_{\Delta DBC}$.

Абсциссу точки D найдем из условия $6x - 7 = 0$, т.е. $x = \frac{7}{6}$. Значит, $DC = 2 - \frac{7}{6} = \frac{5}{6}$, откуда

$$S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2} DC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 5 = \frac{25}{12} \text{ (кв. ед.).}$$

Далее находим

$$S_{OABC} = \int_0^2 (2x^2 - 2x + 1)dx = \left(2\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{10}{3} \text{ (кв. ед.)}$$

и окончательно получим $S_{OABD} = \frac{10}{3} - \frac{25}{12} = \frac{5}{4}$ (кв. ед.).

Ответ: 1,25 кв. ед.

Часть вторая
ГЕОМЕТРИЯ

Глава 1
ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1°. ***Произвольный треугольник*** (a, b, c — стороны; α, β, γ — противолежащие им углы; p — полупериметр; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; S — площадь; h_a — высота, проведенная к стороне a):

$$S=\frac{1}{2}ah_a; \qquad (1.1)$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha; \qquad (1.2)$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона);} \qquad (1.3)$$

$$r=\frac{S}{p}; \qquad (1.4)$$

$$R=\frac{abc}{4S}; \qquad (1.5)$$

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}; \qquad (1.6)$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \text{ (теорема косинусов);} \qquad (1.7)$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R \text{ (теорема синусов).} \qquad (1.8)$$

2°. ***Прямоугольный треугольник*** (a, b — катеты; c — гипотенуза; a_c, b_c — проекции катетов на гипотенузу):

$$S=\frac{1}{2}ab; \qquad (1.9)$$

$$S=\frac{1}{2}ch_c; \qquad (1.10)$$

$$r=\frac{a+b-c}{2}; \qquad (1.11)$$

$$R = \frac{c}{2}; \qquad (1.12)$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ **(теорема Пифагора)**}; \qquad (1.13)$$

$$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}; \qquad (1.14)$$

$$\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}; \qquad (1.15)$$

$$\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}; \qquad (1.16)$$

$$a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\,\mathrm{tg}\,\alpha = b\,\mathrm{ctg}\,\beta. \qquad (1.17)$$

3°. ***Равносторонний треугольник***:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \qquad (1.18)$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \qquad (1.19)$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \qquad (1.20)$$

4°. ***Произвольный выпуклый четырехугольник*** (d_1 и d_2 — диагонали; φ — угол между ними; S — площадь):

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi. \qquad (1.21)$$

5°. ***Параллелограмм*** (a и b — смежные стороны; α — угол между ними; h_a — высота, проведенная к стороне a):

$$S = ah_a = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi. \qquad (1.22)$$

6°. ***Ромб***:

$$S = ah_a = a^2\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2. \qquad (1.23)$$

7°. ***Прямоугольник***:

$$S = ab = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi. \qquad (1.24)$$

8°. ***Квадрат*** (d — диагональ):

$$S = a^2 = \frac{1}{2}d^2. \qquad (1.25)$$

9°. ***Трапеция*** (a и b — основания; h — расстояние между ними; l — средняя линия):

$$l = \frac{a+b}{2}; \qquad (1.26)$$

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = lh \qquad (1.27)$$

10°. ***Описанный многоугольник*** (p — полупериметр; r — радиус вписанной окружности):

$$S = pr. \qquad (1.28)$$

11°. ***Правильный многоугольник*** (a_n — сторона правильного n-угольника; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности):

$$a_3 = R\sqrt{3};\ a_4 = R\sqrt{2};\ a_6 = R; \qquad (1.29)$$

$$S = \frac{na_n r}{2}. \qquad (1.30)$$

12°. ***Окружность, круг*** (r — радиус; C — длина окружности; S — площадь круга):

$$C = 2\pi r; \qquad (1.31)$$

$$S = \pi r^2. \qquad (1.32)$$

13°. ***Сектор*** (l — длина дуги, ограничивающей сектор; $n°$ — градусная мера центрального угла; α — радианная мера центрального угла):

$$l = \frac{\pi r n°}{180°} = \frac{1}{2}r\alpha. \qquad (1.33)$$

$$S = \frac{\pi r^2 n°}{360°} = \frac{1}{2}r^2\alpha. \qquad (1.34)$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ФИГУР

(Доказательства этих свойств приведены в книге II двухтомного «Сборника» на с. 5–8).

1°. *Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении* 2:1, *считая от вершины треугольника.*

2°. *Длина медианы треугольника выражается формулой*

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}, \tag{1.35}$$

где a, b, c — длины сторон треугольника.

3°. *Длина стороны треугольника выражается формулой*

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2}, \tag{1.36}$$

где m_a, m_b, m_c — длины медиан треугольника.

4°. *Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим его сторонам.*

5°. *Длина биссектрисы треугольника выражается формулой*

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1}, \tag{1.37}$$

где a и b — длины сторон треугольника, a_1 и b_1 — отрезки третьей стороны.

6°. *Длина биссектрисы треугольника выражается через длины его сторон a, b и c по формуле*

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}. \tag{1.38}$$

7°. *Для всякого треугольника зависимость между его высотами h_a, h_b, h_c и радиусом r вписанной окружности выражается формулой*

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}. \tag{1.39}$$

8°. *Площадь S равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты, т.е. $S = h^2$.*

9°. *Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим ее оснований.*

Группа А

1.1. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью 1 см. Найти длину гипотенузы.

1.2. Точка на гипотенузе, равноудаленная от обоих катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 и 40 см. Найти катеты треугольника.

1.3. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана боковой стороны 5 см. Найти длины боковых сторон.

1.4. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 4 и 5 см. Определить площадь треугольника.

1.5. Основание треугольника равно 30 см, а боковые стороны 26 и 28 см. Высота разделена в отношении 2:3 (считая от вершины), и через точку деления проведена прямая, параллельная основанию. Определить площадь полученной при этом трапеции.

1.6. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 и 12 см. Найти расстояние между точкой пересечения его биссектрис и точкой пересечения медиан.

1.7. Площадь треугольника ABC равна 30 см^2. На стороне AC взята точка D так, что $AD : DC = 2:3$. Длина перпендикуляра DE, проведенного к стороне BC, равна 9 см. Найти BC.

1.8. В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к основанию и к боковой стороне, равны соответственно 10 и 12 см. Найти длину основания.

1.9. Две окружности касаются внешним образом. К первой из них проведена касательная, проходящая через центр второй окружности. Расстояние от точки касания до центра второй окружности равно утроенному радиусу этой окружности. Во сколько раз длина первой окружности больше длины второй окружности?

1.10. Найти площадь равнобедренного треугольника, если его основание равно a, а длина высоты, проведенной к основанию, равна длине отрезка, соединяющего середины основания и боковой стороны.

1.11. Данный квадрат со стороной a срезан по углам так, что образовался правильный восьмиугольник. Определить площадь этого восьмиугольника.

1.12. Круг радиуса R разделен двумя концентрическими с ним окружностями на три равновеликие фигуры. Найти радиусы этих окружностей.

1.13. Внутри круга радиуса 15 см взята точка M на расстоянии 13 см от центра. Через эту точку проведена хорда длиной 18 см. Найти длины отрезков, на которые точка M делит хорду.

1.14. Доказать, что если диаметр полукруга разделить на две произвольные части и на каждой из них построить как на диаметре полуокружность (внутри данного полукруга), то площадь, заключенная между тремя полуокружностями, равна площади круга, диаметр которого равен длине перпендикуляра к диаметру полукруга, проведенного в точке деления до пересечения с окружностью.

1.15. Сторона равностороннего треугольника, вписанного в окружность, равна a. Вычислить площадь отсекаемого ею сегмента.

1.16. Каждая из трех равных окружностей радиуса r касается двух других. Найти площадь треугольника, образованного общими внешними касательными к этим окружностям.

1.17. Одна из двух параллельных прямых касается окружности радиуса R в точке A, а другая пересекает эту окружность в точках B и C. Выразить площадь треугольника ABC как функцию расстояния x между прямыми.

1.18. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, относится к радиусу вписанной в него окружности как 5:2. Найти площадь треугольника, если один из его катетов равен a.

1.19. Найти отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, к высоте, опущенной на гипотенузу.

1.20. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 см и высотой 8 см, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка этой касательной, заключенного между сторонами треугольника.

1.21. В окружность, диаметр которой равен $\sqrt{12}$, вписан правильный треугольник. На его высоте как на стороне построен другой правильный треугольник, в который вписана новая окружность. Найти радиус этой окружности.

1.22. В равносторонний треугольник вписана окружность. Этой окружности и сторон треугольника касаются три малые окружности. Найти сторону треугольника, если радиус малой окружности равен r.

1.23. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15 см. Найти отношение площадей описанного и вписанного в треугольник кругов.

1.24. Через концы дуги окружности, содержащей 120°, проведены касательные, и в фигуру, ограниченную этими касательными и данной дугой, вписана окружность. Доказать, что ее длина равна длине исходной дуги.

1.25. Доказать, что отношение периметра треугольника к одной из его сторон равно отношению высоты, опущенной на эту сторону, к радиусу вписанной окружности.

1.26. Площадь равнобедренного треугольника равна $\frac{1}{3}$ площади квадрата, построенного на основании данного треугольника. Длины боковых сторон треугольника короче длины его основания на 1 см. Найти длины сторон и высоты треугольника, проведенной к основанию.

1.27. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6 см, так, что угол в 60° у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти стороны треугольника.

1.28. Величина одного из углов параллелограмма равна 60°, а меньшая диагональ $2\sqrt{31}$ см. Длина перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей к большей стороне, равна $\frac{\sqrt{75}}{2}$ см. Найти длины сторон и большей диагонали параллелограмма.

1.29. Через точки R и E, принадлежащие сторонам AB и AD параллелограмма $ABCD$ и такие, что $AR = \frac{2}{3}AB$, $AE = \frac{1}{3}AD$, проведена прямая. Найти отношение площади параллелограмма к площади полученного треугольника.

1.30. Длины параллельных сторон трапеции равны 25 и 4 см, а длины непараллельных сторон — 20 и 13 см. Найти высоту трапеции.

1.31. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3 см, периметр равен 42 см. Найти площадь трапеции.

1.32. Найти диагональ и боковую сторону равнобедренной рапеции с основаниями 20 и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

1.33. Найти площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 60°.

1.34. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S. Определить боковую сторону трапеции, если известно, что острый угол при основании равен $\frac{\pi}{6}$.

1.35. Вычислить отношение площадей квадрата, правильного треугольника и правильного шестиугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

Группа Б

1.36. Внутри прямого угла дана точка M, расстояния от которой до сторон угла равны 4 и 8 см. Прямая, проходящая через точку M, отсекает от прямого угла треугольник площадью 100 см^2. Найти катеты треугольника.

1.37. Периметр прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) равен 72 см, а разность между длинами медианы CM и высоты CK равна 7 см. Найти длину гипотенузы.

1.38. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c. Проекция вершины прямого угла на гипотенузу делит ее на два отрезка, из которых меньший относится к большему как больший ко всей гипотенузе. Определить площадь треугольника.

1.39. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20 см. Доказать, что треугольник прямоугольный.

1.40. Точка M лежит внутри равностороннего треугольника ABC. Вычислить площадь этого треугольника, если известно, что $AM = BM = 2$ см, а $CM = 1$ см.

1.41. Отношение величин двух углов треугольника равно 2, а разность длин противоположных им сторон равна 2 см; длина третьей стороны треугольника равна 5 см. Вычислить площадь треугольника.

1.42. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15 см. Определить площади треугольников, на которые данный треугольник разбивается его медианами.

1.43. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки длиной m и n. Доказать, что площадь треугольника $S = mn$. Найти площадь прямоугольника, вписанного в данный треугольник так, что одна его вершина совпадает с вершиной прямого угла, а противоположная вершина — с точкой касания окружности и гипотенузы.

1.44. В окружности с центром O проведена хорда AB, пересекающая диаметр в точке M и составляющая с диаметром угол, равный 60°. Найти OM, если $AM = 10$ см, а $BM = 4$ см.

1.45. В круге радиуса R проведены по разные стороны от центра две параллельные хорды, одна из которых стягивает дугу в 60°, другая — в 120°. Найти площадь части круга, заключенной между хордами.

1.46. Найти радиус круга, в сегмент которого, соответствующий хорде длиной 6 см, вписан квадрат со стороной 2 см.

1.47. На отрезке AB взята точка C и на частях AC и CB этого отрезка как на диаметрах построены полуокружности. Доказать, что сумма длин этих полуокружностей не зависит от положения точки C на отрезке AB.

1.48. Две окружности радиуса R пересекаются так, что каждая проходит через центр другой. Две другие окружности того же радиуса имеют центры в точках пересечения первых двух окружностей. Найти площадь, общую всем четырем кругам.

1.49. Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см², а гипотенуза равна 10 см. Найти радиус вписанной окружности.

1.50. Центр полуокружности, вписанной в прямоугольный треугольник так, что ее диаметр лежит на гипотенузе, делит гипотенузу на отрезки 30 и 40. Найти длину дуги полуокружности, заключенной между точками ее касания с катетами.

1.51. Сторона правильного треугольника равна a. Определить площадь части треугольника, лежащей вне круга радиуса $\frac{a}{3}$, центр которого совпадает с центром треугольника.

1.52. Около круга радиуса 3 описан равнобедренный треугольник с острым углом 30° при основании. Определить стороны треугольника.

1.53. Дан треугольник ABC такой, что $AB = 15$ см, $BC = 12$ см и $AC = 18$ см. В каком отношении центр вписанной в треугольник окружности делит биссектрису угла C?

1.54. Найти площадь треугольника, вписанного в круг радиуса 2 см, если два угла треугольника равны $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{4}$.

1.55. Внутри квадрата со стороной a на каждой его стороне как на диаметре построена полуокружность. Найти площадь розетки, ограниченной дугами полуокружностей.

1.56. Доказать, что из всех прямоугольников, вписанных в одну и ту же окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

1.57. Вершины прямоугольника, вписанного в окружность, делят ее на четыре дуги. Найти расстояние от середины одной из бóльших дуг до вершин прямоугольника, если стороны его равны 24 и 7 см.

1.58. Из вершины острого угла ромба проведены перпендикуляры к прямым, содержащим стороны ромба, которым не принадлежит эта вершина. Длина каждого перпендикуляра равна 3 см, а расстояние между их основаниями $3\sqrt{3}$ см. Вычислить длины диагоналей ромба.

1.59. В ромб со стороной a и острым углом $60°$ вписана окружность. Определить площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки касания окружности со сторонами ромба.

1.60. Дан ромб $ABCD$, диагонали которого равны 3 и 4 см. Из вершины тупого угла B проведены высоты BE и BF. Вычислить площадь четырехугольника $BFDE$.

1.61. Вычислить площадь общей части двух ромбов, длины диагоналей первого из которых равны 4 и 6 см, а второй получен поворотом первого на $90°$ вокруг его центра.

1.62. Площадь четырехугольника равна S. Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны и параллельны диагоналям четырехугольника.

1.63. Вся дуга окружности радиуса R разделена на четыре большие и четыре малые части, которые чередуются одна за другой. Большая часть в 2 раза длиннее малой. Определить площадь восьмиугольника, вершинами которого являются точки деления дуги окружности.

1.64. Найти радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции с основаниями 2 и 14 и боковой стороной 10.

1.65. В некоторый угол вписана окружность радиуса R, а длина хорды, соединяющей точки касания, равна a. Параллельно этой хорде проведены две касательные, в результате чего получилась трапеция. Найти площадь этой трапеции.

1.66. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса r. Найти стороны трапеции, если ее меньшее основание равно $\frac{4r}{3}$.

1.67. Прямая пересекает окружность радиуса R в точках A и B таких, что $\cup AB = 45°$, а прямую, перпендикулярную диаметру AM окружности и проходящую через ее центр, — в точке D. Прямая, проходящая через точку B перпендикулярно диаметру AM, пересекает его в точке C. Найти площадь трапеции $OCBD$.

1.68. Через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям проведена прямая, пересекающая боковые стороны в точках M и N. Доказать, что $MN = \dfrac{2ab}{a+b}$, где a и b — длины оснований.

1.69. В трапеции $ABCD$ известны длины оснований $AD = 24$ см, $BC = 8$ см и диагоналей $AC = 13$ см, $BD = 5\sqrt{17}$ см. Вычислить площадь трапеции.

1.70. Дан квадрат со стороной a. На каждой стороне квадрата вне его построена трапеция так, что верхние основания этих трапеций и их боковые стороны образуют правильный двенадцатиугольник. Вычислить его площадь.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ

1.1. Пусть c — длина гипотенузы. Тогда длины катетов равны $c - 1$ и $c - 2$. Имеем

$$(c-1)^2 + (c-2)^2 = c^2, \text{ или } c^2 - 6c + 5 = 0,$$

откуда $c = 5$ (см) (второй корень уравнения не удовлетворяет условию).

Ответ: 5 см.

1.2. По условию, $\angle C = 90°$, $AD = 30$ см, $DB = 40$ см (рис. 1.1). Положим $AC = x$, $BC = y$. Так как точка, равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе, то $\dfrac{x}{y} = \dfrac{30}{40}$, т. е. $y = \dfrac{4x}{3}$. Но $x^2 + y^2 = AB^2$ и, значит,

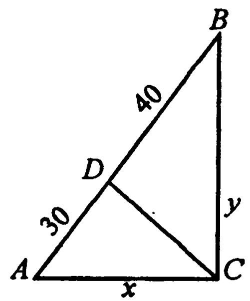


Рис. 1.1

$x^2+\dfrac{16x^2}{9}=70^2$, откуда $x^2 = 1764$. Итак, $x = 42$ (см), тогда

$y=\dfrac{4}{3}\cdot 42=56$ (см).

Ответ: 42 и 56 см.

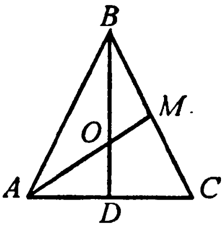


Рис. 1.2

1.3. Так как ΔABC равнобедренный, то высота BD является медианой (рис. 1.2); точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении $2:1$, откуда $AO=\dfrac{10}{3}$ (см). Из ΔAOD находим $OD=\sqrt{AO^2-AD^2}=$ $=\sqrt{\left(\dfrac{10}{3}\right)^2-(2\sqrt{2})^2}=\dfrac{\sqrt{28}}{3}$ (см), т. е. $BD=\sqrt{28}$ (см). Наконец, из ΔBDC получим $BC=\sqrt{(\sqrt{28})^2+(2\sqrt{2})^2}=6$ (см).

Ответ: 6 см.

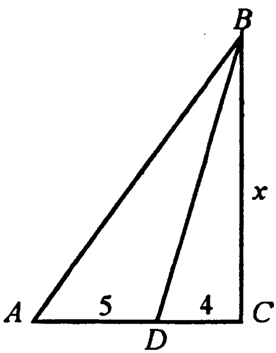


Рис. 1.3

1.4. Пусть $BC = x$ (рис. 1.3). Тогда $AB=\sqrt{81+x^2}$ и $\dfrac{x}{4}=\dfrac{\sqrt{81+x^2}}{5}$ (поскольку BD — биссектриса). Отсюда имеем $25x^2 =$ $= 16(81 + x^2)$, т. е. $x = 12$ (см). Значит,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 9=54 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 54 см^2.

1.5. По условию, $AB = c = 30$ см, $AC = b = 26$ см, $BC = a = 28$ см (рис. 1.4). Тогда $p = 0{,}5(a + b + c) = 42$, $p - a = 14$, $p - b = 16$, $p - c =$ $= 12$ и по формуле Герона находим

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{42\cdot 14\cdot 16\cdot 12}=336 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Так как $\Delta MNC \sim \Delta ABC$, то

$$\frac{S_{\Delta MNC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{CK^2}{CD^2} = \frac{4}{25} = 0{,}16.$$

Отсюда определяем площадь трапеции:

$$S_{AMNB} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta MNC} =$$
$$= 336 - 0{,}16 \cdot 336 = 282{,}24 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 282,24 см^2.

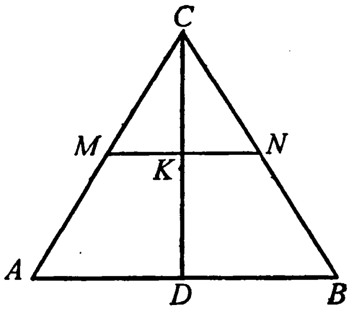


Рис. 1.4

1.6. В ΔABC (рис. 1.5) имеем $AB = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ (см); медиана CD равна половине гипотенузы, т. е. $\frac{15}{2}$ см. Пусть E — точка пересечения медиан; тогда $CE = \frac{2}{3} CD = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{2} = 5$ (см) (согласно дополнительным соотношениям, п.1°). Проведем $DF \perp AC$; так как DF — средняя линия в ΔABC, то $CF = 6$ см, $DF = \frac{9}{2}$ см. Далее, проведем $EK \perp AC$; тогда $EK \parallel DF$ и $\Delta CEK \sim \Delta CDF$, откуда

$$EK = \frac{2}{3} DF = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} = 3 \text{ (см)}, \; CK = \frac{2}{3} CF = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4 \text{ (см)}.$$

Пусть M — точка пересечения биссектрис углов CBA и BCA,

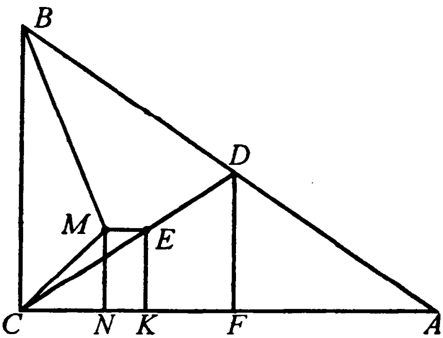


Рис. 1.5

т. е. центр вписанной в ΔABC окружности; тогда $MN \perp AC$, где $r = MN$ — радиус этой окружности. В силу формулы (1.4) имеем $r = \frac{S}{p}$, где $S = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$ (см²), $p = \frac{1}{2}(9+12+15) = 18$ (см); значит, $r = \frac{54}{18} = 3$ (см). Наконец, учитывая, что $\angle MCN = 45°$, т. е. $CN = MN$, получаем $NK = ME = CK - CN = 4 - 3 = 1$ (см).

Ответ: 1 см.

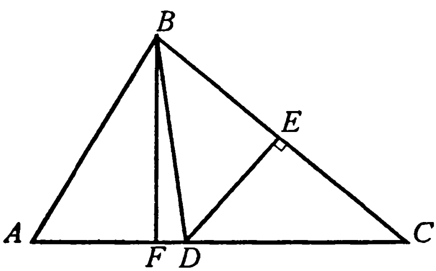


Рис. 1.6

1.7. Проведем BD (рис. 1.6); треугольники ABD и BDC имеют общую высоту; следовательно, их площади относятся как длины оснований, т. е. $S_{\Delta ABD} : S_{\Delta BDC} = 2:3$; тогда $S_{\Delta BDC} = \frac{3}{5} S_{\Delta ABC} = 18$ см². С другой стороны, согласно формуле (1.1), $S_{\Delta BDC} = \frac{1}{2} BC \cdot DE$, т. е. $18 = \frac{1}{2} BC \cdot 9$, откуда $BC = 4$ см.

Ответ: 4 см.

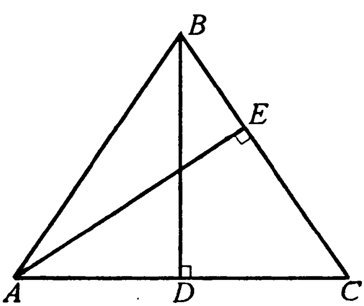


Рис. 1.7

1.8. В ΔABC имеем $AB = BC$, $AE \perp BC$, $BD = 10$ см и $AE = 12$ см (рис. 1.7). Пусть $AC = x$, $AB = BC = y$. Прямоугольные треугольники AEC и BDC подобны (угол C — общий); следовательно, $BC : AC = BD : AE$, или $y : x = 10:12 = 5:6$. Применяя теорему Пифагора (1.13) к ΔBDC, имеем $BC^2 = BD^2 + DC^2$, т. е.

$y^2 = 100 + \dfrac{x^2}{4}$. Итак, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ y^2 = 100 + \dfrac{x^2}{4}, \end{cases}$$

решив которую получим $x = 15$.

Ответ: 15 см.

1.9. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, A — точка касания (рис. 1.8). Тогда $O_1A = R_1$, $O_1O_2 = R_1 + R_2$, $O_2A = 3R_2$ (по условию). Требуется найти отношение $2\pi R_1 : 2\pi R_2 = R_1 : R_2$. В прямоугольном треугольнике O_1AO_2 ($\angle A = 90°$) имеем

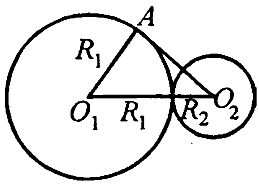


Рис. 1.8

$$O_1O_2^2 = O_1A^2 + O_2A^2, \text{ или } (R_1 + R_2)^2 = R_1^2 + (3R_2)^2.$$

Упростив это равенство, получим $R_1 = 4R_2$, откуда $R_1 : R_2 = 4$.

Ответ: в 4 раза.

1.10. По условию, DK — средняя линия ΔABC (рис. 1.9). Так как $BD = DK = \dfrac{1}{2}BC$, то $\angle C = 30°$ и $BC = 2BD$. В ΔBCD имеем

$CD^2 = BC^2 - BD^2$, или $\dfrac{a^2}{4} = 4BD^2 - BD^2$, откуда $BD = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$. Следовательно,

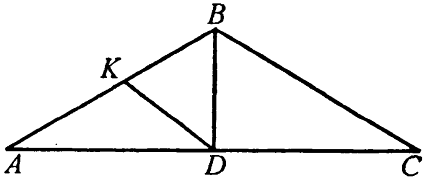


Рис. 1.9

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD=CD\cdot BD=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

1.11. Пусть $AE = x$ (рис. 1.10). Тогда $AB = 2AE + EF$, или $2x+x\sqrt{2}=a$, откуда $x=\frac{a}{2+\sqrt{2}}=\frac{a\,(2-\sqrt{2})}{2}$. Следовательно, искомая площадь

$$S=S_{ABCD}-4S_{\Delta AEN}=a^2-\frac{4x^2}{2}=a^2-\frac{4a^2(4-4\sqrt{2}+2)}{8}=2a^2(\sqrt{2}-1).$$

Ответ: $2a^2(\sqrt{2}-1)$.

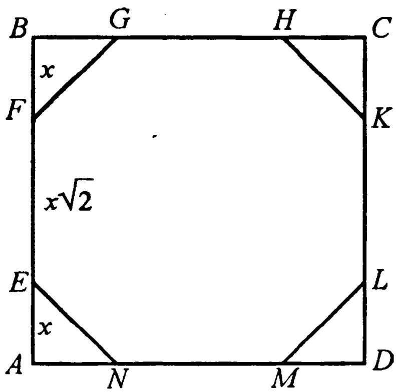


Рис. 1.10

1.12. У к а з а н и е. Воспользоваться равенствами $\pi R_1^2=S$, $\pi R_2^2=2S$, $\pi R^2=3S$, где R_1 и R_2 — радиусы меньшей и средней окружностей, а S — площадь меньшего круга.

Ответ: $R_1=\frac{R\sqrt{3}}{3}$, $R_2=\frac{R\sqrt{6}}{3}$.

1.13. Проведем $OC \perp AB$ (рис. 1.11). Тогда $CB = \frac{1}{2}AB = 9$ см. Из ΔOBC следует, что $OC = \sqrt{OB^2 - BC^2} = 12$ (см), а из ΔOMC — что $MC = \sqrt{OM^2 - OC^2} = 5$ (см). Значит, $AM = 9 + 5 = 14$ (см), $MB = 9 - 5 = 4$ (см).

Ответ: 14 и 4 см.

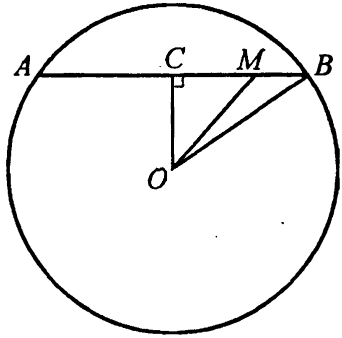


Рис. 1.11

1.14. Пусть R — радиус данного полукруга, а r — радиус одного из построенных полукругов (рис. 1.12). Тогда площадь заданной фигуры равна

$$0{,}5(\pi R^2 - \pi r^2 - \pi(R - r)^2) = = \pi r(R - r).$$

Так как $\angle ADB = 90°$, то $CD^2 = = AC \cdot CB = 2r \cdot 2(R - r) = 4r(R - r)$, откуда $\frac{\pi CD^2}{4} = \pi r(R - r)$, что и требовалось доказать.

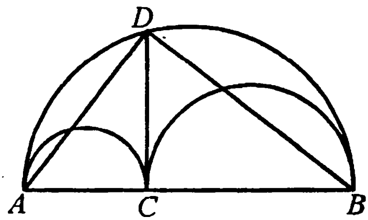


Рис. 1.12

1.15. Площадь сегмента AnB равна разности площадей сектора AOB и треугольника AOB (рис. 1.13). Находим $S_{\text{сект}\,AOB} = \frac{\pi R^2}{3}$,

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{R}{2} = \frac{aR}{4},$$ откуда

$$S = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{aR}{4}.$$ Так как $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, то

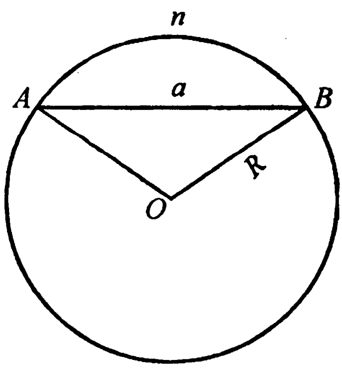


Рис. 1.13

$$S=\frac{\pi a^2}{9}-\frac{a^2}{4\sqrt{3}}=a^2\left(\frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)=\frac{a^2(4\pi-3\sqrt{3})}{36}.$$

Ответ: $S=\dfrac{a^2(4\pi-3\sqrt{3})}{36}$.

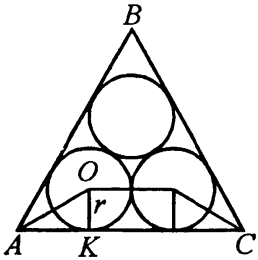


Рис. 1.14

1.16. Треугольник ABC — правильный (рис. 1.14); поэтому его площадь равна $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона треугольника. Проведем $OK\perp AC$. Так как $\angle OAK=30°$, то $AO = 2r$, $AK=r\sqrt{3}$, откуда $a=2r\sqrt{3}+2r=2r(\sqrt{3}+1)$. Следовательно,

$$S=\frac{4r^2(3+2\sqrt{3}+1)\sqrt{3}}{4}=2r^2(2\sqrt{3}+3).$$

Ответ: $2r^2(2\sqrt{3}+3)$.

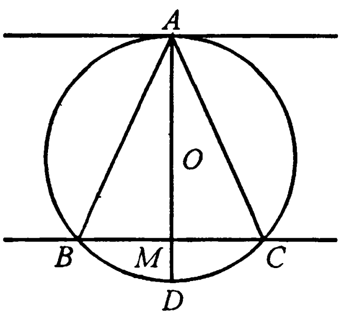


Рис. 1.15

1.17. Пусть расстояние между параллельными прямыми равно x (рис. 1.15); тогда площадь S треугольника ABC равна $0{,}5BC\cdot x$. Так как $OA\perp BC$, то $BM = MC$ и $BM\cdot MC=AM\cdot MD=x(2R-x)$. Значит, $0{,}25BC^2=x(2R-x)$, откуда

$$S=0{,}5x\cdot 2\sqrt{2Rx-x^2}=x\sqrt{2Rx-x^2}.$$

Ответ: $S=x\sqrt{2Rx-x^2}$.

1.18. Пусть r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей, $BC=a$ (рис. 1.16). Положим $BD=x$; тогда $BL=x$ (как касательные, проведенные из одной точки), $LA=AK=2R-x$ (так как ΔABC — прямоугольный, то $AB=2R$). Имеем $AC^2+BC^2=AB^2$, или

$$(r + 2R - x)^2 + a^2 = 4R^2.$$

Но $R = \frac{5r}{2}$, $x = a - r$ и последнее уравнение примет вид

$$(7r - a)^2 + a^2 = 25r^2,$$

или

$$12r^2 - 7ar + a^2 = 0,$$

откуда $r_1 = \frac{a}{3}$, $r_2 = \frac{a}{4}$. Этим корням соответствуют значения $(AC)_1 = \frac{4a}{3}$, $(AC)_2 = \frac{3a}{4}$, В результате получаем два решения:

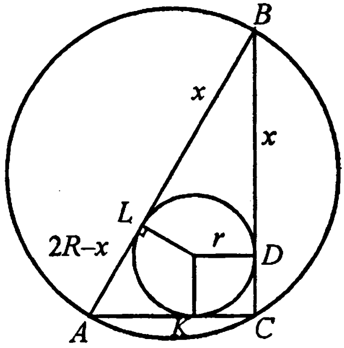


Рис. 1.16

$$S_1 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{4a}{3} = \frac{2a^2}{3},\ S_2 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{3a}{4} = \frac{3a^2}{8}.$$

Ответ: $\frac{2a^2}{3}$ и $\frac{3a^2}{8}$.

1.19. Так как ΔABC — равнобедренный и прямоугольный, то высота CD является биссектрисой, т. е. $\angle DCA = \angle A = 45°$ (рис. 1.17); поэтому $AD = DC$ и $AC = \sqrt{2}DC$. Но $AC = AK + KC = DC + r$ ($AK = AD$ как касательные, проведенные из одной точки), откуда $r = \sqrt{2}DC - DC$, т. е. $\frac{r}{DC} = \sqrt{2} - 1$.

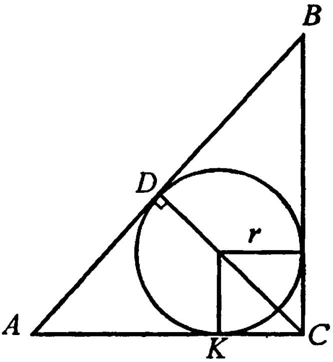


Рис. 1.17

Ответ: $(\sqrt{2} - 1):1$.

1.20. Найдем длину боковой стороны BC (рис. 1.18); $BC = \sqrt{BM^2 + MC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см). Учитывая, что AO — бис-

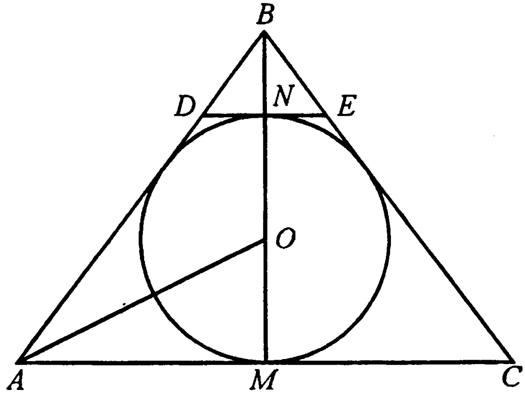


Рис. 1.18

сектриса ΔABM, имеем $\frac{MO}{OB}=\frac{AM}{AB}$, или $\frac{r}{8-r}=\frac{6}{10}$, откуда $r = 3$ (см). Так как $DE \parallel AC$, то $\Delta DBE \sim \Delta ABC$, т. е. $\frac{DE}{AC}=\frac{BN}{BM}$, или $\frac{DE}{12}=\frac{8-2r}{8}$, откуда $DE = 3$ см.

Ответ: 3 см.

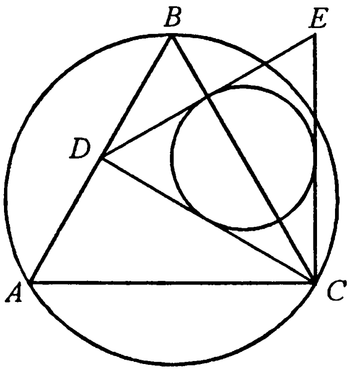


Рис. 1.19

1.21. Согласно условию, $R = 0{,}5\sqrt{12}$. Сторона AB правильного вписанного треугольника (рис. 1.19) равна $R\sqrt{3}$, т. е. $0{,}5\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}=3$. Найдем сторону CD нового треугольника: $a=\sqrt{3^2-1{,}5^2}=1{,}5\sqrt{3}$. Так как радиус r вписанной окружности равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, то окончательно получим

$$r=1{,}5\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{3}{4}.$$

Ответ: 0,75

1.22. Пусть a — сторона треугольника, R — радиус вписанной в него окружности; тогда $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Проведем радиусы OM и O_1K в точки касания (рис. 1.20). Из подобия треугольников AOM и AO_1K имеем $\dfrac{R}{r}=\dfrac{AO}{AO-R-r}$. Отсюда, учитывая, что $AO=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, получаем

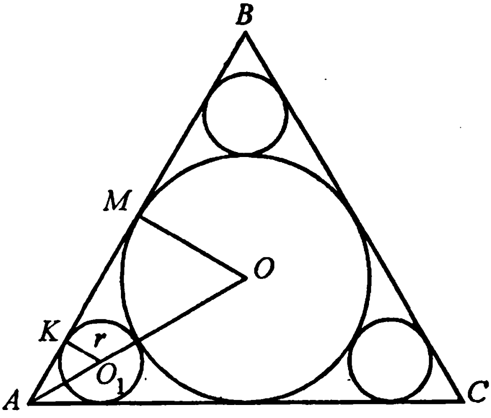


Рис. 1.20

$$\frac{a\sqrt{3}}{6r}=\frac{a\sqrt{3}}{3\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}-\dfrac{a\sqrt{3}}{6}-r\right)},\ \text{или}\ \frac{a\sqrt{3}}{6}-r=2r,$$

т. е. $a=6r\sqrt{3}$.

Ответ: $6r\sqrt{3}$.

1.23. Радиусы r и R вписанной и описанной окружностей связаны с площадью S треугольника формулами (1.4) и (1.5): $r=\dfrac{S}{p}$, $R=\dfrac{abc}{4S}$. Но площадь треугольника находится по формуле Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84\ (\text{см}^2).$$

Следовательно, $r=4$ см, $R=\dfrac{65}{8}$ см, откуда получим искомое отно шение площадей: $\dfrac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\dfrac{65}{32}\right)^2$.

Ответ: $\left(\dfrac{65}{32}\right)^2$.

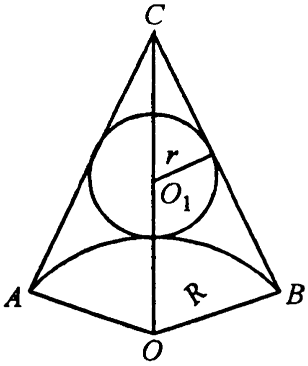


Рис. 1.21

1.24. Пусть R — радиус дуги, r — радиус окружности (рис. 1.21). Так как $\angle C = \dfrac{\pi}{3}$, то $R = \dfrac{1}{2}OC$, $r = \dfrac{1}{2}O_1C$. Тогда $OC = 2R$; с другой стороны, $OC = OO_1 + O_1C = R + r + 2r = = R + 3r$, откуда $R = 3r$. Следовательно,

$$l_{\cup AB} = 2\pi R \cdot \frac{1}{3} = 2\pi \cdot \frac{3r}{3} = 2\pi r.$$

1.25. Указание. Воспользоваться формулами (1.1) и (1.4).

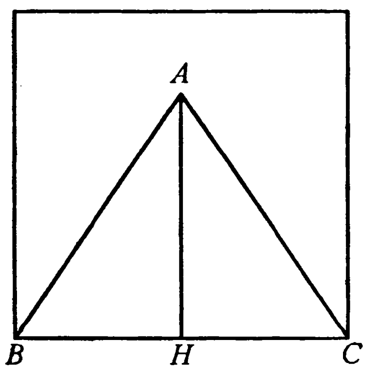


Рис. 1.22

1.26. По условию, $BC^2 = 3 \cdot \dfrac{1}{2}BC \cdot AH$ (рис. 1.22), или $AH = \dfrac{2}{3}BC$. Но $AH^2 = AB^2 - \left(\dfrac{1}{2}BC\right)^2$ и, значит, $\dfrac{4}{9}BC^2 = AB^2 - \dfrac{1}{4}BC^2$, или $AB^2 = \dfrac{25}{36}BC^2$, т. е. $AB = \dfrac{5}{6}BC$.

Тогда получим $AB = \dfrac{5}{6}(AB + 1)$, откуда $AB = 5$ (см). Следовательно, $BC = 6$ см, $AH = 4$ см.

Ответ: 5 и 6 см; 4 см.

1.27. В ΔFBD (рис. 1.23) катет $FD =$ $= 6$ см и лежит против угла в 30°, откуда $FB = 12$ см и, значит, $AB = 18$ см. Далее, в ΔABC имеем $AC = \frac{1}{2}AB = 9$ см. Наконец,

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{243} = 9\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Ответ: 9, $9\sqrt{3}$ и 18 см.

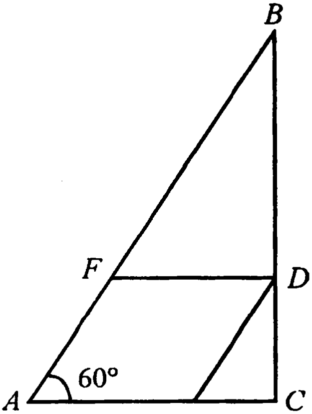


Рис. 1.23

1.28. Проведем $BN \perp AD$ (рис. 1.24); так как $BN = 2OM$, то $BN = \sqrt{75}$ см. Учитывая, что в ΔANB $\angle ABN = 30°$, имеем $AB = 2AN$ и, значит, $4AN^2 = 75 + AN^2$, откуда $AN = 5$ см и $AB = 10$ см. Далее, из ΔBDN получим $ND^2 = BD^2 - BN^2 = 124 - 75 = 49$; следовательно, $ND = 7$ см и $AD = 12$ см. Наконец, из равенства $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + + 2AD^2$ находим $AC^2 = 200 + 288 - 124 = 364$, т. е. $AC = 2\sqrt{91}$ см.

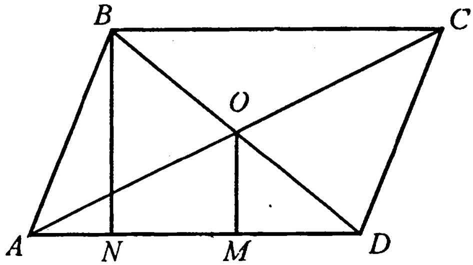


Рис. 1.24

Ответ: 10 и 12 см; $2\sqrt{91}$ см.

1.29. Пусть h — высота параллелограмма $ABCD$, h_1 — высота треугольника ARE (рис. 1.25). Тогда $S_{ABCD} = AD \cdot h$, $S_{\Delta ARE} = \frac{1}{2}AE \cdot h_1$. Но $\frac{h}{h_1} = \frac{AB}{AR} = \frac{3}{2}$.

Следовательно,

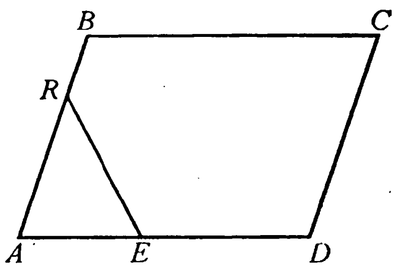


Рис. 1.25

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\Delta ARE}} = \frac{AD \cdot h}{\frac{1}{2} AE \cdot h_1} = \frac{AD \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} AD \cdot \frac{2}{3} h} = 9.$$

Ответ: 9 : 1.

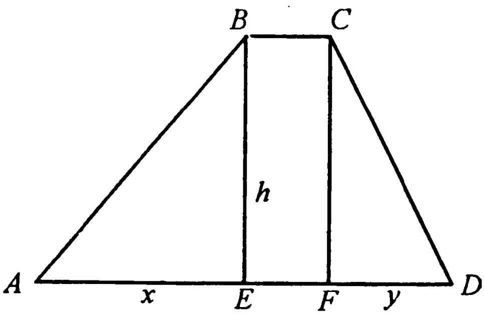


Рис. 1.26

1.30. По условию, $BC = 4$ см, $AD = 25$ см, $AB = 20$ см, $CD = 13$ см (рис. 1.26). Проведем $BE \perp AD$ и $CF \perp AD$. Пусть $BE = CF = h$, $AE = x$, $FD = y$. Тогда из ΔABE и ΔCFD находим $h = 20^2 - x^2 = 13^2 - y^2$. Учитывая, что $y = 25 - 4 - x = 21 - x$, имеем

$$20^2 - x^2 = 13^2 - (21 - x)^2, \text{ или } 42x = 672,$$

откуда $x = 16$ (см). Итак, $h = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

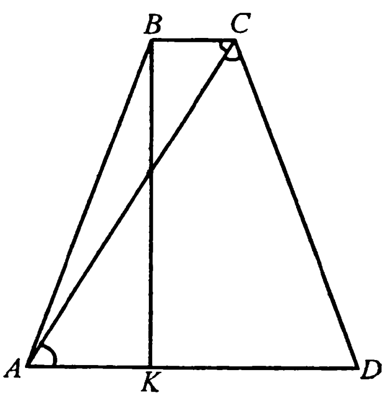


Рис. 1.27

1.31. По условию, $\angle BCA = \angle ACD$ (рис. 1.27). Но $\angle BCA = \angle CAD$, а значит, ΔACD — равнобедренный и $AD = CD$. Имеем $3AD + BC = 42$; так как $BC = 3$ см, то $AD = 13$ см. Проведем $BK \perp AD$;

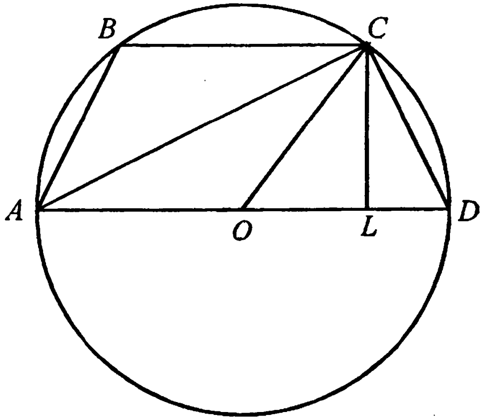
тогда $AK = \frac{1}{2}(13 - 3) = 5$ (см) и из

ΔAKB находим $BK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см). Итак,

$$S = \frac{1}{2}(3 + 13) \cdot 12 = 96 \text{ (см}^2).$$

Ответ: 96 см^2.

1.32. Так как AD — диаметр окружности (рис. 1.28), то $OD = OC = 10$ см. Проведем $CL \perp AD$; тогда $OL = 6$ см и из ΔCLO находим $CL = \sqrt{OC^2 - OL^2} = 8$ (см). Теперь из ΔALC и ΔCLD получаем



$$AC = \sqrt{CL^2 + AL^2} = \sqrt{64+256} = 8\sqrt{5} \text{ (см)},$$

Рис. 1.28

$$CD = \sqrt{CL^2 + LD^2} = \; = \sqrt{64+16} = 4\sqrt{5} \text{ (см)}.$$

Ответ: $8\sqrt{5}$ и $4\sqrt{5}$ см.

1.33. Так как центральный угол COD равен 60° (рис. 1.29), то вписанный угол CAD равен 30° Следовательно, $h = \frac{1}{2}AC$ и из

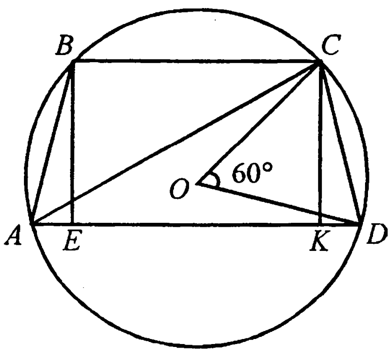


Рис. 1.29

ΔAKC получим $AK = \sqrt{AC^2 - CK^2} = h\sqrt{3}$. Находим площадь трапеции:

$$S = \frac{1}{2}(BC + AD)h = (AE + EK)h = AK \cdot h = h\sqrt{3} \cdot h = h^2\sqrt{3}.$$

Ответ: $h^2\sqrt{3}$.

1.34. У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что если трапеция описана около окружности, то сумма ее оснований равна сумме боковых сторон.

Ответ: $\sqrt{2S}$.

1.35. Пусть R — радиус окружности. Тогда сторона правильного вписанного треугольника $a_3 = R\sqrt{3}$ и $S_3 = \frac{a_3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. Далее, сторона квадрата $a_4 = R\sqrt{2}$ и $S_4 = a_4^2 = 2R^2$ и, наконец, сторона правильного вписанного шестиугольника $a_6 = R$ и $S_6 = \frac{6R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $S_4 : S_3 : S_6 = 8:3\sqrt{3}:6\sqrt{3}$.

Ответ: $8:3\sqrt{3}:6\sqrt{3}$.

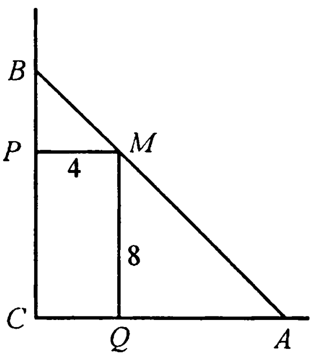


Рис. 1.30

1.36. По условию, $\angle C = 90°$, $MP = 4$ см, $MQ = 8$ см, $S_{\Delta ABC} = 100$ см^2 (рис. 1.30); требуется найти BC и AC. Пусть $BC = x$, $AC = y$; тогда $0{,}5xy = 100$, т. е. $xy = 200$. Так как $\Delta BPM \sim \Delta MQA$, то $\frac{MP}{AQ} = \frac{BP}{MQ}$, или $\frac{4}{y-4} = \frac{x-8}{8}$. Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{4}{y-4} = \frac{x-8}{8}, \\ xy = 200, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x + 2y = 50, \\ xy = 200, \end{cases}$$

которая сводится к квадратному уравнению $y^2 - 25y + 100 = 0$, откуда находим $y_1 = 5$ см; $y_2 = 20$ см. В результате получаем два решения: $x_1 = 40$ см, $y_1 = 5$ см; $x_2 = 10$ см, $y_2 = 20$ см.

Ответ: 40 и 5 см или 10 и 20 см.

1.37. По условию, $\angle C = 90°$, $AB + BC + AC = 72$ см, CM — медиана, CK — высота, $CM - CK = 7$ см (рис. 1.31); требуется найти AB. Так как M — центр описанной окружности, то

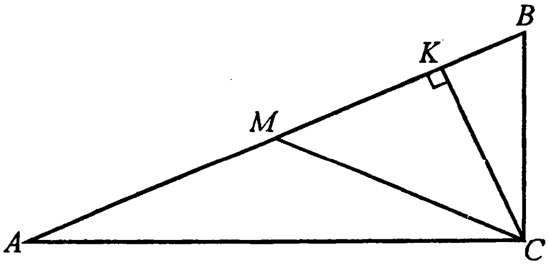


Рис. 1.31

$AM = MB = MC = \frac{1}{2}AB$. Воспользуемся равенством $AB^2 = BC^2 + AC^2$. Заметим, что $BC^2 + AC^2 = (BC + AC)^2 - 2BC \cdot AC$, откуда $AB^2 = (72 - AB)^2 - 2AB \cdot CK$, поскольку $BC \cdot AC = AB \cdot CK = 2S$, где S — площадь треугольника. Таким образом, приходим к уравнению

$$AB^2 = (72 - AB)^2 - 2AB\left(\frac{1}{2}AB - 7\right), \text{ или } AB^2 + 130AB - 5184 = 0,$$

откуда $AB = -65 + \sqrt{9409} = 32$ см (второй корень уравнения не удовлетворяет условию).

Ответ: 32 см.

1.38. Пусть x — больший отрезок гипотенузы. Тогда по условию $\frac{c-x}{x} = \frac{x}{c}$, или $x^2 + cx - c^2 = 0$, откуда $x = \frac{c(\sqrt{5}-1)}{2}$ (второй корень уравнения не удовлетворяет условию). Далее находим $x^2 = \frac{c^2(3-\sqrt{5})}{2}$. Обозначив через h высоту, проведенную к гипотенузе, имеем $\frac{c-x}{h} = \frac{h}{x}$, и, значит,

$$h^2 = cx - x^2 = c^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = c^2(\sqrt{5}-2),$$

т. е. $h = c\sqrt{\sqrt{5}-2}$. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}ch = \frac{c^2\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}.$$

Ответ: $0{,}5c^2\sqrt{\sqrt{5}-2}.$

1.39. Пусть площадь треугольника равна S. Тогда его стороны таковы: $a = \frac{2S}{15}$, $b = \frac{2S}{20}$, $c = \frac{2S}{12}$. Найдем

$$a^2 + b^2 = 4S^2\left(\frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2}\right) = 4S^2\left(\frac{1}{225} + \frac{1}{400}\right) = \frac{4S^2}{25}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{16}\right) = \frac{4S^2}{144},$$

откуда $a^2 + b^2 = c^2$, т. е. треугольник прямоугольный.

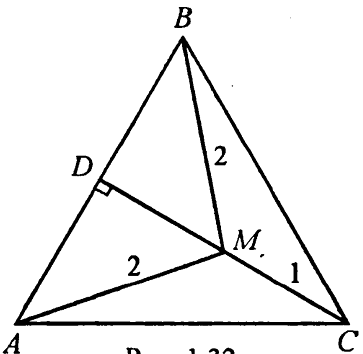


Рис. 1.32

1.40. Обозначим сторону треугольника через a и проведем $MD \perp AB$ (рис. 1.32). Поскольку $AM = BM$, точки C, M и D лежат на одной прямой — высоте CD. В ΔACD и ΔAMD имеем $(1 + MD)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$, $MD^2 = 4 - \frac{a^2}{4}$. Тогда $a^2 = 4(4 - MD^2)$ и получаем квадратное уравнение

$$(1 + MD)^2 = 3(4 - MD^2), \text{ или } 4MD^2 + 2MD - 11 = 0$$

откуда $MD = \frac{3\sqrt{5}-1}{4}$ (второй корень не удовлетворяет условию).

Далее находим

$$a^2=4(4-MD^2)=16-\frac{46-6\sqrt{5}}{4}=\frac{9+3\sqrt{5}}{2}$$

и, следовательно,

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{(9+3\sqrt{5})\sqrt{3}}{8}=\frac{9\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{8}\approx 3{,}4 \ (\text{см}^2).$$

Ответ: $\approx 3{,}4$ см^2.

1.41. По условию, $\angle A=2\angle B$, $BC-AC=2$ см, $AB=5$ см (рис. 1.33); требуется найти $S_{\Delta ABC}$. Проведем биссектрису AD; тогда $\Delta ABC \sim \Delta ADC$ ($\angle C$ — общий, $\angle B=\angle DAC$) и потому $\frac{AC}{BC}=\frac{CD}{AC}$, т. е.

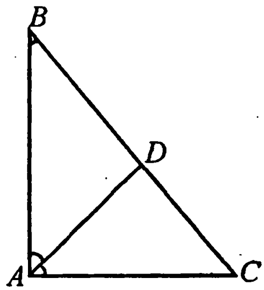


Рис. 1.33

$$AC^2=BC\cdot CD \qquad (1).$$

Далее, так как AD — биссектриса, то

$$\frac{AC}{CD}=\frac{5}{BD}, \text{ или } \frac{AC}{CD}=\frac{5}{BC-CD}, \text{ или } AC\cdot BC-AC\cdot CD=5CD,$$

откуда

$$CD=\frac{AC\cdot BC}{AC+5} \qquad (2).$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $AC^2=\frac{AC\cdot BC^2}{AC+5}$, т. е. AC^2+ $+5AC=AC^2+4AC+4$, откуда $AC=4$ см, $BC=6$ см. Итак,

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{7{,}5\cdot 1{,}5\cdot 2{,}5\cdot 3{,}5}=\frac{15\sqrt{7}}{4} \ (\text{см}^2).$$

Ответ: $3{,}75\sqrt{7}$ см^2.

1.42. Сначала докажем, что все указанные в условии треугольники равновелики. Имеем $S_{\Delta AOM}=S_{\Delta COM}$ (рис. 1.34), поскольку

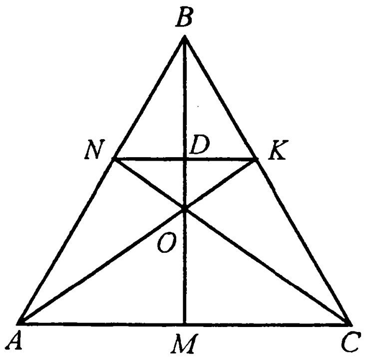


Рис. 1.34

эти треугольники имеют одинаковые высоты и одинаковые основания, равные $\frac{1}{2}AC$. Аналогично, $S_{\Delta AON} = S_{\Delta BON}$ и $S_{\Delta BOK} = S_{\Delta COK}$. Но $S_{\Delta BOK} = S_{\Delta BON}$, так как $S_{\Delta BOK} = S_{\Delta DOK} + S_{\Delta BKD}$, $S_{\Delta BON} = S_{\Delta DON} + S_{\Delta BND}$, а $S_{\Delta DOK} = S_{\Delta DON}$ и $S_{\Delta BKD} = S_{\Delta BND}$ (у этих треугольников равны основания KD и ND, а также опущенные из них высоты). Итак, площадь каждого треугольника равна $\frac{1}{6}S_{\Delta ABC}$. Теперь по формуле Герона находим $S_{\Delta ABC} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$ см², откуда $S_{\Delta AOM} = 14$ см².

Ответ: 14 см².

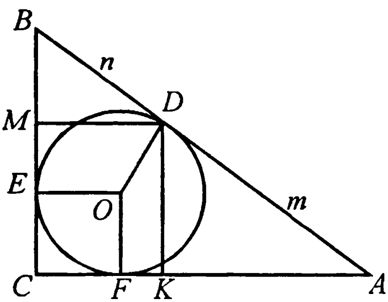


Рис. 1.35

1.43. Пусть D, E, F — точки касания (рис. 1.35); тогда $AD = AF = m$, $BD = BE = n$, $CE = CF = r$ — радиус вписанной окружности, $p = r + m + n$ — полупериметр. Далее, используя формулу (1.9), находим $S = \frac{(r+m)(r+n)}{2}$, или

$$2S = r^2 + r(m + n) + mn = r(r + m + n) + mn = rp + mn.$$

Так как в силу равенства (1.4) $rp = S$, то $2S = S + mn$, откуда $S = mn$.

Пусть $CMDK$ — вписанный прямоугольник. Поскольку $DK \parallel BC$, используя гомотетию с центром в A и коэффициентом $k = \frac{m}{m+n}$, найдем площадь S_1 треугольника ADK:

$$S_1 = S_{\Delta ABC} \cdot \frac{m^2}{(m+n)^2} = \frac{m^3 n}{(m+n)^2}.$$

Аналогично для площади S_2 треугольника BDM имеем

$$S_2 = S_{\Delta ABC} \cdot \frac{n^2}{(m+n)^2} = \frac{mn^3}{(m+n)^2}.$$

Искомая площадь

$$S_{CMDK} = mn - \frac{m^3 n + mn^3}{(m+n)^2} = \frac{2m^2 n^2}{(m+n)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{2m^2n^2}{(m+n)^2}$.

1.44. Проведем $OP \perp AB$ (рис. 1.36). Тогда $AP = BP = 7$ см и, значит, $MP = 3$ см. Так как $\angle PMO = 60°$, то $\angle MOP = 30°$ и $OM = 2MP = 6$ см.

Ответ: 6 см.

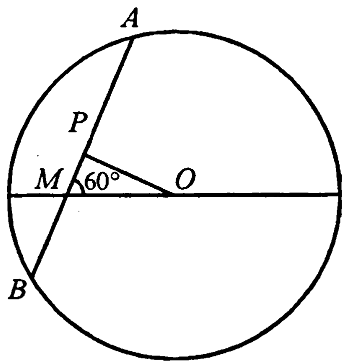


Рис. 1.36

1.45. Площадь сегмента с дугой $60°$ равна $S_1 = \dfrac{\pi R^2}{6} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$, а площадь сегмента с дугой $120°$ равна $S_2 = \dfrac{\pi R^2}{3} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$. Искомая площадь составляет

$$S = \pi R^2 - S_1 - S_2 = \frac{R^2(\pi + \sqrt{3})}{2}.$$

Ответ: $0{,}5R^2(\pi + \sqrt{3})$.

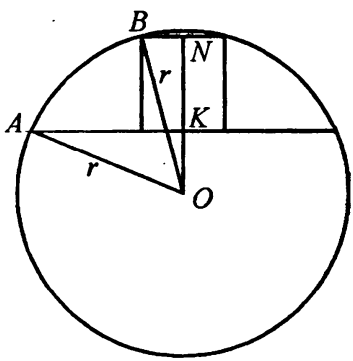


Рис. 1.37

1.46. Пусть r — искомый радиус. В ΔAOK (рис. 1.37) имеем $OK = \sqrt{r^2 - 9}$, а в ΔOBN имеем

$ON^2 + BN^2 = OB^2$, или $(OK + 2)^2 + 1 = r^2$. Следовательно,

$$r^2 - 9 + 4\sqrt{r^2 - 9} + 4 + 1 = r^2,$$

откуда $r^2 - 9 = 1$, т. е. $r = \sqrt{10}$ см.

Ответ: $\sqrt{10}$ см.

1.47. Пусть длина отрезка AB равна $2l$. Обозначим радиус одной из окружностей через x; тогда радиус второй окружности равен $l - x$. Сумма длин полуокружностей составляет $L = \pi x + \pi(l - x) = \pi l$, т. е. не зависит от x.

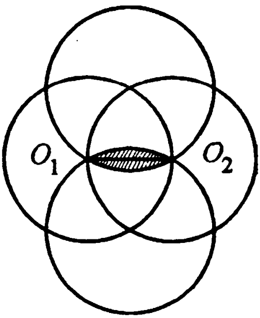


Рис. 1.38

1.48. Каждая из двух последних окружностей проходит через центры первых двух (рис. 1.38), поэтому длина общей хорды $O_1O_2 = R$. Искомая площадь равна удвоенной площади сегмента с центральным углом 60°, т. е.

$$S = 2\left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{6}$.

1.49. Указание. Обозначив через a и b катеты треугольника, решить систему уравнений

$$\begin{cases} ab = 48, \\ a^2 + b^2 = 100, \end{cases}$$

а затем воспользоваться формулой $S = pr$.

Ответ: 2 см.

1.50. Проведем радиусы OD и OE в точки касания (рис. 1.39). Имеем $OD = OE = CE = CD$, т. е. $ECDO$ — квадрат. Пусть R —

радиус окружности; тогда длина дуги ED равна $\frac{\pi R}{2}$. Так как $\Delta AEO \sim$ $\sim \Delta ODB$, то $\frac{AE}{OD}=\frac{AO}{OB}=\frac{30}{40}=\frac{3}{4}$. Но $AE^2 = AO^2 - OE^2 = 30^2 - R^2$, откуда $\frac{\sqrt{30^2-R^2}}{R}=\frac{3}{4}$, или $16(30^2-R^2)=9R^2$ и, значит, $R = 24$. Итак, длина дуги ED равна 12π.

Ответ: 12π.

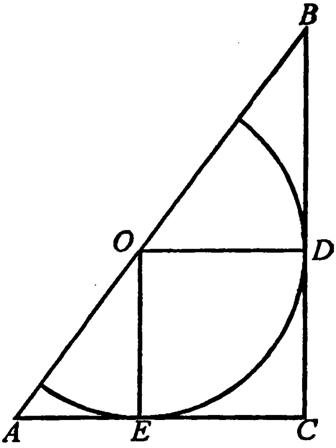


Рис. 1.39

1.51. Искомая площадь $S = S_1 - S_2 + 3S_3$, где $S_1=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — площадь треугольника, $S_2=\frac{\pi a^2}{9}$ — площадь круга, S_3 — площадь сегмента, отсекаемого треугольником от круга. Хорда этого сегмента равна $\frac{a}{3}$; поэтому

$$S_3=\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi a^2}{9}-\frac{a^2\sqrt{3}}{9\cdot 4}=\frac{\pi a^2}{54}-\frac{a^2\sqrt{3}}{36}.$$

Окончательно получим

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi a^2}{9}+\frac{\pi a^2}{18}-\frac{a^2\sqrt{3}}{12}=\frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{18}.$$

Ответ: $\frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{18}$.

1.52. Проведем радиус $OE \perp BC$ (рис. 1.40). Так как $\angle OBE=\frac{1}{2}\angle ABC=60°$, то $\angle BOE = 30°$, т. е. $BE=\frac{1}{2}BO$. Тогда из

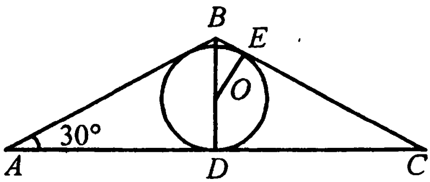


Рис. 1.40

ΔBEO находим $BO^2 = \frac{1}{4}BO^2 + 9$, откуда $BO = 2\sqrt{3}$. В ΔADB имеем $AB = 2BD$. Но $BD = BO + OD = 2\sqrt{3} + 3$ и, следовательно, $AB = BC = 4\sqrt{3} + 6$. Наконец, $AC = 2DC = 2(BC - BE) = 2(4\sqrt{3} + 6 - \sqrt{3}) = 6\sqrt{3} + 12$.

Ответ: $4\sqrt{3} + 6$, $4\sqrt{3} + 6$ и $6\sqrt{3} + 12$.

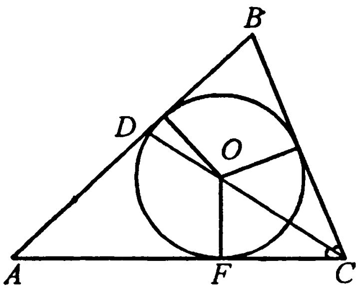


Рис. 1.41

1.53. Так как CD — биссектриса (рис. 1.41), то $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$, откуда $AD = 9$ см, $DB = 6$ см. Далее, длину биссектрисы найдем по формуле (1.37):

$$CD = \sqrt{12 \cdot 18 - 9 \cdot 6} = 9\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Проведем радиусы в точки касания и положим $CF = x$. Тогда, используя равенство касательных, проведенных из одной точки, получим $18 - x + 12 - x = 15$, откуда $x = \frac{15}{2}$ (см). По формуле Герона находим

$$S = \sqrt{\frac{45}{2} \cdot \frac{21}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{9}{2}} = \frac{135\sqrt{7}}{4} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Но $S = pr$, откуда $r = \frac{135\sqrt{7}}{4} : \frac{45}{2} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$ (см). Значит,

$OC = \sqrt{x^2 + r^2} = \sqrt{\frac{225}{4} + \frac{63}{4}} = 6\sqrt{2}$ (см). Поскольку $CD = 9\sqrt{2}$ см, точка O делит биссектрису в отношении 2 : 1.

Ответ: 2 : 1.

1.54. Так как $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$ (рис. 1.42), то $AB = 2\sqrt{2}$ см (сторона вписанного квадрата). Проведем $BD \perp AC$. Тогда, учитывая, что $\angle ABD = \frac{\pi}{6}$, находим $AD = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2}$ (см); далее, поскольку ΔBDC — равнобедренный,

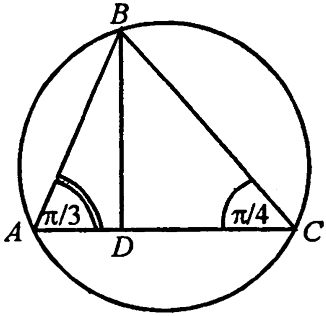


Рис. 1.42

$DC = BD = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{6}$ (см). Значит, $AC = AD + DC =$ $= \sqrt{2} + \sqrt{6}$ (см). Итак,

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})\sqrt{6} = (1 + \sqrt{3})\sqrt{3} = \sqrt{3} + 3\,(\text{см}^2).$$

Ответ: $\sqrt{3} + 3$ см^2.

1.55. Хорда OA стягивает дугу 90° (рис. 1.43); поэтому площадь половины лепестка равна $\frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{8} = \frac{a^2(\pi - 2)}{16}$. Следовательно, искомая площадь

$$S = 8 \cdot \frac{a^2(\pi - 2)}{16} = \frac{a^2(\pi - 2)}{2}.$$

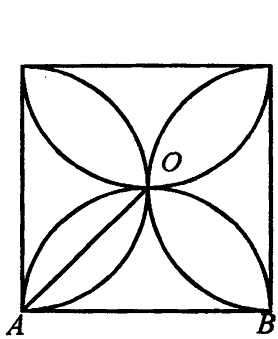


Рис. 1.43

Ответ: $0{,}5a^2(\pi - 2)$.

1.56. Пусть x — сторона прямоугольника, вписанного в окружность радиуса R. Тогда его площадь равна $x\sqrt{4R^2-x^2}$. Площадь вписанного квадрата равна $2R^2$. Покажем, что $2R^2 \geq x\sqrt{4R^2-x^2}$. В самом деле, из очевидного неравенства $(2R^2-x^2)^2 \geq 0$ получаем $4R^4 \geq x^2(4R^2-x^2)$, откуда и следует, что $2R^2 \geq x\sqrt{4R^2-x^2}$ (знак неравенства сохранится, поскольку $2R^2 > 0$ и $x\sqrt{4R^2-x^2} > 0$).

1.57. Так как AC — диаметр окружности (рис. 1.44), то $R = 0{,}5\sqrt{24^2+7^2} = 12{,}5$ (см). В ΔBOF имеем $OF = \sqrt{OB^2-BF^2} = \sqrt{12{,}5^2-12^2} = 3{,}5$ (см); значит, $MF = 12{,}5 - 3{,}5 = 9$ (см), $MK = 12{,}5 + 3{,}5 = 16$ (см). Из ΔMBF и ΔMAK находим искомые расстояния: $MB = \sqrt{MF^2+BF^2} = \sqrt{9^2+12^2} = 15$ (см), $MA = \sqrt{MK^2+KA^2} = \sqrt{16^2+12^2} = 20$ (см).

Ответ: 15 и 20 см.

1.58. Так как ΔAEF — равнобедренный (рис. 1.45), то биссектриса AM перпендикулярна EF и лежит на диагонали ромба. Нахо-

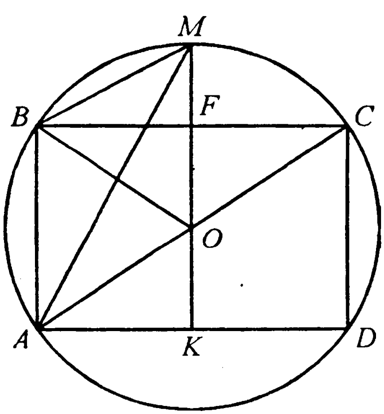


Рис. 1.44

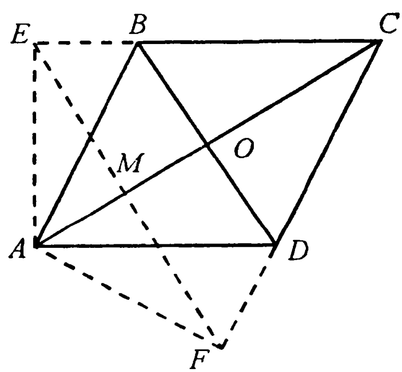


Рис. 1.45

дим $AM^2 = AF^2 - MF^2 = 9 - \frac{27}{4} = \frac{9}{4}$, т. е. $AM = \frac{3}{2}$ (см). В ΔACF имеем $\angle F = 90°$ и $FM \perp AC$; следовательно, $AF^2 = AC \cdot AM$, или $9 = AC \cdot \frac{3}{2}$, откуда $AC = 6$ (см). Далее, $\Delta ACD \sim \Delta AEF$ (углы при основании равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами) и, значит, $\frac{AM}{OD} = \frac{EF}{AC}$, или $\frac{\frac{3}{2}}{OD} = \frac{3\sqrt{3}}{6}$, откуда $OD = \sqrt{3}$ см.

Итак, $BD = 2\sqrt{3}$ см, $AC = 6$ см.

Ответ: $2\sqrt{3}$ и 6 см.

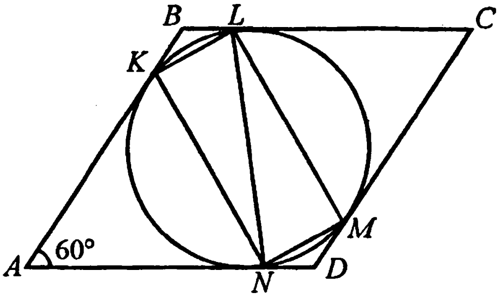


Рис. 1.46

1.59. Радиус вписанной в ромб $ABCD$ окружности (рис. 1.46) $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, поскольку $\angle A$ = = 60°. Четырехугольник $KLMN$ является прямоугольником, так как его углы опираются на диаметр окружности. Его площадь S = = $MN \cdot LM$, где $MN = R$ (катет, лежащий против угла 30°), $LM = R\sqrt{3}$. Итак, $S = R^2\sqrt{3} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

Ответ: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

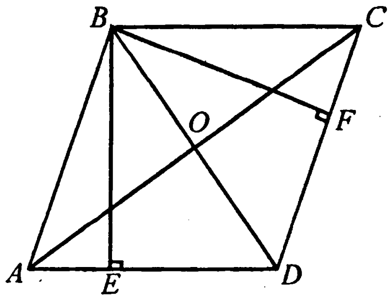


Рис. 1.47

1.60. Площадь ромба $S = 0,5 \times$ $\times 3 \cdot 4 = 6 = AD \cdot BE$ (рис. 1.47). Далее, из ΔAOD находим AD = $= \sqrt{2^2 + 1,5^2} = 2,5$ (см) и, следовательно, $BE = 6 : 2,5 = 2,4$ (см).

Тогда из ΔBDE получим $DE = \sqrt{BD^2 - BE^2} = \sqrt{3^2 - 2{,}4^2} = 1{,}8$ (см). Итак,

$$S_{BEDF} = 2S_{\Delta BED} = 1{,}8 \cdot 2{,}4 = 4{,}32 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 4,32 см^2.

1.61. Искомая площадь S равна $4(S_{\Delta AOB} - S_{\Delta AFK})$ (рис. 1.48). Находим $S_{\Delta AOB} = 0{,}5 \cdot 3 \cdot 2 = 3$ (см^2). Сторона ромба равна $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ (см). В ΔAOB отрезок OK — биссектриса; тогда, используя формулу

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$$

(см. соотношение (1.38)), получим

$$OK = \frac{\sqrt{6(5+\sqrt{13})(5-\sqrt{13})}}{5} = \frac{6\sqrt{2}}{5} \text{ (см)}.$$

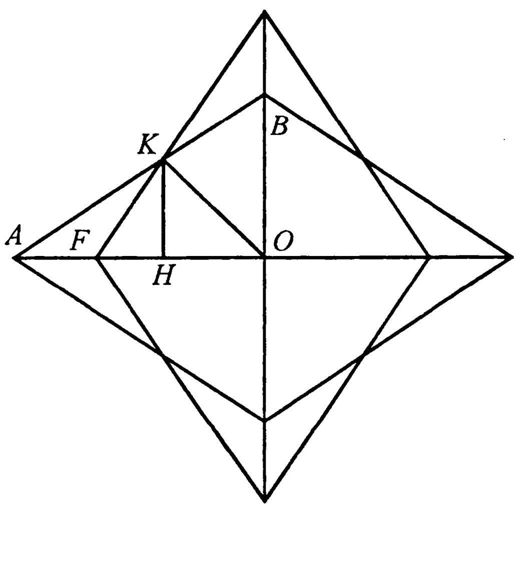


Рис. 1.48

Теперь найдем $S_{\Delta AFK}=\frac{1}{2}AF\cdot KH$, где $KH=\frac{OK}{\sqrt{2}}=\frac{6}{5}$ (см), $AF = 3 - 2 = 1$ (см); значит, $S_{\Delta AFK}=0{,}6$ см². Итак, $S = 4(3 - 0{,}6) = 9{,}6$ см².

Ответ: 9,6 см².

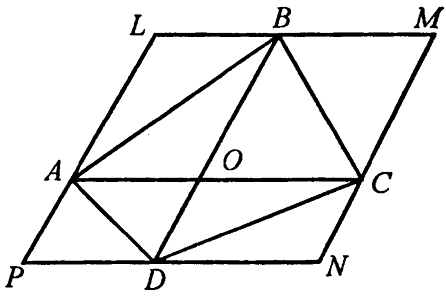


Рис. 1.49

1.62. Так как $AL \parallel BO$ и $LB \parallel AO$ (рис. 1.49), то $ALBO$ — параллелограмм и, значит, $S_{\Delta ALB}=S_{\Delta AOB}$. Аналогично получаем $S_{\Delta BMC}=S_{\Delta BOC}$, $S_{\Delta DCN}=S_{\Delta DOC}$, $S_{\Delta APD}=S_{\Delta AOD}$, откуда следует, что $S_{LMNP}=2S$.

Ответ: $2S$.

1.63. Пусть малая дуга содержит x градусов. Тогда $4x + 8x = 2\pi$, откуда $x=\frac{\pi}{6}$. Значит, восьмиугольник содержит четыре треугольника с центральным углом $\frac{\pi}{3}$ (их суммарная площадь $4\cdot\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$) и четыре треугольника с центральным углом $\frac{\pi}{6}$ (их суммарная площадь $4\cdot\frac{R^2}{4}$). Искомая площадь составляет $S=R^2(\sqrt{3}+1)$.

Ответ: $R^2(\sqrt{3}+1)$.

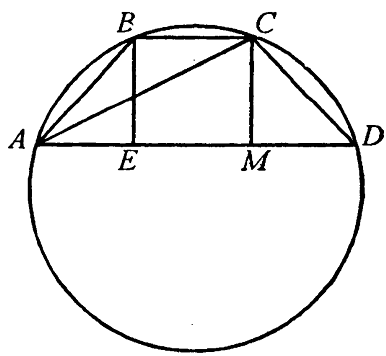


Рис. 1.50

1.64. Заметим, что окружность, описанная около трапеции $ABCD$, описана и около ΔACD (рис. 1.50), причем такая окружность единственна. Ее радиус будем искать по формуле $R = \frac{abc}{4S}$, где $S = S_{\Delta ACD}$. Имеем $S = \frac{1}{2} AD \cdot BE$, где $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$; отсюда $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 8 = 56$. Из ΔACM находим $AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$. Окончательно получим

$$R = \frac{14 \cdot 10 \cdot 8\sqrt{2}}{4 \cdot 56} = 5\sqrt{2}.$$

Ответ: $5\sqrt{2}$.

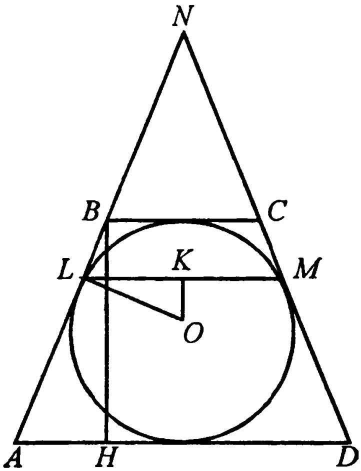


Рис. 1.51

1.65. Пусть L и M — точки касания (рис. 1.51); тогда $NL = NM$, откуда $AB = CD$, поскольку $AD \parallel BC \parallel LM$. Проведем $OK \perp LM$ и $BH \perp AD$. Тогда искомая площадь $S = \frac{1}{2}(AD + BC)BH$. Для описанной трапеции имеем $AD + BC = AB + CD = 2AB$; поэтому $S = AB \cdot BH$. Далее, $\Delta ABH \sim \Delta OLK$ ($\angle LOK = \angle BAH$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами), откуда $\frac{LK}{LO} = \frac{BH}{AB}$, или $\frac{0{,}5a}{R} = \frac{2R}{AB}$ и, значит, $AB = \frac{4R^2}{a}$. Итак, $S = \frac{4R^2}{a} \cdot 2R = \frac{8R^3}{a}$.

Ответ: $\frac{8R^3}{a}$.

1.66. Сначала найдем сторону $AB = 2r$ (рис. 1.52). Пусть $ED = x$. Тогда, используя равенство $AB + CD = BC + AD$, получим

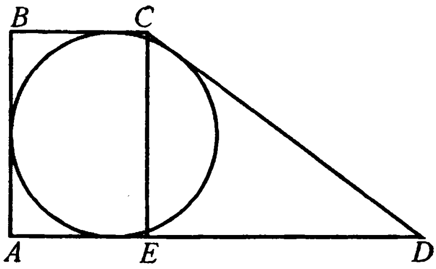


Рис. 1.52

$2r+CD=\frac{4r}{3}+\frac{4r}{3}+x$, откуда $CD=\frac{2r}{3}+x$. В ΔCED имеем $CD^2 =$ $= CE^2 + ED^2$, или $\left(\frac{2r}{3}+x\right)^2=4r^2+x^2$, откуда $x=\frac{8r}{3}$. Итак, $CD=\frac{10r}{3}$, $AD=\frac{12r}{3}=4r$.

Ответ: $2r$, $\frac{4r}{3}$, $\frac{10r}{3}$ и $4r$.

1.67. В силу условия, $\angle BOC = 45°$ и, следовательно, $BC=OC=\frac{R}{\sqrt{2}}$, $AC=R-\frac{R}{\sqrt{2}}=\frac{R(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$ (рис. 1.53).

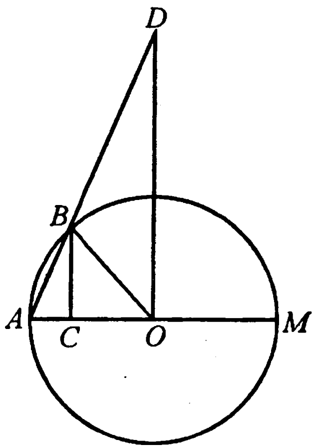


Рис. 1.53

Так как $\Delta ABC \sim \Delta ADO$, то $\frac{DO}{BC}=\frac{AO}{AC}$, откуда $DO=\frac{AO\cdot BC}{AC}=\frac{R}{\sqrt{2}-1}=R(\sqrt{2}+1)$. Находим площадь трапеции:

$$S=\frac{1}{2}(DO+BC)OC=\frac{1}{2}\left(R(\sqrt{2}+1)+\frac{R}{\sqrt{2}}\right)\frac{R}{\sqrt{2}}=\frac{R^2(3+\sqrt{2})}{4}.$$

Ответ: $0{,}25R^2(3+\sqrt{2})$.

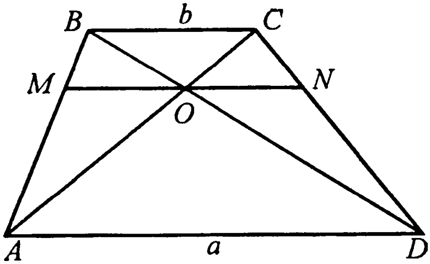


Рис. 1.54

1.68. Пусть $AD = a$, $BC = b$ (рис. 1.54). Так как $\Delta MBO \sim \Delta ABD$, то $\dfrac{MO}{a} = \dfrac{BO}{BD}$, т. е. $MO = a \cdot \dfrac{BO}{BD}$. Аналогично, $\Delta OND \sim \Delta BCD$, откуда $\dfrac{ON}{b} = \dfrac{OD}{BD}$, т. е. $ON = b \cdot \dfrac{OD}{BD}$.

Тогда

$$MN = MO + ON = \frac{a \cdot BO + b \cdot OD}{BD} = \frac{2a \cdot BO}{BD},$$

поскольку $\Delta AOD \sim \Delta BOC$ и , значит, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{OD}{BO}$, т. е. $a \cdot BO = b \cdot OD$. Учитывая, что $BD = BO + OD$, окончательно находим

$$MN = \frac{2a \cdot BO}{BO + OD} = \frac{2a}{1 + \frac{OD}{BO}} = \frac{2a}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

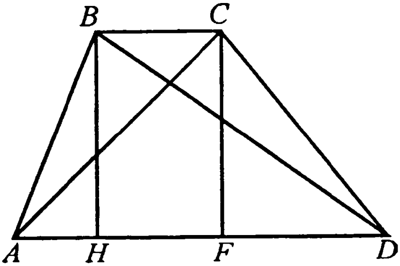


Рис. 1.55

1.69. Проведем $BH \perp AD$ и $CF \perp AD$ (рис. 1.55). Пусть $AH = x$; тогда $AF = 8 + x$, $DH = 24 - x$. Учитывая, что $BH = CF$, в ΔAFC и ΔBHD имеем

$$AC^2 - AF^2 = BD^2 - DH^2,$$

или

$$13^2 - (8+x)^2 = (5\sqrt{17})^2 - (24-x)^2,$$

откуда $64x = 256$, т. е. $x = 4$ (см).

Тогда $CF = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (см). Следовательно,

$S = \frac{1}{2}(24+8)\cdot 5 = 80$ (см²).

Ответ: 80 см².

1.70. Искомая площадь $S = 12S_{\Delta AOC}$, где OA и OC — радиусы окружности, описанной около квадрата и двенадцатиугольника (рис. 1.56). Так как сторона квадрата равна a, то $OA = OC = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Имеем

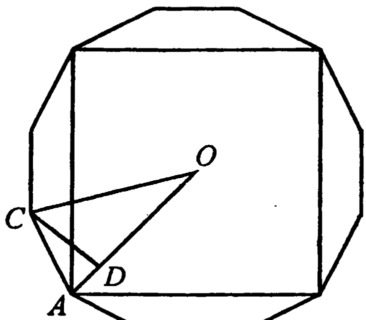


Рис. 1.56

$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}OA \cdot CD$, где $CD \perp OA$. Но $CD = \frac{1}{2}OC$, поскольку $\angle AOC = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$. Таким образом,

$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{8}, \text{ т. е. } S = \frac{3a^2}{2}.$$

Ответ: 1,5 a^2.

Глава 2

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1°. ***Произвольная призма*** (l — боковое ребро; P — периметр основания; S — площадь основания; H — высота; $P_{сеч}$ — периметр перпендикулярного сечения; $S_{сеч}$ — площадь перпендикулярного сечения; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; V — объем):

$$S_{бок} = P_{сеч}l; \tag{2.1}$$

$$V = SH; \tag{2.2}$$

$$V = S_{сеч}l. \tag{2.3}$$

2°. ***Прямая призма:***

$$S_{бок} = Pl. \tag{2.4}$$

3°. ***Прямоугольный параллелепипед*** (a, b, c — его измерения; d — диагональ):

$$S_{бок} = PH; \tag{2.5}$$

$$V = abc; \tag{2.6}$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2. \tag{2.7}$$

4°. ***Куб*** (a — ребро):

$$V = a^3; \tag{2.8}$$

$$d = a\sqrt{3}. \tag{2.9}$$

5°. ***Произвольная пирамида*** (S — площадь основания; H — высота; V — объем):

$$V = \frac{1}{3}SH. \tag{2.10}$$

6°. ***Правильная пирамида*** (P — периметр основания; l — апофема; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности):

$$S_{бок} = \frac{1}{2}Pl; \qquad (2.11)$$

$$V = \frac{1}{3}SH. \qquad (2.12)$$

7°. ***Произвольная усеченная пирамида*** (S_1 и S_2 — площади оснований; h — высота; V — объем):

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}). \qquad (2.13)$$

8°. ***Правильная усеченная пирамида*** (P_1 и P_2 — периметры оснований; l — апофема; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности):

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l. \qquad (2.14)$$

9°. ***Цилиндр*** (R — радиус основания; H — высота; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; V — объем):

$$S_{бок} = 2\pi RH; \qquad (2.15)$$

$$V = \pi R^2 H. \qquad (2.16)$$

10°. ***Конус*** (R — радиус основания; H — высота; l — образующая; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; V — объем):

$$S_{бок} = \pi Rl; \qquad (2.17)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \qquad (2.18)$$

11°. ***Шар, сфера*** (R — радиус шара; S — площадь сферической поверхности; V — объем):

$$S = 4\pi R^2; \tag{2.19}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{2.20}$$

12°. ***Шаровой сегмент*** (R — радиус шара; h — высота сегмента; S — площадь сферической поверхности сегмента; V — объем):

$$S = 2\pi Rh; \tag{2.21}$$

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right). \tag{2.22}$$

13°. ***Шаровой сектор*** (R — радиус шара; h — высота сегмента; V — объем):

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h. \tag{2.23}$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ

(Доказательства этих свойств см. в книге II двухтомного «Сборника» на с. 38, 39).

1°. *Пусть в пирамиде выполняется одно из следующих двух условий:* а) *все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы*; б) *длины всех боковых ребер равны. Тогда вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды* (*эта же точка служит точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам основания пирамиды*).

2°. *Пусть в пирамиде выолняется одно из следующих условий:* а) *все боковые грани образуют с основанием равные углы*; б) *длины всех апофем боковых граней равны. Тогда вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пира-*

миды (эта же точка служит точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды).

3°. *Если в наклонной призме боковое ребро A_1B_1 составляет равные углы со сторонами основания, образующими вершину A_1, то основание O высоты B_1O лежит на биссектрисе угла A_1.*

Это же утверждение можно сформулировать так: *если в трехгранном угле два острых плоских угла равны, то проекция их общего ребра на плоскость третьего плоского ребра является его биссектрисой.*

4°. *Если высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот треугольника, лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны.* Справедливо и обратное утверждение.

5°. *Если SO — высота пирамиды $SABC$ и $SA \perp BC$, то плоскость $SAO \perp BC$.*

Группа А

2.1. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c, и острым углом 30°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найти объем пирамиды.

2.2. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами a, a и b. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Определить объем пирамиды.

2.3. Найти объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна h, а плоские углы при вершине — прямые.

2.4. Основание четырехугольной пирамиды — прямоугольник с диагональю, равной b, и углом 60° между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с плоскостью основания угол 45°. Найти объем пирамиды.

2.5. Найти боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен 90°, а площадь основания равна S.

2.6. Центр верхнего основания куба с ребром, равным a, соединен с серединами сторон нижнего основания, которые также соединены в последовательном порядке. Вычислить полную поверхность полученной пирамиды.

2.7. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при основании равен 60°. Найти полную поверхность пирамиды.

2.8. В основании пирамиды лежит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом 45°. Среднее по величине боковое ребро равно l. Найти объем и полную поверхность пирамиды.

2.9. В правильном тетраэдре $SABC$ построено сечение его плоскостью, проходящей через ребро AC и точку K, принадлежащую ребру SB, причем $BK : KS = 2:1$. Найти объем отсеченной пирамиды $KABC$, если ребро тетраэдра равно a.

2.10. Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 18 см, а длины сторон оснований 14 и 10 см.

2.11. Найти объем куба, если расстояние от его диагонали до непересекающегося с ней ребра равно d.

2.12. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся как $m:n$, а диагональное сечение представляет собой квадрат с площадью, равной Q. Определить объем параллелепипеда.

2.13. Из медной болванки, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда размерами 80×20×5 см, прокатывается лист толщиной в 1 мм. Определить площадь этого листа.

2.14. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площадь которого равна Q. Площади диагональных сечений равны S_1 и S_2. Определить объем и боковую поверхность параллелепипеда.

2.15. Найти боковую поверхность правильной треугольной призмы с высотой h, если прямая, проходящая через центр верхнего основания и середину стороны нижнего основания, наклонена к плоскости основания под углом 60°.

2.16. Найти объем наклонной треугольной призмы, основанием которой служит равносторонний треугольник со стороной a, если боковое ребро призмы равно стороне основания и наклонено к плоскости основания под углом 60°.

2.17. Основанием прямой призмы служит ромб. Площади диагональных сечений этой призмы равны P и Q. Найти боковую поверхность призмы.

2.18. Правильная шестиугольная призма, боковые ребра которой равны 3 см, рассечена диагональной плоскостью на две равные четырехугольные призмы. Определить объем шестиугольной призмы, если боковая поверхность четырехугольной призмы равна 30 см^2.

2.19. Боковая поверхность конуса развернута на плоскости в сектор, центральный угол которого содержит 120°, а площадь равна S. Найти объем конуса.

2.20. Доказать, что если два равных конуса имеют общую высоту и параллельные основания, то объем их общей части составляет $\frac{1}{4}$ объема каждого из них.

2.21. Высота цилиндра равна H, радиус его основания равен R. В цилиндр помещена пирамида, высота которой совпадает с образующей AA_1 цилиндра, а основанием служит равнобедренный треугольник ABC ($AB=AC$), вписанный в основание цилиндра. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если $\angle A = 120°$.

2.22. Металлический шар радиуса R переплавлен в конус, боковая поверхность которого в 3 раза больше площади основания. Вычислить высоту конуса.

2.23. Конус и полушар имеют общее основание, радиус которого равен R. Найти боковую поверхность конуса, если его объем равен объему полушара.

2.24. Равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3 см и острым углом 60° вращается вокруг меньшего основания. Вычислить поверхность и объем полученной фигуры вращения.

2.25. Ромб вращается вокруг своей большей диагонали, а затем вокруг меньшей диагонали. Доказать, что отношение объемов полученных фигур вращения равно отношению площадей их поверхностей.

2.26. Около конуса с радиусом основания R описана произвольная пирамида, у которой периметр основания равен $2p$. Определить отношение объемов и отношение боковых поверхностей конуса и пирамиды.

2.27. В шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания. Найти отношение полной поверхности конуса к поверхности шара.

2.28. Найти отношение поверхности и объема шара соответственно к поверхности и объему вписанного куба.

Группа Б

2.29. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в 3 раза больше площади основания. Площадь круга, вписанного в основание, численно равна радиусу этого круга. Найти объем пирамиды.

2.30. Найти объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен 90°, а расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно d.

2.31. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a. Через одну из сторон основания проведена плоскость, перпендикулярная противоположному боковому ребру и делящая это ребро в отношении $m : n$, считая от вершины основания. Определить полную поверхность пирамиды.

2.32. Центры граней правильного тетраэдра служат вершинами нового тетраэдра. Найти отношение их поверхностей и отношение их объемов.

2.33. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 120°. Найти боковую поверхность пирамиды, если площадь ее диагонального сечения равна S.

2.34. Основанием пирамиды служит ромб с диагоналями d_1 и d_2. Высота пирамиды проходит через вершину острого угла ромба. Площадь диагонального сечения, проведенного через меньшую диагональ, равна Q. Вычислить объем пирамиды при условии, что $d_1 > d_2$.

2.35. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 10 и 8 м, а одна диагоналей равна 6 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 4 м. Определить полную поверхность пирамиды.

2.36. Основанием пирамиды служит параллелограмм $ABCD$, имеющий площадь m^2 и такой, что $BD \perp AD$; двугранные углы при ребрах AD и BC равны 45°, а при ребрах AB и CD равны 60°. Найти боковую поверхность и объем пирамиды.

2.37. Основанием пирамиды служит правильный шестиугольник со стороной, равной a. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания. Определить полную поверхность пирамиды.

2.38. Через медиану BE основания ABC пирамиды $ABCD$ и середину F ребра DC проведена плоскость. Найти объем фигуры $ADBFE$, если объем пирамиды $ABCD$ равен 40 см^3.

2.39. В треугольной усеченной пирамиде высота равна 10 м, стороны одного основания — 27, 29 и 52 м, а периметр другого основания равен 72 м. Определить объем усеченной пирамиды.

2.40. В треугольной усеченной пирамиде через сторону верхнего основания проведена плоскость параллельно противоположному боковому ребру. В каком отношении разделился объем усеченной пирамиды, если соответственные стороны оснований относятся как 1 : 2?

2.41. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 2 и 1 см, а высота 3 см. Через точку пересечения диагоналей пирамиды параллельно основаниям пирамиды проведена плоскость, делящая пирамиду на две части. Найти объем каждой из них.

2.42. Площади оснований усеченной пирамиды равны S_1 и S_2 ($S_1 < S_2$), а ее объем равен V. Определить объем полной пирамиды.

2.43. Найти расстояние между серединами двух скрещивающихся ребер куба, полная поверхность которого равна 36 см^2.

2.44. Площадь сечения куба, представляющего собой правильный шестиугольник, равна Q. Найти полную поверхность куба.

2.45. Через вершины A, C и D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, образующая с плоскостью основания двугранный угол 60°. Стороны основания равны 4 и 3 см. Найти объем параллелепипеда.

2.46. В наклонном параллелепипеде проекция бокового ребра на плоскость основания равна 5 дм, а высота равна 12 дм. Сечение, перпендикулярное боковому ребру, есть ромб с площадью 24 дм^2 и диагональю, равной 8 дм. Найти боковую поверхность и объем параллелепипеда.

2.47. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник ABC со стороной a. Вершина A_1 проецируется в центр нижнего основания, а ребро AA_1 наклонено к плоскости основания под углом 60°. Определить боковую поверхность призмы.

2.48. В наклонной треугольной призме расстояния боковых ребер друг от друга равны a, b и c. Боковое ребро равно l, высота призмы h. Определить полную поверхность призмы.

2.49. Объем правильной восьмиугольной призмы равен 8 м^3, а ее высота равна 2,2 м. Найти боковую поверхность призмы.

2.50. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c, и острым углом 30°. Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 45°. Определить объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью.

2.51. Плоскость, проведенная через вершину конуса, пересекает основание по хорде, длина которой равна радиусу этого основания. Определить отношение объемов полученных частей конуса.

2.52. Радиус основания конуса равен R, а угол развертки его боковой поверхности равен 90°. Определить объем конуса.

2.53. Треугольник со сторонами, равными a, b и c, вращается поочередно вокруг каждой из своих сторон. Найти отношение объемов полученных при этом тел.

2.54. Параллелограмм, периметр которого равен $2p$, вращается вокруг оси, перпендикулярной диагонали длиной d и проходящей через ее конец. Найти поверхность тела вращения.

2.55. Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной, равной a. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно b. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.

2.56. Вычислить поверхность шара, вписанного в треугольную пирамиду, все ребра которой равны a.

2.57. В шар радиуса R вписана правильная шестиугольная усеченная пирамида, у которой плоскость нижнего основания проходит через центр шара, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60°. Определить обьем пирамиды.

2.58. Около шара описан прямой параллелепипед, у которого диагонали основания равны a и b. Определить полную поверхность параллелепипеда.

2.59. Конус образован вращением прямоугольного треугольника площадью S вокруг одного из катетов. Найти объем конуса, если длина окружности, описанной при вращении этого треугольника точкой пересечения его медиан, равна L.

2.60. Определить боковую поверхность и объем усеченного конуса с образующей l, описанного около шара радиуса r.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ

2.1. По условию, $\angle ACB = 90°$ (рис. 2.1); следовательно, $BC = \frac{c}{2}$, $AC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$, откуда $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{c^2\sqrt{3}}{8}$. Проведем SO так, чтобы $AO = OB$. Тогда O — центр описанной около ΔABC окружности, SO — высота пирамиды (см. «Дополнительные соотношения между элементами призмы и пирамиды», п. 1°). В ΔASO имеем $\angle SAO =$

$= 45°$ и, значит, $SO = AO = \frac{c}{2}$. Окончательно получим

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot SO = \frac{c^3\sqrt{3}}{48}.$$

Ответ: $\frac{c^3\sqrt{3}}{48}$.

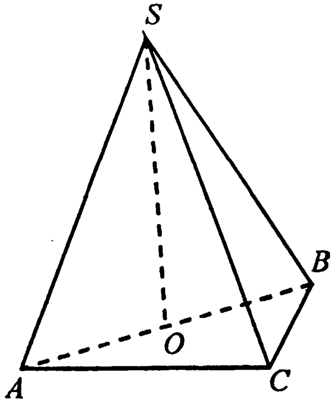


Рис. 2.1

2.2. Согласно условию, $AB = BC = a$ (рис. 2.2), поэтому

$$BH = a^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}.$$

Отсюда

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{4} b\sqrt{4a^2 - b^2}.$$

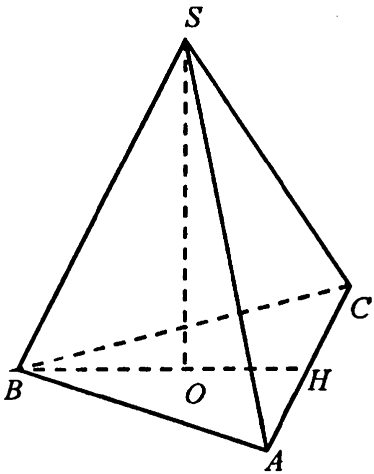


Рис. 2.2

Проведем высоту SO. Поскольку все ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, точка O — центр описанной около ΔABC окружности. Пусть радиус этой окружности равен R. Тогда

$OB = R = \cdot\frac{a^2 b}{4S_{\text{осн}}} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}} \cdot$ В ΔSOB имеем $OB = \frac{SB}{2}$; значит, $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{4OB^2 - OB^2} = OB\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$. Окончательно имеем

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot SO=\frac{1}{3}\cdot\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{4}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2-b^2}}=\frac{a^2b\sqrt{3}}{12}.$$

Ответ: $\frac{a^2b\sqrt{3}}{12}$.

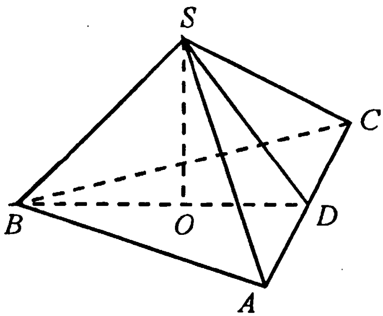


Рис. 2.3

2.3. Проведем $BD\perp AC$ (рис. 2.3). Обозначим сторону основания через a. Так как пирамида правильная, то $OD=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, $AD=DC=\frac{a}{2}$, $S_{осн}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Выразим a через h. В Δ SAC имеем $SA=SC$, $\angle CSA=90°$, откуда $\angle ASD==45°$ и $SD=AD=\frac{a}{2}$. Тогда

$$h=SO=\sqrt{SD^2-OD^2=}\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{3a^2}{36}}=\frac{a}{\sqrt{6}}$$

и, следовательно, $a=h\sqrt{6}$. Итак,

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}h=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{6h^2\sqrt{3}}{4}\cdot h=\frac{h^3\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{h^3\sqrt{3}}{2}$.

2.4. По условию, $BD=b$, $\angle AOB==60°$ (рис.2.4); отсюда легко найти, что $AB=\frac{b}{2}$, $AD=\frac{b\sqrt{3}}{2}$. Значит, $S_{осн}=AB\cdot AD=\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$. Так как $\angle SAO==\angle SBO=\angle SCO=\angle SDO=45°$, то SO — высота пирамиды и $SO = \dfrac{b}{2}$. Итак,

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot SO = \frac{b^3\sqrt{3}}{24}.$$

Ответ: $\dfrac{b^3\sqrt{3}}{24}$.

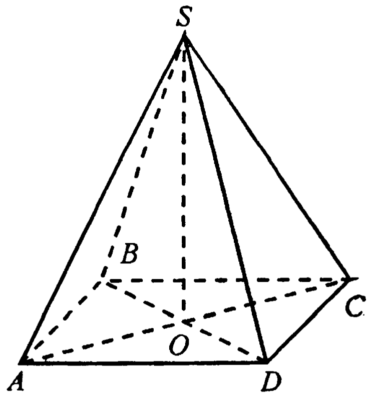


Рис. 2.4

2.5. Пусть a — сторона основания; тогда $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, откуда $a = \dfrac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$. Искомая боковая поверхность выражается так: $S_{\text{бок}} = 3 \cdot \dfrac{1}{2} a \cdot SD$ (рис. 2.5). Но $SD = DC = \dfrac{a}{2}$, и, следовательно,

$$S_{\text{бок}} = \frac{3a^2}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4S}{\sqrt{3}} = S\sqrt{3}.$$

Ответ: $S\sqrt{3}$.

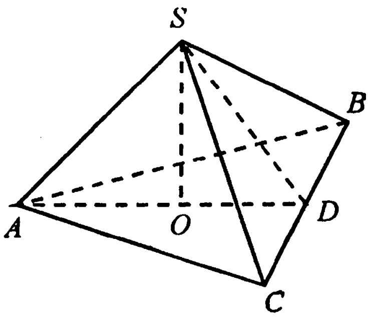


Рис. 2.5

2.6. Так как ребро куба равно a, то сторона основания пирамиды $SABCD$ равна $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (рис. 2.6). Учитывая, что $OK = \dfrac{1}{2} AD = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, найдем апофему пирамиды:

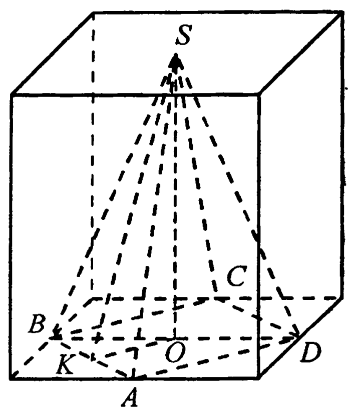


Рис. 2.6

$$SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{8}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Значит,

$$S_{\text{бок}} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} = \frac{3a^2}{2},\ S_{\text{поля}} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + S_{\text{бок}} = 2a^2.$$

Ответ: $2a^2$.

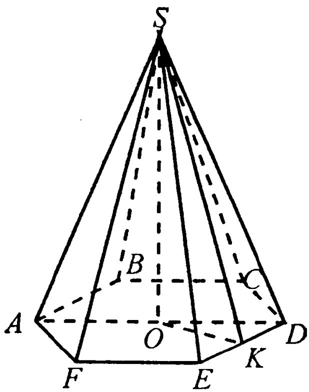


Рис. 2.7

2.7. Так как $\angle SKO = 60°$ (рис. 2.7), то $OK = \frac{1}{2}SK = \frac{h}{2}$. Основание пирамиды — правильный шестиугольник, поэтому $\angle KOD = 30°$ и $KD = \frac{1}{2}OD$. Тогда $OK^2 = OD^2 - KD^2 = 4KD^2 - KD^2 = 3KD^2$, т.е. $KD = \frac{h\sqrt{3}}{6}$, $DE = 2KD = \frac{h\sqrt{3}}{3}$. Таким образом,

$$S_{\text{осн}} = \frac{6DE^2\sqrt{3}}{4} = \frac{h^2\sqrt{3}}{2},\ S_{\text{бок}} = 3DE \cdot h = h^2\sqrt{3}.$$

Окончательно находим $S_{\text{поля}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \frac{3h^2\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $1{,}5h^2\sqrt{3}$.

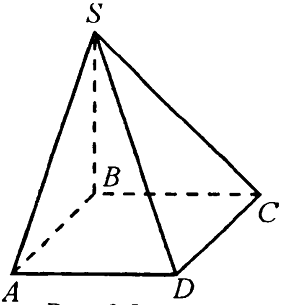


Рис. 2.8

2.8. По условию, $SC = l$, $\angle SBC = 90°$, $\angle SCB = 45°$ (рис. 2.8). откуда $SB = BC = \frac{l}{\sqrt{2}}$.

Находим $V = \frac{1}{3}BC^2 \cdot SB = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$. Полная поверхность выразится так: $S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + 2S_{\Delta SAB} + 2S_{\Delta SAD}$, поскольку $S_{\Delta SAB} = S_{\Delta SBC}$, $S_{\Delta SAD} = S_{\Delta SCD}$. Но

$$S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{l^2}{4},\ S_{\Delta SAD} = \frac{1}{2}AD\cdot SA = \frac{1}{2}\cdot\frac{l}{\sqrt{2}}\cdot l = \frac{l^2\sqrt{2}}{4}.$$

Итак,

$$S_{\text{полн}} = \frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{2} + \frac{l^2\sqrt{2}}{2} = \frac{l^2(2+\sqrt{2})}{2}.$$

Ответ: $\frac{l^3\sqrt{2}}{12}$; $0{,}5l^2(2+\sqrt{2})$.

2.9. Искомый объем найдем по формуле $V_{KABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot KN$ (рис.2.9.), где $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Так как $SO \| KN$, то $BN : NO = BK : KS = 2:1$, откуда $BN = \frac{2}{3}BO$. Но $BO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, т.е. $BN = \frac{2a\sqrt{3}}{9}$ и, значит,

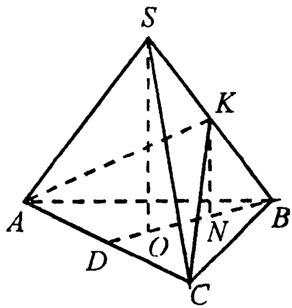


Рис. 2.9

$$KN = \sqrt{BK^2 - BN^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{9} - \frac{4a^2}{27}} = \frac{2a\sqrt{6}}{9}.$$

Окончательно получим

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2a\sqrt{6}}{9} = \frac{a^3\sqrt{2}}{18}.$$

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$.

2.10. Искомый объем выражается формулой $V = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 +$

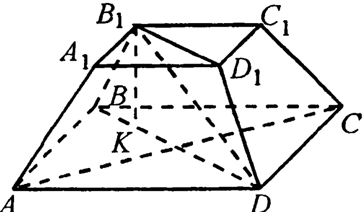


Рис. 2.10

$+\sqrt{S_1S_2})$, где $S_1 = 196$ см^2, $S_2 = 100$ см^2. Найдем $h = B_1K$ (рис. 2.10).

Имеем $B_1K = \sqrt{B_1D^2 - KD^2}$. Так как BB_1D_1D — равнобедренная трапеция, то $BK = \frac{1}{2}(BD - B_1D_1) = \frac{1}{2}(14\sqrt{2} - 10\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ (см) и $KD = BD - BK = 12\sqrt{2}$ (см), т. е. $h = \sqrt{18^2 - (12\sqrt{2})^2} = 6$ (см). Итак,

$$V = \frac{6}{3}(196 + 100 + 140) = 872 \quad (\text{см}^3).$$

Ответ: 872 см^3.

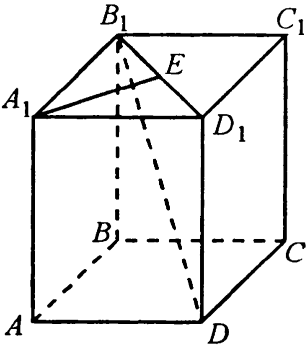


Рис. 2.11

2.11. Расстояние от ребра AA_1 до диагонали B_1D равно расстоянию от этого ребра до плоскости BB_1D_1D, т. е. длине отрезка A_1E (рис. 2.11). Пусть ребро куба равно a; тогда из ΔA_1ED_1 находим $2d^2 = a^2$, откуда $a = d\sqrt{2}$. Значит, $V = a^3 = 2d^3\sqrt{2}$.

Ответ: $2d^3\sqrt{2}$.

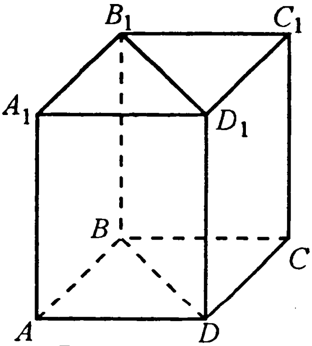


Рис. 2.12

2.12. Искомый объем $V = S_{осн}h$, где $S_{осн} = AB \cdot AD$ (рис.2.12), h — высота параллелепипеда. По условию, BB_1D_1D — квадрат и, значит, $h = \sqrt{Q}$. Найдем AB и AD. Так как $AB : AD = m : n$, то $AD = \frac{n}{m}AB$. В ΔABD имеем $AB^2 + AD^2 = BD^2$, т. е. $AB^2 + \frac{n^2}{m^2}AB^2 = Q$; следовательно, $AB = \frac{m\sqrt{Q}}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $AD = \frac{n\sqrt{Q}}{\sqrt{m^2+n^2}}$. Итак,

$$V = AB \cdot AD \cdot h = \frac{mnQ\sqrt{Q}}{m^2+n^2}.$$

Ответ: $\dfrac{mnQ\sqrt{Q}}{m^2+n^2}$.

2.13. Указание. Воспользоваться формулой $S = \dfrac{V}{h}$, где V — объем листа, h — его толщина.

Ответ: 8 м².

2.14. Имеем $V = S_{\text{осн}}h$, где $S_{\text{осн}} = Q$ (по условию); таким образом, нужно найти h. Так как $ABCD$ — ромб, то $S_{\text{осн}} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD$

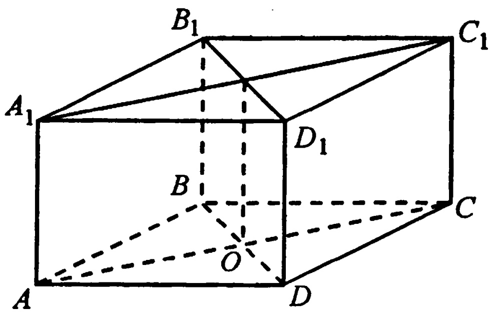


Рис. 2.13

(рис. 2.13); учитывая, что $AC \cdot h = S_1$, $BD \cdot h = S_2$, находим $AC = \dfrac{S_1}{h}$, $BD = \dfrac{S_2}{h}$. Отсюда получаем $2Q = \dfrac{S_1}{h} \cdot \dfrac{S_2}{h}$, т. е. $h = \sqrt{\dfrac{S_1 S_2}{2Q}}$. Тогда $V = \sqrt{\dfrac{S_1 S_2 Q}{2}}$. Далее, из ΔCOD следует, что

$$CD^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = \left(\frac{S_1}{2h}\right)^2 + \left(\frac{S_2}{2h}\right)^2 = \frac{S_1^{\,2} + S_2^{\,2}}{4h^2}.$$

Окончательно получим

$$S_{\text{бок}} = 4CD \cdot h = 4h \cdot \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{2h} = 2\sqrt{S_1^2 + S_2^2}\,.$$

Ответ: $\sqrt{\dfrac{S_1 S_2 Q}{2}}$; $2\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$.

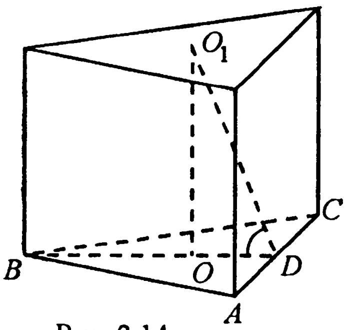


Рис. 2.14

2.15. Обозначим сторону основания через a. Тогда $S_{\text{бок}} = 3ah$. Проведем высоту O_1O (рис. 2.14). В ΔDOO_1 имеем $\angle OO_1D = 30°$, поэтому $O_1D = 2OD$ и $4OD^2 - OD^2 = h^2$, откуда $OD = \dfrac{h\sqrt{3}}{3}$. С другой стороны, $OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ и, следовательно, $a = 2h$.

Итак, $S_{\text{бок}} = 3 \cdot 2h \cdot h = 6h^2$.

Ответ: $6h^2$.

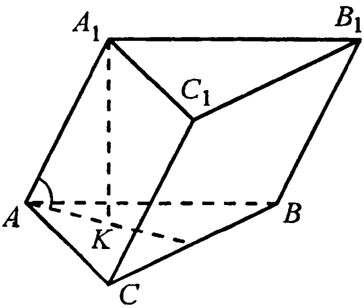


Рис. 2.15

2.16. Проведем A_1K перпендикулярно плоскости ABC (рис. 2. 15); тогда $V = S_{\Delta ABC} \cdot A_1K$, где $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Учитывая, что $\angle A_1AK = 60°$, находим $A_1K = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Значит,

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{8}.$$

Ответ: $0{,}375\, a^3$.

2.17. Пусть высота призмы равна h. Так как $ABCD$ — ромб, то $S_{бок} = 4AB \cdot h$ (рис. 2.16). Далее, $AC \perp BD$ (как диагонали ромба) и, следовательно, $AB = \sqrt{\frac{BD^2}{4} + \frac{AC^2}{4}} = \frac{\sqrt{BD^2 + AC^2}}{2}$. Тогда $S_{бок} = 2\sqrt{BD^2 + AC^2} \cdot h = 2\sqrt{BD^2 \cdot h^2 + AC^2 \cdot h^2}$. Но $BD \cdot h = P$, $AC \cdot h = = Q$ (по условию). Итак, $S_{бок} = 2\sqrt{P^2 + Q^2}$.

Ответ: $2\sqrt{P^2 + Q^2}$.

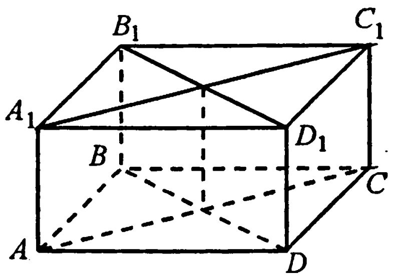


Рис. 2.16

2.18. Пусть $AB = a$ (рис 2.17); тогда искомый объем $V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$, где $h =$ $= 3$ см — высота призмы. Остается найти a. По условию, боковая поверхность призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 30 см². Но $S_{бок} = (3AB + AD)h$; здесь $AD = 2a$ (как диаметр окружности, описанной около правильного шестиугольника). Следовательно, $5a \cdot 3 = 30$, откуда $a = 2$ (см).

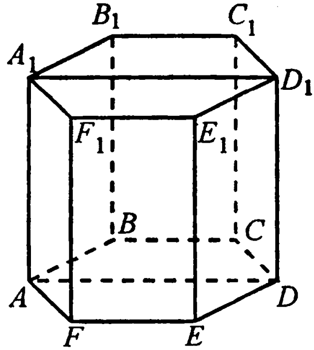


Рис. 2.17

Окончательно имеем

$$V = 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = 18\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: $18\sqrt{3}$ см³.

2.19. Пусть r — радиус основания конуса, а l — его образующая. Тогда площадь развертки $S = \frac{1}{2}l^2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi l^2}{3}$, откуда $l = \sqrt{\frac{3S}{\pi}}$.

Но $S = \pi r l = \pi r\sqrt{\frac{3S}{\pi}}$ и, следовательно, $r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$. Объем конуса найдем по формуле $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, где $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{\frac{3S}{\pi} - \frac{S}{3\pi}} = 2\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$.

Окончательно получим

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi S}{3\pi} \cdot 2\sqrt{\frac{2S}{3\pi}} = \frac{2S\sqrt{6\pi S}}{27\pi}.$$

Ответ: $\dfrac{2S\sqrt{6\pi S}}{27\pi}$.

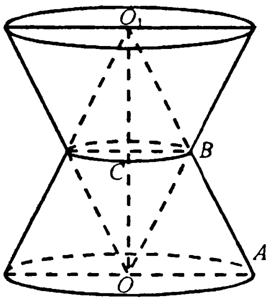


Рис. 2.18

2.20. Пусть радиус основания каждого из данных конусов равен R, а высота равна H (рис. 2.18). Тогда объем каждого конуса $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Общая часть состоит из двух конусов; ее объем $V_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 h$, где r — радиус основания, h — высота. Рассмотрим осевое сечение фигуры. Так как $\Delta O_1OA \sim \Delta O_1CB$, то $AO : BC = O_1O : O_1C$, или $R : r = H : h$. Но $h = \frac{H}{2}$, откуда следует, что $r = \frac{R}{2}$. Итак,

$$V_2=\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{R^2}{4}\cdot\frac{H}{2}=\frac{1}{12}\pi R^2H=\frac{1}{4}V_1.$$

2.21. Проведем $AD\perp BC$ и соединим точки A_1 и D (рис. 2.19). Согласно теореме о трех перпендикулярах, имеем $A_1D\perp BC$. Так как дуга CAB содержит 120°, а дуги AC и AB — по 60°, то $BC=R\sqrt{3}$, $AB = R$. В ΔABD имеем $AD=\frac{R}{2}$. Далее, из ΔAA_1D получим $A_1D=\sqrt{H^2+\frac{R^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{R^2+4H^2}$. Следовательно,

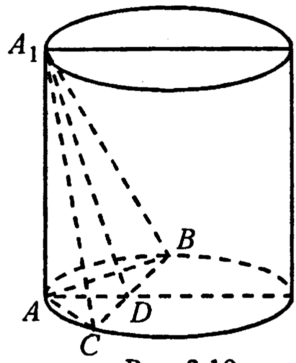


Рис. 2.19

$$S_{\Delta A_1AB}=\frac{1}{2}AB\cdot AA_1=\frac{1}{2}RH;$$

$$S_{\Delta A_1BC}=\frac{1}{2}BC\cdot A_1D=\frac{1}{2}R\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{R^2+4H^2}=\frac{1}{4}\sqrt{3R^2+12H^2}.$$

Окончательно находим

$$S_{бок}=2S_{\Delta A_1AB}+S_{\Delta A_1BC}=RH+\frac{1}{4}R\sqrt{3R^2+12H^2}=$$

$$=\frac{R}{4}(4H+\sqrt{3R^2+12H^2}).$$

Ответ: $0{,}25R(4H+\sqrt{3R^2+12H^2})$.

2.22. Указание. Воспользоваться тем, что объемы шара и конуса равны $\frac{4}{3}\pi R^3$, а также равенством $3\pi r^2=\pi rl$, где r — радиус основания конуса, а l — его образующая.

Ответ: $2R\sqrt[3]{4}$.

2.23. Так как объемы конуса и полушара равны, то $V=\frac{2}{3}\pi R^3$; с другой стороны, $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$, где h — высота конуса, т. е. $h = 2R$. Имеем $S_{бок}=\pi Rl$, где $l=\sqrt{R^2+h^2}=R\sqrt{5}$. Итак, $S_{бок}=\pi R^2\sqrt{5}$.

Ответ: $\pi R^2\sqrt{5}$.

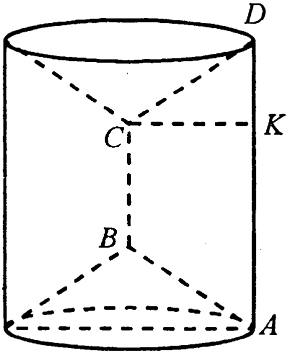


Рис. 2.20

2.24. Искомый объем $V = V_{цил} - 2V_{кон}$, а поверхность $S = S_{цил} + 2S_{кон}$, где $V_{цил}$, $V_{кон}$ и $S_{цил}$, $S_{кон}$ — объемы и боковые поверхности цилиндра и конуса соответственно (рис. 2.20). Имеем $V_{цил}=\pi r^2 h$, где $r = CK$, $h = AD = 3$ см.

Так как $DK=\frac{1}{2}(AD-BC)=\frac{1}{2}$ (см), а $CD = 2DK = 1$ (см), то

$$CK=\sqrt{CD^2-DK^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ (см).}$$

Тогда

$$V_{цил}=\pi\cdot\frac{3}{4}\cdot 3=\frac{9\pi}{4}\ (\text{см}^3),\quad V_{кон}=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{8}\ (\text{см}^3),$$

откуда $V=\frac{9\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=2\pi$ (см^3). Наконец, находим

$$S_{цил}=2\pi rh=2\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3=3\pi\sqrt{3}\ (\text{см}^2),$$

$$S_{кон}=\pi rl=\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\ (\text{см}^2),$$

откуда $S=3\pi\sqrt{3}+\pi\sqrt{3}=4\pi\sqrt{3}$ (см^2).

Ответ: $4\pi\sqrt{3}$ см^2; 2π см^3.

2.25. Пусть сторона ромба равна a, а его диагонали равны $2d_1$ и $2d_2$ (рис. 2.21). При вращении получается тело, состоящее из двух конусов. Обозначим объем и поверхность тела вращения вокруг диагонали AC через V_{AC} и S_{AC}, а вокруг диагонали BD — через V_{BD} и S_{BD}.

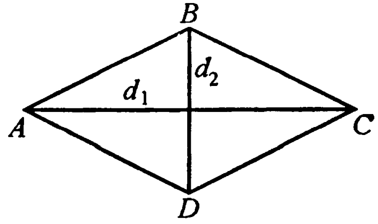


Рис. 2.21

Тогда $V_{AC} = \frac{2}{3}\pi d_1{}^2 d_2$, $S_{AC} = 2\pi a d_1$, $V_{BD} = \frac{2}{3}\pi d_2{}^2 d_1$, $S_{BD} = 2\pi a d_2$.

Итак,

$$\frac{V_{AC}}{V_{BD}} = \frac{\frac{2}{3}\pi d_1{}^2 d_2}{\frac{2}{3}\pi d_2{}^2 d_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{S_{AC}}{S_{BD}},$$

что и требовалось установить.

2.26. Пусть общая высота конуса и пирамиды равна H (рис. 2.22). Обозначим объемы конуса и пирамиды через V_1 и V_2, а их боковые поверхности — через S_1 и S_2; тогда $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, $S_1 = \pi R l$, где l — образующая конуса. Найдем V_2 и S_2. Так как периметр основания пирамиды равен $2p$, а основание конуса — вписанная в основание пирамиды окружность, то площадь основания пирамиды равна pR, откуда $V_2 = \frac{1}{3}pRH$, $S_2 = pl$ (высота любой грани равна l). Итак,

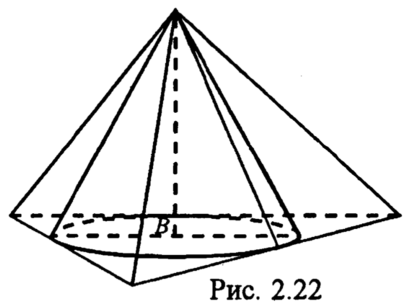


Рис. 2.22

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}\pi R^2 H : \frac{1}{3}pRH = \frac{\pi R}{p}, \quad \frac{S_1}{S_2} = \pi R l : pl = \frac{\pi R}{p}.$$

Ответ: $\frac{\pi R}{p}$ (в обоих случаях).

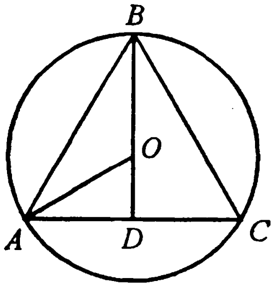


Рис. 2.23

2.27. Изобразим осевое сечение конуса, которое пройдет через центр шара. Так как диаметр основания конуса равен образующей, то в сечении получим правильный треугольник, вписанный в окружность (рис 2.23). Пусть радиус шара равен R: тогда

$AB = R\sqrt{3}$, $AD = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Обозначим полную поверхность конуса через S_1, а поверхность шара — через S_2. Имеем

$$S_1 = \pi\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot R\sqrt{3} + \pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\pi R^2,\ S_2 = 4\pi R^2,$$

откуда $S_1 : S_2 = 9 : 16$.

Ответ: 9 : 16.

2.28. Пусть радиус шара равен R, ребро куба равно a; тогда $R^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2}$, откуда $a = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. Обозначим объемы и поверхности шара и куба соответственно через V_1, V_2 и S_1, S_2. Имеем

$V_1 = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, $V_2 = a^3 = \dfrac{8R^3}{3\sqrt{3}}$, $S_1 = 4\pi R^2$, $S_2 = 6a^2 = 8R^2$, откуда

$$V_1 : V_2 = \pi\sqrt{3} : 2,\ S_1 : S_2 = \pi : 2.$$

Ответ: $\pi : 2$; $\pi\sqrt{3} : 2$.

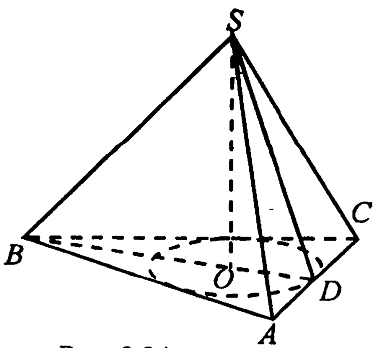


Рис. 2.24

2.29. Объем пирамиды $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot SO$ (рис. 2.24). Пусть сторона основания равна a, тогда $S_{\text{осн}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. По условию, $\pi OD^2 = OD$, или $OD = \frac{1}{\pi}$, откуда $\frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{\pi}$, т. е. $a = \frac{6}{\pi\sqrt{3}}$ и

$S_{\text{осн}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi^2}$. Учитывая, что $\frac{S_{\text{бок}}}{S_{\text{осн}}} = 3$, получим $S_{\text{бок}} = 3S_{\text{осн}} = \frac{9\sqrt{3}}{\pi^2}$.

С другой стороны, $S_{\text{бок}} = 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot SD = \frac{9SD}{\pi\sqrt{3}}$ и, следовательно,

$\frac{9\sqrt{3}}{\pi^2} = \frac{9SD}{\pi\sqrt{3}}$, т. е. $SD = \frac{3}{\pi}$. Из ΔSOD находим $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} =$

$= \sqrt{\frac{9}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Итак, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = \frac{2\sqrt{6}}{\pi^3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{6}}{\pi^3}$.

2.30. По условию, $BS \perp SA$ и $BS \perp SC$ (рис. 2.25), т. е. BS — перпендикуляр к грани SAC и $SD = d$. Следовательно, искомый объем $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ACS} \cdot BS$. В ΔSAD имеем $\angle SDA = 90°$, $\angle ASD = 45°$, откуда $AD = SD = d$ и $S_{\Delta ACS} = d^2$. Далее, в ΔBSD имеем $\angle BSD = 90°$, $BD = 2d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = d\sqrt{3}$, откуда

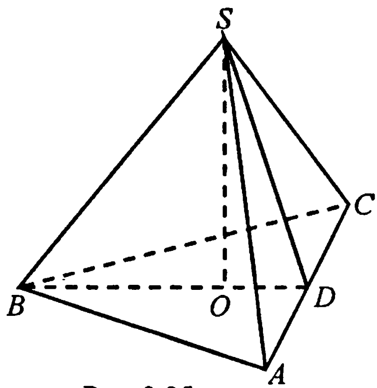


Рис. 2.25

$BS = \sqrt{BD^2 - SD^2} = \sqrt{3d^2 - d^2} = d\sqrt{2}$. Окончательно находим

$$V = \frac{1}{3} d^2 \cdot d\sqrt{2} = \frac{1}{3} d^3 \sqrt{2}.$$

Ответ: $\frac{d^3\sqrt{2}}{3}$.

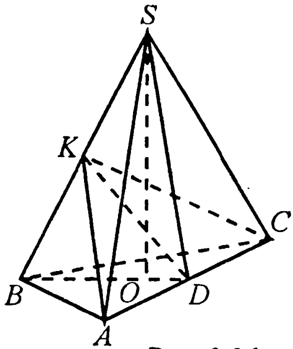


Рис. 2.26

2.31. Полную поверхность пирамиды найдем по формуле $S_{\text{полн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot SD$ (рис. 2.26). Так как $\Delta BOS \sim \Delta BKD$ (прямоугольные треугольники, имеющие общий угол), то

$\frac{BD}{BS} = \frac{BK}{BO}$, или $\frac{a\sqrt{3}}{2} : BS = BK : \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

т. е. $a^2 = 2BK \cdot BS$. По условию, $\frac{BK}{KS} = \frac{m}{n}$, откуда

$$KS = \frac{n}{m}BK,\ BS = BK + KS = \frac{m+n}{m}BK,\ BK = \frac{m}{m+n}BS.$$

Значит, $a^2 = \frac{2m}{m+n}BS^2$, т. е. $BS^2 = \frac{(m+n)a^2}{2m}$. В ΔSOD имеем $SD^2 = SO^2 + OD^2$, отсюда, учитывая, что $SO^2 = BS^2 - BO^2$, находим

$$SD^2 = \frac{(m+n)a^2}{2m} - \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{12} = \frac{3ma^2 + 6na^2}{12m} = \frac{(m+2n)a^2}{4m}.$$

Итак,

$$S_{\text{полн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{\frac{m+2n}{m}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \sqrt{\frac{3(m+2n)}{m}}\right).$$

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1 + \sqrt{\frac{3(m+2n)}{m}}\right)$.

2.32. Обозначим объемы и поверхности данного и нового тетраэдров соответственно через V_1, S_1 и V_2, S_2. Пусть $AB = a$ (рис. 2.27); тогда $DK = \frac{a}{2}$. Так как $\Delta DSK \sim \Delta MSN$, то $DK : MN = SD : SM = \frac{3}{2}$, откуда $MN = \frac{a}{3}$. Окончательно получаем

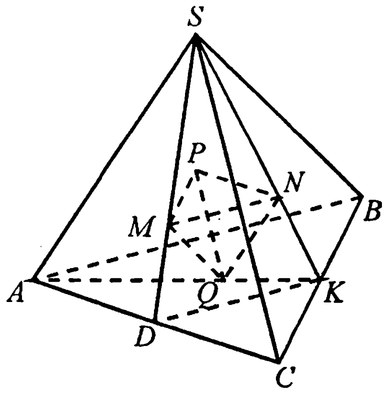


Рис. 2.27

$$V_1 : V_2 = a^3 : \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 27:1,\ S_1 : S_2 = a^2 : \left(\frac{a}{3}\right)^2 = 9:1.$$

Ответ: 9 : 1; 27 : 1.

2.33. Искомая боковая поверхность, выражается так: $S_{\text{бок}} = 2AB \cdot SM$ (рис. 2.28). Пусть $AB = a$, $SO = h$; найдем соотношение между a и h. Проведем $AK \perp SB$, $CK \perp SB$; так как $\angle AKC = 120°$, то $\angle AKO = 60°$ и из ΔAKO получим

$$OK = AO \operatorname{ctg} 60° = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Далее, в прямоугольном треугольнике SOB имеем $OK \perp SB$, поэтому $SB : SO = SO : SK$, т. е. $h^2 = SB \cdot SK$.

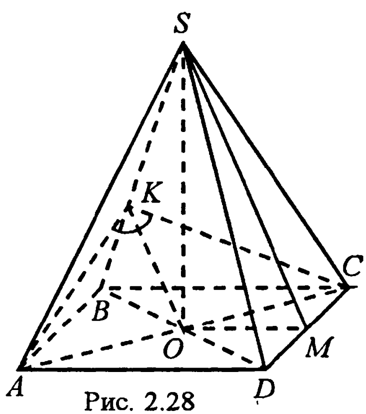


Рис. 2.28

Из ΔSKO следует, что $SK^2 = SO^2 - OK^2 = h^2 - \dfrac{a^2}{6}$, откуда

$SB^2 = \dfrac{6h^4}{6h^2 - a^2}$. С другой стороны, из ΔSOB находим

$SB^2 = h^2 + \frac{a^2}{2}$. Таким образом,

$$h^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{6h^4}{6h^2 - a^2}, \text{ или } 12h^4 - 2a^2h^2 + 6a^2h^2 - a^4 = 12h^4,$$

откуда $h = \frac{a}{2}$ и $SM = \frac{a}{\sqrt{2}}$. По условию, $\frac{1}{2}AC \cdot SO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot h = S$, т. е. $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. Учитывая, что $S_{бок} = 2AB \cdot SM = 2a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = a^2\sqrt{2}$, окончательно получим $S_{бок} = 4S$.

Ответ: $4S$.

2.34. Искомый объем $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot SA$, где $S_{осн} = \frac{1}{2}d_1 d_2$ (рис. 2.29). В ΔSAO имеем $SA = \sqrt{SO^2 - AO^2}$, причем $AO = \frac{d_1}{2}$, а

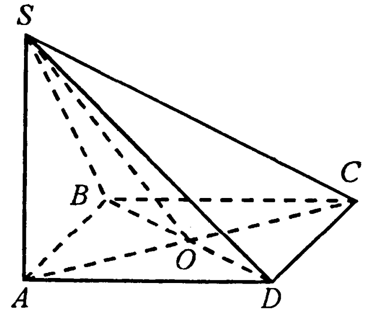


Рис. 2.29

$SO = \frac{2Q}{d_2}$, так как по условию $\frac{1}{2}d_2 \cdot SO = Q$. Следовательно,

$$SA = \sqrt{\frac{4Q^2}{d_2{}^2} - \frac{d_1{}^2}{4}} = \frac{\sqrt{16Q^2 - d_1{}^2 d_2{}^2}}{2d_2}.$$

Окончательно получим

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}d_1d_2\cdot\frac{\sqrt{16Q^2-d_1{}^2d_2{}^2}}{2d_2}=\frac{d_1}{12}\sqrt{16Q^2-d_1{}^2d_2{}^2}\,.$$

Ответ: $\frac{d_1}{12}\sqrt{16Q^2-d_1{}^2d_2{}^2}$

2.35. По условию, $AB =$ $= 8$ м, $AD = 10$ м, $BD = 6$ м (рис. 2.30). Из равенства $6^2 + 8^2 = 10^2$ следует, что ΔABD — прямоугольный и $S_{\text{осн}}=8\cdot 6=48$ (м^2). Так как $BO\perp AB$, то и $SB\perp AB$, а значит,

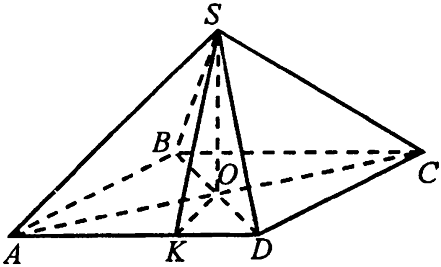


Рис. 2.30

$$S_{\Delta ASB}=\frac{1}{2}AB\cdot BS=\frac{1}{2}AB\sqrt{SO^2+OB^2}=\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{4^2+3^2}=20 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Проведем $SK\perp AD$; тогда $S_{\Delta ASD}=\frac{1}{2}AD\cdot SK=\frac{1}{2}AD\sqrt{SO^2+OK^2}$.

Для нахождения OK воспользуемся тем, что $\Delta OKD\sim\Delta ABD$; имеем $OK : AB = OD : AD$, откуда $OK=\frac{8\cdot 3}{10}=\frac{12}{5}$ (м). Следовательно,

$$SK=\sqrt{16+\frac{144}{25}}=\frac{4\sqrt{34}}{5} \text{ (м) и } S_{\Delta ASD}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{4\sqrt{34}}{5}=4\sqrt{34} \text{ (м}^2\text{)}.$$

Итак,

$$S_{\text{полн}}=48+2\cdot 20+2\cdot 4\sqrt{34}=8(11+\sqrt{34}) \text{ (м}^2\text{)}.$$

Ответ: $8(11+\sqrt{34})$ м^2.

2.36. Обозначим AD через x, а BD — через y (рис. 2.31). Тогда $S_{\text{осн}}=xy=m^2$. Так как $BD\perp AD$, то и $SD\perp AD$, т. е. $\angle SDB$ — плоский угол двугранного угла и, по условию, $\angle SDB = 45°$. Через точку O проведем $MK\perp AB$; имеем $\angle SMK = \angle SKM = 60°$. Из ΔSOD следует,

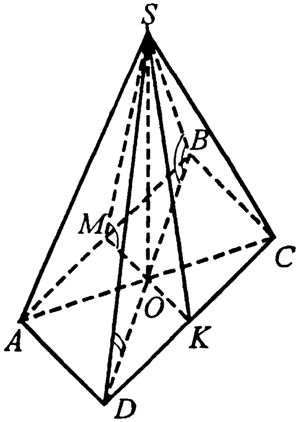


Рис. 2.31

что $SO = OD = \dfrac{y}{2}$, а из ΔSOM — что $OM = \dfrac{SO}{\sqrt{3}} = \dfrac{y}{2\sqrt{3}}$; поэтому

$$S_{\text{осн}} = MK \cdot AB = \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3}} = m^2 .$$

Но $y = \dfrac{m^2}{x}$ и, значит,

$$\sqrt{x^2+\frac{m^4}{x^2}} \cdot \frac{m^2}{x\sqrt{3}} = m^2, \text{ или } x^4+m^4=3x^4,$$

откуда $x = \dfrac{m}{\sqrt[4]{2}}$, $y = m\sqrt[4]{2}$. Теперь находим

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot SO = \frac{1}{3}m^2 \cdot \frac{1}{2}m\sqrt[4]{2} = \frac{1}{6}m^3\sqrt[4]{2} .$$

Остается найти $S_{\text{бок}} = AD \cdot SD + AB \cdot SM$, где $AD = x$, $SD = = OD\sqrt{2} = \dfrac{y\sqrt{2}}{2}$, $AB = \sqrt{x^2+y^2}$, $SM = 2OM = \dfrac{y}{\sqrt{3}}$. Итак,

$$S_{\text{бок}} = \frac{xy\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{x^2y^2+y^4}{3}} = \frac{m^2\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{m^4}{3}+\frac{2m^4}{3}} = \frac{1}{2}m^2(2+\sqrt{2}) .$$

Ответ: $\dfrac{m^2(2+\sqrt{2})}{2}$; $\dfrac{m^3\sqrt[4]{2}}{6}$.

2.37. Имеем $S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + 2S_{\Delta ASF} + 2S_{\Delta FSE} + 2S_{\Delta ESD}$ (рис. 2.32), где $S_{\text{осн}} = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, $S_{\Delta ASF} = \dfrac{a^2}{2}$, поскольку $SA \perp AF$ и $SA=a$. Далее, так как $AE \perp ED$, то и $SE \perp ED$, а значит, $S_{\Delta ESD} = \dfrac{1}{2}ED \cdot SE$.

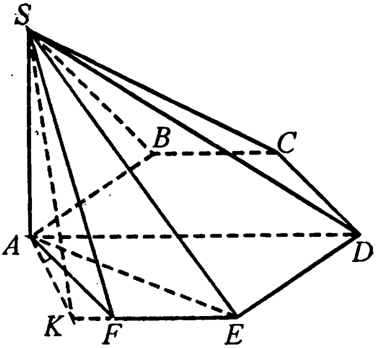


Рис. 2.32

Но $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$, откуда $S_{\Delta ESD} = \frac{1}{2} a \cdot 2a = a^2$.

Для вычисления $S_{\Delta FSE}$ проведем $SK \perp FE$; тогда и $AK \perp FE$. Учитывая, что $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ($\angle KAF = 30°$), $SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$, находим $S_{\Delta FSE} = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$. Итак,

$$S_{\text{полн}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + a^2 + \frac{a^2\sqrt{7}}{2} + 2a^2 = \frac{a^2(6 + 3\sqrt{3} + \sqrt{7})}{2}.$$

Ответ: $0{,}5a^2(6 + 3\sqrt{3} + \sqrt{7})$.

2.38. Объем фигуры $ADBFE$ равен разности объемов пирамид $ABCD$ и $ECBF$ (рис. 2.33). Чтобы найти объем пирамиды $ECBF$, сравним его с объемом пирамиды $ABCD$. Для этого достаточно найти отношения площадей их оснований и соответствующих высот. Так как медиана треугольника делит его площадь на две равные части, то $S_{\Delta BEC} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC}$. Далее,

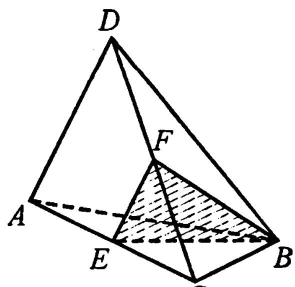


Рис. 2.33

так как F — середина ребра DC, то высота пирамиды $ECBF$ равна половине высоты пирамиды $ABCD$. Следовательно, $V_{ECBF} = \frac{1}{4} V_{ABCD} = 10$ (см³). Искомый объем равен 30 см³.

Ответ: 30 см³.

2.39. Искомый объем $V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$, где S_1 найдем по формуле Герона. Имеем $2p_1 = 27+29+52 = 108$ (м), откуда $S_1 = \sqrt{54 \cdot 27 \cdot 25 \cdot 2} = 270$ (м²). Так как $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (рис. 2.34), то

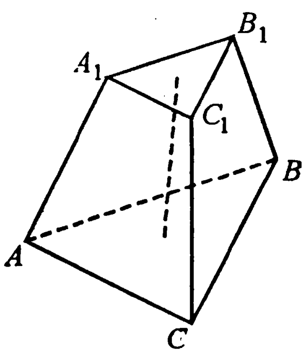


Рис. 2.34

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{(2p_1)^2}{(2p_2)^2} = \frac{108^2}{72^2} = \frac{9}{4},$$

т. е.

$$S_2 = \frac{4S_1}{9} = \frac{4 \cdot 270}{9} = 120 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Окончательно получим

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10 (270 + 120 + \sqrt{270 \cdot 120}) = 1900 \text{ (м}^3\text{)}.$$

Ответ: 1900 м³.

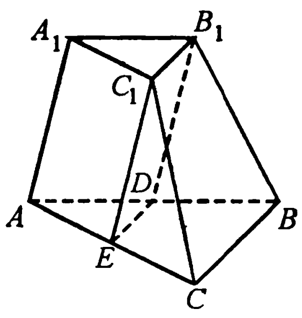


Рис. 2.35

2.40. Так как стороны оснований относятся как 1:2, то площади оснований относятся как 1:4 (рис. 2.35). Тогда объем усеченной пирамиды

$$V = \frac{1}{3} h (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{1}{3} h (4S_2 + S_2 + 2S_2) = \frac{7}{3} S_2 h,$$

где S_2 — площадь верхнего основания, h — высота. Но объем призмы $ADEA_1B_1C_1$ составляет $V_1 = S_2 h$ и, значит, объем оставшейся части пирамиды есть $V_2 = V - V_1 = \frac{7}{3}S_2h - S_2h = \frac{4}{3}S_2h$. Итак, $V_1 : V_2 = 3:4$.

Ответ: 3:4.

2.41. Пусть $O_1O_2 = x$ (рис. 2.36); тогда $OO_2 = 3 - x$. Так как $\Delta B_1O_2D_1 \sim \Delta BO_2D$, то $B_1D_1 : BD = O_1O_2 : OO_2$, или $1 : 2 = x : (3 - x)$, откуда $x = 1$ (см). Далее, $\Delta B_1D_1B \sim \Delta LO_2B$ и, следовательно, $B_1D_1 : LO_2 = OO_1 : OO_2 = 3 : 2$, т. е.

$$LO_2 = \frac{2}{3}B_1D_1,\ LN = \frac{4}{3}B_1D_1.$$ Тогда

$$S_{KLMN} = \frac{16}{9}S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{16}{9}\ (\text{см}^2).$$

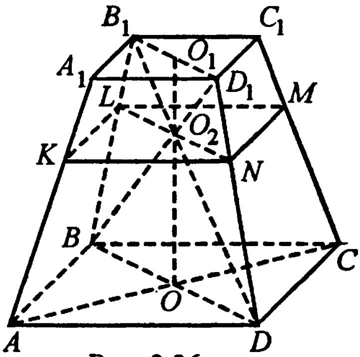


Рис. 2.36

Окончательно получим

$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot 2\left(4 + \frac{16}{9} + \frac{8}{3}\right) = \frac{152}{27}\ (\text{см}^3),\ V_2 = \frac{1}{3}\cdot 1\left(\frac{16}{9} + 1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{37}{27}\ (\text{см}^3).$$

Ответ: $\frac{152}{27}$ и $\frac{37}{27}$ см^3.

2.42. Указание. Воспользоваться равенством $\frac{S_1}{S_2} = \frac{x^2}{H^2}$, где $x = H - h$ (H — высота полной пирамиды, а h — высота усеченной пирамиды).

Ответ: $\frac{VS_2\sqrt{S_2}}{S_2\sqrt{S_2} - S_1\sqrt{S_1}}$.

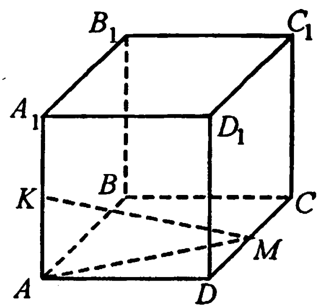


Рис. 2.37

2.43. Так как полная поверхность куба $S_{\text{полн}} = 36$ см^2, то площадь одной грани $S = 6$ см^2 и ребро куба

$AD = a = \sqrt{6}$ см (рис. 2.37). Искомое расстояние

$$KM = \sqrt{AK^2 + AM^2}\text{, где } AK = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ (см)},$$

$$AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2} \text{ (см)}.$$

Окончательно получим $KM = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{30}{4}} = 3$ (см).

Ответ: 3 см.

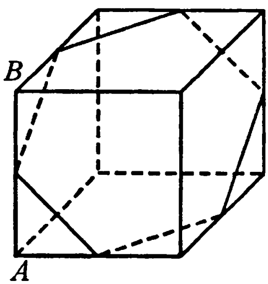


Рис. 2.38

2.44. Пусть сторона шестиугольника равна a; тогда ребро куба $AB = a\sqrt{2}$ (рис. 2.38) и $S_{\text{полн}} = 6AB^2 = 12a^2$. По условию, $6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = Q$, откуда $a^2 = \frac{2Q}{3\sqrt{3}}$. Итак, $S_{\text{полн}} = \frac{8Q\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{8Q\sqrt{3}}{3}$.

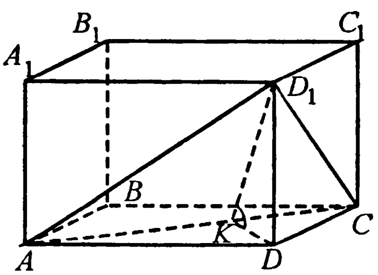


Рис. 2.39

2.45. Так как $CD = 3$ см, $AD = 4$ см (рис. 2.39), то из ΔADC находим $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см). Проведем $DK \perp AC$, тогда $D_1K \perp AC$ и $\angle DKD_1 = 60°$ (по условию). Но $\Delta ADC \sim \Delta CDK$, откуда $\frac{AC}{CD} = \frac{AD}{DK}$,

т. е. $DK = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$ (см). Значит, $DD_1 = DK\sqrt{3} = \frac{12\sqrt{3}}{5}$ (см) и

$$V = CD \cdot AD \cdot DD_1 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{12\sqrt{3}}{5} = \frac{144\sqrt{3}}{5} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: $28{,}8\sqrt{3}$ см^3.

2.46. По условию, $A_1K = 12$ дм, $AK = 5$ дм, $A_1K \perp AK$ (рис. 2.40); следовательно, $AA_1 = \sqrt{A_1K^2 + AK^2} = 13$ (дм). Так как $S_{A_1LMN} = 24$ дм^2 и AA_1 — перпендикуляр к сечению, то искомый объем

$$V = S_{A_1LMN} \cdot AA_1 = 24 \cdot 13 = 312 \text{ (дм}^3\text{)}.$$

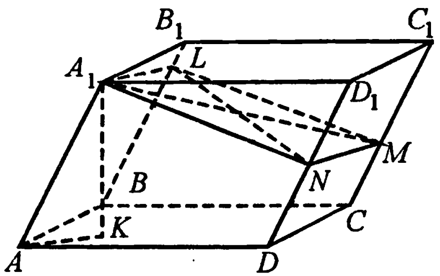


Рис. 2.40

Далее, учитывая, что A_1LMN — ромб, имеем $S_{бок} = 4AA_1 \cdot A_1N$. Для нахождения стороны ромба воспользуемся равенством

$$S_{A_1LMN} = \frac{1}{2} A_1M \cdot LN, \text{ или } 24 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot LN,$$

откуда $LN = 6$ (дм); тогда $A_1N = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (дм). Итак,

$$S_{бок} = 4 \cdot 13 \cdot 5 = 260 \text{ дм}^2.$$

Ответ: 260 дм^2; 312 дм^3.

2.47. Проведем через BC сечение, перпендикулярное AA_1 (рис. 2.41); тогда $S_{бок} = (BC + MC + MB)\, AA_1 = (BC + 2MC)AA_1$. Так как $\angle A_1AO = 60°$ (по условию), то

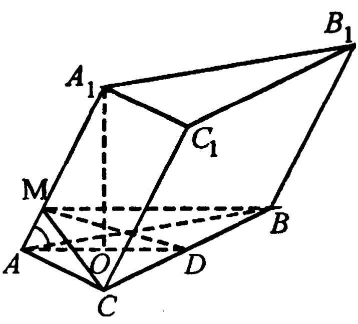


Рис. 2.41

$AA_1 = 2AO = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Далее, в ΔAMD имеем $\angle ADM = 30°$ и, следовательно, $AM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Тогда из ΔAMC находим $MC = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$. Итак,

$$S_{\text{бок}} = \left(a + \frac{a\sqrt{13}}{2}\right)\frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}(\sqrt{13}+2)}{3}.$$

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}(\sqrt{13}+2)}{3}$.

2.48. Полная поверхность призмы $S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$. Так как a, b, c — расстояния между боковыми ребрами призмы, то $a + b + c$ — периметр сечения, перпендикулярного ребру. Следовательно, $S_{\text{бок}} = (a + b + c)l = 2pl$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. По формуле Герона находим $S_{\text{сеч}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Далее, учитывая, что $V = S_{\text{сеч}}l = S_{\text{осн}}h$, имеем $S_{\text{осн}} = S_{\text{сеч}}\frac{l}{h}$. Окончательно получим

$$S_{\text{полн}} = \frac{2l}{h}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} + 2pl.$$

Ответ: $\frac{2l}{h}(\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} + ph)$.

2.49. У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что площадь правильного восьмиугольника равна $2a^2(1+\sqrt{2})$, где a — длина его стороны.

Ответ: $16\sqrt{2{,}2(\sqrt{2}-1)}$ м².

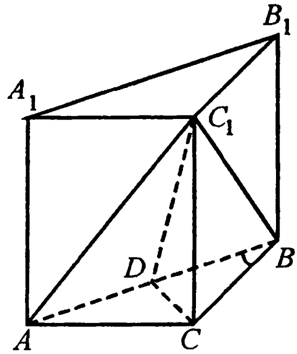


Рис. 2.42

2.50. Искомый объем $V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot CC_1$ (рис. 2.42). Учитывая, что $\angle ABC = 30°$, находим $AC=\frac{c}{2}$, $BC=\frac{c\sqrt{3}}{2}$ и, значит, $S_{\text{осн}}=\frac{c^2\sqrt{3}}{8}$. С другой стороны, $S_{\text{осн}}=\frac{1}{2}AB\cdot CD$, где $CD\perp AB$ и $CD=\frac{1}{2}BC=\frac{c\sqrt{3}}{4}$. Так как $CD\perp AB$, то и $C_1D\perp AB$, т. е. $\angle C_1DC = 45°$ (по условию); поэтому в ΔC_1DC имеем $CC_1=CD=\frac{c\sqrt{3}}{4}$. Итак,

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{c^2\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{c\sqrt{3}}{4}=\frac{c^3}{32}.$$

Ответ: $\frac{c^3}{32}$.

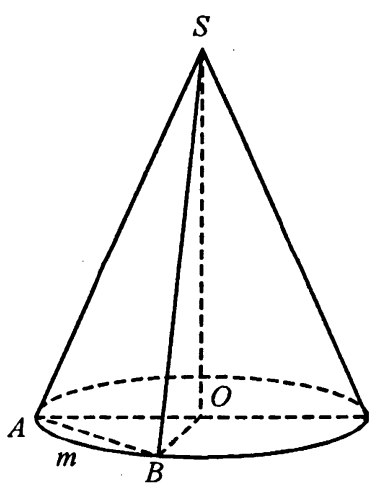


Рис. 2.43

2.51. Пусть $AO=r$, $SO=h$ (рис. 2.43), V — объем конуса, V_1 и V_2 — объемы его частей. Найдем V_1 как разность между объемами части конуса, основанием которой является сектор AOB, и пирамиды, в основании которой лежит ΔAOB. Согласно условию, $AB=r$, т. е. AB — сторона правильного вписанного шестиугольника и, значит,

$V_1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\pi r^2h-\frac{1}{3}\cdot\frac{r^2\sqrt{3}}{4}h=\frac{1}{3}S_1h$, где S_1 — площадь сегмента AmB. Тогда $V_2 = V - V_1 = \frac{1}{3}S_2h$, где

$S_2 = \pi r^2 - S_1$. Таким образом, $V_1 : V_2 = S_1 : S_2$. Далее находим

$S_1 = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$, $S_2 = \pi r^2 - \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} =$

$= \frac{r^2(10\pi + 3\sqrt{3})}{12}$. Итак, $V_1 : V_2 = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{10\pi + 3\sqrt{3}}$.

Ответ: $(2\pi - 3\sqrt{3}):(10\pi + 3\sqrt{3})$.

2.52. Пусть l — образующая конуса. Так как длина дуги развертки боковой поверхности конуса равна длине окружности основания, то $2\pi R = \frac{2\pi l}{4}$ (по условию, развертка представляет собой четверть круга), откуда $l = 4R$. Найдем высоту конуса: $h = \sqrt{l^2 - R^2} =$ $= \sqrt{16R^2 - R^2} = R\sqrt{15}$. Окончательно получим

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\sqrt{15} = \frac{\pi R^3\sqrt{15}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi R^3\sqrt{15}}{3}$.

2.53. Пусть объемы тел вращения вокруг сторон a, b, c равны V_a, V_b, V_c; тогда $V_a = \frac{1}{3}\pi {h_a}^2 a, V_b = \frac{1}{3}\pi {h_b}^2 b, V_c = \frac{1}{3}\pi {h_c}^2 c$, где h_a, h_b, h_c — соответствующие высоты . Учитывая, что $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$, имеем

$$V_a = \frac{2}{3}\pi S h_a, V_b = \frac{2}{3}\pi S h_b, V_c = \frac{2}{3}\pi S h_c,$$

или

$$V_a = \frac{4}{3}\pi S^2 \cdot \frac{1}{a}, V_b = \frac{4}{3}\pi S^2 \cdot \frac{1}{b}, V_c = \frac{4}{3}\pi S^2 \cdot \frac{1}{c}.$$

Окончательно имеем

$$V_a : V_b : V_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Ответ: $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

2.54. Поверхность S тела вращения состоит из боковых поверхностей двух усеченных конусов, полученных при вращении отрезков BC и CD (рис. 2.44), и двух конусов, полученных при вращении отрезков AB и AD. Таким образом,

$$S = \pi\,(KB + AC)\,BC + \\ + \pi(MD + AC)\,CD + \\ + \pi KB \cdot AB + \pi MD \cdot AD.$$

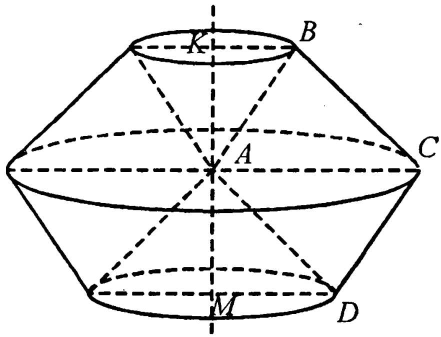


Рис. 2.44

Преобразуем это выражение, учитывая, что $AD = BC$, $CD = AB$ и $KB + MD = AC$. Имеем

$$\pi(KB \cdot BC + AC \cdot BC + MD \cdot AB + AC \cdot AB + KB \cdot AB + MD \times \\ \times BC) = \pi((KB + MD)BC + (KB + MD)AB + AC \cdot BC + AC \cdot AB) = \\ = \pi(2BC + 2AB)AC.$$

Так как по условию $AC = d$, $2BC + 2AB = 2p$, то $S = 2\pi dp$.

Ответ: $2\pi dp$.

2.55. Пусть O — центр шара, описанного около пирамиды $ABCD$ (рис. 2.45). Тогда $OA = OB = OC = OD$. Опустим перпендикуляр OK на плоскость ABC и проведем $OE \perp DB$. Поскольку точка O равноудалена от вершин треугольника ABC, точка K является центром треугольника и $BK = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Далее, так как $OB = OD$, то $EB = ED = \frac{b}{2}$. Следовательно,

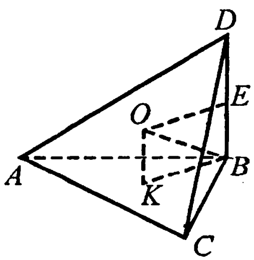


Рис. 2.45

$$OB = \sqrt{OK^2 + BK^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{\sqrt{12a^2 + 9b^2}}{6}.$$

От т: $\dfrac{\sqrt{12a^2 + 9b^2}}{6}$.

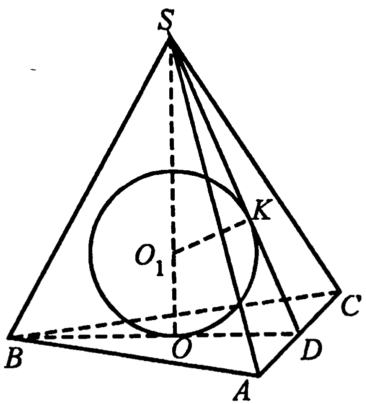


Рис. 2.46

2.56. Для отыскания радиуса шара проведем плоскость через высоту пирамиды и апофему (рис. 2.46). Радиус круга в полученном сечении равен радиусу шара. Так как все ребра пирамиды равны a, то $SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Из ΔSOD находим $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Обозначим радиус шара через r; тогда $SO_1 = SO - r$. В ΔSKO_1 имеем

$O_1K^2 = SO_1{}^2 - SK^2$, или $r^2 = (SO - r)^2 - \dfrac{a^2}{3}$, откуда

$$r^2 = \frac{2a^2}{3} - \frac{2ar\sqrt{6}}{3} + r^2 - \frac{a^2}{3}, \text{ т. е. } r = \frac{a}{2\sqrt{6}}.$$

Окончательно находим $S_{\text{шара}} = 4\pi r^2 = \dfrac{\pi a^2}{6}$.

Ответ: $\dfrac{\pi a^2}{6}$.

2.57. По условию, $\angle OAA_1 = 60°$ (рис. 2.47); значит, $\angle O_1OA_1 =$ $30°$ и $A_1O_1 = \dfrac{1}{2}A_1O = \dfrac{R}{2}$, $OO_1 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Находим

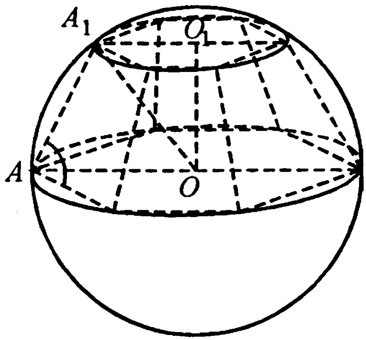


Рис. 2.47

$$S_{\text{нижн.осн}} = 6\frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2},\ S_{\text{верхн.осн}} = \frac{1}{4}S_{\text{нижн.осн}} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{8}.$$

Окончательно получим

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3R^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3R^2\sqrt{3}}{8} + \sqrt{\frac{9R^4\cdot 3}{16}}\right) = \frac{21R^3}{16}.$$

Ответ: $\frac{21R^3}{16}$.

2.58. Пусть радиус шара равен R. В сечении шара плоскостью, проходящей через его центр и паралельной основанию параллелепипеда, получим параллелограмм, описанный около окружности радиуса R. Поскольку суммы противоположных сторон такого описанного параллелограмма равны, он представляет собой ромб. Пусть сторона ромба равна m; тогда искомая полная поверхность

$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2m\cdot 2R = 4m\cdot 2R = 6m\cdot 2R = 6S_{\text{осн}}.$$

Но $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}ab$ и, следовательно, $S = 3ab$.

Ответ: $3ab$.

2.59. Искомый объем $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Пусть конус образован вращением ΔABC вокруг катета BC (рис. 2.48); тогда $AC = r$.

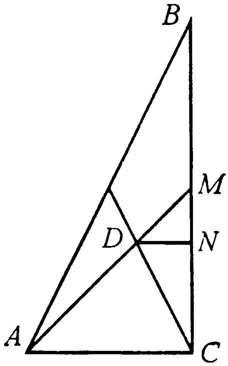


Рис. 2.48

$BC = h$. По условию, $\frac{1}{2}rh = S$; отсюда $V = \frac{2}{3}\pi r \cdot \frac{1}{2}rh = \frac{2}{3}\pi rS$. Кроме того, по условию, $2\pi \cdot DN = = L$, где D — точка пересечения медиан, $DN \perp BC$. Но $DN : AC = DM : AM = 1 : 3$, откуда $DN = \frac{r}{3}$; значит, $\frac{2}{3}\pi r = L$, т. е. $r = \frac{3L}{2\pi}$.

Итак, $V = \frac{2}{3}\pi S \cdot \frac{3L}{2\pi} = SL$.

Ответ: SL.

2.60. Для нахождения боковой поверхности усеченного конуса воспользуемся формулой $S_{бок} = \pi\ (r_1 + r_2)l$, где r_1 и r_2 — радиусы оснований усеченного конуса. Проведем плоскость через высоту конуса. В сечении получим равнобедренную трапецию, описанную около круга радиуса r, причем $AD = 2r_2$, $BC = 2r_1$ (рис. 2.49). Для описанного четырехугольника имеем $BC + AD = AB + CD$, т. е. $2r_1 + + 2r_2 = 2l$, откуда $S_{бок} = \pi l^2$.

Объем усеченного конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi H\ ((r_{1+} + r_2)^2 - r_1 r_2),\ \text{где}\ H = 2r,\ r_1 + r_2 = l,\ r_1 r_2 = r^2.$$

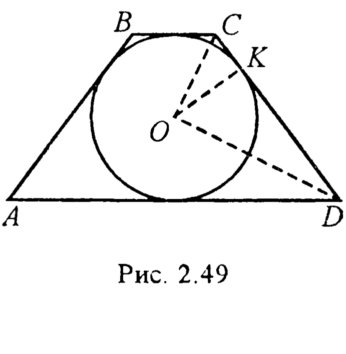


Рис. 2.49

Последнее соотношение получается из прямоугольного треугольника OCD, в котором $OK^2 = CK \cdot KD$ ($\angle COD = 90°$, поскольку OC и OD — биссектрисы углов трапеции и, значит; $\angle OCD + \angle CDO = 90°$). Итак,

$$V = \frac{2}{3}\pi r\,(l^2 - r^2).$$

Ответ: πl^2; $\frac{2}{3}\pi r(l^2 - r^2)$.

Глава 3

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ФИГУР

(Доказательства этих свойств см. в книге II двухтомного «Сборника» на с. 56-58.)

1°. *Площадь параллелограмма ABCD можно вычислить по следующим формулам:*

$$S = \frac{AC^2 - BD^2}{4} \operatorname{tg} A; \qquad (3.1)$$

$$S = \frac{AD^2 - AB^2}{2} \operatorname{tg} \angle AOD, \qquad (3.2)$$

где O — точка пересечения диагоналей AC и *BD* (рис. 3.1).

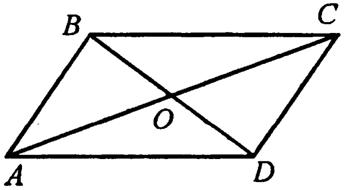


Рис. 3.1

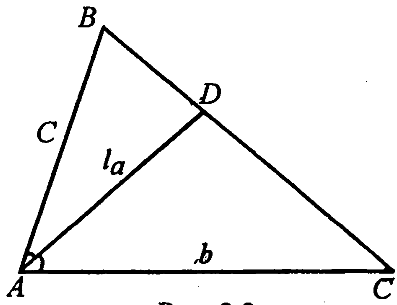


Рис. 3.2

2°. *Пусть известны длины b и c двух сторон треугольника ABC и угол A, образуемый ими* (рис. 3.2). *Тогда длина биссектрисы AD треугольника, проведенной из вершины этого угла, выражается формулой*

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}. \qquad (3.3)$$

3°. *Справедливы следующие соотношения между элементами шара и вписанного в него конуса:*

$$l = 2R\sin\alpha; \qquad (3.4)$$

$$l^2 = 2RH, \qquad (3.5)$$

где R — радиус шара, l — длина образующей конуса, H — его высота, α — угол между образующей и плоскостью основания (рис. 3.3).

Такие же соотношения справедливы и для вписанной в шар пирамид боковые ребра которой имеют длину l и составляют с плоскостью основания угол α.

4°. *Пусть A_1B_1 — боковое ребро пирамиды или призмы, A_1O — его проекция на плоскость основания,* $\angle B_1A_1O = \alpha$, $\angle OA_1A_2 = = \beta$, $\angle B_1A_1A_2 = = \gamma$ (рис. 3.4). *Тогда справедливо равенство* $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

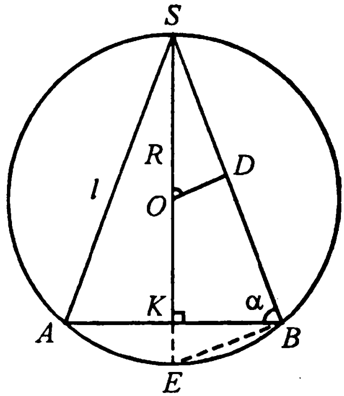


Рис. 3.3

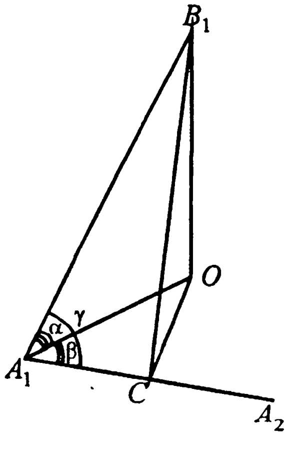


Рис. 3.4

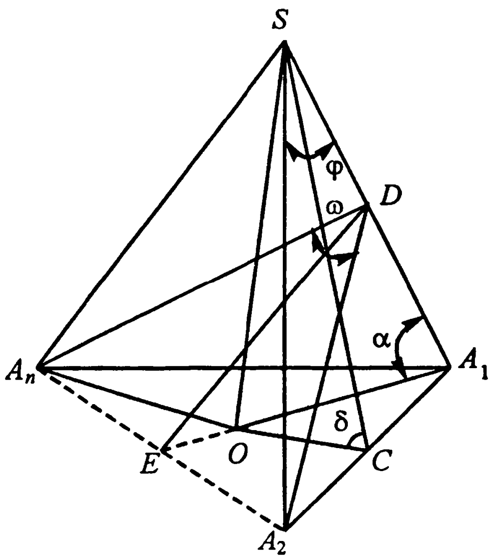


Рис. 3.5

5°. *Пусть α — угол наклона бокового ребра правильной n-угольной пирамиды к плоскости основания, δ — угол наклона ее боковой грани к плоскости основания, φ — плоский угол при вер-*

шине пирамиды, ω — двугранный угол между смежными боковыми гранями (рис. 3.5). *Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\cos\alpha = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}; \qquad (3.6)$$

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\omega}{2}}; \qquad (3.7)$$

$$\cos\delta = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}} = \cos\alpha\sin\frac{\omega}{2}. \qquad (3.8)$$

Группа А

3.1. Сумма двух неравных высот равнобедренного треугольника равна l, угол при вершине равен α. Найти боковую сторону.

3.2. В равнобедренном треугольнике даны основание a и угол α при основании. Найти длину медианы, проведенной к боковой стороне.

3.3. Основание равнобедренного треугольника равно a, угол при вершине равен α. Найти длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.

3.4. Угол при основании остроугольного равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равен α. В каком отношении, считая от вершины A, высота BD делит высоту AE?

3.5. Площадь равнобедренного треугольника равна S, а противолежащий основанию угол между медианами, проведенными к его боковым сторонам, равен α. Найти основание.

3.6. В прямоугольном треугольнике даны его площадь S и острый угол α. Найти расстояние от точки пересечения медиан треугольника до гипотенузы.

3.7. Найти угол треугольника, если известно, что стороны, заключающие этот угол, равны a и b, а биссектриса угла равна l.

3.8. Показать, что если в треугольнике отношение тангенсов двух углов равно отношению квадратов синусов этих же углов, то треугольник равнобедренный или прямоугольный.

3.9. В квадрате $ABCD$ через середину M стороны AB проведена прямая, пересекающая противоположную сторону CD в точке N. В каком отношении прямая MN делит площадь квадрата, если острый угол AMN равен α? Указать возможные значения α.

3.10. В квадрат $ABCD$ вписан равнобедренный треугольник AEF; точка E лежит на стороне BC, точка F — на стороне CD и $AE = AF$. Тангенс угла AEF равен 3. Найти косинус угла FAD.

3.11. Диагональ прямоугольника равна d и делит угол прямоугольника в отношении $m:n$. Найти периметр прямоугольника.

3.12. Две высоты параллелограмма, проведенные из вершины тупого угла, равны h_1 и h_2, а угол между ними равен α. Найти бóльшую диагональ параллелограмма.

3.13. Из вершины C ромба $ABCD$, сторона которого равна a, проведены два отрезка CE и CF, делящие ромб на три равновеликие фигуры. Известно, что $\cos C = \frac{1}{4}$. Найти сумму $CE + CF$.

3.14. В ромбе через вершину острого угла, равного α, проведена прямая, делящая этот угол в отношении $1:2$. В каком отношении эта прямая делит сторону ромба, которую она пересекает?

3.15. Высота равнобедренной трапеции равна h, а угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. Найти среднюю линию трапеции.

3.16. Высота равнобедренной трапеции равна h. Верхнее основание трапеции видно из середины нижнего основания под углом 2α, а нижнее основание из середины верхнего — под углом 2β. Найти площадь трапеции в этом общем случае и вычислить ее без таблиц, если $h = 2$, $\alpha = 15°$, $\beta = 75°$.

3.17. Около круга радиуса R описана равнобедренная трапеция с острым углом α при основании. Найти периметр трапеции.

3.18. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α, радиус вписанного круга равен r. Через вершину угла при основании и центр вписанного круга проведена прямая. Найти отрезок этой прямой, заключенный внутри треугольника.

3.19. В ромб $ABCD$ и треугольник ABC, содержащий его бóльшую диагональ, вписаны окружности. Найти отношение радиусов этих окружностей, если острый угол ромба равен α.

3.20. Даны стороны a, b, c и d четырехугольника, вписанного в окружность. Найти угол, заключенный между сторонами a и b.

3.21. Из точки, взятой на окружности радиуса R, проведены две равные хорды, составляющие вписанный угол, равный α радианам. Найти часть площади круга, заключенную внутри этого вписанного угла.

3.22. В сегмент, дуга которого содержит $\alpha°$, вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с серединой дуги, а две другие лежат на хорде. Площадь треугольника равна S. Найти радиус дуги сегмента.

3.23. В прямоугольном треугольнике ABC острый угол A равен α радианам. Дуга окружности с центром в вершине прямого угла C касается гипотенузы в точке D и пересекает катеты AC и BC соответственно в точках E и F. Найти отношение площадей криволинейных треугольников ADE и BDF.

3.24. Плоскость квадрата составляет угол α с плоскостью, проведенной через одну из его сторон. Какой угол составляет с той же плоскостью диагональ квадрата?

3.25. В грани двугранного угла, равного α, проведена прямая, составляющая угол β с ребром двугранного угла. Найти угол между этой прямой и другой гранью.

3.26. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с боковым ребром угол α. Найти объем параллелепипеда, если периметр его основания равен P.

3.27. Через сторону нижнего основания куба проведена плоскость, делящая объем куба в отношении $m : n$, считая от нижнего основания. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания, если $m \le n$.

3.28. Основанием призмы служит равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Диагональ грани, противоположной данному углу, равна l и составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

3.29. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a. Угол между пересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней равен α. Найти объем призмы.

3.30. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно стороне основания. Найти угол между стороной основания и непересекающей ее диагональю боковой грани.

3.31. Высота правильной треугольной призмы равна H. Плоскость, проведенная через среднюю линию нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, составляет с плоскостью нижнего основания острый двугранный угол α. Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью.

3.32. В основании прямой призмы лежит ромб с острым углом α. Отношение высоты призмы к стороне основания равно k. Через сторону основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

3.33. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно l и составляет с плоскостью основания угол α. Найти объем пирамиды.

3.34. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c, а один из острых углов равен α. Каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем пирамиды.

3.35. Основанием четырехугольной пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом β. Найти полную поверхность пирамиды.

3.36. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол при вершине равен α. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

3.37. Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а равные боковые ребра образуют между собой угол α. Найти высоту прямой треугольной призмы, равновеликой данной пирамиде и имеющей с ней общее основание.

3.38. Основанием пирамиды $ABCD$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Боковое ребро AD перпендикулярно основанию. Найти острые углы треугольника ABC, если $\angle DBA = \alpha$ и $\angle DBC = \beta$ ($\alpha < \beta$).

3.39. Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Найти этот угол.

3.40. Отношение одной из сторон основания треугольной пирамиды к каждому из остальных пяти ее ребер равно k. Найти двугранный угол между двумя равными боковыми гранями пирамиды и допустимые значения k.

3.41. Сторона большего основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна a. Боковое ребро и диагональ пирамиды составляют с плоскостью основания углы, равные соответственно α и β. Найти площадь меньшего основания пирамиды.

3.42. Плоскость, проведенная через образующую цилиндра, составляет с плоскостью осевого сечения, содержащего те же образующую, острый угол α. Диагональ прямоугольника, полученного в сечении цилиндра этой плоскостью, равна l и образует с плоскостью основания угол β. Найти объем цилиндра.

3.43. Найти угол при вершине осевого сечения конуса, если центральный угол в развертке его боковой поверхности равен α радианам.

3.44. Найти объем конуса, если в его основании хорда, равная a, стягивает дугу в $\alpha°$, а высота конуса составляет с образующей угол β.

3.45. Диагонали осевого сечения усеченного конуса точкой пересечения делятся в отношении $2:1$. Угол между диагоналями, обращенный к основанию конуса, равен α. Длина диагонали равна l. Найти объем усеченного конуса.

3.46. Найти угол между образующей и высотой конуса, у которого боковая поверхность есть среднее пропорциональное между площадью основания и полной поверхностью.

3.47. Основания двух конусов, имеющих общую вершину, лежат в одной плоскости. Разность их объемов равна V. Найти объем меньшего конуса, если касательные, проведенные к окружности его основания из произвольной точки окружности основания большего конуса, образуют угол α.

3.48. Высота конуса равна H, угол между образующей и высотой равен α. В этот конус вписан другой конус так, что вершина второго конуса совпадает с центром основания первого конуса, а соответствующие образующие обоих конусов взаимно перпендикулярны. Найти объем вписанного конуса.

3.49. Сторона ромба равна a, его острый угол равен α. Ромб вращается вокруг прямой, проходящей через его вершину параллельно большей диагонали. Найти объем тела вращения.

3.50. Радиус круга, вписанного в прямоугольную трапецию, равен r, острый угол трапеции равен α. Эта трапеция вращается вокруг меньшей боковой стороны. Найти боковую поверхность тела вращения.

3.51. Найти острый угол ромба, зная, что объемы тел, полученных от вращения ромба вокруг его большей диагонали и вокруг его стороны, относятся как $1:2\sqrt{5}$.

3.52. В конус вписана треугольная пирамида, у которой боковые ребра попарно взаимно перпендикулярны. Найти угол между образующей конуса и его высотой.

3.53. В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой касаются конус и шар, равен r. Найти объем конуса, если угол между высотой и образующей конуса равен α.

3.54. В конус вписан полушар; большой круг полушара лежит в плоскости основания конуса, а шаровая поверхность касается поверхности конуса. Найти объем полушара, если образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α.

3.55. Около шара описан усеченный конус, у которого площадь одного основания в 4 раза больше площади другого. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

Группа Б

3.56. В остроугольном треугольнике ABC высота $AD = a$, высота $CE = b$, острый угол между AD и CE равен a. Найти AC.

3.57. Через вершину угла α при основании равнобедренного треугольника проведена прямая, пересекающая противоположную боковую сторону и составляющая с основанием угол β. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

3.58. В треугольнике ABC угол A равен α и сторона $BC = a$. Найти длину биссектрисы AD, если угол между биссектрисой AD и высотой AE равен β.

3.59. Острый угол прямоугольного треугольника равен α. Найти отношение радиуса вписанной в треугольник окружности к радиусу описанной окружности. При каком значении α это отношение является наибольшим?

3.60. Луч, проведенный из вершины равностороннего треугольника, делит его основание в отношении $m : n$. Найти тупой угол между лучом и основанием.

3.61. Тангенс острого угла между медианами прямоугольного треугольника, проведенными к его катетам, равен k. Найти углы треугольника и допустимые значения k.

3.62. Найти синус угла при вершине равнобедренного треугольника, зная, что периметр любого вписанного в него прямоугольника, две вершины которого лежат на основании, является постоянной величиной.

3.63. В треугольнике ABC даны острые углы α и γ ($\alpha > \gamma$), прилежащие к стороне AC. Из вершины B проведены медиана BD и биссектриса BE. Найти отношение площади треугольника BDE к площади треугольника ABC.

3.64. В треугольнике ABC проведена высота BM и на ней как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AB в точке K, а сторону BC — в точке L. Найти отношение площади треугольника KLM к площади треугольника ABC, если $\angle A = \alpha$ и $\angle C = \beta$.

3.65. Высота треугольника делит угол треугольника в отношении 2 : 1, а основание — на отрезки, отношение которых (большего к меньшему) равно k. Найти синус меньшего угла при основании и допустимые значения k.

3.66. Площадь равнобедренной трапеции равна S, угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. Найти высоту трапеции.

3.67. В трапеции меньшее основание равно 2, прилежащие углы — по 135°. Угол между диагоналями, обращенный к основанию, равен 150°. Найти площадь трапеции.

3.68. Боковые стороны трапеции равны p и q ($p < q$), большее основание равно a. Углы при большем основании относятся как 2 : 1. Найти меньшее основание.

3.69. Основание треугольника равно a, а прилежащие к нему углы содержат 45° и 15°. Из вершины, противоположной основанию, проведена окружность радиусом, равным высоте, опущенной на это основание. Найти площадь части соответствующего круга, заключенную внутри треугольника.

3.70. Основание треугольника равно a, а углы при основании равны α и β радианам. Из противоположной вершины треугольника радиусом, равным его высоте, проведена окружность. Найти длину дуги этой окружности, заключенной внутри треугольника.

3.71. Найти отношение площади сектора с данным центральным углом α радианов к площади вписанного в него круга.

3.72. Меньшая дуга окружности, стягиваемая хордой AB, содержит $\alpha°$. Через середину C хорды AB проведена хорда DE так, что $DC : CE = 1 : 3$. Найти острый угол ACD и допустимые значения α.

3.73. Высота равнобедренного треугольника равна h и составляет с боковой стороной угол $\alpha\,(\alpha \le \frac{\pi}{6})$. Найти расстояние между центрами вписанной в треугольник и описанной около него окружностей.

3.74. Через сторону ромба проведена плоскость, образующая с диагоналями углы α и 2α. Найти острый угол ромба.

3.75. Найти боковую поверхность и объем прямого параллелепипеда, если его высота равна h, диагонали составляют с основанием углы α и β, а основанием служит ромб.

3.76. Одна из сторон основания прямой треугольной призмы равна a, а прилежащие к ней углы равны α и β. Найти боковую поверхность призмы, если ее объем равен V.

3.77. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) служит равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$), у которого периметр равен $2p$, а угол при вершине A равен α. Через сторону BC и вершину A_1 проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

3.78. Основанием прямой призмы служит равносторонний треугольник. Через одну из его сторон проведена плоскость, отсекающая от призмы пирамиду, объем которой равен V. Найти площадь сечения, если угол между секущей плоскостью и плоскостью основания равен α.

3.79. Найти косинус угла между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней правильной треугольной призмы, у которой боковое ребро равно стороне основания.

3.80. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона равна a, а острый угол равен α. Все боковые грани образуют с основанием пирамиды один и тот же угол β. Найти полную поверхность пирамиды.

3.81. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды на боковое ребро опущен перпендикуляр, равный p. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между ее боковыми гранями равен α.

3.82. Отношение площади диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды к площади ее основания равно k. Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

3.83. Высота правильной треугольной пирамиды равна H. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Через сторону основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость. Найти площадь полученного сечения.

3.84. Все боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания один и тот же угол. Найти этот угол, если отношение полной поверхности пирамиды к площади основания равно k. При каких значениях k задача имеет решение?

3.85. Через диагональ основания и высоту правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость. Отношение площади сечения к боковой поверхности пирамиды равно k. Найти косинус угла между апофемами противоположных боковых граней и допустимые значения k.

3.86. В правильной треугольной пирамиде с углом α между боковым ребром и стороной основания проведено сечение через середину бокового ребра параллельно боковой грани. Зная площадь S этого сечения, найти объем пирамиды. Каковы возможные значения α?

3.87. Высота правильной треугольной усеченной пирамиды равна H и является средним пропорциональным между сторонами оснований. Боковое ребро составляет с основанием угол α. Найти объем пирамиды.

3.88. Отрезок прямой, соединяющий точку окружности верхнего основания цилиндра с точкой окружности нижнего основания, равен l и составляет с плоскостью основания угол α. Найти расстояние от этой прямой до оси цилиндра, если осевое сечение цилиндра есть квадрат. Каковы возможные значения α?

3.89. Два конуса имеют концентрические основания и один и тот же угол, равный α, между высотой и образующей. Радиус основания внешнего конуса равен R. Боковая поверхность внутреннего конуса в 2 раза меньше полной поверхности внешнего конуса. Найти объем внутреннего конуса.

3.90. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны и длина каждой из них равна a. Угол между образующей и плоскостью основания равен α. Найти полную поверхность усеченного конуса.

3.91. Тупоугольный равнобедренный треугольник вращается вокруг прямой, проходящей через точку пересечения его высот параллельно большей стороне. Найти объем тела вращения, если тупой угол равен α, а противолежащая ему сторона треугольника равна a.

3.92. На отрезке AB, равном $2R$, построена как на диаметре полуокружность и проведена хорда CD параллельно AB. Найти объем тела, образованного вращением треугольника ACD вокруг диаметра AB, если вписанный угол, опирающийся на дугу AC, равен α ($AC < AD$).

3.93. Большое основание равнобедренной трапеции равно a, острый угол равен α. Диагональ трапеции перпендикулярна ее боковой стороне. Трапеция вращается вокруг ее большого основания. Найти объем тела вращения.

3.94. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб; вершины его верхнего основания лежат на боковых ребрах, вершины нижнего основания — в плоскости основания пирамиды. Найти отношение объема куба к объему пирамиды, если боковое ребро пирамиды составляет с плоскостью основания угол α.

3.95. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом α между боковыми сторонами. Пирамида помещена в некоторый цилиндр так, что ее основание оказалось вписанным в основание этого цилиндра, а вершина совпала с серединой одной из образующих цилиндра. Объем цилиндра равен V. Найти объем пирамиды.

3.96. В конус вписан куб (одна из граней куба лежит в плоскости основания конуса). Отношение высоты конуса к ребру куба равно k. Найти угол между образующей и высотой конуса.

3.97. В конус вписан цилиндр; нижнее основание цилиндра лежит в плоскости основания конуса. Прямая, проходящая через центр верхнего основания цилиндра и точку на окружности основания конуса, составляет с плоскостью основания угол α. Найти отношение объемов конуса и цилиндра, если угол между образующей и высотой конуса равен β.

3.98. Отношение объема прямого параллелепипеда к объему вписанного в него шара равно k. Найти углы в основании параллелепипеда и допустимые значения k.

3.99. Центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, делит высоту пирамиды в отношении $m : n$, считая от вершины пирамиды. Найти угол между двумя смежными боковыми гранями.

3.100. Основанием пирамиды служит прямоугольник, у которого угол между диагоналями равен α. Около этой пирамиды описан шар радиуса R. Найти объем пирамиды, если все ее боковые ребра образуют с основанием угол β.

3.101. Боковая грань правильной треугольной усеченной пирамиды составляет с плоскостью основания угол α. Найти отношение полной поверхности пирамиды к поверхности вписанного в нее шара.

3.102. Отношение объема шара, вписанного в конус, к объему описанного шара равно k. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания и допустимые значения k.

3.103. Отношение объема конуса к объему вписанного в него шара равно k. Найти угол между образующей и плоскостью основания конуса и допустимые значения k.

3.104. Найти угол между образующей и основанием усеченного конуса, полная поверхность которого вдвое больше поверхности вписанного в него шара.

3.105. Найти отношение объема шарового сегмента к объему всего шара, если дуга в осевом сечении сегмента соответствует центральному углу, равному α.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ

3.1. По условию, $AB = AC$, $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$, $\angle BAC = \alpha$, $AA_1 + BB_1 = l$ (рис.3.6). Пусть $BC = a$.

Из ΔAA_1C находим $AA_1 = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$,

$AC = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, а из ΔBB_1C получим

$BB_1 = a\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = a\cos\frac{\alpha}{2}$.

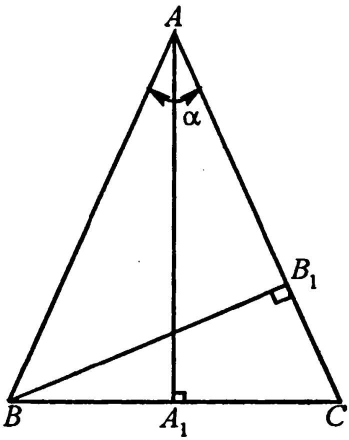


Рис. 3.6

Используя условие, имеем

$$\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + a\cos\frac{\alpha}{2} = l, \text{ или } \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\left(1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\right) = l,$$

т. е.

$$a = \frac{2l\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Окончательно находим

$$AC=\frac{l\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{l}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{l}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha}=$$

$$=\frac{l}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\alpha}=\frac{l}{2\sin\frac{\pi+\alpha}{4}\cos\frac{\pi-3\alpha}{4}}.$$

3.2. Указание. Выразить боковые стороны треугольника через a и α, а затем воспользоваться формулой (1.35), связывающей длину медианы треугольника с длинами его сторон.

Ответ: $\frac{a}{4}\sqrt{9+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

3.3. По условию, $AB=AC$, $BC=a$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABB_1=\angle B_1BC$ (рис. 3.7). Имеем $\angle ABC=\angle ACB=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$, $\angle B_1BC=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}$,

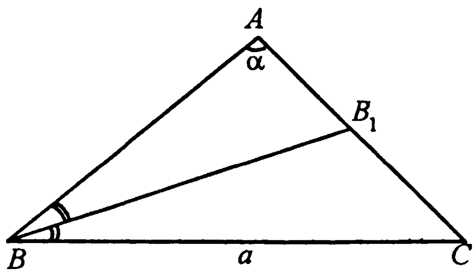


Рис. 3.7

$\angle BB_1C=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{4}$. Из ΔBB_1C по теореме синусов находим

$$\frac{BB_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{4}\right)},\text{ т. е. } BB_1=\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{4}\right)}.$$

3.4. Согласно условию, ΔABC — остроугольный; значит, точка K пересечения высот лежит внутри треугольника (рис. 3.8). Пусть $AD = a$. Из ΔAEC и ΔAKD находим

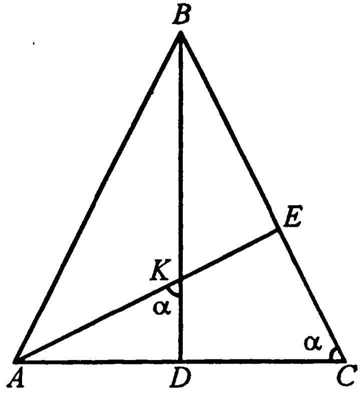


Рис. 3.8

$AE = 2a\sin\alpha$, $AK = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ ($\angle AKD = \angle C$, так как обы угла дополняют угол KAD до 90°). Далее имеем

$$KE = AE - AK = 2a\sin\alpha - \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a(2\sin^2\alpha - 1)}{\sin\alpha} = -\frac{a\cos 2\alpha}{\sin\alpha}.$$

Окончательно получим

$$\frac{AK}{KE} = -\frac{a}{\sin\alpha} : \frac{a\cos 2\alpha}{a\sin\alpha} = -\frac{1}{\cos 2\alpha}.$$

3.5. По условию, $AB = AC$, $S_{\Delta ABC} = S$, $AB_1 = B_1C$, $AC_1 = C_1B$, $BB_1 \cap CC_1 = O$, $\angle BOC = \alpha$ (рис.3.9). Имеем $S_{\Delta BOC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}S$, так как высота ΔBOC, проведенная из O, равна $\frac{1}{3}$ высоты ΔABC, проведенной из A. Для нахождения площади ΔBOC воспользуемся формулой (1.6):

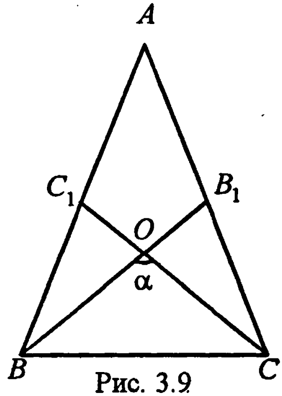


Рис. 3.9

$$S_{\Delta BOC} = \frac{BC^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\alpha} =$$

$$= \frac{BC^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\alpha} = \frac{BC^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{BC^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4}.$$

Таким образом, $\dfrac{BC^2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{4}=\dfrac{1}{3}S$, откуда $BC^2=\dfrac{4S\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{3}$; окончательно получим

$$BC=\frac{2\sqrt{S\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3S\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}}{3}.$$

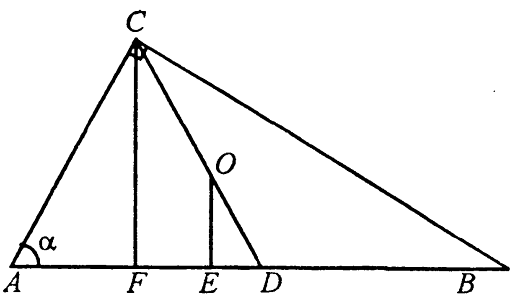


Рис. 3.10

3.6. По условию, $\angle ACB=90°$, $\angle CAB=\alpha$, $S_{\Delta ABC}=S$ (рис. 3.10). Пусть $AB=2c$; тогда $CD=AD=DB=c$. Далее, пусть $AC=b$, O —точка пересечения медиан; тогда $OD=\dfrac{1}{3}CD=\dfrac{c}{3}$. Проведем $CF\perp AB$ и $OE\perp AB$ (отрезок OE — искомый). Так как $\Delta OED\sim$ $\sim\Delta CFD$ и $OD=\dfrac{1}{3}CD$, то $OE=\dfrac{1}{3}CF$, где $CF=b\sin\alpha$ (из ΔAFC), $b=$ $=2c\cos\alpha$ (из ΔABC). Поэтому $CF=2c\cos\alpha\sin\alpha=c\sin 2\alpha$, откуда $OE=\dfrac{c\sin 2\alpha}{3}$. Величину c найдем из равенства $S=\dfrac{1}{2}b\cdot 2c\sin\alpha$; имеем

$$S=bc\sin\alpha;\ S=2c^2\cos\alpha\sin\alpha=c^2\sin 2\alpha,$$

откуда $c=\sqrt{\dfrac{S}{\sin 2\alpha}}$. Окончательно получим

$$OE=\frac{c}{3}\sin 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{3}\sqrt{\frac{S}{\sin 2\alpha}}=\frac{1}{3}\sqrt{S\sin 2\alpha}.$$

3.7. Указание. Воспользоваться формулой (3.3), выражающей длину биссектрисы треугольника.

Ответ: $\alpha = 2\arccos\dfrac{l(a+b)}{2ab}$.

3.8. По условию, в ΔABC имеем $\dfrac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \dfrac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$; требуется доказать, что треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный. Из данного равенства получим

$$\sin A \sin^2 B \cos B - \cos A \sin B \sin^2 A = 0,$$

или

$$\sin A \sin B (\sin B \cos B - \cos A \sin A) = 0.$$

Но $\sin A \neq 0$, $\sin B \neq 0$, так как A и B — углы треугольника; следовательно,

$$\sin 2B - \sin 2A = 0, \text{ или } 2\cos(A+B)\sin(B-A) = 0,$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l}\cos(A+B)=0,\\ \sin(B-A)=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}A+B=\dfrac{\pi}{2},\\ B-A=0.\end{array}\right.$$

Итак, либо $C = \dfrac{\pi}{2}$, т. е. треугольник прямоугольный, либо $A = B$, т. е. треугольник равнобедренный.

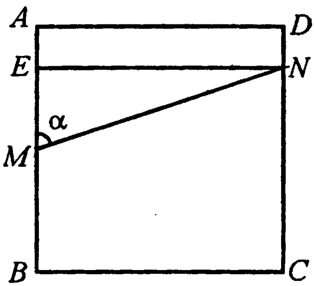


Рис. 3.11

3.9. По условию, $ABCD$ — квадрат, $M \in AB$, $MA = MB$, $\angle AMN = \alpha$, $N \in CD$ (рис. 3.10); требуется найти $S_{AMND} : S_{BMNC}$. Пусть $AB = a$; тогда

$$S_{AMND} = \frac{MA+ND}{2}\cdot a = \frac{a+2ND}{4}\cdot a,$$

$$S_{BMNC} = \frac{MB+NC}{2}\cdot a = \frac{\frac{a}{2}+a-ND}{2}\cdot a = \frac{3a-2ND}{4}\cdot a;$$

$$\frac{S_{AMND}}{S_{BMNC}} = \frac{a+2ND}{3a-2ND}.$$

Проведем $NE \parallel AD$ и из ΔMNE найдем $ME = a\operatorname{ctg}\alpha$. Отсюда $ND = MA - ME = \frac{a}{2} - a\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a - 2a\operatorname{ctg}\alpha}{2}$. Подставив вместо ND найденное значение, получим

$$\frac{S_{AMND}}{S_{BMNC}} = \frac{a + a - 2a\operatorname{ctg}\alpha}{3a - a + 2a\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1 - \operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha + 1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Наименьшее значение угла α достигается в случае совпадения точки N с вершиной D; тогда $\operatorname{tg}\alpha = a : \frac{a}{2} = 2$. С другой стороны, $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Итак, $\operatorname{arc\,tg} 2 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$.

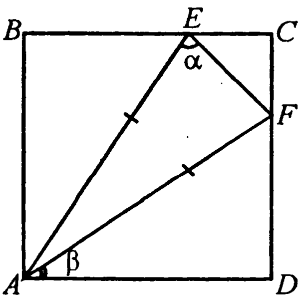


Рис. 3.12

3.10. По условию, имеем: $ABCD$ — квадрат, AEF — равнобедренный треугольник, $AE = AF$, $E \in BC$, $F \in CD$, $\operatorname{tg}\angle AEF = 3$ (рис. 3.12); требуется найти $\cos\angle FAD$. Положим $\angle AEF = \alpha$, $\angle FAD = \beta$; тогда $\angle EAF = 180° - 2\alpha$. Так как $\Delta ABE = \Delta ADF$ (по катету и гипотенузе), то $\beta = \frac{1}{2}(90° - 180° + 2\alpha) = \alpha - 45°$.

Следовательно, $\cos\beta = \cos(\alpha - 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)$. Учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha = 3$, находим $1 + 9 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, откуда $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Итак, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3.11. По условию, $ABCD$ — прямоугольник, $AC = d$, $\dfrac{\angle ACB}{\angle ACD} = \dfrac{m}{n}$ (рис. 3.13). Так как $\angle BCD = \dfrac{\pi}{2}$, то $mx + nx = \dfrac{\pi}{2}$,

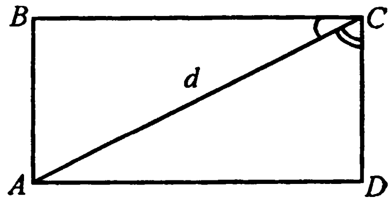


Рис. 3.13

$x = \dfrac{\pi}{2(m+n)}$; значит, $\angle ACB = \dfrac{m\pi}{2(m+n)}$, $\angle ACD = \dfrac{n\pi}{2(m+n)}$.

Из ΔABC и ΔADC находим $BC = d\cos\dfrac{m\pi}{2(m+n)}$,

$DC = d\cos\dfrac{n\pi}{2(m+n)}$. Следовательно,

$$P_{ABCD} = 2\left(d\cos\frac{m\pi}{2(m+n)} + d\cos\frac{n\pi}{2(m+n)}\right) =$$

$$= 4d\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi(m-n)}{4(m+n)} = 2\sqrt{2}d\cos\frac{\pi(m-n)}{4(m+n)}.$$

3.12. По условию, в параллелограмме $ABCD$ имеем: $BF \perp AD$, $BE \perp CD$, $BF = h_1$, $BE = h_2$, $\angle FBE = \alpha$ (рис.3 14). Тогда $\angle ABE = 90°$, а $\angle BAF = \angle FBE$ как острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Проведем $CK \perp AD$;

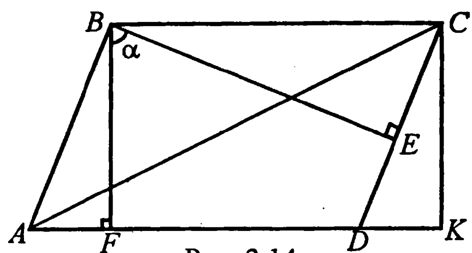


Рис. 3.14

имеем $AC^2 = (AD + DK)^2 + CK^2$ (из ΔAKC), $AD = BC = \dfrac{h_2}{\sin\alpha}$ (из ΔBEC), $DK = CK\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{h_1\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (из ΔCKD). Следовательно,

$$AC^2 = \left(\frac{h_2}{\sin\alpha} + \frac{h_1\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + h_1^{\,2} =$$

$$=\frac{h_2{}^2+2h_1h_2\cos\alpha+h_1{}^2\cos^2\alpha+h_1{}^2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{h_2{}^2+2h_1h_2\cos\alpha+h_1{}^2}{\sin^2\alpha},\ \text{т.е. } AC=\frac{\sqrt{h_1{}^2+2h_1h_2\cos\alpha+h_2{}^2}}{\sin\alpha}.$$

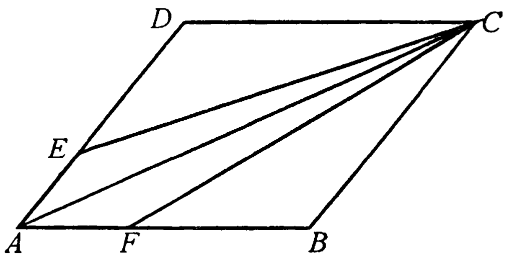


Рис. 3.15

3.13. Высоты треугольников CED и CFB, проведенные из вершины C (рис. 3. 15), имеют равные длины и $S_{\Delta CED}=$ $=S_{\Delta CFB}$ (по условию); поэтому $DE=FB$, а значит, $CE=CF$ и $AE=AF$. Проведем диагональ AC, которая делит четырехугольник $AECF$ на два равных треугольника. Следовательно, $S_{\Delta ACF}=\frac{1}{2}S_{AECF}$. Так как $S_{AECF}=S_{\Delta CFB}$ (по условию), то $S_{\Delta ACF}=\frac{1}{2}S_{\Delta CFB}$, причем треугольники AFC и FCB имеют общую высоту, проведенную из вершины C. Отсюда вытекает, что $AF=\frac{1}{2}FB$, т. е. $FB=\frac{2}{3}a$; кроме того, $\cos B=\cos(180°-C)=$ $=-\cos C=-\frac{1}{4}$. Из ΔFCB по теореме косинусов получим

$$CF=\sqrt{a^2+\frac{4a^2}{9}-2a\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2a}{3}}=\frac{4a}{3}.$$

Итак, $CE+CF=\frac{8a}{3}$.

3.14. По условию, в ромбе $ABCD$ имеем: $\angle BAD=\alpha$, $\angle EAD=\frac{\alpha}{3}$, $\angle BAE=\frac{2\alpha}{3}$ (рис. 3.16). Пусть $CE=m$, $DE=n$;

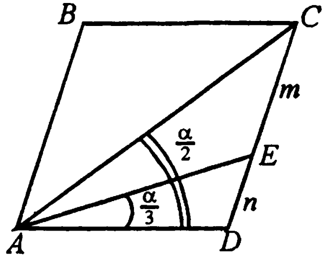


Рис. 3.16

требуется найти $\frac{m}{n}$. В ΔAED $\angle AED=\frac{2\alpha}{3}$ и по теореме синусов $n:\sin\frac{\alpha}{3}=AD:\sin\frac{2\alpha}{3}$, откуда

$$n=\frac{AD\sin\frac{\alpha}{3}}{\sin\frac{2\alpha}{3}}=\frac{AD}{2\cos\frac{\alpha}{3}}.$$

Далее, в ΔACE $\angle CAE=\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{3}=\frac{\alpha}{6}$, $\angle AEC=180°-$ $-\angle AED=180°-\frac{2\alpha}{3}$ и по теореме синусов $m:\sin\frac{\alpha}{6}=AC:$ $:\sin(180°-\frac{2\alpha}{3})$, откуда

$$m=\frac{AC\sin\frac{\alpha}{6}}{\sin\frac{2\alpha}{3}}=\frac{AC\sin\frac{\alpha}{6}}{2\sin\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3}}.$$

Значит,

$$\frac{m}{n}=\frac{AC\sin\frac{\alpha}{6}}{2\sin\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3}}:\frac{AD}{2\cos\frac{\alpha}{3}}=\frac{AC\sin\frac{\alpha}{6}}{AD\sin\frac{\alpha}{3}}=\frac{AC}{2AD\cos\frac{\alpha}{6}}.$$

Наконец, применяя теорему синусов к ΔACD, находим

$$\frac{AC}{AD}=\frac{\sin(180°-\alpha)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=2\cos\frac{\alpha}{2}$$

и окончательно получим $\dfrac{m}{n}=\dfrac{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha}{6}}=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{6}}$.

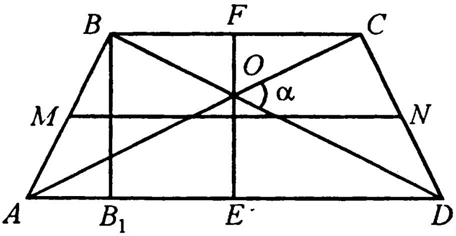


Рис. 3.17

3.15. По условию, в равнобедренной трапеции $ABCD$ имеем: $AB = CD$, $BB_1 \perp AD$, $BB_1 = h$, $AC \cap BD = O$, $\angle COD = \alpha$ (рис. 3.17). Так как $\angle COD$ — внешний угол равнобедренного треугольника AOD, то $\angle OAD=\angle ODA=\dfrac{\alpha}{2}$. Далее находим $B_1D=ED+B_1E=\dfrac{1}{2}AD+$ $+\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}(AD+BC)=MN$, где MN — средняя линия трапеции.

Наконец, из ΔBB_1D получим $B_1D=BB_1\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=h\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

3.16. По условию, в трапеции $ABCD$ имеем: $AB = CD$, $BC \parallel AD$, $M \in AD$, $AM = MD$, $N \in BC$, $BN = NC$, $BE \perp AD$, $BE = h$, $\angle BMC = 2\alpha$,

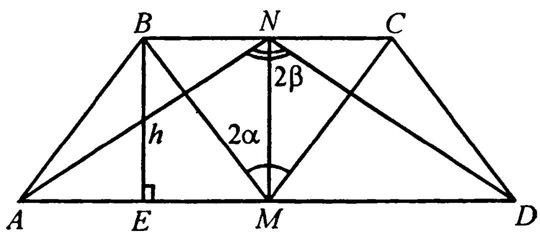


Рис. 3.18

$\angle AND = 2\beta$ (рис. 3.18). Так как $\Delta ABM = \Delta CMD$ и $\Delta ABN = \Delta CDN$ (по двум сторонам и углу между ними), то $BM = MC$, $AN = ND$. Из ΔAMN и ΔBMN находим $AM = h\operatorname{tg}\beta$, $BN = h\operatorname{tg}\alpha$. Следовательно,

$$S_{ABCD}=(AM+BN)h=h^2(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=\frac{h^2\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

При $h = 2$, $\alpha = 15°$ и $\beta = 75°$ получим

$$S_{ABCD} = \frac{4\sin 90°}{\cos 15° \cos 75°} = \frac{4}{\cos 15° \sin 15°} = \frac{8}{\sin 30°} = 16.$$

3.17. По условию, $ABCD$ — трапеция, $AB = CD$, O — центр вписанного в трапецию круга, $OE \perp AD$, $OE = R$, $\angle BAD = \alpha$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (рис. 3.19), требуется найти $P_{ABCD} = AD + 2AB + BC$. Согласно свойству описанного четырехугольника, имеем $AD + BC = 2AB$; значит, $P_{ABCD} = 4AB$. Проведем $BK \parallel OE$; тогда $BK = 2OE = 2R$. Наконец, из ΔBKA находим $AB = \frac{2R}{\sin\alpha}$ и $P_{ABCD} = \frac{8R}{\sin\alpha}$.

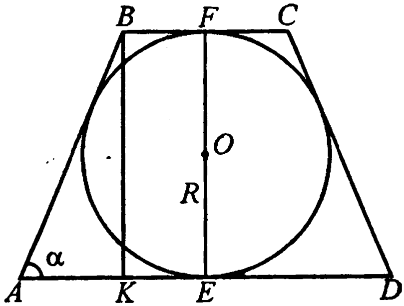


Рис. 3.19

3.18. По условию, $AB = AC$, O — центр окружности, вписанной в ΔABC, $\angle ABC = \alpha$, $OD \perp BC$, $OD = r$, $BO \cap AC = B_1$ (рис. 3. 20). Так как BB_1 — биссектриса $\angle ABC$, то $\angle B_1BC = \frac{\alpha}{2}$, $\angle BB_1C = \pi - \frac{3\alpha}{2}$. Из ΔODB найдем $BD = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Учитывая, что D — точка касания основания BC равнобедренного треугольника ABC с окружностью, получим $BC = 2BD = 2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Наконец, в ΔBB_1C по теореме синусов имеем

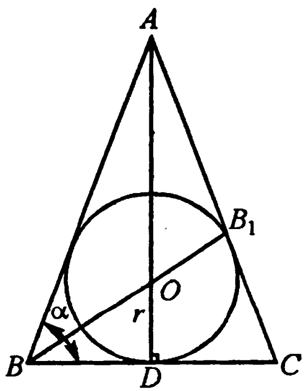


Рис. 3.20

$$\frac{BB_1}{\sin\alpha}=\frac{2r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(\pi-\dfrac{3\alpha}{2}\right)}, \text{ т.е. } BB_1=\frac{2r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\sin\dfrac{3\alpha}{2}}=\frac{4r\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{3\alpha}{2}}.$$

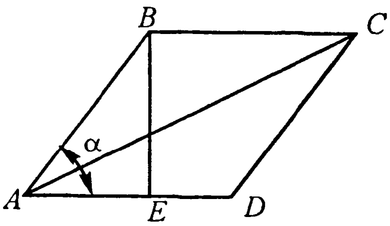


Рис. 3.21

3.19. По условию $ABCD$ — ромб (рис. 3.21), $\angle BAD = \alpha$ ($\alpha < 90°$), r_1 — радиус окружности, вписанной в ромб, r_2 — радиус окружности вписанной в ΔABC. Пусть $AB = a$. Проведем $BE \perp AD$. В ΔBEA имеем $BE = 2r_1 = a \sin\alpha$, откуда $r_1=\dfrac{a\sin\alpha}{2}$. Из ΔABC по теореме косинусов находим $AC=\sqrt{2a^2-2a^2\cos(180°-\alpha)}=2a\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Следовательно,

$$P_{\Delta ABC}=2a+2a\cos\frac{\alpha}{2}=4a\cos^2\frac{\alpha}{4},$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a^2\sin(180°-\alpha)=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha,$$

откуда

$$r_2=\frac{2S_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ABC}}=\frac{a^2\sin\alpha}{4a\cos^2\dfrac{\alpha}{4}}=\frac{a\sin\alpha}{4\cos^2\dfrac{\alpha}{4}}.$$

Итак,

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{a\sin\alpha\cdot 4\cos^2\dfrac{\alpha}{4}}{2a\sin\alpha}=2\cos^2\frac{\alpha}{4}.$$

3.20. Пусть $\angle ADC = \alpha$ — искомый угол (рис. 3.22); тогд $\angle ABC = 180° - \alpha$. В ΔADC и ΔABC по теореме косинусов имеем

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\alpha,$$
$$AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(180° - \alpha) =$$
$$= c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha,$$

т. е.

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

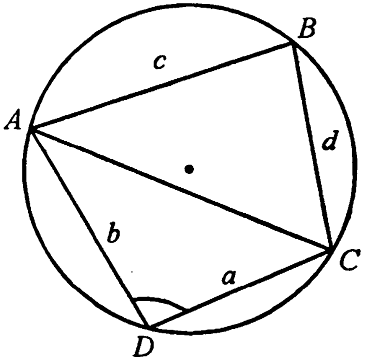


Рис. 3.22

3.21. По условию, $\angle BAC = \alpha$, $AB = AC$, $AO = R$ (рис. 3.23). Тогда $\cup BC = 2\alpha$, $\cup AB = \cup AC = \dfrac{2\pi - 2\alpha}{2} = \pi - \alpha$. Искомая площадь части круга $S_{BAC} = S_{\text{сект}.BOC} + 2S_{\Delta OAC}$. Но

$$S_{\text{сект}.BOC} = \frac{1}{2}R^2 \cdot 2\alpha = R^2\alpha$$

(по формуле (1.34));

$$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}R^2 \sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha$$

(по формуле (1.2)). Итак,

$$S_{BAC} = R^2\,\alpha + R^2\sin\alpha = R^2(\alpha + \sin\alpha).$$

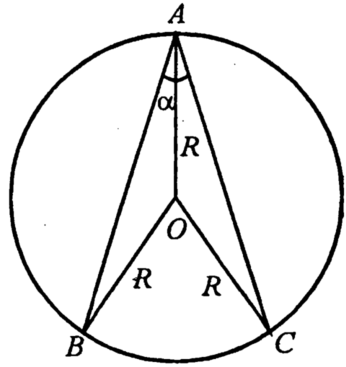


Рис. 3.23

3.22. Имеем $\cup AC = \cup CB = \dfrac{\alpha}{2}$ (рис. 3.24), $CD = CE = DE = a$, $S_{\Delta DCE} = S$, $OB = OC = R$ — искомая величина.

Из равенства $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (см. формулу (1.18)) находим $a = 2\sqrt{\dfrac{S}{\sqrt{3}}}$. Следовательно,

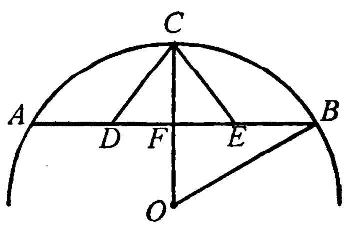


Рис. 3.24

$CF = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{\frac{S}{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{S\sqrt{3}}$. Далее, в ΔOFB имеем $OF = OB\cos\frac{\alpha}{2} = R\cos\frac{\alpha}{2}$. Так как $OF + CF = R$, то $R\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{S\sqrt{3}} = R$, откуда

$$R = \frac{\sqrt{S\sqrt{3}}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{S\sqrt{3}}}{2\sin^2\frac{\alpha}{4}}.$$

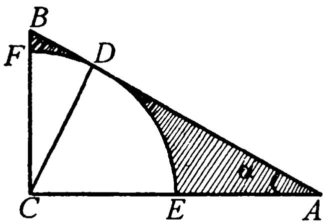


Рис. 3.25

3.23. По условию, D — точка касания вписанной в прямоугольный треугольник ABC дуги FE окружности с центром C (рис. 3.25). Значит, $CD \perp AB$ и $CD = R$, где R — радиус окружности. Требуется найти

$$\frac{S_{ADE}}{S_{BDF}} = \frac{S_{\Delta DAC} - S_{\text{сект. } EDC}}{S_{\Delta DBC} - S_{\text{сект. } FDC}}.$$

Так как $\angle BAC = \alpha$ (по условию), то $\angle ACD = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle BCD = \alpha$, откуда $AD = CD \operatorname{ctg}\alpha = R\operatorname{ctg}\alpha$, $BD = CD \operatorname{tg}\alpha = R\operatorname{tg}\alpha$. Тогда $S_{\Delta DAC} = \frac{1}{2}R^2\operatorname{ctg}\alpha$, $S_{\Delta DBC} = \frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}\alpha$. Далее, $S_{\text{сект.} EDC} = \frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $S_{\text{сект.} FDC} = \frac{1}{2}R^2\alpha$. Отсюда

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}R^2\left(\operatorname{ctg}\alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) \quad S_{BDF} = \frac{1}{2}R^2(\operatorname{tg}\alpha - \alpha).$$

и окончательно получим $\frac{S_{ADE}}{S_{BDF}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \alpha}$.

3.24. На рис. 3.26 изображен квадрат $ABCD$, наклоненный к плоскости γ, проходящей через его сторону CD. Проведем $AL \perp \gamma$;

тогда DL — проекция AD на плоскость γ. Так как $AD \perp DC$, то и $LD \perp DC$ и, следовательно, ADL — линейный угол двугранного угла между плоскостью квадрата $ABCD$ и плоскостью γ, т. е. $\angle ADL = \alpha$.

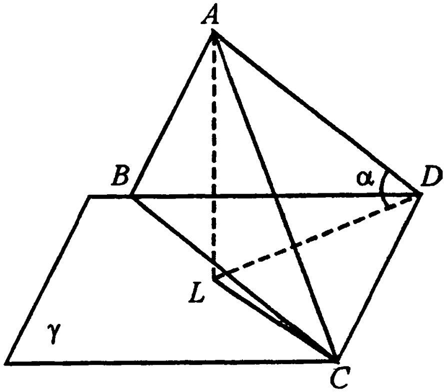


Рис. 3.26

Пусть a — сторона квадрата. Проведем диагональ AC квадрата; тогда $AC = a\sqrt{2}$. Требуется найти $\angle ACL$, где CL — проекция AC на плоскость γ. Из ΔALD имеем $AL = a \sin\alpha$, а из ΔALC находим

$$\sin\angle ACL = \frac{AL}{AC} = \frac{a\sin\alpha}{a\sqrt{2}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}},$$

т. е. $\angle ACL = \arcsin\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}$.

3.25. По условию, $\gamma_1 \cap \gamma_2 = l$, двугранный угол l равен α, $AB \in \gamma_1$, $(\widehat{l;\ AB}) = \beta$; требуется найти $(\widehat{\gamma_2;\ AB})$ (рис. 3.27). Проведем $AO \perp \gamma_2$, $AC \perp l$; тогда $\angle ACO = \alpha$ (как линейный угол двугранного угла ABC), $\angle ABC = \beta$. Так как OB — проекция AB на γ_2, то $\angle ABO$ — искомый угол. Пусть $AO = a$; тогда $AC = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ (из ΔAOC),

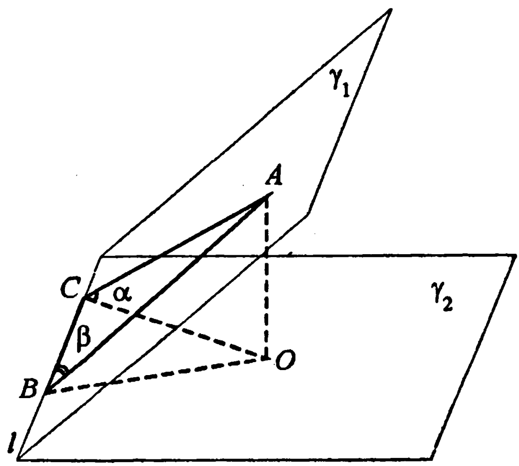


Рис. 3.27

а в ΔACB имеем $AB = \dfrac{AC}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin\alpha\sin\beta}$. Наконец, из ΔAOB находим $\sin\angle ABO = \dfrac{AO}{AB} = \sin\alpha\sin\beta$. Итак, $\angle ABO = \arcsin(\sin\alpha\,\sin\beta)$.

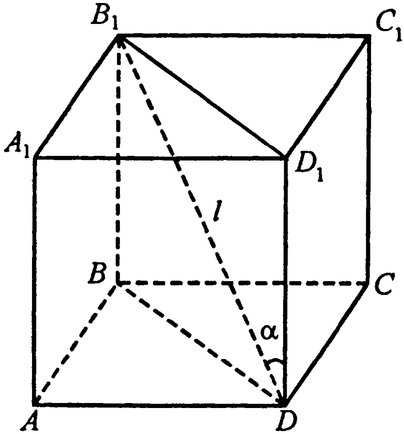


Рис. 3.28

3.26. По условию, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $B_1D = l$, $\angle B_1DD_1 = \alpha$, $P_{ABCD} = P$ (рис. 3.28). Из ΔB_1D_1D находим $DD_1 = l\cos\alpha$, а $D_1B_1 = DB = l\sin\alpha$. Положим $AB = x$, $AD = y$; тогда приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 2x+2y=P, \\ x^2+y^2=l^2\sin^2\alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{P}{2}, \\ x^2+y^2=l^2\sin^2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2xy+y^2=\dfrac{P^2}{4}, \\ x^2+y^2=l^2\sin\alpha. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$xy=\frac{P^2-4l^2\sin^2\alpha}{8}.$$

Итак,

$$V_{\text{пар}}=\frac{P^2-4l^2\sin^2\alpha}{8}\cdot l\cos\alpha=\frac{l(P^2-4l^2\sin^2\alpha)\cos\alpha}{8}.$$

3.27. Из условия $m \le n$ следует, что плоскость $ADNM$ пересекает грань куба BB_1C_1C (а не $A_1B_1C_1D_1$) по прямой $MN \parallel AD$ и, значит, MN перпендикулярна грани DD_1C_1C (рис. 3.29). Пусть ребро куба равно a, а $\angle NDC = \alpha$. Так как угол NDC является линейным углом искомого угла между плоскостью сечения и нижним основанием куба, то $NC = DC\ \mathrm{tg}\alpha = a\ \mathrm{tg}\alpha$ (из ΔDNC) и, значит,

$S_{\Delta DCN} = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{tg}\alpha$. Фигура $DNCAMB$ — это прямая треугольная призма с основанием DNC. Ее объем

$$V_1 = S_{\Delta DNC} \cdot MN = \frac{1}{2} a^3 \operatorname{tg}\alpha.$$

Поскольку объем куба $V = a^3$, находим $V - V_1 = a^3 (1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha)$. Согласно условию, имеем

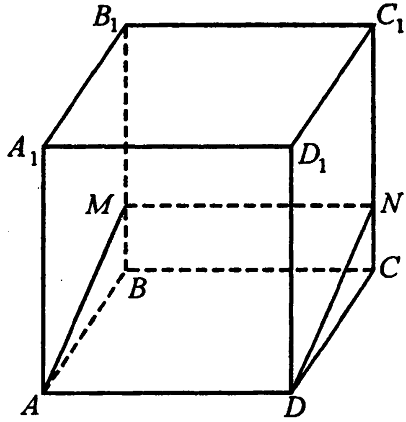


Рис. 3.29

$$\frac{V_1}{V - V_1} = \frac{m}{n}; \quad \frac{m}{n} = \frac{a^3 \operatorname{tg}\alpha}{2} : a^3 (1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha); \quad \frac{m}{n} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2 - \operatorname{tg}\alpha};$$

$$\frac{n}{m} = \frac{2 - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}; \quad \frac{m+n}{m} = \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}; \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{2m}{m+n},$$

откуда $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2m}{m+n}$.

3.28. По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $AC = CB$, $\angle ACB = \alpha$, $A_1B = l$, $\angle A_1BA = \beta$ (рис. 3.30), требуется найти $V_{\text{пр}} = S_{\Delta ABC} \cdot A_1A$. Из ΔA_1AB находим $AA_1 = l \sin\beta$, $AB = l\cos\beta$, а из ΔADC получим

$$DC = AD \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} l \cos\beta \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

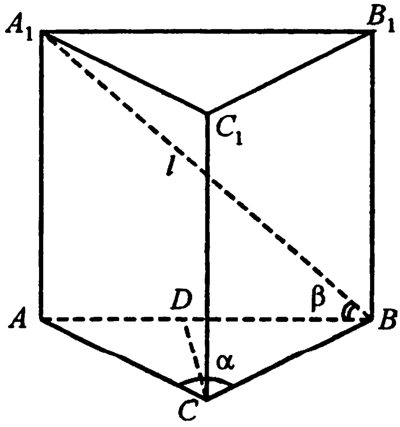


Рис. 3.30

$$V_{\text{пр}} = \frac{1}{2} l \cos\beta \cdot \frac{1}{2} l \cos\beta \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot l \sin\beta =$$

$$= \frac{1}{4} l^3 \cos^2\beta \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \sin\beta = \frac{1}{8} l^3 \sin 2\beta \cos\beta \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

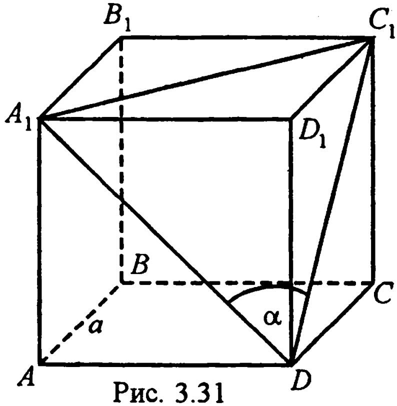


Рис. 3.31

3.29. По условию, в правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеем $AB = a$, $\angle A_1DC_1 = \alpha$ (рис. 3.31). Так как A_1C_1 — диагональ квадрата, то $A_1C_1 = a\sqrt{2}$. Пусть $A_1D = x$; тогда $DC_1 = x$. Из ΔA_1DC_1 по теореме косинусов находим

$$2a^2 = 2x^2 - 2x^2\cos\alpha, \text{ или } 2a^2 = 4x^2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

откуда $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Далее, из ΔDD_1A_1 получим

$$DD_1 = \sqrt{\frac{2a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - a^2} = \frac{a\sqrt{2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Итак, $V_{\text{пр}} = \dfrac{a^3\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

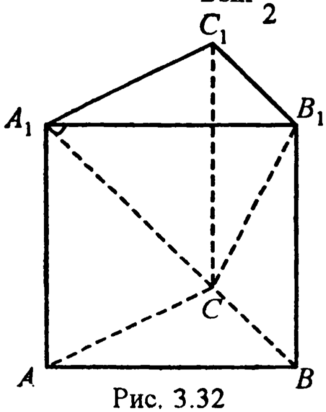


Рис. 3.32

3.30. По условию, в призме $ABCA_1B_1C_1$ имеем $AB = BC = AC = AA_1$, т. е. все боковые грани призмы — равные квадраты (рис. 3.32). Пусть a — сторона этих квадратов; требуется найти угол между диагональю A_1C и стороной AB. Так как $A_1B_1 \parallel AB$ и A_1B_1 имеет общую точку с A_1C, то искомым является угол CA_1B_1. Обозначим его через α и рассмотрим равнобедренный треугольник

CA_1B_1, в котором $CA_1 = CB_1 = a\sqrt{2},\ A_1B_1 = a,\ \angle A_1CB_1 = 180° - 2\alpha$. По теореме синусов имеем

$$\frac{A_1B_1}{\sin(180° - 2\alpha)} = \frac{CB_1}{\sin\alpha};\ \frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{a\sqrt{2}}{\sin\alpha};\ \frac{1}{2\cos\alpha} = \sqrt{2};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4};\ \alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3.31. По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, $AA_1 = H$, $AN = NB$, $BM = MC$; $(\widehat{(A_1C_1M);(ABC)}) = \alpha$ (рис. 3.33). Проведем $BE \perp AC$ и $EF \parallel AA_1$; $\angle FOE = \alpha$ как линейный угол двугранного угла. Пусть $BE \cap MN = O$; тогда $FO \perp MN$ (по теореме о трех перпендикулярах). Сечение A_1NMC_1 — трапеция, так как $MN \parallel AC$. Из ΔFEO находим

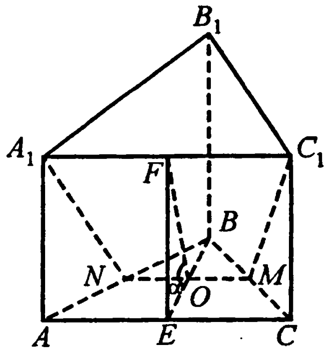


Рис. 3.33

$$FO = \frac{FE}{\sin\alpha} = \frac{H}{\sin\alpha},\ EO = H\,\mathrm{ctg}\,\alpha,$$

откуда $BE = 2H\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. Из ΔBEC получим

$$EC = MN = BE\,\mathrm{ctg}\,60° = 2H\,\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2H\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{3};$$

значит, $AC = A_1C_1 = \dfrac{4H\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{3}$. Итак,

$$S_{A_1NMC_1} = \frac{AC + MN}{2} \cdot FO = H\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \frac{H}{\sin\alpha} = \frac{H^2\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sin\alpha}.$$

3.32. По условию, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма, $ABCD$ — ромб, $\angle BAD = \alpha$ $(\alpha < 90°)$, $AA_1 : AB = k$, $C_1E = EC$, $ADEF$ — сечение призмы (рис. 3.34); требуется найти $(\widehat{(ABC);(FAD)})$. Пусть $AB = a$; значит, $AA_1 = ka$. Проведем $BK \perp AD$; тогда $FK \perp AD$ (по теореме о трех перпендикулярах) и $\angle FKB$ —линейный угол между сечением и ос-

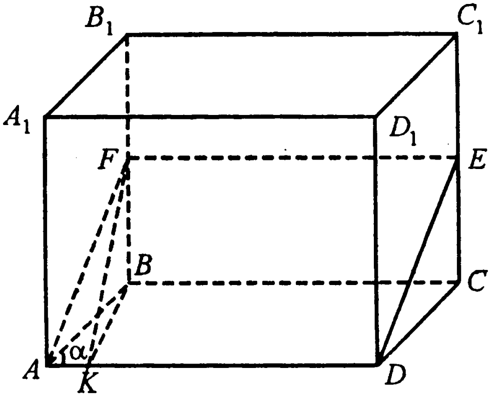


Рис. 3.34

нованием $ABCD$. Из ΔAKB найдем $BK = a\sin\alpha$; так как $EF \parallel AD$, то $FB = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{2}ka$. Наконец, из ΔFBK получим $\operatorname{tg}\angle FKB = \frac{FB}{BK} = \frac{ka}{2a\sin\alpha} = \frac{k}{2\sin\alpha}$, откуда $\angle FKB = \operatorname{arctg}\frac{k}{2\sin\alpha}$.

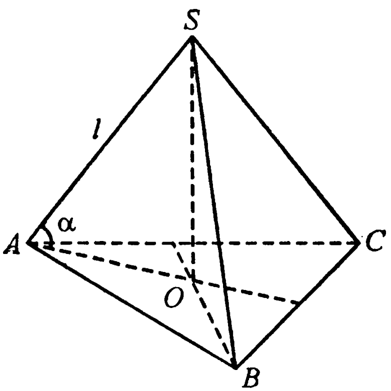


Рис. 3.35

3.33. По условию, $SABC$ — правильная треугольная пирамида, $SA = l$, $SO \perp (ABC)$, $\angle SAO = \alpha$ (рис. 3.35). Из ΔSAO находим $SO = l\sin\alpha$, $AO = l\cos\alpha$, откуда $AB = \sqrt{3}AO = l\sqrt{3}\cos\alpha$. Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}l^2\cos^2\alpha}{4}.$$

Окончательно получим

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot SO = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}l^2\cos^2\alpha}{4}\cdot l\sin\alpha = \frac{l^3\sqrt{3}\sin 2\alpha\cos\alpha}{8}.$$

3.34. Так как боковые ребра пирамиды $ABCD$ (рис. 3. 36) одинаково наклонены к плоскости основания, то вершина D проецируется в центр окружности, описанной около треугольника ABC; для прямоугольного треугольника — в середину E гипотенузы AB. Высота DE треугольника ADB является высотой пирамиды. Далее

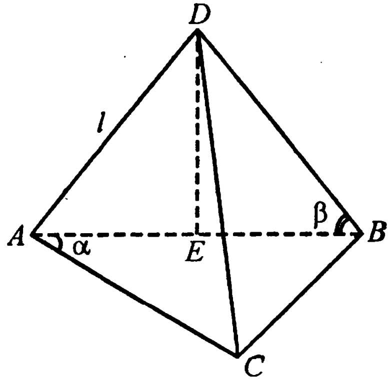


Рис. 3.36

имеем $DE = BE\operatorname{tg}\beta = \dfrac{c}{2}\operatorname{tg}\beta$,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot BC = \frac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha.$$

Окончательно находим

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha\cdot\frac{c}{2}\operatorname{tg}\beta = \frac{c^3}{24}\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

3.35. По условию, $SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — ромб, $\angle BAD = \alpha$ ($\alpha < 90°$), $AB = a$,

$$(\widehat{(SAB); (ABC)}) = (\widehat{(SBC); (ABC)}) = (\widehat{(SCD); (ABC)}) = (\widehat{(SDA); (ABC)}) = \beta,$$

$SO\perp(ABC)$ (рис. 3.37). Проведем апофемы пирамиды SE, SF, SK, SL; тогда $OE\perp AB$, $OF\perp BC$, $OK\perp CD$, $OL\perp AD$ (по теореме о трех перпендикулярах) и, значит, $\angle SEO = \angle SFO = \angle SKO = \angle SLO = \beta$. Далее имеем

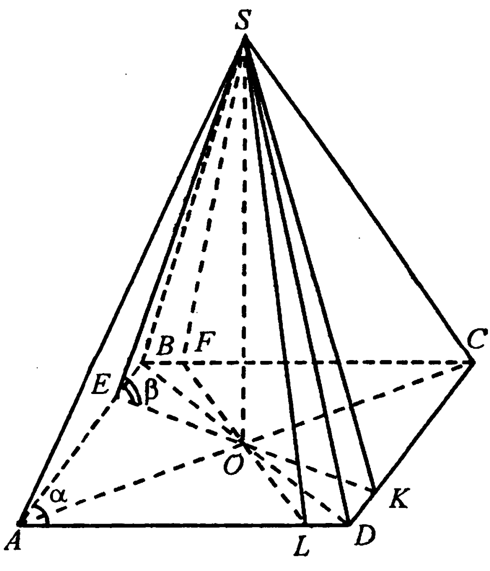


Рис. 3.37

$S_{\text{бок}} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos\beta} = \dfrac{a^2 \sin\alpha}{\cos\beta}$. Наконец,

$$S_{\text{полн}} = \frac{a^2 \sin\alpha}{\cos\beta} + a^2 \sin\alpha = \frac{a^2 \sin\alpha\,(1+\cos\beta)}{\cos\beta} = \frac{2a^2 \sin\alpha \cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}.$$

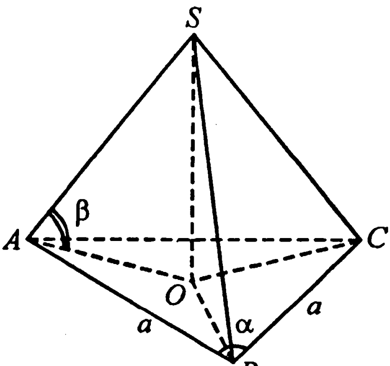


Рис. 3.38

3.36. По условию, $SABC$ — треугольная пирамида, $AB = BC = a$, $\angle ABC = \alpha$, $SO \perp (ABC)$, $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \beta$ (рис. 3.38). Так как $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC$ (по катету и прилежащему углу), то $OA = OB = OC$, т. е. O — центр окружности, описанной около ΔABC. Пусть $OA = R$; тогда

$$AB = 2R \sin \angle ACB,$$

или

$$a = 2R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2R \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, $R = \dfrac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Далее, из ΔSOA находим $SO = \dfrac{a \operatorname{tg}\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Окончательно получим

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{6} a^2 \sin\alpha \frac{a \operatorname{tg}\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{6} a^3 \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\beta.$$

3.37. По условию, $DABC$ — пирамида, ABC — правильный треугольник, $(ABD) \perp (ABC)$, $(BCD) \perp (ABC)$, $\angle ADC = \alpha$, $AB = a$ (рис. 3.39). Требуется найти высоту призмы, основанием которой является ΔABC, причем $V_{\text{пр}} = V_{\text{пир}}$. Высота призмы совпадает с ребром DB, так как перпендикуляр, опущенный из D на (ABC), должен принадлежать и (ABD), и (CBD). Проведем $DK \perp AC$; так как ΔADC — равнобедренный, то $KA = KC$. Из ΔDKC находим, что $DK = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, а из ΔDBK — что

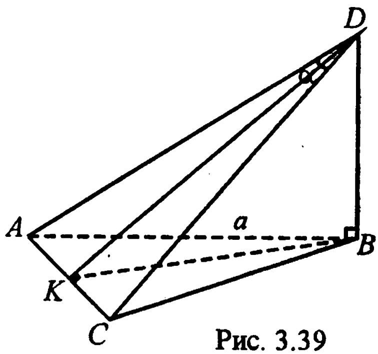


Рис. 3.39

$$DB = \sqrt{DK^2 - BK^2} = \sqrt{\frac{a^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{4} - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 3}.$$

Следовательно,

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 3} = \frac{a^3}{24}\sqrt{3\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 3\right)}.$$

Поскольку $V_{\text{пир}} = V_{\text{пр}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}H$, имеем

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H = \frac{a^3}{24}\sqrt{3\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 3\right)},$$

откуда

$$H = \frac{a}{6}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}} = \frac{a\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)}}{3\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

3.38. По условию, $DABC$ — пирамида, $\angle ACB = 90°$, $AD \perp (ABC)$, $\angle DBA = \alpha$, $\angle DBC = \beta$ $(\alpha < \beta)$ (рис 3.40). Пусть $AD = h$; тогда из ΔADB находим $AB = h\operatorname{ctg}\alpha$, $DB = \frac{h}{\sin\alpha}$. Так как $BC \perp AC$, то $DC \perp BC$ и из ΔDCB получим $BC = DB\cos\beta = \frac{h\cos\beta}{\sin\alpha}$. Итак, в ΔABC имеем

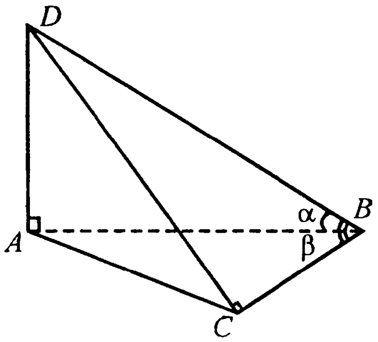


Рис. 3.40

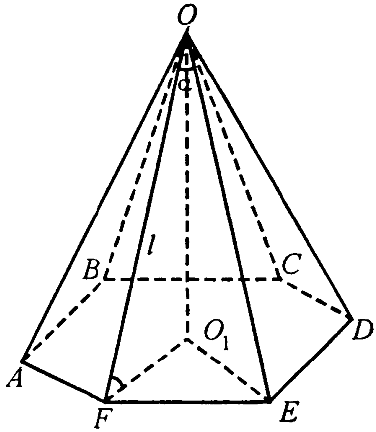


Рис. 3.41

$$\sin\angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{h\cos\beta}{\sin\alpha\cdot h\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha},$$

откуда

$$\angle A = \arcsin\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},\ \angle B = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

3.39. По условию, $OABCDEF$ — правильная шестиугольная пирамида, $OO_1 \perp (ABC)$, $\angle FOE = \angle OFO_1$ (рис. 3.41). Положим $OF = l$ и $\angle FOE = \alpha$; тогда $FE = \sqrt{2l^2 - 2l^2\cos\alpha} = 2l\sin\frac{\alpha}{2}$. Учитывая, что $O_1F = FE$, в ΔOO_1F имеем

$$\cos\alpha = \frac{2l\sin\frac{\alpha}{2}}{l};\ -2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1 = 2\sin\frac{\alpha}{2};\ 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2} - 1 = 0;$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2};\ \frac{\alpha}{2} = \arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2};\ \alpha = 2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

3.40. По условию, $SABC$ — треугольная пирамида, $\frac{AC}{AB}=\frac{AC}{BC}=$ $=\frac{AC}{SA}=\frac{AC}{SB}=\frac{AC}{SC}=k$ (рис. 3.42). Так как

$$AB=BC=SA=SB=SC=\frac{AC}{k},$$

то $\Delta ASB=\Delta BSC$ (по трем сторонам). Проведем $AD\perp SB$ и соединим точки D и C. Тогда $\Delta ASD=$ $=\Delta SDC$ (поскольку $SA=SC$, сторона SD — общая и $\angle ASD=$ $=\angle DSC$), откуда следует, что $\angle SDC=\angle SDA=90°$. Поэтому $\angle ADC$ — линейный угол двугранного угла $ASDC$, т. е. искомый угол. Пусть $\angle ADC=x$. Из ΔADC по теореме косинусов находим $AC^2=$ $=2AD^2-2AD^2\cos x$, где

$$AD=\frac{\sqrt{3}SA}{2}=\frac{\sqrt{3}AC}{2k},$$ так как ΔASB — равносторонний. Значит,

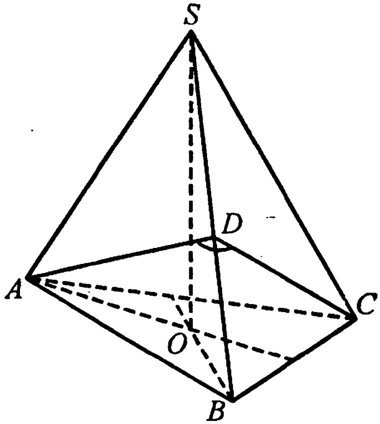


Рис. 3.42

$$AC^2=2\cdot\frac{3AC^2}{4k^2}(1-\cos x);\ 1-\cos x=\frac{2k^2}{3};\ \ 2\sin^2\frac{x}{2}=\frac{2k^2}{3};$$

$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{k^2}{3}}=\frac{k\sqrt{3}}{3}.$$

Итак, $x=2\arcsin\frac{k\sqrt{3}}{3}$, где $0<\frac{k\sqrt{3}}{3}<1$, т. е. $0<k<\sqrt{3}$.

3.41. По условию, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида, $AB=a$, $OO_1\perp(ABC)$, $B_1E\,||\,D_1F\,||\,OO_1$, $\angle D_1DE=\alpha$, $\angle B_1DE=\beta$ (рис. 3.43). Пусть $A_1B_1=x$; тогда $B_1D_1=x\sqrt{2}$, $BD=a\sqrt{2}$. Имеем

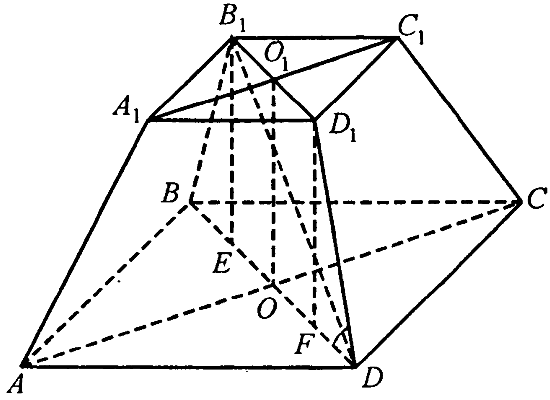


Рис. 3.43

$$FD = OD - OF = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{(a-x)\sqrt{2}}{2},$$

$$ED = OD + OE = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{(a+x)\sqrt{2}}{2}.$$

Из ΔD_1FD находим, что $D_1F = FD\operatorname{tg}\alpha = \frac{(a-x)\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$, а из ΔB_1ED — что $B_1E = ED\operatorname{tg}\beta = \frac{(a+x)\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\beta$. Так как $D_1F = B_1E = OO_1$, то

$$(a-x)\operatorname{tg}\alpha = (a+x)\operatorname{tg}\beta, \text{ или } x(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha) = a(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta),$$

т. е. $x = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$. Итак, $S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{a^2\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}$.

3.42. По условию, $\angle BAC = \alpha$, $\angle BAB_1 = \beta$, $AB_1 = l$ (рис. 3.44). Из ΔBAB_1 находим $AB = l\cos\beta$, $BB_1 = l\sin\beta$. Так как $OA = OB$ (радиусы основания), то ΔAOB — равнобедренный и α — угол при его основании AB. Значит, $OB = \frac{1}{2}AB : \cos\alpha = \frac{l\cos\beta}{2\cos\alpha}$. Итак,

$$V = \pi \cdot OB^2 \cdot BB_1 = \pi \frac{l^2 \cos^2 \beta}{4\cos^2 \alpha} \cdot l \sin\beta =$$

$$= \frac{\pi l^3 \cos^2 \beta \sin\beta}{4\cos^2 \alpha} = \frac{\pi l^3 \sin 2\beta \cos\beta}{8\cos^2 \alpha}.$$

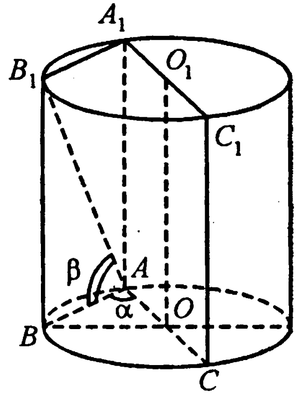


Рис. 3.44

3.43. Пусть ΔABC — осевое сечение конуса (рис. 3.45). Тогда разверткой боковой поверхности конуса является сектор круга, радиус которого R равен образующей BC конуса; длина дуги сектора (l) равна длине окружности основания конуса, т. е. $l = 2\pi \cdot OC$. Воспользуемся формулой $l = r\alpha$, где r — радиус сектора и α — радианная мера центрального угла, опирающегося на дугу сектора. Имеем $2\pi \cdot OC = BA \cdot \alpha$, откуда $\frac{OC}{BA} = \frac{\alpha}{2\pi}$. Так как $\frac{OC}{BA} = \sin\angle OBC$, то $\angle OBC = \arcsin\frac{\alpha}{2\pi}$, т. е. $\angle ABC = 2\arcsin\frac{\alpha}{2\pi}$.

3.44. По условию, SAK — конус, SO —его высота, BK — хорда, $BK = a$, $\smile BnK = \alpha$, $\angle OSK = \beta$ (рис. 3.46). Так как $\smile BnK = \alpha°$, то

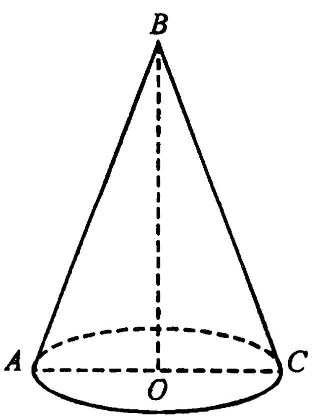


Рис. 3.45

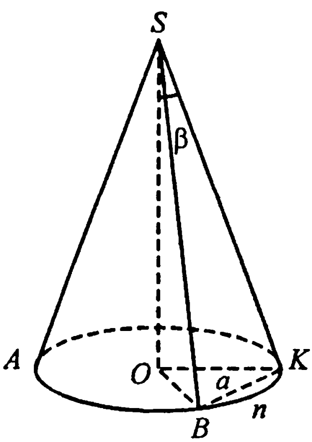


Рис. 3.46

$\angle BOK = \alpha°$. Пусть R — радиус основания конуса; тогда в ΔOBK имеем $a = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$, откуда $R = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Из ΔSOK находим $SO = OK\operatorname{ctg}\beta = \frac{a\operatorname{ctg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Итак,

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot SO = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{a\operatorname{ctg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a^3\operatorname{ctg}\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}.$$

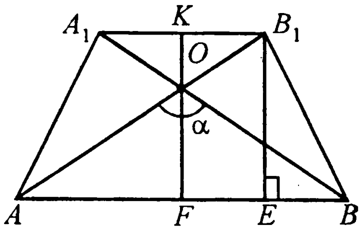


Рис. 3.47

3.45. Пусть AA_1B_1B — осевое сечение усеченного конуса, где AA_1 и BB_1 — его образующие, AB и A_1B_1 — диаметры его оснований, F и K — центры этих оснований, $AB_1 \cap A_1B = O$ (рис. 3.47). Согласно условию, $AO : OB_1 = 2 : 1$, $\angle AOB = \alpha$, $AB_1 = l$. Имеем $AO = \frac{2}{3}l$, $OB_1 = \frac{1}{3}l$, $\angle OAB = \angle OBA = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Проведем $B_1E \perp AB$ и из ΔAB_1E находим $B_1E = l\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = l\cos\frac{\alpha}{2}$. Затем из ΔOFA получим, что $AF = AO\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}l\sin\frac{\alpha}{2}$, и, наконец, из ΔOKB_1 — что $KB_1 = OB_1\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}l\sin\frac{\alpha}{2}$. Итак,

$$V_{\text{ус.кон}} = \frac{\pi}{3}l\cos\frac{\alpha}{2}\left(\frac{4}{9}l^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{9}l^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{9}l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{7\pi}{27}l^3\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{7\pi l^3}{54}\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}.$$

3.46. По условию, $S_{\text{осн}} : S_{\text{бок.пов}} = S_{\text{бок.пов}} : S_{\text{полн}}$; требуется найти $\angle CBO = x$ (рис. 3.48). Пусть $OC = R$; тогда $S_{\text{осн}} = \pi R^2$, $S_{\text{бок.пов}} = \pi Rl$, где $l = BC$. Следовательно,

$$\frac{\pi R^2}{\pi Rl} = \frac{\pi Rl}{\pi R^2 + \pi Rl}, \text{ или } \frac{R}{l} = \frac{l}{R+l}.$$

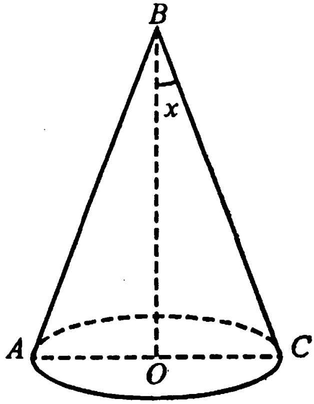


Рис. 3.48

Так как $R = l \sin x$, то

$$\frac{\sin x}{1} = \frac{1}{\sin x + 1}; \ \sin^2 x + \sin x - 1 = 0; \ \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Годится только значение $\sin x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, откуда $x = \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3.47. Пусть V_1 — объем большего конуса, а V_2 — объем меньшего конуса (т. е. искомый). По условию, $V_1 - V_2 = V$, $AB = AC$, где B и C — точки касания, $\angle BAC = \alpha$ (рис. 3.49). Так как $AB = AC$, то $\angle OAB = \angle OAC = \dfrac{\alpha}{2}$ и из ΔOAB находим

$OB = OA \sin\dfrac{\alpha}{2}$. Далее имеем

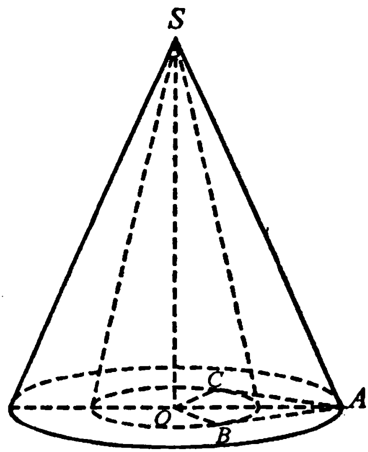


Рис. 3.49

$$\frac{1}{3}\pi OA^2 \cdot SO - \frac{1}{3}\pi OA^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot SO = V; \ \frac{1}{3}\pi OA^2 \cdot SO\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = V;$$

$$V_1\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = V; \ V_1 = \frac{V}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Окончательно получим

$$V_2 = V_1 - V = \frac{V}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} - V = V\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

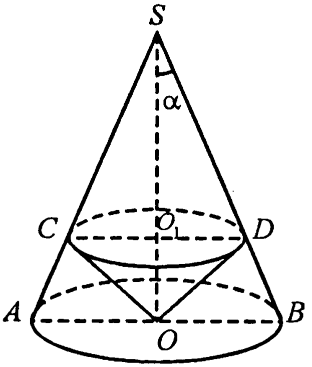


Рис. 3.50

3.48. По условию, $SO = H$, $OC \perp AS$, $OD \perp BS$, $\angle OSB = \alpha$ (рис. 3. 50); требуется найти объем конуса ODC. Очевидно, что $\angle ODO_1 = \angle OSB$ как острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Из ΔSOD находим $OD = H\sin\alpha$; далее, из ΔOO_1D получим

$$OO_1 = OD\sin\alpha = H\sin^2\alpha,$$

$$O_1D = OD\cos\alpha = H\sin\alpha\cos\alpha.$$

Окончательно имеем

$$V = \frac{1}{3}\pi O_1D^2 \cdot OO_1 = \frac{1}{3}\pi H^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha \cdot H\sin^2\alpha =$$

$$= \frac{1}{3}\pi H^3\sin^4\alpha\cos^2\alpha.$$

3.49. По условию, $ABCD$ — ромб, $AB = a$, $\angle BAD = \alpha$ ($\alpha < 90°$), MN — ось вращения, $MN \parallel AC$, $B \in MN$ (рис. 3.51); требуется найти $V_{\text{т.вр}} = 2(V_{BECD} - V_{BEC})$. Трапеция $BECD$ при вращении образует усеченный конус, а треугольник BEC — конус. Имеем

$$V_{\text{т.вр}} = 2\left(\frac{1}{3}\pi \cdot BE\,(BD^2 + BD\cdot EC + EC^2 - EC^2)\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi BE \cdot BD\,(BD + EC).$$

Но $BD = 2BO = 2EC$; поэтому $V_{\text{т.вр}} = 4\pi BE \cdot EC^2$. Учитывая, что $\angle CBE = \frac{\alpha}{2}$, из ΔBEC находим $EC = a\sin\frac{\alpha}{2}$, $BE = a\cos\frac{\alpha}{2}$. Итак,

$$V_{\text{т.вр}} = 4\pi a \cos\frac{\alpha}{2}\cdot a^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\pi a^3 \sin\alpha \sin\frac{\alpha}{2}.$$

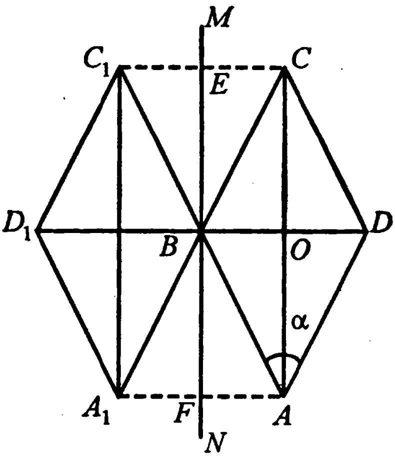


Рис. 3.51

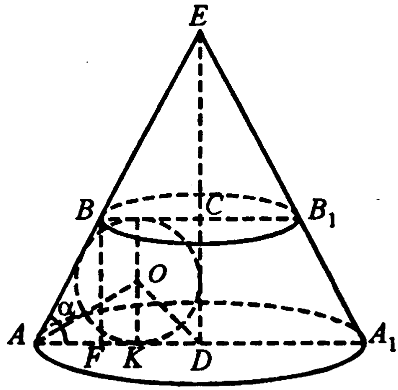


Рис. 3.52

3.50. По условию, $ABCD$ — трапеция, $CD \perp BC$, $CD \perp AD$, $CD = 2r$ и $\angle BAD = \alpha$ (рис. 3.52). При вращении трапеции вокруг стороны CD получается усеченный конус ABB_1A_1, боковая поверхность которого равна разности между боковыми поверхностями полного конуса AEA_1 и дополнительного конуса BEB_1, т. е.

$$S_{\text{бок}} = \pi AD \cdot AE - \pi BC \cdot BE.$$

Проведем $BF \perp AD$. Так как $AE = \dfrac{AD}{\cos\alpha}$ (из ΔADE), $BE = \dfrac{BC}{\cos\alpha}$ (из ΔBCE), $AF = 2r \operatorname{ctg}\alpha = 2r\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (из ΔAFB), то

$$S_{\text{бок}} = \pi\left(\frac{AD^2 - BC^2}{\cos\alpha}\right) = \frac{\pi}{\cos\alpha}(AD - BC)(AD + BC),$$

т. е.

$$S_{\text{бок}} = \frac{\pi}{\cos\alpha} AF(AD + BC). \qquad (1)$$

Учитывая, что центр O вписанной окружности есть точка пересечения биссектрис AO и OD, получаем $\angle OAK = \dfrac{\alpha}{2}$, $OK = KD = r$,

$$AK = OK\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$ и, следовательно,

$$AD = AK + KD = \frac{r\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + r = \frac{r\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$BC = AD - AF = \frac{r\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{2r\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{r\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{r\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$AD + BC = \frac{r\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{r\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{r\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Подставляя найденные выражения в формулу (1), окончательно получим

$$S_{\text{бок}} = \frac{\pi}{\cos\alpha}\cdot\frac{2r\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot r\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2\pi r^2}{\sin\alpha}\cdot\frac{1 + \sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\pi r^2(1 + \sin\alpha)}{\sin^2\alpha}.$$

3.51. При вращении ромба $ABCD$ вокруг диагонали BD образуются два конуса с общим основанием AC (рис. 3.53). Объем этой фигуры $V_1 = \frac{1}{3}\pi OA^2\,(OB + OD) = \frac{1}{3}\pi OA^2 \cdot BD.$ При вращении того же ромба вокруг стороны DC получается цилиндр ABB_1A_1, из которого удален конус BB_1C, но к которому добавлен конус AA_1D. Так как оба указанных конуса имеют равные объемы (радиусы их оснований BM и AN равны, их высоты CM и CN также равны, что вытекает из равенства треугольников BCM и ADN), то объем V_2 второй фигуры вращения равен объему цилиндра ABB_1A_1, т. е. $V_2 = \pi AN^2 \cdot AB$. По условию,

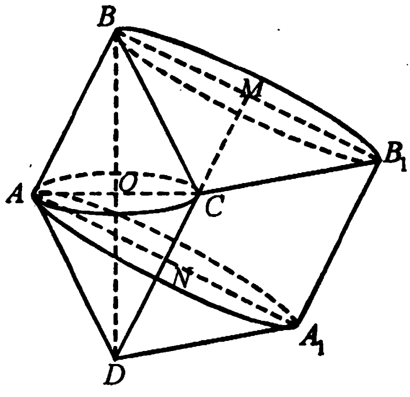


Рис. 3.53

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2\sqrt{5}};\ \frac{\frac{1}{3}\pi OA^2 \cdot BD}{\pi AN^2 \cdot AB} = \frac{1}{2\sqrt{5}};\ \frac{OA^2 \cdot BD}{3AN^2 \cdot AB} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Пусть сторона ромба равна a, а искомый угол ADC равен α. Тогда $\angle ADO = \frac{\alpha}{2}$, $OA = a\sin\frac{\alpha}{2}$ (из ΔAOD), $BD = 2DO = 2a\cos\frac{\alpha}{2}$, $AN = a\sin\alpha$. Следовательно,

$$\frac{a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot 2a\cos\frac{\alpha}{2}}{3a^2\sin^2\alpha\cdot a} = \frac{1}{2\sqrt{5}};\ \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{5}};$$

$$3\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{5};\ \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Наконец, учитывая, что $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$, получаем $\cos\alpha = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$, откуда $\alpha = \arccos\frac{1}{9}$.

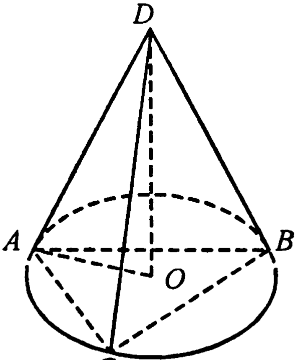


Рис. 3.55

3.52. По условию, DAB — конус, $DABC$ — вписанная в этот конус пирамида, $AD \perp BD$, $AD \perp CD$, $DB \perp DC$, $DO \perp (ABC)$ (рис. 3.54). Так как $DB = DC = DA$, то $\Delta ADB = \Delta ADC = \Delta DBC$ как прямоугольные треугольники, имеющие по два равных катета; следовательно, ΔABC — правильный. Положим $AB = a$; тогда $DA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Из ΔAOD находим

$$\sin\angle ADO = \frac{OA}{DA} = \frac{a\sqrt{3}}{3} : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ т. е. } \angle ADO = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

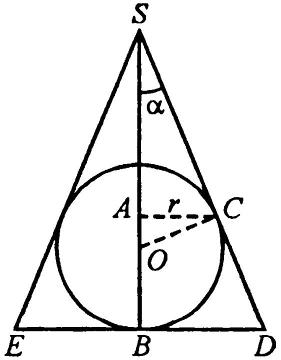


Рис. 3.55

3.53. Изобразим осевое сечение фигуры. В сечении получим ΔSDE, где SD и SE — образующие конуса, ED — диаметр его основания, SB — высота конуса, O — центр большого круга вписанного в конус шара, C — точка касания круга с SD, A — центр окружности, по которой шар касается боковой поверхности конуса (рис. 3.55). По условию, $AC = r$, $\angle BSD = \alpha$. Соединим точки O и C; тогда $OC \perp SD$, $AC \perp SB$; следовательно, $\angle OCA = \angle BSD = \alpha$. Из ΔOAC находим $OC = \frac{r}{\cos\alpha}$, а из ΔOCS получаем $SO = \frac{OC}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin\alpha\cos\alpha}$. Таким образом,

$$SB = SO + OB = SO + OC = \frac{r}{\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{r}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{r}{\sin\alpha\cos\alpha}(1+\sin\alpha) = \frac{2r(1+\sin\alpha)}{\sin 2\alpha}.$$

Далее из ΔSBD получим

$$BD = SB\operatorname{tg}\alpha = \frac{2r(1+\sin\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}.$$

Итак,

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi BD^2 \cdot SB = \frac{1}{3}\pi\frac{r^2(1+\sin\alpha)^2}{\cos^4\alpha}\cdot\frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha\,\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha\cos^5\alpha} = \frac{\pi r^3}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\right)^3 = \frac{\pi r^3\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{3\sin\alpha\cos^2\alpha}.$$

3.54. Осевое сечение фигуры изображается треугольником SAB, в который вписан полукруг MnK; SA и SB — образующие конуса, $SO \perp AB$ — высота конуса; AB — диаметр основания конуса и MK — диаметр полукруга; O — центр основания конуса и полукруга (рис. 3. 56). По условию, $SA = l$, $\angle SAO = \alpha$. Из ΔSOA находим $OA = l\cos\alpha$. Пусть C — точка касания полушара с боковой поверхностью конуса; тогда $OC \perp SA$. Из ΔOCA получим

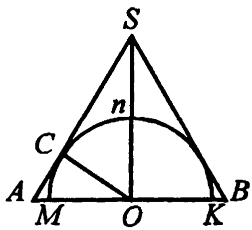


Рис. 3.56

$$OC = OA\sin\alpha = l\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}l\sin 2\alpha.$$

Следовательно,

$$V = \frac{2}{3}\pi OC^3 = \frac{2}{3}\pi\cdot\frac{1}{8}l^3\sin^3 2\alpha = \frac{1}{12}\pi l^3\sin^3 2\alpha.$$

3.55. Осевое сечение фигуры представляет собой равнобедренную трапецию LMM_1L_1, в которую вписана окружность с центром O

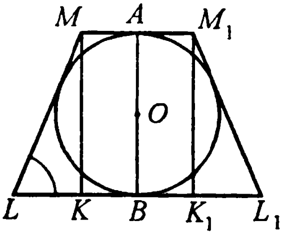


Рис. 3.57

(рис. 3.57). По условию, LL_1 и MM_1 — диаметры нижнего и верхнего оснований конуса, A и B — центры этих оснований. Обозначим радиусы оснований усеченного конуса через R и r, тогда $\pi R^2 : \pi r^2 = 4$, или $R = 2r$. Проведем $MK \parallel AB$; имеем $ML = R + r = 3r$ (в силу свойства отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности), $KL = BL - BK = BL - AM = 2r - r = r$. Из ΔMKL находим

$$\cos\angle MLB = \frac{KL}{ML} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}, \text{ т.е. } \angle MLB = \arccos\frac{1}{3}.$$

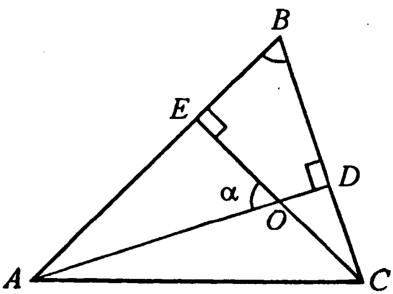


Рис. 3.58

3.56. По условию, ABC — остроугольный треугольник, $AD \perp BC$, $CE \perp AB$, $AD = a$, $CE = b$, $\angle AOE = \alpha$ (рис. 3.58). Заметим, что $\angle ABD = \angle AOE = \alpha$ как острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами ($OE \perp AB$, $OD \perp BC$). Из ΔABD и ΔBEC находим $AB = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, $BC = \dfrac{b}{\sin\alpha}$. В ΔABC имеем

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos\alpha = \frac{a^2}{\sin^2\alpha} + \frac{b^2}{\sin^2\alpha} - \frac{2ab}{\sin^2\alpha}\cos\alpha.$$

Итак, $AC = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

3.57. По условию, $AB = BC$, $\angle ACB = \alpha$, $\angle CAM = \beta$ (рис. 3.59). Пусть $AB = a$; тогда $AC = 2a\cos\alpha$ и, значит,

$$\frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta AMC}} = \frac{0{,}5AB\cdot AM\sin(\alpha-\beta)}{0{,}5AC\cdot AM\sin\beta} = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{2a\cos\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\sin\beta}.$$

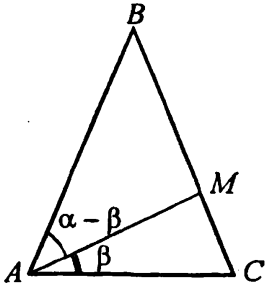


Рис. 3.59

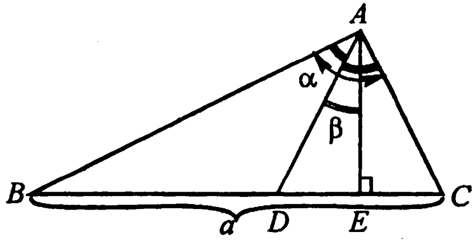


Рис. 3.60

3.58. По условию, $\angle BAC = \alpha$, $BC = a$, $\angle DAB = \angle DAC$, $AE \perp BC$, $\angle DAE = \beta$ (рис. 3.60). Имеем $\angle BAD = \frac{\alpha}{2}$, $\angle ADE = 90° - \beta$; тогда $\angle ABD = 90° - \beta - \frac{\alpha}{2}$ (согласно свойству внешнего угла треугольника), $\angle ACD = 180° - \frac{\alpha}{2} - (90° - \beta) = 90° + \beta - \frac{\alpha}{2}$. Пусть $AD = l$; тогда по теореме синусов из ΔADB и ΔADC получим

$$\frac{BD}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{l}{\sin\left(90° - \left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)\right)} = \frac{l}{\cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}; \quad BD = \frac{l\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)};$$

$$\frac{DC}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{l}{\sin\left(90° - \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)\right)} = \frac{l}{\cos\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)}; \quad DC = \frac{l\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Следовательно,

$$a = BD + DC = \frac{l\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)\right)}{\cos\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$=\frac{l\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\beta\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{l\sin\alpha\cos\beta}{\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)},$$

откуда

$$l=\frac{a\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

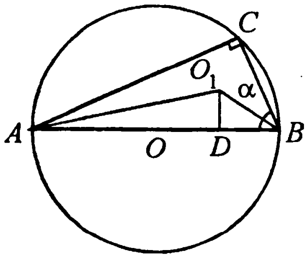


Рис. 3.61

3.59. По условию, $\angle ACB = 90°$, $\angle CBA = \alpha$ (рис. 3.61). Пусть R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей; тогда $AC = 2R\sin\alpha$; $BC = 2R\cos\alpha$. Следовательно,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 4R^2\sin\alpha\cos\alpha=2R^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

По формуле (2.4) находим

$$r=\frac{S}{p}=\frac{2R^2\sin\alpha\cos\alpha\cdot 2}{2R(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{2R\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$$

и, значит,

$$\frac{r}{R}=\frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\alpha-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\sin\alpha+\cos\alpha-1=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-1.$$

Это отношение является наибольшим при условии $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=1$, откуда $\frac{\pi}{4}+\alpha=\frac{\pi}{2}$, т.е. $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

3.60. По условию, в равностороннем треугольнике ABC имеем $AL : LC = = n : m$ (рис. 3.62); требуется найти угол ALB. Пусть $AC = b$, $AL = nx$, $LC = mx$; тогда $nx + mx = b$,

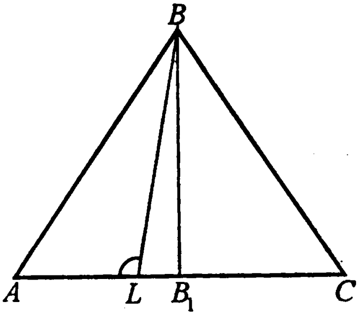


Рис. 3.62

откуда $\quad x = \dfrac{b}{m+n}, \quad AL = \dfrac{nb}{m+n},$

$LC = \dfrac{mb}{m+n}$. Проведем $BB_1 \perp AC$;

отсюда $\quad BB_1 = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}, \quad B_1C = \dfrac{b}{2},$

$LB_1 = \dfrac{mb}{m+n} - \dfrac{b}{2} = \dfrac{mb-nb}{2(m+n)} = \dfrac{(m-n)b}{2(m+n)}$. Из ΔBB_1L находим

$$\operatorname{tg}\angle BLB_1 = \frac{BB_1}{LB_1} = \frac{2b\sqrt{3}(m+n)}{2(m-n)b} = \frac{(m+n)\sqrt{3}}{m-r};$$

значит, $\angle BLB_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{(m+n)\sqrt{3}}{m-n}$, т. е. $\angle ALB = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{(m+n)\sqrt{3}}{m-n}$.

3.61. По условию, $\angle ABC = = 90°$, $AB_1 = B_1C$; $CA_1 = A_1B$, $\operatorname{tg}\angle AOB_1 = k$ (рис. 3.63); требуется найти $\angle A$ и $\angle B$. Пусть $\angle CAA_1 = = \psi$, $\angle CB_1B = \varphi$, $\angle AOB_1 = \alpha$; тогда

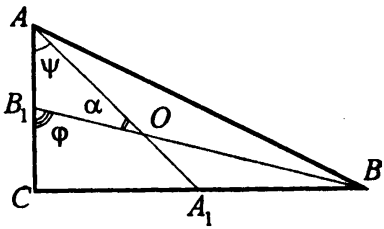


Рис. 3.63

$\alpha = \varphi - \psi$, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2a}{b}$, $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{a}{2b}$,

где $BC = a$, $AC = b$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi}{1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi} = \frac{\dfrac{2a}{b} - \dfrac{a}{2b}}{1+\dfrac{a^2}{b^2}} = \frac{3ab}{2(b^2+a^2)} = \frac{3}{2\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)} =$$

$$= \frac{3}{2(\operatorname{ctg}A + \operatorname{tg}A)} = \frac{3\operatorname{tg}A}{2(1+\operatorname{tg}^2 A)} = \frac{3}{4}\sin 2A.$$

Отсюда

$$k = \frac{3}{4}\sin 2A;\ \sin 2A = \frac{4k}{3};\ \angle A = \frac{1}{2}\arcsin\frac{4k}{3};$$

$$0 < \frac{4k}{3} \le 1;\ 0 < k \le \frac{3}{4};\ \angle B = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{4k}{3}.$$

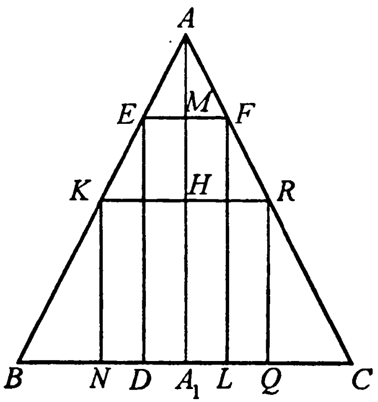


Рис. 3.64

3.62. По условию, $AB = AC$, $DEFL$ — вписанный в ΔABC прямоугольник, периметр которого не зависит от выбора точки E на AB (рис. 3.64); требуется найти $\sin A$. Проведем $AA_1 \perp BC$ и положим $AA_1 = h, BC = a$. Построим еще один прямоугольник, вписанный таким же образом, одна из сторон которого проходит через точку H, где $AH = HA_1$; при этом $P_{KNQR} = P_{DEFL}$ (согласно условию). Так как $\Delta AKR \sim \Delta ABC$, то $\frac{KR}{BC} = \frac{AH}{AA_1}$, т. е.

$KR = \frac{ah}{2h} = \frac{a}{2}$. Далее, $P_{KNQR} = 2(NK + KR) = 2\left(\frac{h}{2} + \frac{a}{2}\right) = a + h.$

Пусть $DE = x$; учитывая, что $\Delta AEF \sim \Delta ABC$, получим $\frac{EF}{BC} = \frac{AM}{AA_1}$,

т. е. $EF = \frac{a(h-x)}{h}$. Тогда

$$P_{DEFL} = 2(DE + EF) = 2\left(x + \frac{ah - ax}{h}\right) = \frac{2(xh + ah - ax)}{h}.$$

Поскольку $P_{KNQR} = P_{DEFL}$, имеем

$$\frac{2(xh + ah - ax)}{h} = a + h, \text{ или } 2xh + ah - 2ax - h^2 = 0,$$

откуда $(2x - h)(a - h) = 0$. Это равенство должно быть справедливым при любом значении x; значит, $a - h = 0$, т. е. $h = a$.

Наконец, из ΔAA_1C находим $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{A_1C}{AA_1}=\frac{a}{2h}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$, откуда

$$\sin A=\frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}.$$

3.63. По условию, $\angle BAC=\alpha$, $\angle BCA=\gamma$ $(\alpha>\gamma)$, $AD=DC$, BE — биссектриса (рис. 3.65); требуется найти $S_{\Delta BDE}:S_{\Delta ABC}$. Проведем $BF\perp AC$; тогда $AB=\frac{BF}{\sin\alpha}$; $BC=\frac{BF}{\sin\gamma}$. Имеем

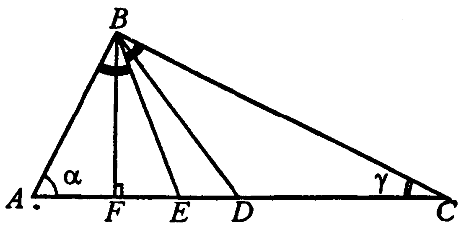


Рис. 3.65

$$S_{\Delta BDE}=S_{\Delta ABD}-S_{\Delta ABE}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}-\frac{1}{2}AE\cdot BF;$$

$$\frac{S_{\Delta BDE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{1}{2}-\frac{0{,}5AE\cdot BF}{0{,}5AC\cdot BF}=\frac{1}{2}-\frac{AE}{AC}.$$

Но $\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}=\frac{BF}{\sin\alpha}:\frac{BF}{\sin\gamma}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$; составим теперь производную пропорцию

$$\frac{AE}{AE+EC}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\gamma},\text{ или }\frac{AE}{AC}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\gamma}.$$

Итак, окончательно находим

$$\frac{S_{\Delta BDE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{1}{2}-\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\gamma}=\frac{\sin\alpha-\sin\gamma}{2(\sin\alpha+\sin\gamma)}=$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}}.$$

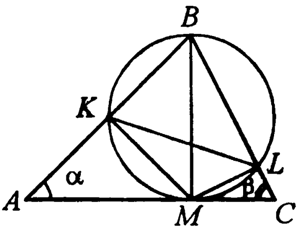


Рис. 3.66

3.64. По условию, $BM \perp AC$, BM — диаметр окружности, $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, K и L — точки пересечения окружности со сторонами AB и BC (рис. 3.66); требуется найти $S_{\Delta KLM} : S_{\Delta ABC}$. Пусть $BM = h$; тогда $AM = h\operatorname{ctg}\alpha$, $MC = h\operatorname{ctg}\beta$. Имеем

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMB} + S_{\Delta BMC} = \frac{1}{2}AM \cdot BM + \frac{1}{2}MC \cdot BM =$$

$$= \frac{1}{2}BM\ (AM + MC) = \frac{1}{2}h\,(h\operatorname{ctg}\alpha + h\operatorname{ctg}\beta) =$$

$$= \frac{1}{2}h^2\,(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) = \frac{1}{2}h^2\,\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Далее, $\angle ABM = 90° - \alpha$, $\angle MBC = 90° - \beta$ и так как $\angle BKM = \angle BLM = 90°$ (как вписанные углы, опирающиеся на диаметр BM), то $\angle BMK = \alpha$, $\angle BML = \beta$. Тогда из ΔBKM и ΔBLM находим $KM = h\cos\alpha$, $ML = h\cos\beta$. Значит,

$$S_{\Delta KLM} = \frac{1}{2}KM \cdot ML\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}h^2\cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha+\beta).$$

Окончательно получим

$$\frac{S_{\Delta KLM}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{0{,}5h^2\cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta}{0{,}5h^2\sin(\alpha+\beta)} = \frac{1}{4}\sin 2\alpha\sin 2\beta.$$

3.65. По условию, $BD \perp AC$, $DC : AD = k$, $DC > AD$, $\angle DBC > \angle DBA$, $\angle DBC : \angle DBA = 2 : 1$ (рис. 3.67). Пусть $\angle DBA = \alpha$; тогда $\angle DBC = 2\alpha$ и $\angle C = 90° - 2\alpha < \angle A = 90° - \alpha$. Имеем $\sin C = \sin(90° - 2\alpha) = \cos 2\alpha$. Из ΔBDC и ΔBDA находим $DC = DB\operatorname{tg}2\alpha$, $AD = DB\operatorname{tg}\alpha$. Значит,

$$k=\frac{DC}{AD}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};\ 1-\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{2}{k};\ \operatorname{tg}^2\alpha=\frac{k-2}{k},$$

откуда следует, что $k>2$. Итак,

$$\sin C=\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1-\frac{k-2}{k}}{1+\frac{k-2}{k}}=\frac{1}{k-1}.$$

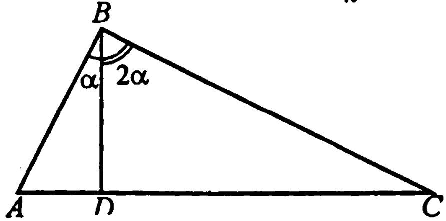


Рис. 3.67

3.66. По условию, $AB\parallel DC$; $AD=BC$; $\angle BOC=\alpha$; $S_{ABCD}=S$ (рис.3.68). Так как $\angle BOC$ — внешний угол ΔDOC, то $\angle BOC=$ $=2\angle ODC$, т. е. $\angle ODC=\frac{\alpha}{2}$. Проведем $BN\perp CD$, $EF\parallel BN$; из ΔOFD и ΔOEB находим $OF=DF\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$,

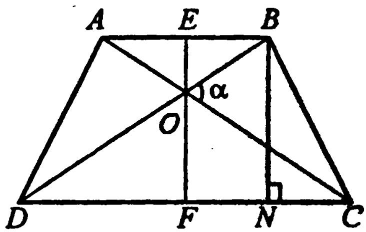


Рис. 3.68

$OE=BE\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Пусть $BN=h$; тогда $h=OF+OE=(DF+BE)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$,

$DF+BE=h\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, Но $S_{ABCD}=(DF+BE)h$, т. е. $S=h^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, откуда

$h=\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

3.67. По условию, $AD\parallel BC$, $BC=2$, $\angle ABC=\angle BCD=135°$, $\angle AOD=150°$ (рис. 3.69). Так как углы при основании трапеции равны, то трапеция равнобедренная, т. е. $AB=CD$. Находим

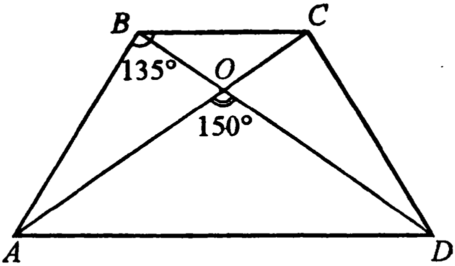


Рис. 3.69

$\angle ADC = 180° - 135° = 45°$;

$\angle ODA = \dfrac{180° - 150°}{2} = 15°$;

$\angle BDC = 45° - 15° = 30°$. Из ΔBDC по теореме синусов имеем $\dfrac{BC}{\sin 30°} = \dfrac{BD}{135°}$, откуда $BD = \dfrac{2\sin 45°}{\sin 30°} = 2\sqrt{2}$. Итак,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BD^2 \sin 150° = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

(поскольку площадь выпуклого четырехугольника равна $\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$, где α — угол между диагоналями).

3.68. Указание. Обозначив углы при большем основании через α и 2α, опустить на это основание высоты трапеции и воспользоваться их равенством.

Ответ: $\dfrac{p^2 + ap - q^2}{p}$.

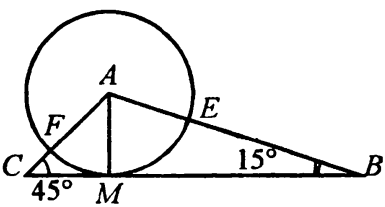


Рис. 3.70

3.69. По условию, $\angle ACB = 45°$, $\angle ABC = 15°$, $BC = a$, $AM \perp BC$, AM — радиус окружности, E и F — точки пересечения окружности со сторонами AB и AC; требуется найти S_{AFME} (рис. 3.70). Из ΔAMC и ΔAMB находим $MC = AM \operatorname{ctg} 45° = AM$, $MB = AM \operatorname{ctg} 15°$. Тогда $a = CM + MB = AM(1 + \operatorname{ctg} 15°)$, т. е. $AM = \dfrac{a}{1 + \operatorname{ctg} 15°}$. Заметим, что $\angle FAB = 180° - (45° + 15°) = 120°$. Следовательно,

$$S_{AFME}=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2}{(1+\operatorname{ctg}15^\circ)^2}=\frac{\pi a^2}{3(\operatorname{ctg}45^\circ+\operatorname{ctg}15^\circ)^2}=$$

$$\frac{\pi a^2\sin^2 45^\circ\sin^2 15^\circ}{3\sin^2 60^\circ}=\frac{\pi a^2(1-\cos 30^\circ)}{9}=\frac{\pi a^2(2-\sqrt{3})}{18}.$$

3.70. По условию, в ΔABC имеем: $BC=a$, $\angle C=\alpha$ радианов, $\angle B=\beta$ радианов, $AD\perp BC$, AD — радиус окружности, пересекающей AC и AB в точках K и L (рис. 3.71); требуется найти $l_{\cup KL}$. Из ΔADC и ΔADB находим $CD=$ $=AD\operatorname{ctg}\alpha$, $BD=AD\operatorname{ctg}\beta$. Тогда $a=$ $=CD+DB=AD(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)$, т. е.

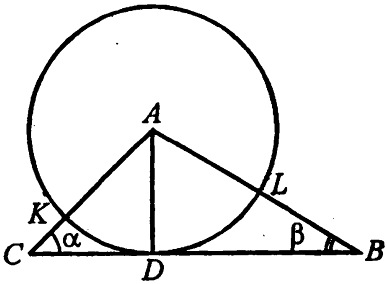


Рис. 3.71

$$AD=\frac{a}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Учитывая, что $\angle KAL=\pi-(\alpha+\beta)$, окончательно получим

$$l_{\cup KL}=AD(\pi-\alpha-\beta)=\frac{a(\pi-\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

3.71. По условию, $OAnB$ — сектор, $\angle AOB=\alpha$ радианов, O_1 — центр окружности, вписанной в сектор $OAnB$ (рис. 3.72). Пусть R — радиус сектора, r — радиус вписанной окружности; тогда $S_{OAnB}=\frac{1}{2}R^2\alpha$, $S_{O_1}=\pi r^2$. В ΔO_1A_1O $(O_1A_1\perp OA)$ имеем

$$r=O_1A_1=OO_1\sin\frac{\alpha}{2}=(R-r)\sin\frac{\alpha}{2},$$

или $r+r\sin\frac{\alpha}{2}=R\sin\frac{\alpha}{2}$, откуда

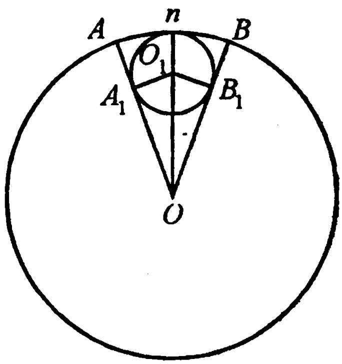


Рис. 3.72

$$r=\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Окончательно получим

$$\frac{S_{OAnB}}{S_{O_1}}=\frac{R^2\alpha\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\alpha\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}{\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

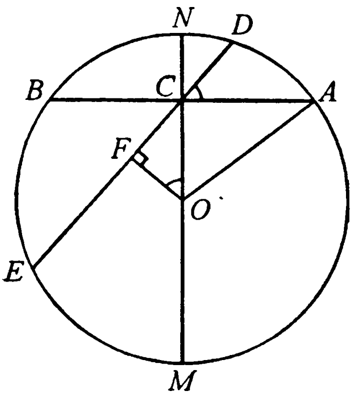


Рис. 3.73

3.72. По условию, AB — хорда, $\smile ANB=\alpha°$; $AC=BC$, DE — хорда, $DC:CE=1:3$ (рис. 3.73). Пусть $CD=x$; тогда $EC=3x$, $ED=4x$. Проведем $OF\perp ED$ и соединим точки O и C, O и A. Так как $OC\perp AB$ (диаметр MN перпендикулярен AB), то $\angle FOC=\angle ACD$ (острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Заметим, что $FD=\frac{1}{2}ED=2x$, $FC=x$. Далее имеем $BC\cdot AC=DC\cdot EC$, или $AC^2=x\cdot 3x$, т. е. $AC=x\sqrt{3}$. Из ΔOCA получим $OC=AC\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=x\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, а из ΔFOC находим

$$\sin\angle FOC=\frac{FC}{OC}=\frac{x}{x\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}.$$

Значит, $\angle ACD=\angle FOC=\arcsin\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$; так как $\sin\angle ACD\le 1$, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\le\sqrt{3}$, т.е. $\alpha\le 120°$.

3.73. По условию, $AB = BC$, $BB_1 \perp AC$, $BB_1 = h$, $\angle ABB_1 = \alpha$ $(\alpha \le \frac{\pi}{6})$, O — центр окружности, описанной около ΔABC, O_1 — центр вписанной в ΔABC окружности (рис 3.74). Из ΔAB_1B находим $AB_1 = h\operatorname{tg}\alpha$; тогда $AC = 2h\operatorname{tg}\alpha = 2R\sin 2\alpha$, где R — радиус описанной окружности, откуда $R = \frac{h\operatorname{tg}\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{h}{2\cos^2\alpha}$. Далее, из ΔAB_1O_1 получим

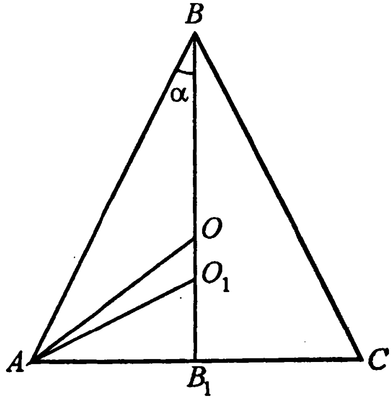


Рис. 3.74

$$O_1B_1 = r = AB_1\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = h\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Следовательно,

$$OO_1 = h - OB - O_1B_1 = h - \frac{h}{2\cos^2\alpha} - h\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= h\left(1 - \frac{1}{2\cos^2\alpha} - \frac{\sin\alpha\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)}{\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}\right) =$$

$$= h\left(1 - \frac{1}{2\cos^2\alpha} - \frac{\sin\alpha(1 - \sin\alpha)}{\cos^2\alpha}\right) =$$

$$= h\left(\frac{2\cos^2\alpha - 1 - 2\sin\alpha + 2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha}\right) = h\frac{1 - 2\sin\alpha}{2\cos^2\alpha} =$$

$$= h\frac{\sin\frac{\pi}{6} - \sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2h\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\alpha}.$$

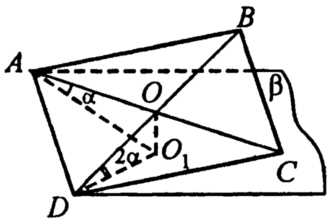


Рис. 3.75

3.74. По условию, $ABCD$ — ромб, $AD \in \beta$, $\angle A$ — острый; диагонали ромба образуют с β углы α и 2α (рис. 3.75). Пусть O — точка пересечения диагоналей. Проведем $OO_1 \perp \beta$; значит, $\sin \angle OAO_1 = \dfrac{OO_1}{OA}$ и $\sin \angle ODO_1 = \dfrac{OO_1}{OD}$. Так как $\angle A$ — острый, то $AC > BD$, $\sin \angle OAO_1 < \sin \angle ODO_1$, т. е. $\angle OAO_1 = \alpha$, а $\angle ODO_1 = 2\alpha$. Пусть $OO_1 = a$; тогда $OA = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, а $OD = \dfrac{a}{\sin 2\alpha}$. В ΔAOD имеем

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \frac{OA}{OD} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha,$$

откуда $\dfrac{A}{2} = \operatorname{arcctg}(2\cos\alpha)$, т. е. $A = 2\operatorname{arcctg}(2\cos\alpha)$.

3.75. По условию, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, $ABCD$ — ромб, $AA_1 = h$, $\angle ACA_1 = \alpha$, $\angle DBD_1 = \beta$ (рис. 3.76). Из ΔA_1AC и ΔD_1DB находим $AC = h\operatorname{ctg}\alpha$, $BD = h\operatorname{ctg}\beta$; тогда

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}h^2 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta, \quad V = \frac{1}{2}h^3 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta.$$

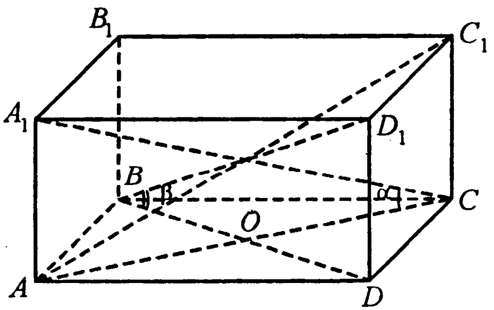


Рис. 3.76

Наконец, из ΔAOB получим

$$AB=\sqrt{\frac{1}{4}h^2(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta)}=\frac{1}{2}h\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta};$$

поэтому $S_{бок}=2h^2\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}$.

3.76. По условию, $ABCAB_1C_1$ — прямая призма, $AB=a$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $V_{пр}=V$ (рис. 3.77). Далее, учитывая, что $V=S_{\Delta ABC}H$, где площадь основания выражается равенством

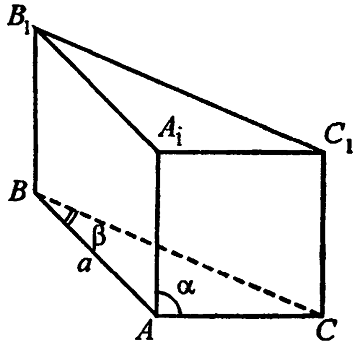


Рис. 3.77

$$S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(180^\circ-(\alpha+\beta))}=\frac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)},$$

найдем $H=\dfrac{2V\sin(\alpha+\beta)}{a^2\sin\alpha\sin\beta}$. Согласно теореме синусов имеем $\dfrac{BC}{\sin\alpha}=$ $=\dfrac{AC}{\sin\beta}=\dfrac{a}{\sin(\alpha+\beta)}$, откуда $BC=\dfrac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, $AC=\dfrac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Поэтому

$$P_{\Delta ABC}=\frac{a(\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{2a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2a\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Окончательно получим

$$S_{бок}=P_{\Delta ABC}H=\frac{2a\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\frac{2V\sin(\alpha+\beta)}{a^2\sin\alpha\sin\beta}=\frac{2V\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$

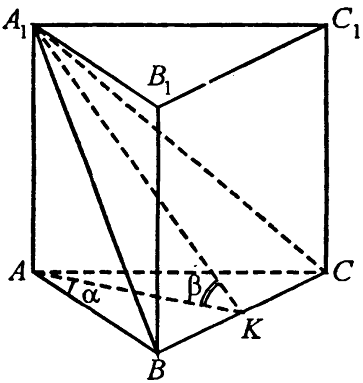


Рис. 3.78

3.77. По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $AB=AC$, $AB+AC+BC=2p$, $\angle BAC=\alpha$, A_1BC — сечение призмы, $\angle A_1BCA=\beta$ (рис. 3.78). Проведем $A_1K\perp BC$ и положим $AA_1=h$; тогда из ΔA_1AK находим $AK=h\operatorname{ctg}\beta$, а из ΔAKB получим

$$AB=\frac{AK}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{h\operatorname{ctg}\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$BK=h\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Следовательно,

$BC=2h\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, откуда

$$2p=\frac{2h\operatorname{ctg}\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}}+2h\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\ \text{или}\ p\cos\frac{\alpha}{2}=h\operatorname{ctg}\beta\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

т. е.

$$h=\frac{p\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{p\sin\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\beta}{1+\cos\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}=p\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}\operatorname{tg}\beta.$$

Итак,

$$V=S_{\Delta ABC}\cdot AA_1=\frac{1}{2}BC\cdot AK\cdot AA_1=\frac{1}{2}2h^3\operatorname{ctg}^2\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$$

$$=p^3\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}\operatorname{tg}^3\beta\operatorname{ctg}^2\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=p^3\operatorname{tg}^3\frac{\pi-\alpha}{4}\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

3.78. По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, $SABC$ — пирамида, $V_{SABC}=V$, $(\widehat{(SAB);(ABC)})=\alpha$ (рис. 3.79). Пусть $AB=a$, $SC=h$;

тогда $V=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}h$, $S_{\Delta SAB}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$ и

$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Значит, $V=\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{8}$, откуда $a=\frac{2\sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\alpha}}$. Окончательно находим

$$S_{\Delta SAB}=\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{V^2}}{\cos\alpha\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2\alpha}}=\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}V^2}{\sin^2\alpha\cos\alpha}}.$$

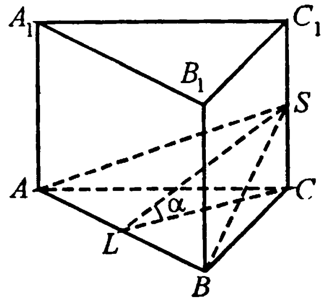


Рис. 3.79

3.79. I способ. По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, $AA_1=AB$, AB_1 и BC_1 — непересекающиеся диагонали (рис. 3.80); требуется найти $(\widehat{(AB_1);(BC_1)})$. Пусть $AB=AA_1=a$. Проведем $B_1D\parallel BC_1$, $D\in(BC)$; тогда $\angle AB_1D=\varphi$ — искомый угол. Из ΔABD находим $AD^2=a^2+a^2-2a^2\cos 120°=3a^2$. В ΔAB_1D имеем $AD^2=2AB_1^2-2AB_1^2\cos\varphi$; так как $AB_1^2=2a^2$, то $3a^2=4a^2-4a^2\cos\varphi$, откуда $\cos\varphi=\frac{1}{4}$.

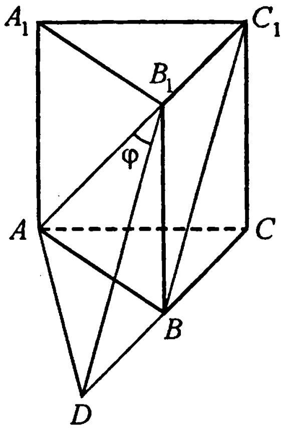


Рис. 3.80

II способ. Пусть $\overline{AB}=\overline{m}$, $\overline{BC}=\overline{n}$, $\overline{AA_1}=\overline{p}$; тогда $\overline{AB_1}=\overline{p}+\overline{m}$, $\overline{BC_1}=\overline{n}+\overline{p}$. Используя формулу для нахождения косинуса угла между векторами, получим

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB_1}\cdot\overline{BC_1}}{\left|\overline{AB_1}\right|\cdot\left|\overline{BC_1}\right|}=\frac{(\overline{p}+\overline{m})(\overline{n}+\overline{p})}{a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}}=\frac{\overline{p}\,\overline{n}+\overline{p}^2+\overline{m}\,\overline{n}+\overline{m}\,\overline{p}}{2a^2}=$$

$$=\frac{0+a^2+a^2\cos 120^\circ+0}{2a^2}=\frac{1}{4}.$$

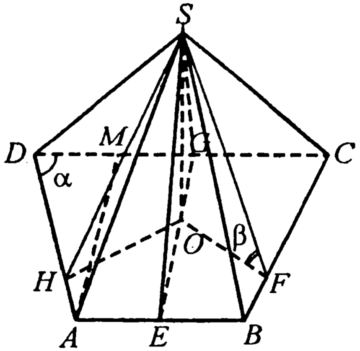


Рис. 3.81

3.80. По условию, $SABCD$ — пирамида, $AB \parallel DC$, $AD = BC$, $AD = a$, $\angle ADC = \alpha$, $\angle SABC = \angle SBCD = \angle SDCA = \angle SADB = \beta$ (рис. 3.81). Построим линейные углы двугранных углов при основании. Проведем $SO \perp (ABC)$ и OE, OF, OG, OH — перпендикуляры к сторонам основания. Так как $\Delta SOE = \Delta SOF = \Delta SOQ = \Delta SOH$, то $OE = OF = OQ = OH$, т. е. O — центр окружности, вписанной в основание $ABCD$; тогда $AB + DC = 2AD = 2a$. Проведем $AM \perp DC$ и из ΔAMD найдем $AM = a\sin\alpha$. Далее имеем

$$S_{ABCD}=\frac{AB+DC}{2}\cdot AM=a^2\sin\alpha;\ S_{\text{бок}}=\frac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta};$$

$$S_{\text{полн}}=\frac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta}+a^2\sin\alpha=\frac{a^2\sin\alpha(1+\cos\beta)}{\cos\beta}=\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}.$$

3.81. По условию, $SABC$ — правильная треугольная пирамида, O — центр основания, $OK \perp SB$, $OK = p$, $\angle ASBC = \alpha$ (рис. 3.82). Построим линейный угол двугранного угла $ASBC$. Имеем $AC \perp SB$, поскольку SB — наклонная к (ABC), OB — ее проекция на эту плоскость, $AC \perp OB$. Проведем через AC плоскость $APC \perp SB$; тогда $\angle APC = \alpha$. Так как MP и OK принадлежат (SMB) и $MP \perp SB$, $OK \perp SB$, то $MP \parallel OK$ и, значит, $\frac{MP}{OK}=\frac{MB}{OB}$, т. е. $MP=\frac{3p}{2}$. Из ΔMPC находим $MC = MP\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{3p}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $AC = 3p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, откуда

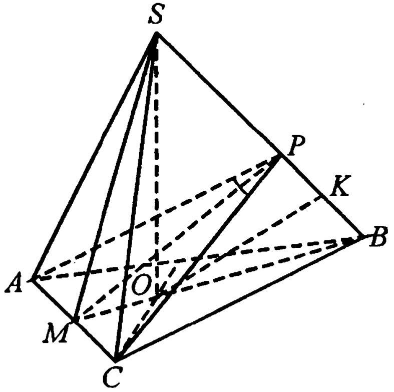


Рис. 3.82

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{9p^2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{4}$. Далее, $\Delta SOK\sim\Delta SOB$ (прямоугольные треугольники с общим углом OSB); поэтому $\dfrac{OK}{OS}=\dfrac{OB}{SB}$, Отсюда, учитывая, что $OB=p\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, получим

$$SB=\frac{OB\cdot OS}{OK}=\frac{p\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot OS}{p}=OS\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

В ΔSOB имеем

$$SB^2=OS^2+OB^2;\ 3OS^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-OS^2=3p^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2};\ OS=\frac{p\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}-1}}.$$

Итак,

$$V=\frac{1}{3}\frac{9p^2\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}p\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{4\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}-1}}=\frac{9p^3\,\mathrm{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}}{4\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}-1}}.$$

3.82. По условию, $PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $S_{\Delta PBD} : S_{ABCD} = k$ (рис. 3.83); требуется найти $\cos\angle DPC$. Пусть $DC = a$ и $OP = h$; тогда $\dfrac{0{,}5a\sqrt{2}h}{a^2}=k$, $h=ak\sqrt{2}$. Из ΔPOD находим $DP^2=2a^2k^2+\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{2}(4k^2+1)$, а в ΔDPC по теореме косинусов имеем

$$a^2 = a^2(4k^2+1) - a^2(4k^2+1)\cdot\cos\angle DPC,$$

откуда $\cos\angle DPC = \dfrac{4k^2}{4k^2+1}$.

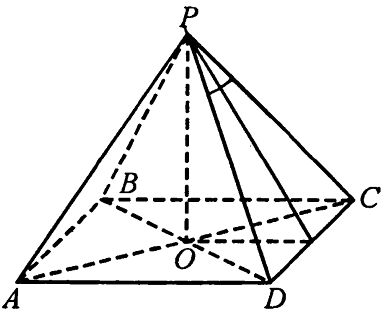


Рис. 3.83

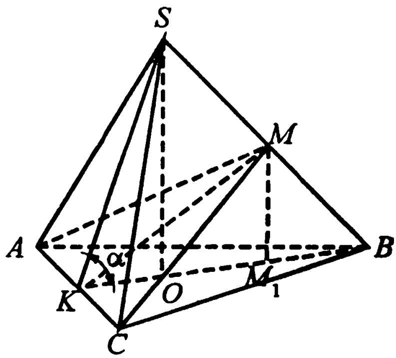


Рис. 3.84

3.83. По условию, $SABC$ — правильная треугольная пирамида, $SO\perp(ABC)$, $SO = H$, $\angle SACB = \alpha$, $SM = MB$, AMC — сечение (рис. 3.84). Проведем $SK\perp AC$; тогда $OK\perp AC$ и $\angle SKO = \alpha$ как линейный угол двугранного угла AC. Из ΔSOK находим $OK = H$ ctgα, $AC = 2\sqrt{3}\,OK = 2H\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$. Проведем $MM_1 \parallel SO$; тогда $MM_1 = \dfrac{H}{2}$, $KM_1 = 2H$ ctgα. Из ΔMKM_1 находим

$$MK = \sqrt{\frac{H^2}{4} + 4H^2\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{H}{2}\sqrt{1+16\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Итак,

$$S_{\Delta MAC} = \frac{1}{2}AC\cdot MK = H\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{H}{2}\sqrt{1+16\operatorname{ctg}^2\alpha} =$$

$$= \frac{H^2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha}{2}\sqrt{1+16\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

3.84. Указание. Воспользоваться формулой $S_{\text{бок}} = \dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha}$, где α — угол между основанием пирамиды и ее боковыми гранями.

Ответ: $\alpha = \arccos\frac{1}{k-1}$, где $k > 2$.

3.85. По условию, $SABCD$ — правильная пирамида, $SO \perp (ABC)$, $S_{\Delta SAC} : S_{бок} = k$, SF и SE — апофемы пирамиды (рис. 3.85). Пусть $AB = a$, $\angle ESF = \alpha$; имеем $SF = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ (из ΔSOF), $SO = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

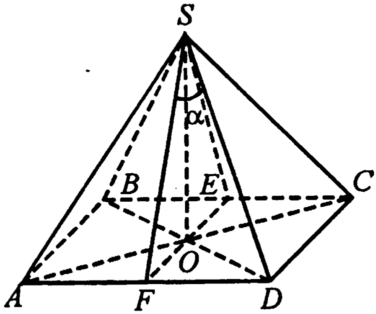


Рис. 3.85

Следовательно,

$$S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4},\ S_{бок} = \frac{1}{2}\cdot 4a\cdot\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Тогда получим уравнение

$$k = \frac{a^2\sqrt{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{4a^2},\ \text{или}\ k = \frac{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4},\ \text{т.е.}\ \cos\frac{\alpha}{2} = 2k\sqrt{2}.$$

Итак, $\cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1 = 16k^2 - 1$. При этом $16k^2 - 1 < 1$;

$k^2 < \dfrac{1}{8}$, $0 < k < \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

3.86. По условию, $PABC$ — правильная треугольная пирамида, $\angle PBC = \alpha$, $PM = MC$, $(KMN) \parallel (APB)$, $S_{\Delta KMN} = S$ (рис. 3.86). Так как $PC = 2MC$, то $S_{\Delta APB} = 4S_{\Delta KMN} = 4S$. Далее имеем $S_{\Delta APB} = \dfrac{1}{2}AP^2\sin(180° - 2\alpha) =$

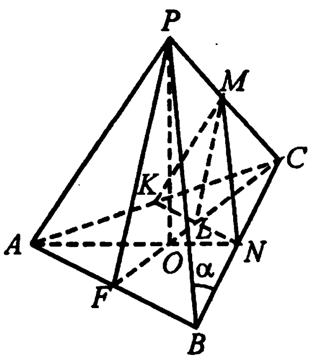


Рис. 3.86

$=\frac{1}{2}AP^2\sin 2\alpha$, т. е. $AP^2=\frac{8S}{\sin 2\alpha}$. Из ΔAPF находим $AF=AP\cos\alpha$, откуда $AB=2AP\cos\alpha$ и $OC=\frac{2AP\cos\alpha}{\sqrt{3}}$. Теперь из ΔPOC получим

$$PO=\sqrt{PC^2-OC^2}=\sqrt{\frac{8S}{\sin 2\alpha}-\frac{32S\cos^2\alpha}{3\sin 2\alpha}}=\sqrt{\frac{8S(3-4\cos^2\alpha)}{3\sin 2\alpha}}=$$

$$=2\sqrt{\frac{2S(1-2\cos 2\alpha)}{3\sin 2\alpha}}=4\sqrt{\frac{S\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\right)}{3\sin 2\alpha}}=$$

$$=4\sqrt{\frac{2S\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{3\sin 2\alpha}}.$$

Окончательно находим

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot PO=\frac{1}{3}\cdot\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}\cdot PO=\frac{1}{3}\cdot\frac{4\cdot 8\sqrt{3}S\cos^2\alpha}{4\sin 2\alpha}\times$$

$$\times 4\sqrt{\frac{2S\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{3\sin 2\alpha}}=\frac{16S\operatorname{ctg}\alpha}{3}\sqrt{\frac{2S\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2\alpha}},$$

где $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

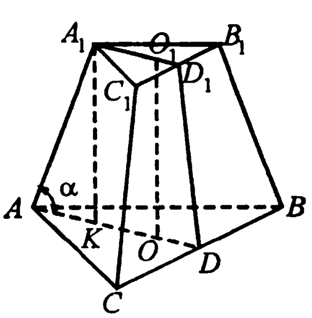


Рис. 3.87

3.87. По условию $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная усеченная пирамида, $OO_1=H$, $OO_1=\sqrt{BC\cdot B_1C_1}$, $\angle A_1AO=\alpha$ (рис. 3.87). Пусть $BC=a$, $B_1C_1=b$; тогда $OA=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $O_1A_1=\frac{b\sqrt{3}}{3}$. Проведем $A_1K\,||\,OO$; из ΔA_1KA находим $AK=H\operatorname{ctg}\alpha$ и так как $AK=AO-KO=$

$$= AO - A_1O_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{b\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(a-b), \quad \text{то} \quad \frac{\sqrt{3}}{3}(a-b) = H\operatorname{ctg}\alpha.$$

Кроме того, из условия следует, что $ab = H^2$. В результате получим

$$V_{\text{ус.пир}} = \frac{1}{3}H\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{ab\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{H\sqrt{3}}{12}(a^2 + ab + b^2) =$$

$$= \frac{H\sqrt{3}}{12}((a-b)^2 + 3ab) = \frac{H\sqrt{3}}{12}(3H^2\operatorname{ctg}^2\alpha + 3H^2) =$$

$$= \frac{H^3\sqrt{3}}{4}(\operatorname{ctg}^2\alpha + 1) = \frac{H^3\sqrt{3}}{4\sin^2\alpha}.$$

3.88. По условию, $AKLM$ — цилиндр, OO_1 — его ось, A принадлежит окружности верхнего основания, B — окружности нижнего основания, $AB = l$, $\angle ABK = \alpha$, осевое сечение $AMLK$ — квадрат (рис. 3.88); требуется найти расстояние от OO_1 до AB. Проведем $BS \parallel AK$ и получим сечение $BSAK$ цилиндра, содержащее AB; через OO_1 проведем $(EFT) \parallel (SBK)$. Расстояние между OO_1 и AB равно расстоянию между (EFT) и (SBK). Проведем $OP \perp BK$; тогда $OP \perp (SBK)$, так как $OP \perp SB$, а $SB \cap BK$, т. е. OP — искомое расстояние. Из ΔAKB найдем $BK = l\cos\alpha$, $AK = l\sin\alpha$; отсюда

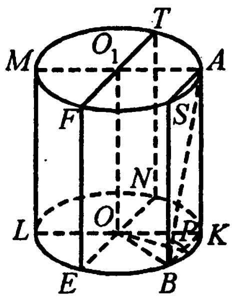


Рис. 3.88

$PB = \frac{1}{2}l\cos\alpha$, $OB = \frac{1}{2}EN = \frac{1}{2}TN = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}l\sin\alpha$. Наконец, из ΔOPB получим

$$OP = \sqrt{\frac{1}{4}l^2\sin\alpha - \frac{1}{4}l^2\cos^2\alpha} = \frac{1}{2}l\sqrt{-\cos 2\alpha},$$

где $\cos 2\alpha < 0$, откуда $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$, т.е. $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

3.89. По условию, SCD и $S_1C_1D_1$ — конусы, основания которых имеют общий центр O, $\angle CSO = \angle C_1S_1O = \alpha$, $OC = R$,

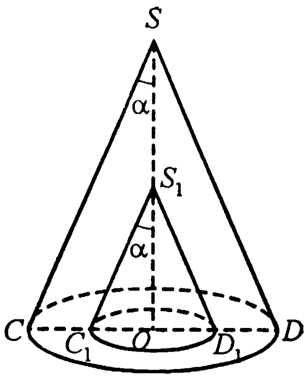


Рис. 3.89

$S_{бок.S_1C_1D_1} = \frac{1}{2} S_{полн.SCD}$ (рис. 3.89); требуется найти $V_{S_1C_1D_1}$. Из ΔSOC находим $SC = \frac{R}{\sin\alpha}$, $SO = R \operatorname{ctg}\alpha$. Пусть $OC_1 = r$; тогда $S_1C_1 = \frac{r}{\sin\alpha}$, $S_1O = r \operatorname{ctg}\alpha$. Далее имеем

$$S_{полн.SCD} = \pi R^2 + \frac{\pi R^2}{\sin\alpha} = \frac{\pi R^2(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}; \; S_{бок.S_1C_1D_1} = \frac{\pi r^2}{\sin\alpha}.$$

Решив уравнение $\frac{2\pi R^2}{\sin\alpha} = \frac{\pi R^2(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}$, получим

$$r^2 = \frac{R^2(1+\sin\alpha)}{2} = R^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right), \text{ т.е. } r = R\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Итак,

$$V_{S_1C_1D_1} = \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}\pi R^3\cos^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\alpha.$$

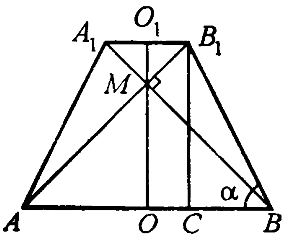


Рис. 3.90

3.90. Изобразим осевое сечение усеченного конуса. По условию, $AB_1 \perp A_1B$, OO_1 — ось усеченного конуса, BB_1 — образующая усеченного конуса, $AB_1 = a$. $\angle B_1BO = \alpha$ (рис. 3.90). Пусть $OB = R_1$, $O_1B_1 = R_2$; тогда $MO = OB = R_1$, $MO_1 = O_1B_1 = R_2$, $OO_1 = R_1 + R_2$. Проведем $B_1C \parallel OO_1$; при этом $B_1C = O_1O = R_1 + R_2$. В ΔB_1CA имеем $\angle B_1AC = 45°$; поэтому

$B_1C = AC = R_1 + R_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Далее из ΔB_1CB находим

$$B_1B=\frac{B_1C}{\sin\alpha}=\frac{a\sqrt{2}}{2\sin\alpha},\ BC=R_1-R_2=B_1C\operatorname{ctg}\alpha=\frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Значит, $S_{\text{бок}}=\pi(R_1+R_2)\cdot B_1B=\dfrac{\pi a^2}{2\sin\alpha}$, Решив систему уравнений

$$R_1+R_2=\frac{a\sqrt{2}}{2},\ R_1-R_2=\frac{a\sqrt{2}}{2\operatorname{ctg}\alpha},$$

найдем

$$R_1=\frac{a\sqrt{2}}{4}(1+\operatorname{ctg}\alpha)=\frac{a\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\alpha},\ R_2=\frac{a\sqrt{2}}{4}(1-\operatorname{ctg}\alpha)=\frac{a\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\alpha}.$$

Итак,

$$S_{\text{полн}}=\frac{\pi a^2}{2\sin\alpha}+\frac{\pi a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{4\sin^2\alpha}+\frac{\pi a^2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{4\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}\left(2\sin\alpha+\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)+1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}(2\sin\alpha+1)=\frac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right).$$

3.91. По условию, $\angle BAC=\alpha$ — тупой угол, $AB = AC$, $BM\perp AC$, $CN\perp AB$, $AD\perp BC$, O — ортоцентр (т. е. точка пересечения высот) ΔABC, $O_1O_2 \parallel BC$, $O\in O_1O_2$, $BC = a$ (рис. 3.91). Объем тела вращения ΔABC вокруг прямой O_1O_2 найдем по формуле $V_{\text{т. вр}} = V_{O_1O_2CB} - 2V_{O_1OAB}$, где $V_{O_1O_2CB} = V_{\text{цил}} = \pi O_1B^2 \cdot BC$. Имеем

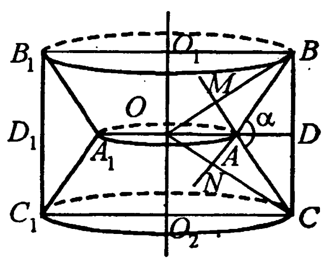


Рис. 3.91

$\angle OAM=\angle CAD=\dfrac{\alpha}{2}$, $\angle MOA=90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}$, а $\angle OBD = \frac{\alpha}{2}$. Из ΔODB и ΔADB находим $OD = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $AD = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; тогда $O_1B = OD = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $OA = OD - AD = = \frac{a}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$. Окончательно получим

$$V_{\text{т.вр}} = \pi\frac{a^2}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot a - \frac{2}{3}\pi\cdot\frac{a}{2}\left(\frac{a^2}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \frac{a^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)^2\right) = \frac{\pi a^3}{4}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi a^3}{12}\left(3 - \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

3.92. По условию, $AB = 2R$, $CD \parallel AB$, O — центр полуокружности, $\angle ADC = \alpha$, $AC < AD$ (рис 3.92). Объем тела вращения ΔACD вокруг AB будем искать по формуле

$$V_{\text{т.вр}} = V_{AO_2C} + V_{O_2CDO_1} - V_{AO_1D} = \frac{1}{3}\pi O_2C^2\cdot AO_2 + \pi O_2C^2\cdot O_1O_2 -$$

$$-\frac{1}{3}\pi O_1D^2\cdot AO_1 = \frac{1}{3}\pi O_2C^2(AO_2 + 3O_1O_2 - AO_1) = \frac{2}{3}\pi O_2C^2\cdot O_1O_2,$$

так как $O_1D = O_2C$ и $AO_1 - AO_2 = O_1O_2$. Учитывая, что $\angle ABC = = \angle ADC = \alpha$ как вписанные углы, опирающиеся на $\smile AC$, из ΔACB, где $\angle ACB = 90°$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр AB), находим $BC = 2R\cos\alpha$, $AC = 2R\sin\alpha$. В ΔAO_2C имеем $\angle O_2AC = = 90° - \alpha$, $\angle O_2CA = \alpha$, $O_2C = AC\cos\alpha = 2R\sin\alpha\cos\alpha = R\sin 2\alpha$, $O_2A = = AC\sin\alpha = 2R\sin^2\alpha$; тогда $O_1O_2 = 2R - 2O_2A = 2R(1 - 2\sin^2\alpha) = = 2R\cos 2\alpha$. Итак,

$$V_{\text{т.вр}} = \frac{2}{3}\pi R^2\sin^2 2\alpha\cdot 2R\cos 2\alpha = \frac{2}{3}\pi R^3\sin 2\alpha\sin 4\alpha.$$

3.93. По условию, $AB \parallel DC$, $AD = BC$, $AB = a$, $\angle DAB = \alpha$, $BD \perp AD$ (рис. 3.93). Объем тела вращения трапеции $ABCD$ вокруг AB будем

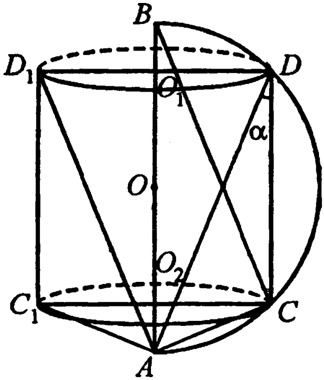


Рис. 3.92

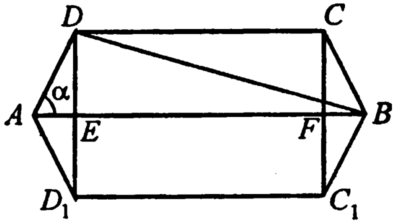


Рис. 3.93

искать по формуле $V_{\text{т. вр}} = 2V_{AED} + V_{DEFC}$, где $DE \perp AB$, $CF \perp AB$. Имеем

$$V_{\text{т.вр}} = \frac{2}{3}\pi DE^2 \cdot AE + \pi DE^2 \cdot EF = \frac{1}{3}\pi DE^2(2AE + 3EF) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi DE^2(a + 2EF) = \pi DE^2\left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}EF\right) =$$

$$\pi DE^2\left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}(a - 2AE)\right) = \pi DE^2\left(a - \frac{4}{3}AE\right).$$

Из ΔADB находим, что $AD = a\cos\alpha$, а из ΔADE — что

$$DE = AD\sin\alpha = a\cos\alpha\sin\alpha = \frac{a}{2}\sin 2\alpha, \quad AE = AD\cos\alpha = a\cos^2\alpha.$$

Следовательно,

$$V_{\text{т.вр}} = \pi\frac{a^2}{4}\sin^2 2\alpha\left(a - \frac{4}{3}a\cos^2\alpha\right) = \frac{\pi a^3}{3}\sin^2 2\alpha\left(\frac{3}{4} - \cos^2\alpha\right) =$$

$$= \frac{\pi a^3}{3}\sin^2 2\alpha\frac{1 - 2\cos 2\alpha}{4} = \frac{\pi a^3}{3}\sin^2 2\alpha\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right).$$

3.94. По условию $PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ — вписанный в нее куб, точки A_1, B_1, C_1, D_1 принадлежат боковым ребрам, а A_2, B_2, C_2, D_2 — основанию пирами-

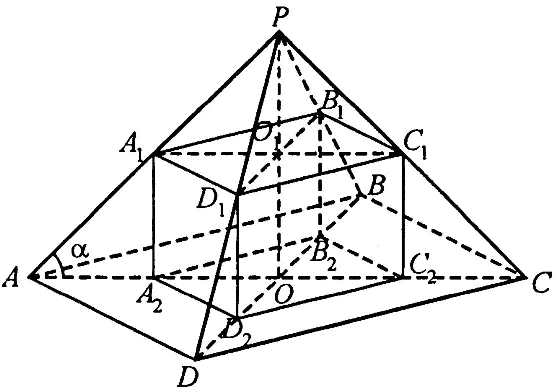


Рис. 3.94

ды, $PO \perp (ABC)$, $\angle PAO = \alpha$ (рис. 3.94); требуется найти $V_{\text{куба}} : V_{\text{пир}}$. Положим $D_1D_2 = x$; тогда $V_{\text{куба}} = x^3$, $OD_2 = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$. Из ΔD_1D_2D находим $DD_2 = x\operatorname{ctg}\alpha$; далее имеем $OD = \dfrac{x\sqrt{2}}{2} + x\operatorname{ctg}\alpha$, $PO = OD\operatorname{tg}\alpha =$ $= \dfrac{x(\sqrt{2} + 2\operatorname{ctg}\alpha)}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Значит,

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}DB^2 \cdot PO = \frac{2}{3}\cdot\frac{x^2(\sqrt{2}+2\operatorname{ctg}\alpha)^2 \cdot x(\sqrt{2}+2\operatorname{ctg}\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{4\cdot 2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}x^3(1+\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha)^3}{6\operatorname{ctg}\alpha},$$

т. е.

$$\frac{V_{\text{куба}}}{V_{\text{пир}}} = \frac{x^3 \cdot 6\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{2}x^3(1+\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha)^3} = \frac{3\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha}{(1+\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha)^3}.$$

3.95. По условию, $SABC$ — пирамида, $CA = CB$, $\angle ACB = a$, ΔABC вписан в основание цилиндра, $S \in KM$, KM — образующая цилиндра, $KS = SM$, $V_{\text{цил}} = V$ (рис. 3.95). Обозначим радиус основания цилиндра через R, а его высоту — через H; тогда $V = \pi R^2 H$, откуда $R^2 H = \frac{V}{\pi}$. Имеем $AB = 2R\sin\alpha$ и, значит,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{4R^2 \sin^2\alpha \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\alpha} = 2R^2 \sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

Окончательно получим

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}\cdot 2R^2 \sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{H}{2} = \frac{1}{3}R^2 H \sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{V}{3\pi}\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

3.96. По условию, SAB — конус, SO — его высота, $CDEFC_1D_1E_1F_1$ — вписанный в конус куб, C_1, D_1, E_1, F_1 — точки лежащие на боковой поверхности конуса, $SO : CC_1 = k$ (рис. 3.96). В ΔSO_1C_1 имеем $\operatorname{ctg}\angle ASO = \frac{SO_1}{O_1C_1} = \frac{2(SO - x)}{x\sqrt{2}}$, где $x = CC_1$. Отсюда находим

$$\operatorname{ctg}\angle ASO = \sqrt{2}\left(\frac{SO}{x} - 1\right) = \sqrt{2}\,(k-1),$$

т. е. $\angle ASO = \operatorname{arcctg}(\sqrt{2}\,(k-1))$.

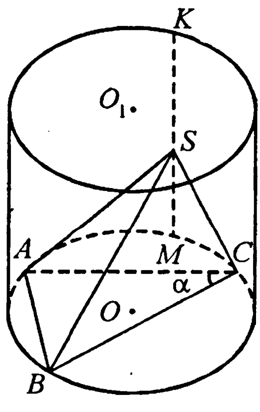


Рис. 3.95

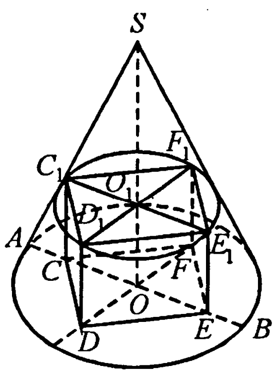


Рис. 3.96

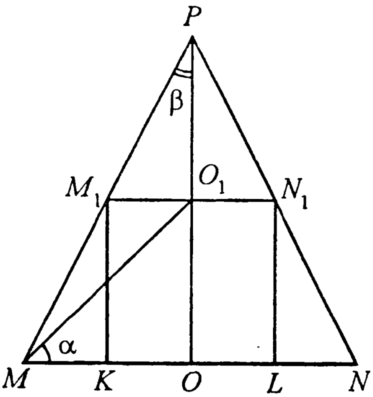


Рис. 3.97

3.97. Пусть PMN — осевое сечение конуса, KLN_1M_1 — осевое сечение вписанного цилиндра, $\angle O_1MK = \alpha$, PO — высота конуса, $\angle MPO = \beta$ (рис. 3.97); требуется найти $V_{\text{кон}} : V_{\text{цил}}$. Обозначим радиус основания конуса через R; тогда $OP = R$ ctgβ (из ΔPOM) и

$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{ctg}\beta$. Из ΔO_1OM находим $OO_1 = R$ tgα. Так как $M_1K = OO_1$, то из ΔM_1MK, в котором $\angle MM_1K = \angle MPO = \beta$, получим $MK = R$ tgα tgβ. Значит,

$$OK = OM - MK = R - R\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{R\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

откуда

$$V_{\text{цил}} = \pi OK^2 \cdot OO_1 = \frac{\pi R^3\cos^2(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha\cos^2\beta},$$

$$\frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{цил}}} = \frac{\pi R^3\operatorname{ctg}\beta\cos^2\beta\cos^2\alpha}{3\pi R^3\cos^2(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos^3\alpha\cos^3\beta}{3\sin\alpha\sin\beta\cos^2(\alpha+\beta)}.$$

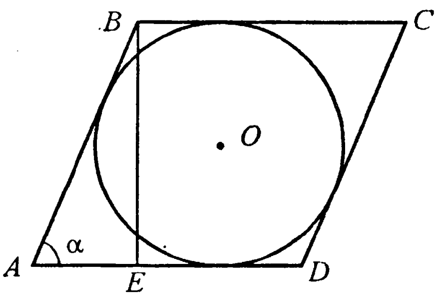


Рис. 3.98

3.98. Изобразим осевое сечение фигуры плоскостью, проходящей через центр вписанного шара и параллельной основанию. В сечении получим параллелограмм $ABCD$, равный основанию прямого параллелепипеда, и вписанный в него большой круг вписанного шара с центром в точке O (рис. 3.98). Из этого следует, что основанием параллелепипеда служит ромб. Требуется найти углы основания параллелепипеда, если $V_{пар} : V_{шара} = k$.

Обозначим радиус шара через r, тогда высота ромба равна $2r$. Проведем $BE \perp AD$ и положим $\angle BAD = \alpha$. Из ΔBEA находим

$AB = \dfrac{2r}{\sin\alpha}$. Тогда $V_{шара} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, $V_{пар} = S_{ABCD} \cdot 2r = \dfrac{8r^3}{\sin\alpha}$. По условию, $\dfrac{8r^3}{\sin\alpha} : \dfrac{4\pi r^3}{3} = k$, или $\sin\alpha = \dfrac{6}{\pi k}$. Итак, $\alpha = \arcsin\dfrac{6}{\pi k}$,

$\angle ADC = \pi - \arcsin\dfrac{6}{\pi k}$; так как $0 < \sin\alpha \le 1$, то $\dfrac{6}{\pi k} \le 1$, откуда $k \ge \dfrac{6}{\pi}$.

При $k = \dfrac{6}{\pi}$ основанием параллелепипеда служит квадрат, т. е. параллелепипед является правильной призмой.

3.99. По условию, O_1 — центр шара, вписанного в правильную пирамиду $PABCD$, PO — высота пирамиды, $PO_1 : O_1O = m : n$ (рис. 3.99); требуется найти угол между (PDC) и (BPC). Очевидно, что $BD \perp PC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Проведем через BD плоскость $(BLD) \perp PC$; тогда $BL \perp PC$ и $DL \perp PC$, т. е. $\angle BLD$ — линейныйугол двугранного угла $BPCD$. Пусть $DC = a$, K — точка касания шара с боковой поверхностью пирамиды и $PF \perp DC$. Так как $\Delta O_1KP \sim \Delta POF$,

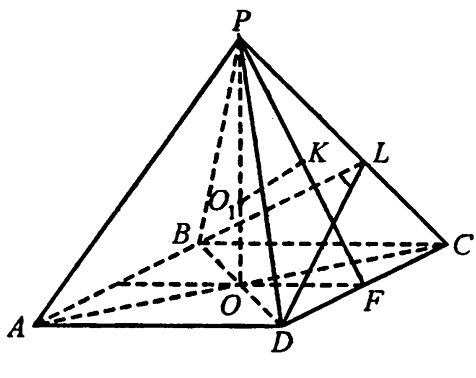


Рис. 3.99

то $\dfrac{O_1K}{O_1P} = \dfrac{OF}{PF}$, или $\dfrac{n}{m} = \dfrac{a}{2PF}$; тогда $PF = \dfrac{am}{2n}$. Из ΔPFC находим

$PC = \sqrt{\dfrac{a^2m^2}{4n^2} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{m^2+n^2}}{2n}$. Теперь воспользуемся тем, что

$S_{\Delta PDC} = \frac{1}{2} DC \cdot FP = \frac{1}{2} PC \cdot DL$, откуда

$$DL = \frac{DC \cdot FP}{PC} = \frac{a \cdot am \cdot 2n}{2n \cdot a\sqrt{m^2+n^2}} = \frac{am}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Наконец, в ΔBLD имеем $BD^2 = 2DL^2 - 2DL^2 \cos \angle BLD$, т. е.

$$\cos \angle BLD = \frac{2DL^2 - BD^2}{2DL^2} = \frac{\frac{2a^2m^2}{m^2+n^2} - 2a^2}{\frac{2a^2m^2}{m^2+n^2}} = -\frac{2a^2n^2}{2a^2m^2} = -\frac{n^2}{m^2}$$

и, следовательно, $\angle BLD = \pi - \arccos \frac{n^2}{m^2}$.

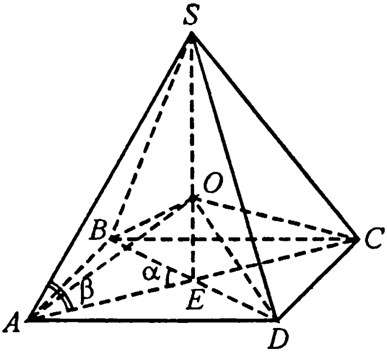


Рис. 3.100

3.100. По условию, $SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — прямоугольник, $SE \perp (ABC)$, $\angle SAE = \angle SBE = \angle SCE = \angle SDE = \beta$, откуда следует, что E — точка пересечения диагоналей AC и BD (рис. 3.100), $\angle AEB = \alpha$ и O — центр шара, описанного около пирамиды, принадлежит SE, R — радиус этого шара. Так как $\angle ESD = 90° - \beta$ и $OS = OD = R$, то $\angle ODE = \angle ESD = 90° - \beta$. Тогда $\angle EOD = 2\angle ESD = 180° - 2\beta$ как внешний угол ΔSOD. Из ΔOED находим $ED = R \sin(180° - 2\beta) = R \sin 2\beta$, откуда $BD = 2R \sin 2\beta$. Из ΔSED получим

$$SE = ED \operatorname{tg}\beta = R \sin 2\beta \operatorname{tg}\beta = 2R \sin^2\beta.$$

Окончательно имеем

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SF = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BD^2 \sin\alpha \cdot 2R \sin^2\beta =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 8R^3 \sin^2 2\beta \sin^2\beta \sin\alpha = \frac{4}{3} R^3 \sin^2 2\beta \sin^2\beta \sin\alpha.$$

3.101. По условию, $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная усеченная пирамида, $\angle B_1BCA = \alpha$, L — центр вписанного шара (рис. 3.101); требуется найти $S_{\text{полн. ус. пир}} : S_{\text{шара}}$. Пусть AK и A_1K_1 — высоты оснований; тогда K_1K — высота боковой грани, $\angle AKK_1 = \alpha$ как линейный угол двугранного угла B_1BCA. Далее, пусть O и O_1 — центры оснований усеченной пирамиды; тогда OO_1 — диаметр вписанного шара. Положим $LO = R$ и проведем $K_1M \parallel O_1O$; имеем

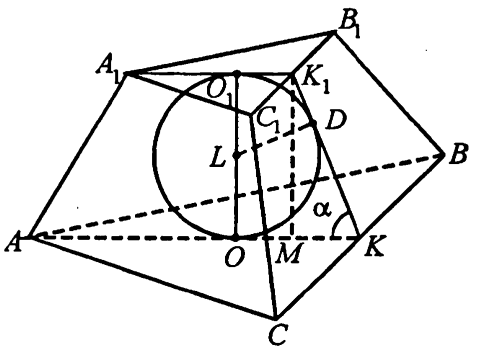


Рис. 3.101

$K_1M = 2R$, $K_1K = \dfrac{2R}{\sin\alpha}$ (из ΔK_1MK). Полагая $AB = a$, $A_1B_1 = b$, найдем $OK = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $O_1K_1 = \dfrac{b\sqrt{3}}{6}$, $MK = \dfrac{(a-b)\sqrt{3}}{6} = 2R\operatorname{ctg}\alpha$. Согласно свойству отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности, $K_1K = K_1O_1 + KO = \dfrac{2R}{\sin\alpha}$. Теперь, решив систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(a-b)\sqrt{3}}{6} = 2R\operatorname{ctg}\alpha, \\ \dfrac{(a+b)\sqrt{3}}{6} = \dfrac{2R}{\sin\alpha}, \end{cases}$$

получим $a = 2\sqrt{3}R\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, $b = 2\sqrt{3}R\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Следовательно,

$$S_{\text{полн.ус.пир}}=\frac{3(a+b)}{2}\cdot\frac{2R}{\sin\alpha}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{12R}{\sqrt{3}\sin\alpha}\cdot\frac{2R}{\sin\alpha}+3R^2\sqrt{3}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{12R^2\sqrt{3}}{\sin^2\alpha}+3R^2\sqrt{3}\left(\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right)=\frac{3R^2\sqrt{3}}{\sin^2\alpha}(2+2\cos^2\alpha+4)=$$

$$=6R^2\sqrt{3}\left(\frac{3}{\sin^2\alpha}+\operatorname{ctg}^2\alpha\right)=6R^2\sqrt{3}\,(3+4\operatorname{ctg}^2\alpha);\ S_{\text{шара}}=4\pi R^2.$$

Итак,

$$\frac{S_{\text{полн.ус.пир}}}{S_{\text{шара}}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}(3+4\operatorname{ctg}^2\alpha).$$

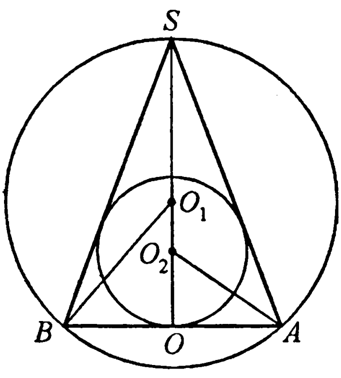


Рис. 3.102

3.102. Изобразим осевое сечение фигуры; $SA = SB$ — образующие конуса, SO — высота конуса, O_1 и O_2 — соответственно центры описанного и вписанного шаров (рис. 3.102), отношение их объемов равно k; требуется найти $\angle SAO$. Пусть R и r — радиусы шаров, $\angle SAO = \alpha$, $AO = x$; тогда $\angle OO_1B = \angle ASB = 180° - 2\alpha$, $\angle O_2AO = \frac{\alpha}{2}$. Из ΔO_1OB и ΔO_2OA находим

$$R=\frac{x}{\sin(180°-2\alpha)}=\frac{x}{\sin 2\alpha},\ r=x\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Значит,

$$\frac{r}{R}=\frac{x\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha}{x}=\frac{(1-\cos\alpha)\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=2(\cos\alpha-\cos^2\alpha).$$

Так как $\dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=k$, то $\dfrac{r}{R}=\sqrt[3]{k}$. Решив уравнение

$2\cos\alpha-2\cos^2\alpha=\sqrt[3]{k}$, получим

$$\cos\alpha=\frac{1\pm\sqrt{1-2\sqrt[3]{k}}}{2},\text{ где } 1-2\sqrt[3]{k}\ge 0,\text{ откуда } 0\le k\le\frac{1}{8}.$$

Итак, $\angle SAO=\alpha=\arccos\dfrac{1\pm\sqrt{1-2\sqrt[3]{k}}}{2}$, $0<k\le\dfrac{1}{8}$.

3.103. Изобразим осевое сечение фигуры: $SB = SC$ — образующие конуса, SP — его высота, O — центр вписанного шара (рис. 3.103), $V_{\text{кон}} : V_{\text{шара}} = k$; требуется найти $\angle SBP$. Обозначим через A точку касания шара с боковой поверхностью конуса. Пусть $OA = r$, $PB = R$, $SP = H$; тогда

$$\frac{\frac{1}{3}\pi R^2H}{\frac{4}{3}\pi r^3}=3,\text{ или }\frac{R^2H}{4r^3}=k.$$

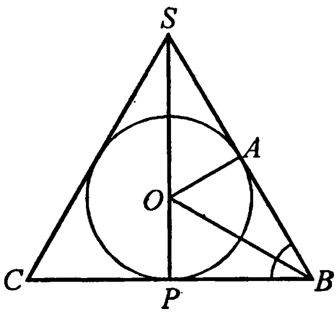


Рис. 3.103

Полагая $\angle SBP = \alpha$, из ΔSPB и ΔOPB имеем $\dfrac{H}{R}=\operatorname{tg}\alpha$, $\dfrac{R}{r}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Но $\dfrac{R^2H}{4r^3}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{R^3}{r^3}\cdot\dfrac{H}{R}=k$ и, значит,

$$\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha=k;\ \frac{1}{\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{4\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}=k;\ \frac{1}{2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}=\kappa.$$

Пусть $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}=x$; тогда $2x-2x^2-\dfrac{1}{k}=0$; $2kx^2-2kx+1=0$. Отсюда

$$x=\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k};\ \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k};\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k}};$$

так как $k^2-2k\ge 0$ и $k>0$, то $k\ge 2$. Итак,

$$\alpha=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k\pm\sqrt{k^2-2k}}{2k}}, k\ge 2.$$

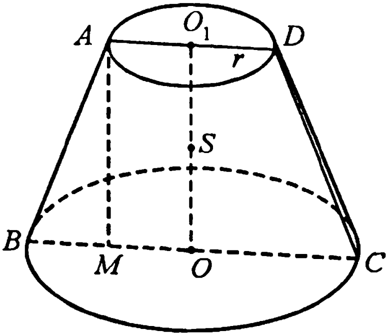


Рис. 3.104

3.104. По условию, $ABCD$ — усеченный конус, S — центр вписанного шара (рис. 3.104); $S_{\text{полн. ус. кон}} : S_{\text{шара}} = 2$; требуется найти $\angle ABO$. Рассмотрим осевое сечение $ABCD$ усеченного конуса, OO_1 — ось усеченного конуса. Введем обозначения: $SO = r$, $OB = R_1$, $O_1A = R_2$. Проведем $AM \| OO_1$; тогда $AM = OO_1$. Согласно свойству сторон описанного четырехугольника, $2AB = BC + AD$; имеем $AB = R_1 + R_2$, $BM = R_1 - R_2$. Из ΔAMB находим $R_1+R_2=\dfrac{2r}{\sin\alpha}, R_1 - R_2 = 2r \operatorname{ctg}\alpha$, где $\alpha = \angle ABO$. Решив систему уравнений

$$R_1+R_2=\frac{2r}{\sin\alpha},\ R_1-R_2=2r\operatorname{ctg}\alpha,$$

получим $R_1=r\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}, R_2=r\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Тогда

$$\frac{S_{\text{полн. ус. кон}}}{S_{\text{шара}}}=\frac{\pi(R_1^2+R_2^2+(R_1+R_2)AB)}{4\pi r^2}=$$

$$=\frac{\pi\left(r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+r^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\frac{4r^2}{\sin^2\alpha}\right)}{4\pi r^2}=\frac{4\pi r^2\left(1+\cos^4\frac{\alpha}{2}+\sin^4\frac{\alpha}{2}\right)}{4\pi r^2\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{1+\cos^4\frac{\alpha}{2}+\sin^4\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha}=\frac{1+\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{2-\frac{1}{2}\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{4-\sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha}=2;\ 5\sin^2\alpha=4;\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}=$$

Итак, $\alpha=\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3.105. По условию, AnB шаровой сегмент, O — центр шара, $\cup AnB=\angle AOB=\alpha$ (рис. 3.105). Пусть R — радиус шара, OC — перпендикуляр к основанию сегмента, O_1 — центр основания сегмента, $O_1C=H$; тогда $H=R-OO_1$. Из ΔOO_1A находим $OO_1=R\cos\frac{\alpha}{2}$, откуда $H=R-R\cos\frac{\alpha}{2}=2R\sin^2\frac{\alpha}{4}$. Значит,

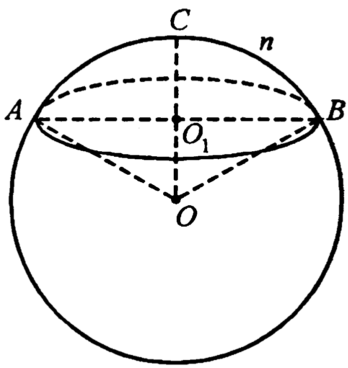


Рис. 3.105

$$V_{\text{шар.сегм}}=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)=\pi\cdot 4R^2\sin^4\frac{\alpha}{4}\left(R-\frac{2R}{3}\sin^2\frac{\alpha}{4}\right)=$$

$$=\frac{4\pi R^3\sin^4\frac{\alpha}{4}}{3}\left(3-2\sin^2\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{4\pi R^3}{3}\sin^4\frac{\alpha}{4}\left(2+\cos\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$V_{\text{шара}}=\frac{4\pi R^3}{3}.$$

Итак,

$$\frac{V_{\text{шар.сегм}}}{V_{\text{шара}}}=\sin^4\frac{\alpha}{4}\left(2+\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Глава 4

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

Группа А

4.1. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если точка касания вписанной в него окружности делит один из катетов на отрезки длиной m и n ($m < n$).

4.2. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 8 см. Может ли длина гипотенузы быть равной 5 см?

4.3. Доказать, что в прямоугольном треугольнике величина угла между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе, равна модулю разности величин острых углов треугольника.

4.4. Доказать, что для любой точки M, принадлежащей произвольному треугольнику ABC со сторонами a, b и c и высотами h_a, h_b и h_c, справедливо равенство $\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}=1$, где x, y и z — соответственно расстояния от точки M до сторон BC, AC и AB. Сформулировать соответствующее свойство для произвольной точки, принадлежащей равностороннему треугольнику.

4.5. Доказать, что в любом треугольнике отношение суммы всех попарных произведений, составленных из длин сторон треугольника, к сумме длин его трех высот равно диаметру описанной окружности.

4.6. Длины сторон остроугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию с разностью 5 см. Найти наибольшее число, обладающее следующим свойством: длина большей стороны любого треугольника указанного типа больше этого числа.

4.7. Медиана некоторого треугольника совпадает с его биссектрисой. Доказать, что такой треугольник — равнобедренный.

4.8. Найти угол при вершине равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

4.9. Окружность каждого из двух равных кругов радиуса R проходит через центр другого. Найти площадь общей части этих кругов.

4.10. Из точки A проведены два луча, пересекающие данную окружность: один — в точках B и C, другой — в точках D и E. Известно, что $AB = 7$, $BC = 7$, $AD = 10$. Определить DE.

4.11. Показать, что $3 < \pi < 4$, не пользуясь приближенными значениями числа π.

4.12. Доказать, что в любой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) треугольники AOB и COD равновелики (O — точка пересечения диагоналей).

4.13. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны и имеют длины a, b и c. Найти объем пирамиды.

4.14. На сколько дальше центр верхнего основания куба с ребром 1 удален от вершины нижнего основания, чем от его стороны?

4.15. Найти угол между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба.

4.16. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) пересечен плоскостью, проходящей через вершины A, C и середину E ребра DD_1. Показать, что объем пирамиды $ACDE$ равен $\frac{1}{12}$ объема куба.

4.17. Дан правильный тетраэдр $SABC$. Под каким углом ребро AB видно из середины ребра SC?

4.18. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию. Найти функцию, выражающую зависимость площади сечения от расстояния между вершиной пирамиды и секущей плоскостью.

4.19. Найти площадь полной поверхности конуса, если его боковую поверхность можно развернуть в круговой сектор с радиусом 1 и с прямым центральным углом.

Группа Б

4.20. Длина гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника равна 40. Окружность с радиусом, равным 9, касается гипотенузы в ее середине. Найти длину отрезка, отсекаемого этой окружностью на одном из катетов.

4.21. Сторона, биссектриса и высота треугольника, выходящие из одной и той же вершины, равны соответственно 5, 5 и $2\sqrt{6}$ см. Найти две другие стороны треугольника.

4.22. В прямоугольном треугольнике найти биссектрису прямого угла, если гипотенуза треугольника равна c, а один из острых углов равен α.

4.23. В треугольнике ABC точка K, взятая на стороне BC, делит ее в отношении $1 : 3$, считая от вершины B, а точка L делит сторону AC в отношении $2 : 5$, считая от вершины A. В каком отношении точка O пересечения прямых AK и BL делит отрезки AK и BL, считая от соответствующих вершин?

4.24. Доказать, что сумма квадратов медиан любого треугольника составляет 75% от суммы квадратов его сторон.

4.25. Центры описанной около треугольника и вписанной в него окружностей расположены симметрично относительно одной из сторон треугольника. Найти углы треугольника.

4.26. В квадрате $ABCD$ точки M и N — середины сторон DC и BC. Найти $\angle MAN$.

4.27. Каждая сторона выпуклого четырехугольника меньше a. Доказать, что его площадь меньше a^2.

4.28. Одна из сторон пятиугольника имеет длину 30 см. Длины остальных сторон выражаются целыми числами и составляют арифметическую прогрессию с разностью 2 см, причем длина меньшей и сторон не превышает 7 см. Найти длины сторон всех пятиугольников, для которых выполняются эти условия.

4.29. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник, площадь которого равна $3R^2$. Найти n.

4.30. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри правильного многоугольника, до прямых, содержащих его стороны, равна произведению апофемы многоугольника на число его сторон.

4.31. Две диагонали, исходящие из одной и той же вершины правильного пятиугольника, разбивают его на три треугольника. Найти отношение площади треугольника, ограниченного этими двумя диагоналями, к сумме площадей двух других треугольников.

4.32. Пусть n — число сторон выпуклого многоугольника, а d — число его диагоналей. Указать все значения n, для которых $n > d$.

4.33. Даны две скрещивающиеся прямые. Можно ли провести две пересекающиеся прямые так, чтобы каждая из них пересекала обе данные прямые?

4.34. Все ребра (в том числе и стороны основания) треугольной пирамиды равны. Найти отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к ее высоте.

4.35. Образующая усеченного конуса составляет с плоскостью о нования угол α. Внутри конуса расположены два шара, касающиеся друг друга и боковой поверхности конуса, причем первый шар касается нижнего основания конуса, а второй — верхнего основания. Расстояние между центрами шаров равно l. Найти радиусы оснований конуса.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ

4.1. Пусть P, N и K — точки касания вписанной окружности со сторонами ΔABC (рис. 4.1). По условию, $KB = n$, $CK = m$, где $n > m$. Положим $AB = x$; тогда $AN = AB - NB = x - n$. Согласно теореме Пифагора, имеем $x^2 = (x - n + m)^2 + (m + n)^2$; $x^2 = x^2 + n^2 + m^2 - 2xn + 2xm - 2mn + m^2 + 2mn + n^2$;

$$2(n - m)\,x = 2(m^2 + n^2).$$

Итак, $AB = x = \dfrac{m^2 + n^2}{n - m}$.

Ответ: $\dfrac{m^2 + n^2}{n - m}$.

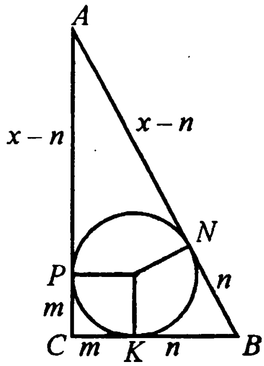


Рис. 4.1

4.2. Пусть a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника. Согласно условию, $a + b = 8$, т. е. $b = 8 - a$. Предположим, что $c = 5$; тогда получим уравнение $a^2 + (8 - a)^2 = 5^2$, или $a^2 + 64 - 16a + a^2 - 25 = 0$, или $2a^2 - 16a + 39 = 0$. Но $\dfrac{D}{4} = 64 - 2 \cdot 39 < 0$ и, значит, это уравнение не имеет корней. Итак, длина гипотенузы не может быть равной 5 см.

Ответ: нет, не может.

4.3. Пусть $\angle C = \dfrac{\pi}{2}$, CD — высота, CE — медиана (рис. 4.2). Требуется доказать, что $\angle DCE = |\angle B - \angle A|$. Положим $\angle DCE = \angle x$; тогда $\angle DCA = \angle B$ (так как оба угла дополняют угол A до $\dfrac{\pi}{2}$). В прямоугольном треугольнике длина медианы, проведенной к гипотенузе, равна половине длины гипотенузы; следовательно, ΔACE — равнобедренный и $\angle ECA = \angle x + \angle B = \angle A$, откуда $\angle x = \angle A - \angle B$. Если вершины A и

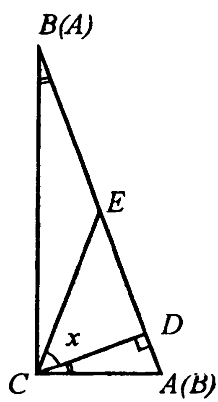


Рис. 4.2

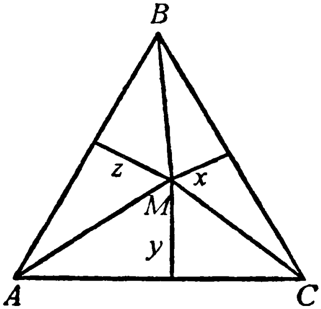


Рис. 4.3

B треугольника поменять местами, то получим $\angle x = \angle B - \angle A$. Оба результата можно объединить в один: $\angle x = |\angle B - \angle A|$.

4.4. Соединив точку M с вершинами A, B и C, получим три треугольника BMC, AMC и AMB, высоты которых соответственно равны x, y и z (рис. 4.3). Пусть S — площадь треугольника ABC; тогда $S = \frac{1}{2}(ax + by + cz)$. С другой стороны, $S = \frac{1}{2}ah_a$, $S = \frac{1}{2}bh_b$, $S = \frac{1}{2}ch_c$. Комбинируя эти равенства, находим

$$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1.$$

В равностороннем треугольнике $h_a = h_b = h_c = h$, а потому $x + y + z = h$, т. е. сумма расстояний от произвольной точки, принадлежащей равностороннему треугольнику, до его сторон постоянна и равна высоте треугольника.

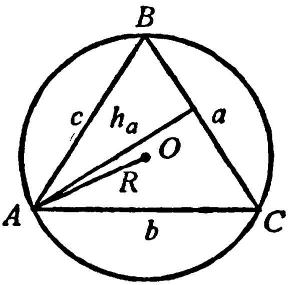


Рис. 4.4

4.5. Докажем, что $\frac{ab + bc + ac}{h_a + h_b + h_c} = 2R$ (рис. 4.4). Воспользуемся теоремой синусов: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, откуда

$$\frac{ac}{c\sin A} = \frac{ab}{a\sin B} = \frac{bc}{b\sin C} = 2R. \tag{1}$$

Но $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ah_a$, откуда $h_a = b \sin C$ (это также непосредственно видно из рис. 4.4); аналогично, $h_b =$

$= c \sin A$, $h_c = a \sin B$. Тогда из соотношений (1) находим $ab = 2Rh_c$, $bc = 2Rh_a$, $ac = 2Rh_b$. Сложив эти равенства, получим

$$ab + bc + ac = 2R(h_a + h_b + h_c), \text{ или } \frac{ab+bc+ac}{h_a+h_b+h_c} = 2R.$$

4.6. Пусть в ΔABC (рис. 4.5) $AB = x$, $BC = x + 5$ и $AC = x + 10$, где $x > 5$. Согласно теореме косинусов, имеем

$(x + 10)^2 = x^2 + (x + 5)^2 - 2x(x + 5)\cos B$,

откуда

$$\cos B = \frac{x^2-10x+75}{2x(x+5)} = \frac{(x+5)(x-15)}{2x(x+5)} = \frac{x-15}{2x}.$$

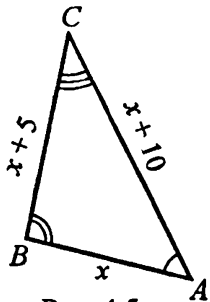


Рис. 4.5

Так как $0 < \cos B < 1$, то $0 < \frac{x-15}{2x} < 1$. Наименьшим значением x, при котором выполняется это неравенство, является $x = 15$. Поэтому наибольшее число, обладающее указанным в условии свойством, есть $x + 10 = 25$.

Ответ: 25 см.

4.7. По условию, $BD = DC = a$, $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$ (рис. 4.6); требуется доказать, что ΔABC — равнобедренный. В ΔABD и ΔACD по теореме косинусов имеем

$$a^2 = c^2 + m^2 - 2mc\cos\alpha,$$

$$a^2 = b^2 + m^2 - - 2mb\cos\alpha.$$

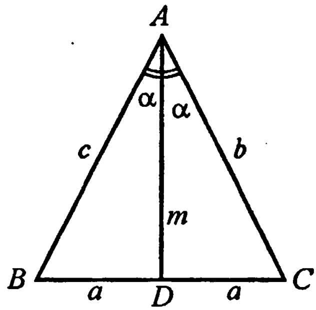


Рис. 4.6

Вычитая одно выражение из другого, получим

$$(c^2 - b^2) - 2m(c - b)\cos\alpha = 0,$$

или

$$(c - b)(c + b - 2m\cos\alpha) = 0.$$

Так как $c + b - 2m\cos\alpha \neq 0$, то $c = b$, т. е. ΔABC — равнобедренный.

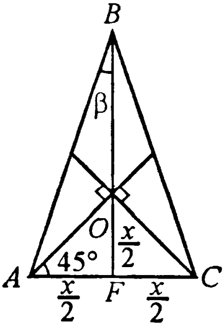


Рис. 4.7

4.8. Пусть $AC = x$ (рис. 4.7); поскольку $\angle OAF = \angle AOF = 45°$, имеем $OF = AF = \frac{x}{2}$. Но $BO = 2OF = x$, откуда $BF = \frac{3x}{2}$. Полагая

$$\angle ABF = \beta, \text{ находим } \operatorname{tg}\beta = \frac{AF}{BF} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{3x}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

4.9. Так как в ΔOAO_1 все стороны равны R, то $\angle AOB = 120°$ (рис. 4.8). Находим

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}R^2 \sin 120° = \frac{1}{2}R^2 \sin 60° = \frac{R^2\sqrt{3}}{4},\ S_{\text{сект}\,AOB} = \frac{1}{3}\pi R^2,$$

откуда $S_{\text{сегм}} = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. Итак, площадь общей части двух кругов составляет

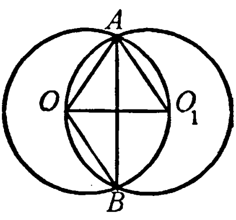


Рис. 4.8

$$\frac{2}{3}\pi R^2 - \frac{R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{6}.$$

Ответ: $\frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{6}$.

4.10. Поскольку $\Delta ADC \sim \Delta ABE$ (рис. 4.9), имеем $\frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AD}$, где $AB = BC = 7$, $AD = 10$. Пусть $DE = x$; тогда $\frac{10 + x}{7} = \frac{14}{10}$, откуда $100 + 10x = 98$, т. е. $x = -0{,}2$. Такое значение x свидетельствует о том, что точка E расположена между A и D, т. е. $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE}$ и, значит, $\dfrac{10}{7}=\dfrac{14}{10-x}$. Отсюда находим $x = 0{,}2$.

Ответ: 0,2.

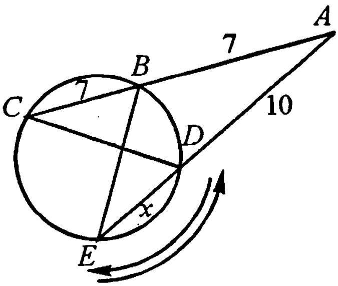


Рис. 4.9

4.11. Указание. Взять окружность радиуса 1, описать около нее квадрат, вписать в нее правильный шестиугольник, а затем сравнить периметры многоугольников и длину окружности.

4.12. Найдем площади ΔABC и ΔBCD (рис. 4.10): $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot h$, $S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}BC\cdot h$, где $h = BK$, т. е. $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta BCD}$. Но $S_{\Delta AOB}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta BOC}$, $S_{\Delta COD}=S_{\Delta BCD}-S_{\Delta BOC}$ и, следовательно, $S_{\Delta AOB}=S_{\Delta COD}$.

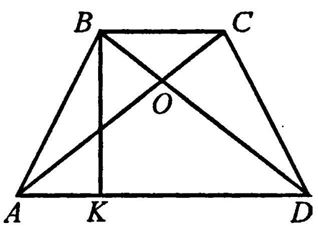


Рис. 4.10

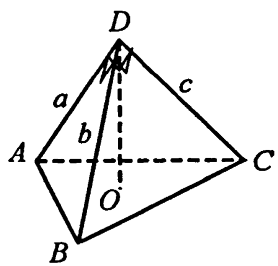


Рис. 4.11

4.13. Будем считать основанием пирамиды прямоугольный треугольник ADB (рис. 4.11), а вершиной — точку C. Так как $CD\perp AD$ и $CD\perp BD$, то в силу теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости $CD\perp(ADB)$ и, следовательно, ребро CD — высота пирамиды. По формуле (2.10) находим объем пирамиды:

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABD}\cdot CD=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot c=\frac{abc}{6}.$$

Ответ: $\frac{abc}{6}$.

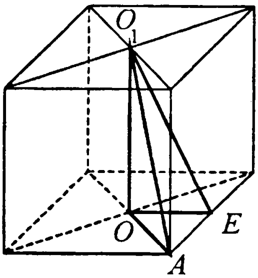


Рис. 4.12

4.14. Имеем

$$O_1A=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$O_1E=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

(рис 4.12), откуда $O_1A-O_1E=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: на $0{,}5(\sqrt{6}-\sqrt{5})$.

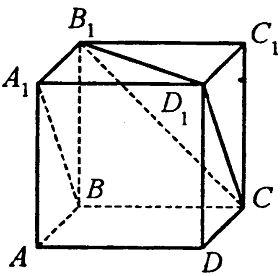


Рис. 4.13

4.15. Пусть ребро куба равно a; требуется найти угол между диагоналями A_1B и B_1C (рис. 4.13). Этот угол равен углу между прямыми D_1C и B_1C, поскольку $D_1C \parallel A_1B$. В ΔB_1D_1C имеем $B_1D_1=D_1C=B_1C=a\sqrt{2}$ и, следовательно, $\angle B_1CD_1=60°$.

Ответ: 60°.

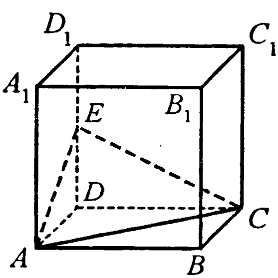


Рис. 4.14

4.16. Имеем (рис. 4.14) $DE=\frac{1}{2}a$ (a — ребро куба), $S_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}a^2$,

$$V_{ACDE}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{12}a^3,\ V_{\text{куба}}=a^3$$

Итак, $\frac{V_{ACDE}}{V_{\text{куба}}}=\frac{1}{12}$.

4.17. По условию, $SM = MC$ (рис. 4.15); требуется найти $\angle AMB$. Пусть a — ребро правильного тетраэдра; тогда в ΔAMB имеем $AM = MB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, откуда по теореме косинусов получим

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2AM \cdot MB \cos \angle AMB,$$

или

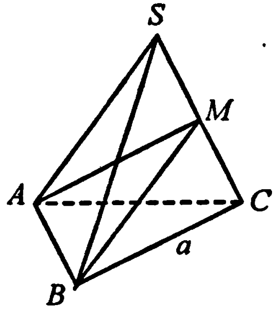


Рис. 4.15

$$a^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - 2 \cdot \frac{3a^2}{4} \cos \angle AMB .$$

Следовательно,

$$\cos \angle AMB = \left(\frac{3a^2}{2} - a^2\right) : \frac{3a^2}{2} = \frac{1}{3}, \text{ т. е. } \angle AMB = \arccos \frac{1}{3} .$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

4.18. По условию, высота $SO_1 = h$ (рис. 4.16) является переменной. Известно, что $\dfrac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\dfrac{h}{H}\right)^2$, т. е.

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = h^2 \frac{S_{\Delta ABC}}{H^2}, \text{ где } S_{\Delta ABC} \text{ и } H \text{ —}$$

величины постоянные в данной задаче. Таким образом, зависимость между площадью сечения и расстоянием от вершины до секущей плоскости выражается квадратичной функцией вида $f(x) = kx^2$, где $k = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{H^2} > 0$ — параметр, а $x = h$ — переменная; причем $0 \le x < H$.

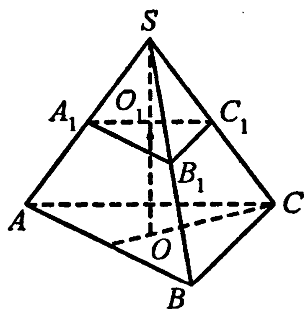


Рис. 4.16

4.19. Сектор развертки конуса имеет угол 90° и радиус $R = 1$; следовательно, его площадь $S_1 = \pi R \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$. Площадь боковой поверхности конуса $S_2 = \pi r l = \pi r$ (так как $l = R = 1$). Но $S_1 = S_2$ и, значит, $\frac{\pi}{4} = \pi r$, откуда $r = \frac{1}{4}$. Теперь находим площадь полной поверхности конуса:

$$S = S_2 + S_{\text{осн}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{16} = \frac{5\pi}{16}.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{16}$.

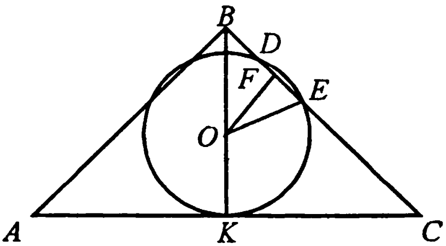


Рис. 4.17

4.20. Сначала выясним, имеет ли задача решение при данных значениях длины гипотенузы и радиуса окружности. Из геометрических соображений (рис. 4.17) ясно, что для того чтобы окружность с центром O, лежащим на высоте BK треугольника ABC, пересекала катет BC в двух точках D и E, необходимо и достаточно, чтобы ее радиус OK был не больше половины высоты BK, но больше радиуса вписанной в треугольник окружности. Первое соотношение очевидно ($9 < 10$), второе также нетрудно проверить. Радиус r вписанной окружности найдем по формуле $r = \frac{S}{p}$, т. е.

$$r = \frac{20\sqrt{2} \cdot 20\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{40 + 40\sqrt{2}}{2}} = \frac{20}{\sqrt{2} + 1} = 20\sqrt{2} - 20.$$

Ясно, что $9 > 20\sqrt{2} - 20$, так как возведя обе части равносильного ему неравенства $29 > 20\sqrt{2}$ в квадрат, получим верное неравенство $841 > 800$.

Для отыскания длины отрезка DE проведем $OF \perp DE$ и радиус OE заданной окружности. Вычислим последовательно длины отрезков BO, OF, FE и, наконец, DE. Имеем $BO = BK - OK = 11$,

$$OF = BO \sin 45° = \frac{11\sqrt{2}}{2}. \quad FE = \sqrt{OE^2 - OF^2} = \sqrt{81 - \frac{121}{2}} = \sqrt{\frac{41}{2}},$$

$$DE = 2FE = \sqrt{82}.$$

Ответ: $\sqrt{82}$.

4.21. Находим (рис. 4.18) $AH = HD = \sqrt{25 - 24} = 1$ (см), т. е. $AD = 2$ см. Далее имеем $\frac{BC}{DC} = \frac{AB}{AD} = \frac{5}{2}$. Известно, что квадрат длины биссектрисы выражается формулой $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$ (см. формулу (1.37)). Таким образом, $25 = 5 \cdot 5x - 2 \cdot 2x$ или $25 = 21x$, откуда $x = \frac{25}{21}$. Итак,

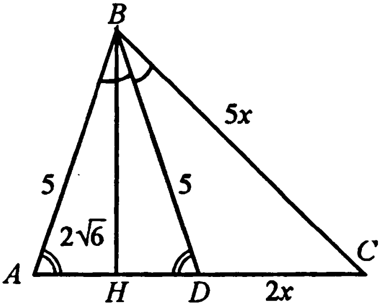


Рис. 4.18

$$AC = 2 + \frac{50}{21} = 4\frac{8}{21} \text{ (см)}, \quad BC = \frac{5 \cdot 25}{21} = 5\frac{20}{21} \text{ (см)}.$$

Ответ: $4\frac{8}{21}$ и $5\frac{20}{21}$ см.

4.22. В ΔABC (рис. 4.19) имеем $AC = c \sin\alpha$, $BC = c\cos\alpha$, $BD = x$, $AD = c - x$, l — биссектриса угла C. Так как $\frac{x}{c - x} = \frac{c\cos\alpha}{c\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$, то $x = c \operatorname{ctg}\alpha - x \operatorname{ctg}\alpha$, откуда

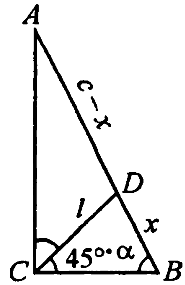


Рис. 4.19

$$x=\frac{c\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{c\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha},\ c-x=\frac{c\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}.$$

Теперь воспользуемся формулой $l=\sqrt{AC\cdot BC-AD\cdot DB}$ и получим

$$l=\sqrt{c^2\sin\alpha\cos\alpha-\frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}}=c\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}}=$$

$$=c\sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}}=\frac{c\sin 2\alpha}{\sqrt{2\,(1+\cos\,(90^\circ-2\alpha))}}=\frac{c\sin 2\alpha}{\sqrt{2\cdot 2\cos^2(45^\circ-\alpha)}}=$$

$$=\frac{c\sin 2\alpha}{2\cos\,(45^\circ-\alpha)}.$$

Ответ: $\dfrac{c\sin 2\alpha}{2\cos\,(45^\circ-\alpha)}$.

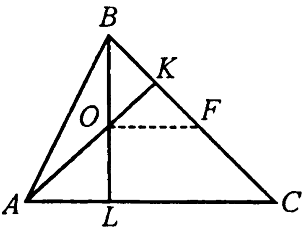


Рис. 4.20

4. 23. I способ. Пусть $BK=x$, $AL=2y$ (рис. 4.20), тогда по условию $KC=3x$, $LC=5y$. Пусть, далее, $KF=m$, $OF=n$. Из подобия треугольников OKF и AKC имеем $\frac{n}{m}=\frac{7y}{3x}$, откуда

$$\frac{n}{y}=\frac{7m}{3x}. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников BOF и BLC находим $\frac{n}{5y}=\frac{x+m}{4x}$, откуда

$$\frac{n}{y}=\frac{5(x+m)}{4x}. \qquad (2)$$

Приравнивая правые части пропорций (1) и (2), после упрощений получаем $28m=15(x+m)$, откуда $m=\frac{15x}{13}$. Следовательно,

$$BF = BK + KF = \frac{28x}{13} \text{ и } CF = BC - BF = 4x - \frac{28x}{13} = \frac{24x}{13}.$$

Согласно теореме Фалеса, имеем

$$\frac{BO}{OL} = \frac{BF}{FC} = \frac{\frac{28x}{13}}{\frac{24x}{13}} = \frac{7}{6}, \quad \frac{AO}{OK} = \frac{\frac{24x}{13}}{\frac{15x}{13}} = \frac{8}{5}.$$

II способ. Пусть стороны треугольника ABC представляют собой невесомые стержни, а в вершинах треугольника приложены параллельные силы (рис. 4.21). Предположим, что в вершине C приложена сила, равная 2 Н; тогда в точке B согласно условиям равновесия (равенство моментов сил относительно точки K) должна быть приложена сила 6 Н, а в точке K согласно правилу сложения параллельных сил должна быть приложена сила 8 Н. Рассуждая аналогично относительно точек A и L, находим, что в точке A должна быть приложена сила 5 Н, а в точке L — сила 7 Н. Наконец, согласно условиям равновесия относительно точки O получаем $AO : OK = 8 : 5$ и $BO : OL = 7 : 6$.

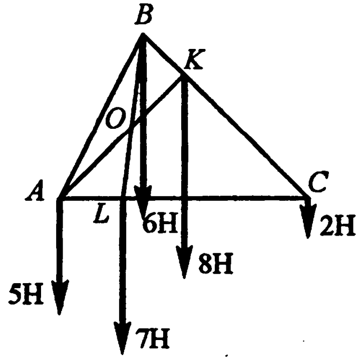


Рис. 4.21

Ответ: 8 : 5 и 7 : 6.

4. 24. Указание. Для каждой из медиан треугольника воспользоваться формулой (1.35).

4.25. Пусть $\angle BDC = x$; тогда $\angle BOC = 2x$ (рис. 4.22). Следовательно, $\angle OBC = 90° - x$, т. е. $\angle O_1BC = 90° - x$ (в силу симметрии точек O и O_1 относительно стороны BC). Запишем сумму углов ΔABC: $180° - x + 180° - 2x + 180° - 2x = 540° - 5x$; тогда $540° - 5x = 180°$, откуда

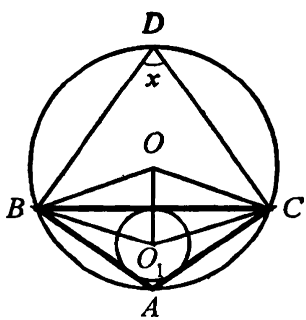


Рис. 4.22

$x = 72°$. Окончательно получим $\angle BAC = 180° - 72° = 108°$, $\angle CBA = \angle BCA = \frac{1}{2}(180° - 108°) = 36°$.

Ответ: 108°, 36° и 36°.

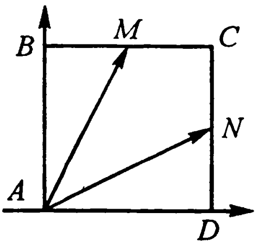


Рис. 4.23

4.26. Введем систему координат с началом в точке $A(0;0)$ и осями координат, направленными вдоль сторон AD и AB квадрата (рис. 4.23). В этой системе вектор $\overline{AM}$ имеет координаты (0,5; 1), а вектор $\overline{AN}$ — координаты (1; 0,5). Воспользуемся формулой

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AM}\cdot\overline{AN}}{\left|\overline{AM}\right|\left|\overline{AN}\right|}, \text{ где } \overline{AM}\cdot\overline{AN} = 0{,}5\cdot 1 + 1\cdot 0{,}5 = 1,$$

$$\left|\overline{AM}\right| = \sqrt{0{,}5^2 + 1^2} = 0{,}5\sqrt{5},\ \overline{AN} = \sqrt{1^2 + 0{,}5^2} = 0{,}5\sqrt{5}.$$

Итак, $\cos\alpha = \frac{1}{0{,}5\sqrt{5}\cdot 0{,}5\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$.

Ответ: arccos 0,8.

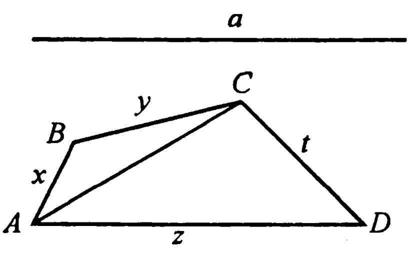


Рис. 4.24

4.27. Пусть $x < a, y < a, z < a, t < a$ — стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ (рис. 4.24). Диагональ AC делит четырехугольник на два треугольника ABC и ACD, имеющих площади $S_{\Delta ABC} = \frac{xy}{2}\sin B$ и $S_{\Delta ADC} = \frac{zt}{2}\sin D$. Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{xy}{2}\sin B + \frac{zt}{2}\sin D < \frac{xy}{2} + \frac{zt}{2},$$

или

$$S_{ABCD} < \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}, \text{ т. е. } S_{ABCD} < a^2.$$

4.28. Пусть сторона AB пятиугольника $ABCDE$ равна 30 см (рис. 4.25). Далее, пусть $BC = x$; тогда $CD = x + 2$, $DE = x + 4$, $EA = x + 6$, где $x \in Z, x \le 7$. Для того чтобы получился пятиугольник, необходимо выполнение неравенства $x + x + 2 + x + 4 + x + 6 > 30$, или $4x > 18$, откуда $x > 4{,}5$. Таким образом, из условия $4{,}5 < x \le 7$ находим целочисленные значения сторон: 5, 7, 9, 11, 30; 6, 8, 10, 12, 30; 7, 9, 11, 13, 30.

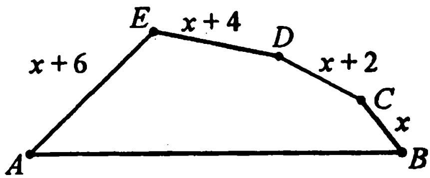


Рис. 4.25

Ответ: 5, 7, 9, 11, 30 см; 6, 8, 10, 12, 30 см; 7, 9, 11, 13, 30 см.

4.29. Имеем $\angle AOB = \dfrac{360°}{n}$ и, значит, $S_{\Delta AOB} = \dfrac{R^2}{2}\sin\dfrac{360°}{n}$ (рис. 4.26). Таким образом, получаем равенство $\dfrac{R^2}{2}\sin\dfrac{360°}{n} = \dfrac{3R^2}{n}$, которое выполняется при $n = 12$.

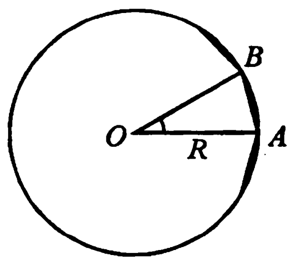


Рис. 4.26

Ответ: $n = 12$.

4.30. Возьмем произвольную точку M внутри правильного многоугольника (рис. 4.27). Соединим ее с вершинами многоугольника и опустим перпендикуляры из M на стороны многоугольника. Тогда для площади многоугольника получим выражение

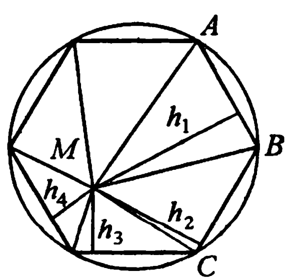


Рис. 4.27

$$S = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \ldots + \frac{1}{2}ah_n = \frac{a}{2}(h_1 + h_2 + \ldots + h_n).$$

С другой стороны, площадь многоугольника равна произведению его полупериметра на апофему: $S = ph$. Следовательно,

$$ph = \frac{a}{2}(h_1 + h_2 + \ldots + h_n), \text{ или } \frac{na}{2}h = \frac{a}{2}(h_1 + h_2 + \ldots + h_n).$$

Итак, $h_1 + h_2 + \ldots + h_n = nh$.

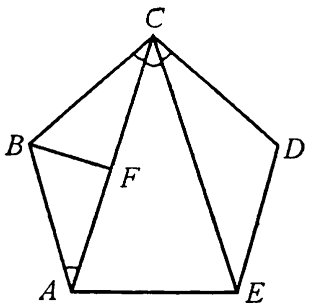


Рис. 4.28

4.31. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник (рис. 4.28). В нем углы при вершине составляют $\frac{(5-2)180°}{5} = 108°$. В ΔABC проведем $BF \perp AC$; так как $\angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2}(180° - 108°) = 36°$, то $\angle ACE = 108° - 2 \cdot 36° = 36°$, $CF = a\cos 36°$ и $AC = 2a\cos 36°$. Далее находим

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2 \sin 108° = \frac{1}{2}a^2 \sin 72°,$$

$$S_{\Delta ACE} = \frac{1}{2}AC^2 \sin\angle ACE = \frac{1}{2}(2a\cos 36°)^2 \sin 36° = a^2 \cos 36° \sin 72°.$$

Итак, $\frac{S_{\Delta ACE}}{2S_{\Delta ABC}} = \frac{a^2 \cos 36° \sin 72°}{a^2 \sin 72°} = \cos 36° \approx 0{,}81$.

Ответ: $\approx 0{,}81 : 1$.

4.32. Число диагоналей n-угольника определяется по формуле $d = \frac{(n-3)n}{2}$. Нам нужно выбрать только те значения d, которые удовлетворяют условию $d < n$. Тогда $n > \frac{(n-3)n}{2} \Rightarrow 2n > n^2 - 3n \Rightarrow$ $\Rightarrow n^2 - 5n \le 0$, т. е. число n принадлежит промежутку (0, 5). Так как n — это число сторон многоугольника, то $n \ge 3$ и окончательно получаем, что требованию задачи удовлетворяют только значения $n = 3$ и $n = 4$.

Ответ: $n = 3$ и $n = 4$.

4.33. Пусть p и q — две скрещивающиеся прямые (рис. 4.29). Возьмем на прямой p какую-либо точку A и соединим эту точку с любыми двумя точками B_1 и B_2 на прямой q. Таким образом, AB_1 и AB_2 — две пересекающиеся прямые, которые пересекают обе данные скрещивающиеся прямые.

Ответ: да, можно.

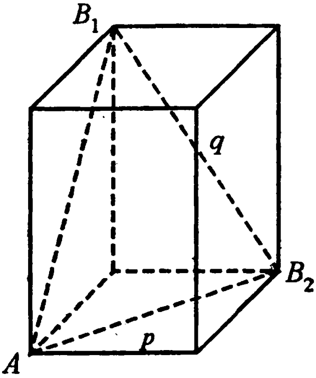


Рис. 4.29

4.34. Пусть a — ребро пирамиды $SABC$, $OM = r$ — радиус вписанного шара, $SH = h$ — высота пирамиды (рис. 4.30). В ΔSAF имеем $SF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HF = \dfrac{1}{3}AF = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; следовательно,

$$h = SH = \sqrt{SF^2 - HF^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Так как $\Delta SOM \sim \Delta SFH$, то $\dfrac{OM}{OS} = \dfrac{HF}{SF}$, или $\dfrac{r}{h-r} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$, т. е.

$\dfrac{r}{h-r} = \dfrac{1}{3}$. Итак, $\dfrac{r}{h} = \dfrac{1}{4}$.

Ответ: 1 : 4.

4.35. Пусть $OA = R$ и $O_1B = r$ — радиусы оснований усеченного конуса, а $MO = x$ и $NO_1 = y$ $(y < x)$ — радиусы вписанных шаров (рис. 4.31). По условию, $x + y = l$, $\angle A = \alpha$. В ΔAOM и ΔBO_1N имеем

$$R = x \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \quad r = y \operatorname{ctg}\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = y \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Далее, в трапеции $FHNM$ проведем $NK \parallel HF$; так как $NM = l$,

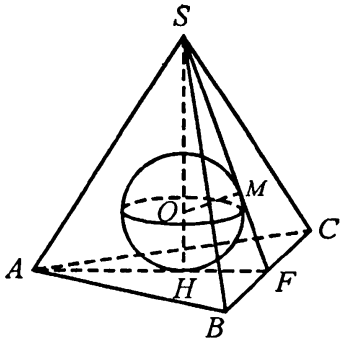


Рис. 4.30

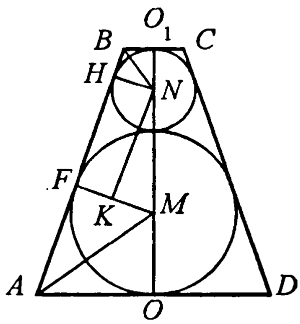


Рис. 4.31

$KM = x - y$, $\angle NMK = \angle BAO = \alpha$, то из ΔNKM получим $x - y = l\cos\alpha$. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} x + y = l, \\ x - y = l\cos\alpha, \end{cases}$$

откуда

$$x = \frac{l + l\cos\alpha}{2}, \quad y = \frac{l - l\cos\alpha}{2}.$$

Подставив найденные значения в равенства (1), окончательно находим

$$R = x\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{l(1+\cos\alpha)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2} = l\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$r = y\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{l(1-\cos\alpha)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2} = l\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $l\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $l\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Глава 5

ПРИМЕНЕНИЕ КООРДИНАТ И ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Прямоугольная декартова система координат на плоскости

1°. Расстояние между точками $A_1\ (x_1; y_1)$ и $A_2\ (x_2; y_2)$ находится по формуле

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (5.1)$$

С помощью этой же формулы выражается длина отрезка A_1A_2 или модуль вектора $\overline{A_1A_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

2°. Координаты $(x; y)$ середины отрезка с концами $A_1\ (x_1; y_1)$ и $A_2\ (x_1; y_2)$ находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (5.2)$$

3°. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой имеет вид

$$y = kx + q. \qquad (5.3)$$

Угловой коэффициент k представляет собой значение тангенса угла, образуемого прямой с положительным направлением оси Ox, а начальная ордината q — значение ординаты точки пересечения прямой с осью Oy.

4°. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $A\ (x_0; y_0)$, имеет вид

$$y - y_0 = k\,(x - x_0). \qquad (5.4)$$

5°. Общее уравнение прямой имеет вид

$$ax + by + c = 0. \qquad (5.5)$$

6°. Уравнения прямых, параллельных соответственно осям Oy и Ox, имеют вид

$$x = a, \qquad (5.6)$$
$$y = b. \qquad (5.7)$$

7°. Условия параллельности и перпендикулярности прямых $y_1 = k_1x + q_1$ и $y_2 = k_2x + q_2$ соответственно имеют вид

$$k_1 = k_2, \qquad (5.8)$$
$$k_1k_2 = -1. \qquad (5.9)$$

8°. Уравнения окружностей с радиусом R и центром соответственно в точках O (0; 0) и C $(x_0; y_0)$ имеют вид

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad (5.10)$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (5.11)$$

9°. Уравнение

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (5.12)$$

представляет собой уравнение параболы с вершиной в точке, абсцисса которой $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Прямоугольная декартова система координат в пространстве

1°. Расстояние между точками A_1 $(x_1; y_1; z_1)$ и A_2 $(x_2; y_2; z_2)$ находится по формуле

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (5.13)$$

С помощью этой же формулы выражается длина отрезка A_1A_2 или модуль вектора $\overline{A_1A_2}\,(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

2°. Координаты $(x; y; z)$ середины отрезка с концами A_1 $(x_1; y_1; z_1)$ и A_2 $(x_2; y_2; z_2)$ находятся по формулам

$$x = -\frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{5.14}$$

3°. Модуль вектора $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$, заданного своими координатами, находится по формуле

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \tag{5.15}$$

4°. При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число, т. е. справедливы формулы

$$(a_1; a_2; a_3) + (b_1; b_2; b_3) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3), \tag{5.16}$$

$$\lambda(a_1; a_2; a_3) = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3). \tag{5.17}$$

5°. Единичный вектор $\bar{a}_0$, сонаправленный с вектором $\bar{a}$, находится по формуле

$$\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}. \tag{5.18}$$

6°. Скалярным произведением $\bar{a}\,\bar{b}$ и векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число

$$\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi, \tag{5.19}$$

где φ — угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

7° Скалярное произведение векторов $\bar{a}\,(a_1; a_2; a_3)$

и $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$ выражается формулой

$$\overline{a}\ \overline{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \qquad (5.20)$$

В частности, $\overline{a}^2=\overline{a}\ \overline{a}=\left|\overline{a}\right|^2$, откуда $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{\overline{a}^2}$.

8°. Косинус угла между векторами $\overline{a}\ (a_1;\ a_2;a_3)$ и $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$ находится по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\ \overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \qquad (5.21)$$

9°. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов $\overline{a}\ (a_1;\ a_2;a_3)$ и $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$ имеет вид

$$\overline{a}\ \overline{b}=0,\ \text{или}\ a_1b_1+a_2b_2+a_3\,b_3=0, \qquad (5.22)$$

а условие их коллинеарности (параллельности) — вид

$$\overline{a}=\lambda\overline{b},\ \text{где}\ \left|\lambda\right|=\frac{\left|\overline{a}\right|}{\left|\overline{b}\right|}, \qquad (5.23)$$

или

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}. \qquad (5.24)$$

10°.Общее уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\overline{n}\ (a;\ b;\ c)$, имеет вид

$$ax+by+cz+d=0. \qquad (5.25)$$

11°. Уравнение плоскости, перпендикулярной вектору

$\overline{n}$ $(a;\ b;\ c)$ и проходящей через точку $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, имеет вид

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0. \qquad (5.26)$$

12°. Уравнение сферы с центром O (0; 0; 0) записывается в виде

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \qquad (5.27)$$

Группа А

5.1. В параллелограмме $OABC$ даны вершины O (0; 0;), A (3; 6) и B (8; 6). Найти отношение длин диагоналей OB и AC, а также составить уравнения сторон параллелограмма и диагонали AC.

5.2. Даны три точки A (2; 1), B (3; –1), C (–4; 0), являющиеся вершинами равнобедренной трапеции $ABDC$. Найти координаты точки D, если $\overline{AB}=k\overline{CD}$.

5.3. Длины диагоналей AC и BD ромба равны 15 и 8 см. Первая диагональ направлена по оси Ox, вторая — по оси Oy. Составить уравнения сторон ромба и найти расстояние от начала координат до стороны ромба.

5.4. При повороте вокруг начала координат точка A (6; 8) переходит в точку A_1 (8; 6). Найти косинус угла поворота.

5.5. Вектор $\overline{OA}$ составляет с осями Ox, Oy, Oz углы, соответственно равные $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$, $\gamma=\frac{\pi}{4}$; точка B имеет координаты $(-2;-2;-2\sqrt{2})$. Найти угол между векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

5.6. Найти единичный вектор, коллинеарный вектору, направленному по биссектрисе угла BAC треугольника ABC, если заданы его вершины: A (1; 1; 1), B (3; 0; 1), C (0; 3; 1).

5.7. Даны два ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ таких, что $|\overline{a}+\overline{b}|=|\overline{a}-\overline{b}|$. Доказать, что $\overline{a}\perp\overline{b}$.

5.8. Найти модуль проекции вектора $\overline{a}(7;-4)$ на ось, параллельную вектору $\overline{b}(-8;6)$.

5.9. При каких значениях x векторы $(x^3-1)\bar{a}$ и $2x\bar{a}$ сонаправлены, если $\bar{a}\neq\bar{0}$?

5.10. Даны векторы $\bar{a}(6;-8;5\sqrt{2})$ и $\bar{b}(2;-4;\sqrt{2})$. Найти угол, образуемый вектором $\bar{a}-\bar{b}$ с осью Oz.

5.11. Дан треугольник ABC; BD — медиана, $\angle DBC = 90°$, $BD=\frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Найти $\angle ABD$.

5.12. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC и $\overline{AO}=\bar{a}$, $\overline{AC}=\bar{b}$. Разложить $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

5.13. В ромбе $ABCD$ точки M и N — середины сторон BC и CD. Найти $\angle MAN$, если $\angle BAD = 60°$.

5.14. В пирамиде $SABC$ все грани — правильные треугольники; точка M — центр треугольника ABC, а точка P делит ребро SC пополам. Найти разложение вектора $\overline{MP}$ по векторам $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AS}$.

5.15. Дан вектор $\bar{a}$ (1; −2; 5). Найти координаты вектора $\bar{b}$, лежащего в плоскости xOy и перпендикулярного вектору $\bar{a}$, если $|\bar{b}|=2\sqrt{5}$.

5.16. Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (вершины основания $ABCD$ расположены по ходу часовой стрелки); K — середина ребра AA_1; H — середина ребра AD; M — центр грани CC_1D_1D. Доказать, что прямая KM перпендикулярна прямой B_1H.

5.17. В треугольнике ABC точка N лежит на стороне AB и $AN = 3NB$; медиана AM пересекается с CN в точке O. Найти AB, если $AM = CN = 7$ см и $\angle NOM = 60°$.

5.18. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны BC, а точка M — середина стороны CD. Найти AD, если $AK = 6$ см, $AM = 3$ см и $\angle KAM = 60°$.

5.19. Даны три ненулевых вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, каждые два из которых неколлинеарны. Найти их сумму, если $(\bar{a}+\bar{b}) \parallel \bar{c}$ и $(\bar{b}+\bar{c}) \parallel \bar{a}$.

5.20. Единичные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ удовлетворяют условию $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 = \bar{0}$. Найти $\bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_2\bar{e}_3 + \bar{e}_3\bar{e}_1$.

Группа Б

5.21. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, образованного прямыми $y = 0{,}2x - 0{,}4$, $y = x + 2$, $y = 8 - x$.

5.22. В трапеции $ABCD$ дано: вершина A (3; 0), середина основания AB — точка E (6; – 1), середина основания CD — точка F (7; 2). Боковая сторона BC параллельна оси Oy. Доказать, что трапеция равнобедренная, и найти углы при ее основании.

5.23. Найти координаты вершин C и D квадрата $ABCD$, если A (2; 1), B (4; 0).

5.24. В параллелограмме $ABCD$ дано: $M \in BC$ и $BM : MC = 1 : 2$; $N \in DC$, $DN : NC = 1 : 2$; $\overline{AM} = \bar{a}$; $\overline{AN} = \bar{b}$. Выразить векторы $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{MN}$ и $\overline{BD}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

5.25. Даны два отрезка AB и CD. Доказать, что если $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$, то $AB \perp CD$. Верно ли обратное утверждение?

5.26. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ длина каждого ребра равна a. Точка $M \in SC$ и $SM : MC = 2 : 1$. Найти угол между векторами $\overline{DC}$ и $\overline{AM}$.

5.27. Точки M и N — середины отрезков AB и CD. Доказать, что $MN \le \frac{1}{2}(AC + BD)$, $MN \le \frac{1}{2}(BC + AD)$.

5.28. Стороны треугольника ABC связаны соотношением $a^2 + b^2 = 5c^2$. Доказать, что две медианы треугольника перпендикулярны. Верно ли обратное утверждение?

5.29. В треугольнике ABC дано: $AB = BC$; D — середина стороны AC; DK перпендикулярна BC; точка M — середина отрезка DK. Доказать, что прямые AK и BM перпендикулярны.

5.30. В окружность вписан треугольник ABC. Прямая, содержащая медиану CC_1 треугольника, пересекает окружность вторично в точке D. Доказать, что $CA^2 + CB^2 = 2CC_1 \cdot CD$.

5.31. Доказать, что если биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла перпендикулярны, то биссектриса третьего плоского угла перпендикулярна каждой из них.

5.32. Найти обьем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$, если $\left|\overline{OA}\right| = 5$, $\left|\overline{OB}\right| = 2$, $\left|\overline{OC}\right| = 6$, $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$, $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 0$, $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 8$.

5.33. Доказать, что для любых четырех точек A, B, C, D имеет место равенство $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$.

5.34. Доказать, что если суммы квадратов противоположных ребер тетраэдра равны, то эти ребра попарно перпендикулярны.

5.35. Доказать, что для всякого треугольника ABC справедливо неравенство $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ

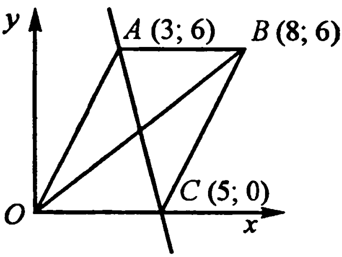


Рис. 5.1

5.1. Так как ординаты вершин A и B равны, то $AB \parallel Ox$ (рис. 5.1). Из трех отрезков OA, AB и OB сторонами параллелограмма могут быть только OA и AB, так как по условию OB — диагональ; поэтому $BC \parallel OA$ и C (5; 0). По формуле (5.1) находим

$OB = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100}$, $AC = \sqrt{(5-3)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{40}$; таким образом, $OB : AC = \sqrt{100} : \sqrt{40} = \sqrt{2,5}$ — искомое отношение диагоналей.

Согласно формуле (5.3), уравнение стороны OA имеет вид $y = kx + q$, где $k = 6 : 3 = 2$ и $q = 0$; следовательно, $y = 2x$. Используя равенство (5.7), запишем уравнение стороны AB: $y = 6$. Далее, так как $BC \parallel OA$, то угловой коэффициент прямой BC в силу формулы (5.8) есть $k = 2$, а соответствующее значение q найдем из уравнения $y = 2x + q$, подставив в него вместо x и y координаты точки C (5; 0); тогда получим $0 = 10 + q$, т. е. $q = -10$; значит, уравнение BC имеет вид $y = 2x - 10$. Наконец, уравнение OC есть $y = 0$.

Чтобы найти уравнение диагонали AC, воспользуемся тем, что точки A (3; 6) и C (5; 0) принадлежат прямой AC и, следовательно, их координаты удовлетворяют искомому уравнению. Подставив эти координаты в уравнение $y = kx + q$, получим $6 = 3k + q$, $0 = 5k + q$, откуда $k = -3$, $q = 15$. Итак, $y = -3x + 15$ есть уравнение диагонали AC.

Ответ: $OB : AC = \sqrt{2{,}5}$; $y = 0\,(OC)$, $y = 6\,(AB)$, $y = 2x\,(OA)$, $y = 2x - 10\,(BC)$; $y = -3x + 15\,(AC)$.

5.2. По условию,

$\overline{AB} = k\ \overline{CD} \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$. (1)

Находим координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ (рис. 5.2): $\overline{AB}(1; -2)$, $\overline{CD}(x+4; y)$, где x и y — координаты точки D. Из (1) следует, что

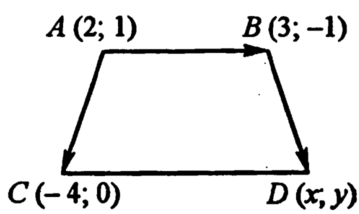


Рис. 5.2

$$\frac{1}{x+4} = \frac{-2}{y}, \text{ или } y = -2x - 8 \quad (2).$$

Так как трапеция $ABDC$ — равнобедренная, то $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$ и $\overline{AC} \nparallel \overline{BD}$. Найдем векторы $\overline{AC}(-6; -1)$, $\overline{BD}(x-3; y+1)$ и воспользуемся тем, что $\overline{AC}^2 = \overline{BD}^2$; имеем

$$36 + 1 = (x-3)^2 + (y+1)^2, \text{ или } x^2 + y^2 - 6x + 2y = 27 \quad (3).$$

Решив систему уравнений (2) и (3), получим $x_1 = -1{,}4$, $y_1 = -5{,}2$ или $x_2 = -3$, $y_2 = -2$. Этим значениям соответствуют два вектора: $\overline{BD}(-4{,}4; -4{,}2)$ и $\overline{BD}(-6; -1)$. Последний вектор коллинеарен $\overline{AC}$ и, значит, не удовлетворяет условию. Итак, D (–1,4; –5,2).

Ответ: (–1,4; –5,2).

5.3. По условию, $AC = 15$ см, $BD = 8$ см, откуда находим координаты вершин ромба: A (–7,5; 0), B (0; 4), C (7,5; 0), D (0; – 4) (рис. 5.3) Угловой коэффициент прямой BC есть $k_1 = \operatorname{tg}\angle BCN =$

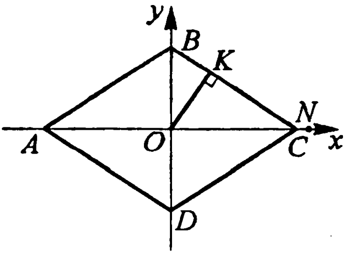


Рис. 5.3

$= -\operatorname{tg}\angle BCO = -\dfrac{4}{7{,}5} = -\dfrac{8}{15}$. Тогда, зная координаты точки B, составим уравнение стороны BC: $y-4=-\dfrac{8}{15}(x-0)$, или $8x + 15y - 60 = 0$. Уравнение стороны AD найдем по ее известному угловому коэффициенту $k_1 = -\dfrac{8}{15}$ (так как $AD \parallel BC$) и координатам точки D: $y+4=-\dfrac{8}{15}(x-0)$, или $8x + 15y + 60 = 0$. Далее, угловой коэффициент прямой AB есть $k_2 = \operatorname{tg}\angle BAO = \dfrac{4}{7{,}5} = \dfrac{8}{15}$ и уравнение стороны AB записывается в виде $8x - 15y + 60 = 0$, а уравнение стороны DC — в виде $8x - 15y - 60 = 0$. Теперь проведем $OK \perp BC$ и для нахождения OK воспользуемся тем, что $S_{\Delta OBC} = \dfrac{1}{2}OC \cdot OB = \dfrac{1}{2}OK \cdot BC$, откуда $OK = \dfrac{OC \cdot OB}{BC}$. Поскольку $BC = \sqrt{7{,}5^2 + 4^2} = 8{,}5$, находим $OK = \dfrac{7{,}5 \cdot 4}{8{,}5} = \dfrac{60}{17}$ (см).

Ответ: $8x - 15y + 60 = 0$ (AB), $8x - 15y - 60 = 0$ (DC), $8x + 15y - 60 = 0$ (BC), $8x + 15y + 60 = 0$ (AD); $\dfrac{60}{17}$ (см).

5.4. Используя формулу (5.21), находим

$$\cos\angle AOA_1 = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OA_1}}{|\overline{OA}||\overline{OA_1}|} = \frac{6\cdot 8 + 8\cdot 6}{\sqrt{36+64}\cdot\sqrt{64+36}} = \frac{24}{25}.$$

5.5. Пусть $\bar{n}$ — единичный вектор, сонаправленный с $\overline{OA}$; тогда $\bar{n}\left(\cos\frac{\pi}{3};\cos\frac{\pi}{3};\cos\frac{\pi}{4}\right)$, или $\bar{n}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, а $\overline{OB}(-2;-2;-2\sqrt{2})$. Обозначив угол между $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ через φ, находим

$$\cos\varphi=\frac{\bar{n}\cdot\overline{OB}}{|\bar{n}||\overline{OB}|}=\frac{\frac{1}{2}(-2)+\frac{1}{2}(-2)+\frac{\sqrt{2}}{2}(-2\sqrt{2})}{1\cdot 4}=-1,$$

откуда получаем ответ: φ = 180°.

Ответ: 180°.

5.6. Найдем координаты и модули векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; имеем $\overline{AB}\,(2;-1;0)$, $\overline{AC}\,(-1;2;0)$,

$$|\overline{AB}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{5},\ |\overline{AC}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}.$$

Так как $|\overline{AB}|=|\overline{AC}|$, то $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{AC}$ является диагональю ромба $ABDC$ (рис. 5.4), а следовательно — биссектрисой угла BAC. Имеем $\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{AC}=(2;-1;0)+(-1;2;0)=(1;1;0)$ и $|\overline{AD}|=\sqrt{2}$. Пусть $\bar{e}$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\overline{AD}$, т. е. $\bar{e}=\frac{\overline{AD}}{|\overline{AD}|}$. Тогда, используя формулу (5.18), окончательно получаем $\bar{e}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$.

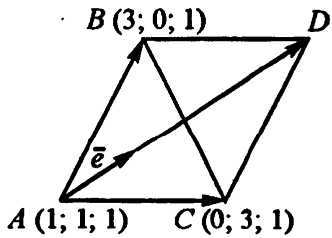


Рис. 5.4

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$.

5.7. I способ. Если на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах построить параллелограмм, то векторы $\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{a}-\bar{b}$ совпадут с его диагоналями, длины которых составляют $|\bar{a}+\bar{b}|$ и $|\bar{a}-\bar{b}|$. Так как по условию длины диагоналей равны, то полученный параллелограмм является прямоугольником, откуда $\bar{a} \perp \bar{b}$.

II способ. Пусть $\bar{x}=\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{y}=\bar{a}-\bar{b}$; тогда $\bar{x}^2=(\bar{a}+\bar{b})^2=$ $=\bar{a}^2+2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2$, $\bar{y}^2=\bar{a}^2-2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2$. Квадрат вектора равен квадрату его модуля; значит,

$$\bar{a}^2+2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2=|\bar{a}+\bar{b}|^2 \text{ и } \bar{a}^2-2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2=|\bar{a}-\bar{b}|^2.$$

Правые части последних соотношений равны по условию; следовательно, $\bar{a}^2+2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2=\bar{a}^2-2\bar{a}\bar{b}+\bar{b}^2$, откуда $\bar{a}\,\bar{b}=0$; в силу формулы (5.22) это означает, что $\bar{a} \perp \bar{b}$.

5.8. Имеем $OK=\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}=|\bar{a}|\cos\varphi$ (рис. 5.5). Отсюда, используя равенство $\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$, находим $\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}=\dfrac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{b}|}$. Так как $\bar{b}$ — направляющий вектор оси, на которую проецируется вектор $\bar{a}$, то

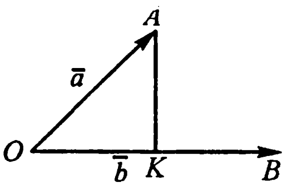


Рис. 5.5

$$\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}=\frac{7(-8)+(-4)6}{\sqrt{64+36}}=\frac{-56-24}{10}=-8, \text{ т.е. } |\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}|=8.$$

Ответ: 8.

5.9. Данные векторы сонаправлены, если x^3-1 и $2x$ имеют одинаковые знаки. Для определения искомых значений x решаем неравенство $2x\,(x^3-1)>0$ и получаем $x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty)$.

Ответ: при $-\infty<x<0$ и при $1<x<\infty$.

5.10. Вектор $\overline{a}-\overline{b}$ имеет координаты $(4;-4;4\sqrt{2})$. Пусть $\overline{k}(0;0;1)$ — единичный вектор, направленный вдоль оси Oz. Полагая $(\widehat{\overline{a}-\overline{b};\overline{k}})=\gamma$, находим

$$\cos\gamma=\frac{(\overline{a}-\overline{b})\overline{k}}{|\overline{a}-\overline{b}||\overline{k}|}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{16+16+32\cdot 1}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\text{ т. е. }\gamma=45^\circ.$$

Ответ: 45°.

5.11. По условию, $\angle DBC = 90^\circ$, $BD=\frac{\sqrt{3}}{4}AB$, $AD=DC$ (рис. 5.6.); требуется найти $\angle ABD = \alpha$. Для нахождения угла α будем использовать формулу $\cos\alpha=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{BD}}{|\overline{BA}||\overline{BD}|}$. Так как BD — медиана ΔABC, то $BD=\frac{1}{2}(\overline{BA}+\overline{BC})$, откуда $\overline{BA}=2\overline{BD}-\overline{BC}$. Следовательно,

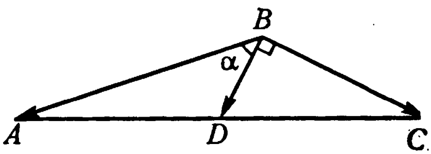


Рис. 5.6

$$\cos\alpha=\frac{(2\overline{BD}-\overline{BC})\overline{BD}}{|\overline{BA}||\overline{BD}|}=\frac{2BD^2-\overline{BC}\cdot\overline{BD}}{|\overline{BA}||\overline{BD}|}. \qquad (1)$$

Но $\overline{BC}\perp\overline{BD}$, т. е. $\overline{BC}\cdot\overline{BD}=0$, а из равенства $BD=\frac{\sqrt{3}}{4}AB$ следует, что $AB=\frac{4}{\sqrt{3}}BD$. Тогда равенство (1) примет вид

$$\cos\alpha=\frac{2BD^2}{\frac{4}{\sqrt{3}}BD^2}=\frac{\sqrt{3}}{2},\text{ откуда }\alpha=30^\circ.$$

Ответ: 30°.

5.12. Так как O — точка пересечения медиан ΔABC (рис. 5.7), то $\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AM_1}$; тогда $\overline{AM_1} = \frac{3}{2}\overline{a}$, $\overline{M_1C} = \overline{AC} - \overline{AM_1} = \overline{b} - \frac{3}{2}\overline{a}$,

$BC = 2\overline{M_1C} = 2\overline{b} - 3\overline{a}$, $\overline{AB} = \overline{AM_1} + \overline{M_1B} = \overline{AM_1} - \overline{M_1C} = \frac{3}{2}\overline{a} - \left(\overline{b} - \frac{3}{2}\overline{a}\right) = 3\overline{a} - \overline{b}$.

Ответ: $\overline{AB} = 3\overline{a} - \overline{b}$, $\overline{BC} = 2\overline{b} - 3\overline{a}$.

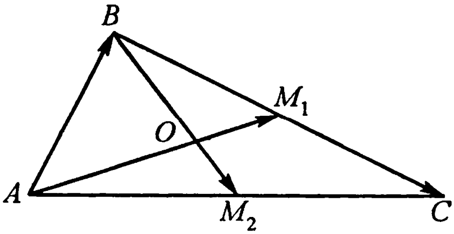


Рис. 5.7

5.13. У к а з а н и е. Разложить векторы $\overline{AM}$ и $\overline{AM}$ по векторам $\overline{AB} = \overline{a}$ и $\overline{AD} = \overline{b}$.

Ответ: $\arccos\frac{13}{14}$.

5.14. Имеем (рис. 5.8) $\overline{MP} = \overline{MC} - \overline{PC}$, где $\overline{PC} = \frac{1}{2}\overline{SC} = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AS})$; следовательно, $\overline{MP} = \overline{MC} - \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AS})$. Теперь найдем $\overline{MC}$. В равностороннем треугольнике ABC имеем $MC = \frac{2}{3}CN$, где CN — высота треугольника; поэтому

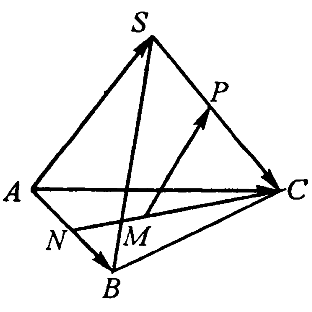


Рис. 5.8

$\overline{MC} = \frac{2}{3}\overline{NC}$. Но $\overline{NC} = \overline{AC} - \overline{AN} = \overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}$ и, значит, $\overline{MC} = \frac{2}{3}\left(\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB}\right) = \frac{2}{3}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB}$. Таким образом, окончательно получим

$$\overline{MP} = \frac{2}{3}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AS} = \frac{1}{6}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AS}.$$

Ответ: $\overline{MP} = \frac{1}{6}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AS}$.

5.15. Так как вектор $\bar{b} \in= xOy$, то он имеет координаты $(x; y; 0)$. Используя условия $|\bar{b}| = 2\sqrt{5}$, $\bar{b} \perp \bar{a}$, составим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$$

Решив ее, получим два вектора (4; 2; 0) и (– 4; –2; 0).

Ответ: (4; 2; 0) или (–4; –2; 0).

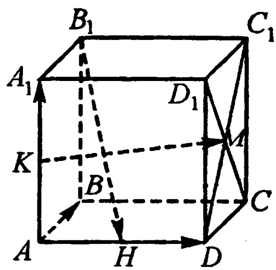


Рис. 5.9

5.16. Пусть $\overline{AD} = \bar{a}$, $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AA_1} = \bar{c}$ (рис. 5.9). Найдем разложения $\overline{B_1H}$ и $\overline{KM}$ по векторам $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$. Имеем

$$\overline{B_1H} = \overline{B_1A_1} + \overline{A_1A} + \overline{AH} = -\bar{b} - \bar{c} + \frac{1}{2}\bar{a},$$

$\overline{KM} = \overline{KA_1} + \overline{A_1D_1} + \overline{D_1M}$; так как $\overline{D_1M} = \frac{1}{2}\overline{D_1C} = \frac{1}{2}(\bar{b} - \bar{c})$, то

$$\overline{KM} = \frac{1}{2}\bar{c} + \bar{a} + \frac{1}{2}(\bar{b} - \bar{c}) = \bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}.$$

Следовательно,

$$\overline{B_1H}\cdot\overline{KM}=\left(\frac{1}{2}\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}\right)\left(\bar{a}+\frac{1}{2}\bar{b}\right)=\frac{1}{2}(\bar{a}^2-\bar{b}^2)=0,$$

поскольку $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$, $\bar{a}\perp\bar{b}$, $|\bar{a}|=|\bar{b}|$. Итак, $\overline{B_1H}\perp\overline{KM}$.

5.17. По условию, AM — медиана ΔABC (рис. 5.10) и, значит,

$$\overline{AM}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}). \qquad (1).$$

Далее,

$$\overline{AC}=\overline{AN}+\overline{NC}=\frac{3}{4}\overline{AB}-\overline{CN}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), имеем $\overline{AM}=\frac{7}{8}\overline{AB}-\frac{1}{2}\overline{CN}$, откуда

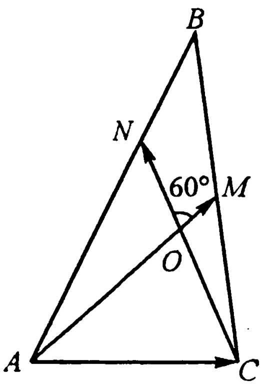


Рис. 5.10

$\overline{AB}=\frac{8}{7}\overline{AM}+\frac{4}{7}\overline{CN}$. Следовательно,

$$AB^2=\frac{64}{49}AM^2+\frac{64}{49}\overline{AM}\cdot\overline{CN}+\frac{16}{49}CN^2=$$

$$=\frac{64}{49}\cdot49+\frac{64}{49}\cdot7\cdot7\cos60^\circ+\frac{16}{49}\cdot49=112,$$

т. е. $|\overline{AB}|=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$ (см).

Ответ: $4\sqrt{7}$ см.

5.18. Указание. Разложить вектор $\overline{AD}$ по векторам $\overline{AK}$ и $\overline{AM}$.

Ответ: 4 см.

5.19. Имеем

$$(\bar{a}+\bar{b})\ ||\ \bar{c}\Rightarrow\bar{c}=m(\bar{a}+\bar{b})=m\bar{a}+m\bar{b};$$

$$(\bar{b}+\bar{c})\ ||\ \bar{a}\Rightarrow\bar{b}+\bar{c}=n\bar{a}\Rightarrow\bar{c}=n\bar{a}-\bar{b}.$$

В силу единственности разложения $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заключаем, что $m = n$ и $m = -1$. Значит, $m = n = -1$, т. е. $\bar{c} = -\bar{a} - \bar{b}$. Теперь находим $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{a} + \bar{b} - \bar{a} - \bar{b} = \bar{0}$.

Ответ: $\bar{0}$.

5.20. Указание. Из условия $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 = \bar{0}$ следует, что эти векторы образуют правильный треугольник и $(\widehat{\bar{e}_1; \bar{e}_2}) = (\widehat{\bar{e}_2; \bar{e}_3}) = (\widehat{\bar{e}_3; \bar{e}_1}) = 180° - 60° = 120°$

Ответ: $-1{,}5$.

5.21. Угловые коэффициенты прямых $y = x + 2$ и $y = 8 - x$ равны соответственно $k_1 = 1$ и $k_2 = -1$. Так как $k_1k_2 = -1$, то выполняется условие (5.9) перпендикулярности прямых; значит, ΔABC — прямоугольный (рис. 5.11) и центром окружности является середина его гипотенузы AB. Найдем точки пересечения прямой $y = 0{,}2x - 0{,}4$ с прямыми $y = x + 2$ и $y = 8 - x$; решив системы уравнений

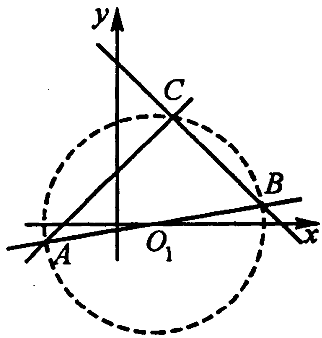


Рис. 5.11

$$\begin{cases} y = 0{,}2x - 0{,}4, \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = 0{,}2x - 0{,}4, \\ y = 8 - x, \end{cases}$$

получим точки A (–3; –1) и B (7; 1) — концы гипотенузы. Используя формулы (5.2), найдем координаты центра окружности: O_1 (2; 0). В силу формулы (5.1) радиус окружности есть $R = O_1A = \sqrt{(-3-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{26}$. Наконец, согласно формуле (5.11), получим искомое уравнение окружности: $(x - 2)^2 + y^2 = 26$.

Ответ: $(x - 2)^2 + y^2 = 26$.

5.22. Пусть B $(x_1; y_1)$, C $(x_2; y_2)$, D $(x_3; y_3)$ — неизвестные вершины трапеции (рис. 5.12). Поскольку точка E (6; –1) — середина основания AB, имеем систему $\frac{3 + x_1}{2} = 6$, $\frac{0 + y_1}{2} = -1$, откуда $x_1 = 9$,

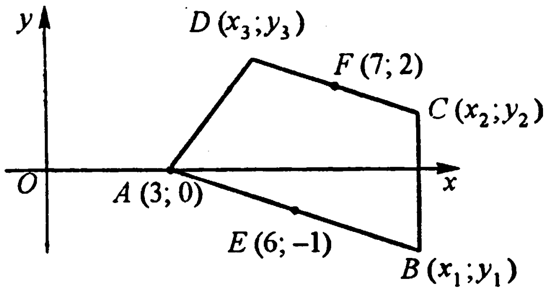


Рис. 5.12

$y_1 = -2$, т. е. $B\,(9; -2)$. Но $BC \parallel Oy$ и, значит, $x_2 = 9$, а уравнение BC есть $x = 9$. Далее, точка $F\,(7; 2)$ — середина основания DC, откуда $\dfrac{x_3+9}{2} = 7$, т. е. $x_3 = 5$. Уравнение прямой AB имеет вид $y + 1 = k\,(x - 6)$; так как $A \in (AB)$, то $0+1 = k\,(3-6) \Rightarrow k = -\dfrac{1}{3}$. Поэтому $k_{DC} = -\dfrac{1}{3}$. и получаем уравнение DC:

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-7),\ \text{или}\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}.$$

Решив систему уравнений прямых BC и DC, т. е. $x = 9$ и $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{13}{3}$, находим $y=\dfrac{4}{3}$, т. е. $C\left(9; \dfrac{4}{3}\right)$. Наконец, ординату точки D найдем из равенства $\dfrac{y_3+\frac{4}{3}}{2}=2$, откуда $y_3=\dfrac{8}{3}$, т. е. $D\left(5; \dfrac{8}{3}\right)$. Таким образом, $BC = y_2 - y_1 = \dfrac{4}{3}+2=\dfrac{10}{3}$, $AD=\sqrt{2^2+\left(\dfrac{8}{3}\right)^2}=\dfrac{10}{3}$, т. е. $BC = AD$ и, значит, трапеция $ABCD$ — равнобедренная.

Положим $\angle DAB = \alpha$ и воспользуемся формулой $\cos\alpha = \frac{\overline{AD}\cdot\overline{AB}}{|\overline{AD}||\overline{AB}|}$. Имеем $\overline{AD}\left(2;\ \frac{8}{3}\right)$, $\overline{AB}(6;-2)$, $|\overline{AB}| = 2\sqrt{10}$ и, следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot 6+\frac{8}{3}(-2)}{\frac{10}{3}\cdot 2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

5.23. Согласно условию, $A\ (2;\ 1)$, $B\ (4;\ 0)$ — известные, а $C\ (x_1;\ y_1)$, $D\ (x_2; y_2)$ — неизвестные вершины квадрата (рис. 5.13). Так как длина стороны квадрата $AB = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ и $BC = AB$, то

$$BC^2 = (x_1-4)^2 + y_1^2 = 5. \qquad (1)$$

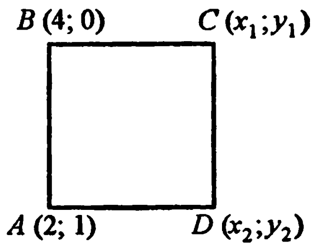


Рис. 5.13

Найдем угловой коэффициент стороны AB. Для этого воспользуемся формулой (5.4), записав ее в виде $k = \frac{y-y_0}{x-x_0}$, где $(x;\ y)$ — координаты точки B, а $(x_0;\ y_0)$ — координаты точки A; тогда получим $k = \frac{0-1}{4-2} = -\frac{1}{2}$. Но $BC \perp AB$ и, следовательно, уравнение BC имеет вид $y - 0 = 2(x-4)$, т. е. $y = 2x - 8$. Далее, точка $C\ (x_1; y_1)$ лежит на BC и, значит,

$$y_1 = 2x_1 - 8. \qquad (2)$$

Решив систему уравнений (1) и (2), найдем две точки $C\ (5;\ 2)$ и $C\ (3;\ -2)$, которые , как легко убедиться, симметричны относительно точки B.

Для точки $C\ (5;\ 2)$ имеем $\overline{AC}(3;1)$, $\overline{BD}(x_2-4;\ y_2)$, откуда, учитывая, что $AC \perp BD$, получаем

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=0,\text{ или } 3x_2-12+y_2=0\Rightarrow y_2=12-3x_2. \qquad (3)$$

Кроме того, $BD^2=(x_2-4)^2+y_2^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2$, или

$$(x_2-4)^2+y_2^2=10. \qquad (4)$$

Решив теперь систему уравнений (3) и (4), найдем две точки $D\,(5;\,-3)$ и $D\,(3;\,3)$.

Чтобы отобрать нужную точку, воспользуемся коллинеарностью векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Если $D\,(5;\,-3)$, то $\overline{CD}\,(0;-5)$, $\overline{AB}\,(2;-1)$, т. е. $\overline{CD}\nparallel\overline{AB}$ и, значит, точка $D\,(5;\,-3)$ не является вершиной квадрата. Если же $D\,(3;\,3)$, то $CD\,(-2;\,1)$, т. е. $\overline{CD}\parallel\overline{AB}$. Итак, точки $C\,(5;\,2)$ и $D\,(3;\,3)$ являются вершинами квадрата.

Рассуждая аналогично, для точки $C\,(3;\,-2)$ находим вершину $D\,(1;\,-1)$.

Ответ: $C\,(5;\,2)$, $D\,(3;\,3)$ или $C\,(3;\,-2)$, $D\,(1;\,-1)$.

5.24. По условию, $\overline{AM}=\bar{a}$, $\overline{AN}=\bar{b}$ (рис. 5.14) и, значит, $\overline{MN}=\overline{AN}-\overline{AM}=\bar{b}-\bar{a}$. Так как $\frac{BM}{MC}=\frac{1}{2}$, $\frac{DN}{NC}=\frac{1}{2}$, то $\frac{MC}{BC}=\frac{2}{3}$, $\frac{NC}{CD}=\frac{2}{3}$ и угол C — общий у треугольников NCM и DCB. Следовательно, $\Delta NCM\sim\Delta DCB$, откуда $\frac{MN}{BD}=\frac{2}{3}$ и $\overline{BD}=\frac{3}{2}\overline{MN}$, т.е.

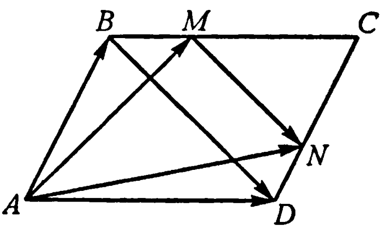


Рис. 5.14

$\overline{BD}=\frac{3}{2}(\bar{b}-\bar{a})$. Пусть $\overline{AD}=x$, $\overline{AB}=\bar{y}$. Имеем $\overline{AD}-\overline{AB}=\overline{BD}$, или

$$\bar{x}-\bar{y}=\frac{3}{2}(\bar{b}-\bar{a}). \qquad (1)$$

Далее,

$$\overline{AB}+\overline{BM}=\overline{AM}, \text{ или } \bar{y}+\frac{1}{3}\bar{x}=\bar{a} \qquad (2)$$

Остается решить систему уравнений (1) и (2); в результате получим $\overline{AD}=\frac{9}{8}\bar{b}-\frac{3}{8}\bar{a}$, $\overline{AB}=\frac{9}{8}\bar{a}-\frac{3}{8}\bar{b}$.

Ответ:

$$\overline{AB}=\frac{9}{8}\bar{a}-\frac{3}{8}\bar{b},\ \overline{AD}=\frac{9}{8}\bar{b}-\frac{3}{8}\bar{a},\ \overline{MN}=\bar{b}-\bar{a},\ \overline{BD}=\frac{3}{2}\bar{b}-\frac{3}{2}\bar{a}.$$

5.25. Рассмотрим векторы $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BC}$. В зависимости от их взаимного расположения может получиться плоская или пространственная фигура (рис. 5.15). Учитывая, что

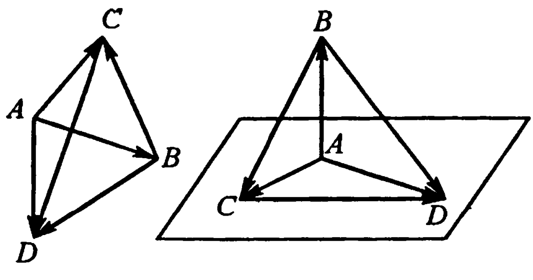


Рис. 5.15

$\overline{AB}^2=\left|\overline{AB}\right|^2=AB^2$, преобразуем данное равенство следующим образом:

$$\overline{BD}^2-\overline{BC}^2=\overline{AD}^2-\overline{AC}^2;$$

$$\underbrace{(\overline{BD}-\overline{BC})}_{\overline{CD}}(\overline{BD}+\overline{BC})=\underbrace{(\overline{AD}-\overline{AC})}_{\overline{CD}}(\overline{AD}+\overline{AC});$$

$$\overline{CD}(\underbrace{\overline{BD}-\overline{AD}}_{-\overline{AB}}+\underbrace{\overline{BC}-\overline{AC}}_{-\overline{AB}})=0;\ -2\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0;\ \overline{AB}\cdot\overline{CD}=0,$$

а это и означает, что $\overline{AB}\perp\overline{CD}$.

Выполняя преобразования «от конца к началу» ($\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0$, или $-2\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0$, или $\overline{CD}(\overline{BD}+\overline{DA}+\overline{BC}+\overline{CA})=0$ и т. д.), убеждаемся в том, что верно и обратное утверждение.

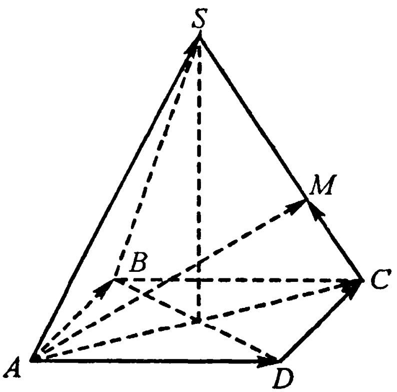


Рис. 5.16

5.26. По условию, $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, $SA = AB = a$, $M\in SC$, $SM : MC = 2 : 1$ (рис. 5.16). Положим $\overline{AD}=\overline{m}$, $\overline{AB}=\overline{n}$, $\overline{AS}=\overline{p}$ и $(\widehat{\overline{DC};\overline{AM}})=\varphi$. Искомый угол φ будем искать по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\overline{DC}\cdot\overline{AM}}{|\overline{DC}||\overline{AM}|}. \qquad (1)$$

Разложим векторы $\overline{DC}$ и $\overline{AM}$ по векторам $\overline{m}$, $\overline{n}$ и $\overline{p}$. Имеем $\overline{DC}=\overline{AB}=\overline{n}$, $\overline{AM}=\overline{AD}+\overline{DC}+\overline{CM}$. Из условия $SM : MC = 2 : 1$ следует, что $\overline{CM}=\frac{1}{3}\overline{CS}$, где $\overline{CS}=\overline{AS}-\overline{AC}=\overline{p}-(\overline{m}+\overline{n})$. Таким образом,

$$\overline{AM}=\overline{m}+\overline{n}+\frac{1}{3}\overline{p}-\frac{1}{3}(\overline{m}+\overline{n})=\frac{2}{3}\overline{m}+\frac{2}{3}\overline{n}+\frac{1}{3}\overline{p},$$

$$\overline{DC}\cdot\overline{AM}=\overline{n}\left(\frac{2}{3}\overline{m}+\frac{2}{3}\overline{n}+\frac{1}{3}\overline{p}\right)=\frac{1}{3}(2\overline{n}\,\overline{m}+2\overline{n}^2+\overline{n}\,\overline{p}).$$

Но $\overline{n}\,\overline{m}=0$ (так как $\overline{n}\perp\overline{m}$), $\overline{n}^2=a^2$ и $\overline{n}\,\overline{p}=a^2\cos 60°=\frac{a^2}{2}$; значит, $\overline{DC}\cdot\overline{AM}=\frac{1}{3}\left(2a^2+\frac{a^2}{2}\right)=\frac{5}{6}a^2$ Далее находим $|\overline{DC}|=a$,

$$\left|\overline{AM}\right| = \sqrt{\frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{8}{9}\overline{m}\,\overline{n} + \frac{4}{9}\overline{m}\,\overline{p} + \frac{4}{9}\overline{n}\,\overline{p}} =$$

$$= \sqrt{a^2 + \frac{8}{9}a^2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{13}}{3}.$$

Подставляя найденные выражения в равенство (1), окончательно получим $\cos\varphi = \dfrac{5\sqrt{13}}{26}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$.

5.27. Проведем $AK \,||\, BD$ и $DK \,||\, AB$ (рис. 5.17). Тогда $\overline{AK} = \overline{BD}$, $\overline{DK} = \overline{BA}$. Воспользуемся очевидными равенствами $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AD}$, $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$; сложив их почленно, получим

$$\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}. \qquad (1)$$

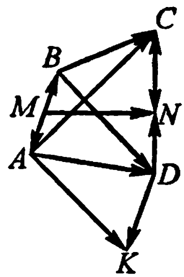


Рис. 5.17

Далее, с помощью рис. 5.17 запишем

$$\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CD},$$

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN} = \frac{1}{2}\overline{BA} + \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{DC}.$$

Сложим эти равенства: $2\overline{MN} = \overline{BC} + \overline{AD}$, или $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD})$, откуда в силу (1) имеем $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$. Теперь используем неравенство $\left|\overline{a} + \overline{b}\right| \le \left|\overline{a}\right| + \left|\overline{b}\right|$ и окончательно получим $MN \le \frac{1}{2}(BC + AD)$, $MN \le \frac{1}{2}(AC + BD)$.

5.28. Введем следующие обозначения: $\overline{BC}=\bar{a}$, $\overline{CA}=\bar{b}$, $\overline{AB}=\bar{c}$, $\overline{AM_1}=\overline{m_1}$, $\overline{BM_2}=\overline{m_2}$, где AM_1 и BM_2 — медианы ΔABC (рис. 5.18). Так как $\overline{m_1}=\bar{c}+\frac{1}{2}\bar{a}$, $\overline{m_2}=\bar{a}+\frac{1}{2}\bar{b}$, то

$$\overline{m_1}\,\overline{m_2}=\left(\bar{c}+\frac{1}{2}\bar{a}\right)\left(\bar{a}+\frac{1}{2}\bar{b}\right)=\bar{c}\,\bar{a}+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}\bar{c}\,\bar{b}+\frac{1}{4}\bar{a}\,\bar{b}. \qquad (1)$$

Для нахождения $\bar{c}\,\bar{a}$, $\bar{c}\,\bar{b}$ и $\bar{a}\,\bar{b}$ воспользуемся тем, что $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$. Имеем

$$\bar{c}+\bar{a}=-\bar{b}\Rightarrow c^2+a^2+2\bar{c}\,\bar{a}=b^2\Rightarrow \bar{c}\,\bar{a}=\frac{1}{2}(b^2-c^2-a^2) \qquad (2)$$

и аналогично

$$\bar{c}\,\bar{b}=\frac{1}{2}(a^2-c^2-b^2), \qquad (3)$$

$$\bar{a}\,\bar{b}=\frac{1}{2}(c^2-a^2-b^2). \qquad (4)$$

Теперь подставим выражения (2), (3) и (4) в равенство (1):

$$\overline{m_1}\,\overline{m_2}=\frac{1}{2}(b^2-c^2-a^2)+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}(a^2-c^2-b^2)+\frac{1}{8}(c^2-a^2-b^2)=$$

$$=\frac{1}{8}(4b^2-4c^2-4a^2+4a^2+2a^2-2c^2-2b^2+c^2-a^2-b^2)=$$

$$=\frac{1}{8}(a^2+b^2-5c^2)=0,$$

поскольку, согласно условию, $a^2+b^2=5c^2$. Итак, $\overline{m_1}\perp\overline{m_2}$.

Докажем, что справедливо и обратное утверждение. Действительно, пусть известно, что $\overline{m_1}\perp\overline{m_2}$, т. е. $\overline{m_1}\,\overline{m_2}=0$. Тогда, проведя вычисление $\overline{m_1}\,\overline{m_2}$ способом, указанным в первой части доказательства, получим $\overline{m_1}\,\overline{m_2}=\frac{1}{8}(a^2+b^2-5c^2)=0$, или $a^2+b^2=5c^2$.

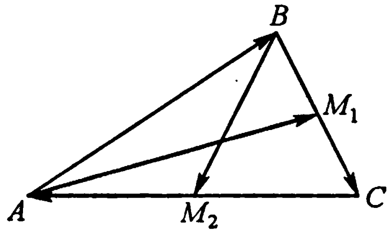


Рис. 5.18

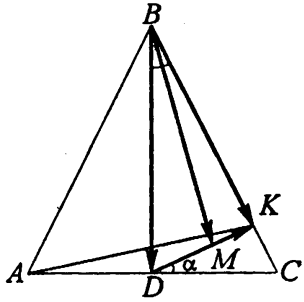


Рис. 5.19

5.29. Так как в ΔABC (рис. 5. 19) $AB = BC$, D — середина AC, то $BD \perp AC$. Запишем разложения $\overline{BM} = \overline{BD} + \overline{DM}$, $\overline{AK} = \overline{AD} + \overline{DK} = \overline{AD} + 2\overline{DM}$. Следовательно,

$$\overline{BM} \cdot \overline{AK} = \underbrace{\overline{BD} \cdot \overline{AD}}_{0} + \overline{DM} \cdot \overline{AD} + \overline{BD} \cdot 2\overline{DM} + 2\overline{DM}^2 =$$

$$= \overline{DM} \cdot \overline{AD} + 2\overline{BD} \cdot \overline{DM} + 2\overline{DM}^2. \qquad (1)$$

Пусть $\angle KDC = \alpha$; тогда $\angle DBK = \angle KDC = \alpha$ (углы с взаимно перпендикулярными сторонами) и равенство (1) примет вид

$$\overline{BM} \cdot \overline{AK} = \left|\overline{DM}\right|\left|\overline{AD}\right|\cos\alpha + 2\left|\overline{BD}\right|\left|\overline{DM}\right|\cos(90^\circ + \alpha) + 2\overline{DM}^2 =$$

$$= \left|\overline{DM}\right|\left(\left|\overline{AD}\right| \cos\alpha - 2\left|\overline{BD}\right|\sin\alpha + 2\left|\overline{DM}\right|\right). \qquad (2)$$

Но $\overline{AD}\cos\alpha = \left|\overline{DC}\right|\cos\alpha = \left|\overline{DK}\right|$, $\left|\overline{BD}\right|\sin\alpha = \left|\overline{DK}\right|$ (рис. 5.19), $2\left|\overline{DM}\right| = \left|\overline{DK}\right|$. Подставив найденные значения в (2), получим

$$\overline{BM} \cdot \overline{AK} = \left|\overline{DM}\right|\left(\left|\overline{DK}\right| - 2\left|\overline{DK}\right| + \left|\overline{DK}\right|\right) = 0, \text{ т. е. } \overline{BM} \perp \overline{AK}.$$

5.30. Имеем $\overline{CA} = \overline{CC_1} + \overline{C_1A}$, $\overline{CB} = \overline{CC_1} + \overline{C_1B}$ (рис. 5.20). Тогда

$$CA^2 = CC_1^2 + 2\overline{CC_1} \cdot \overline{C_1A} + C_1A^2,\ CB^2 = CC_1^2 + 2\overline{CC_1} \cdot \overline{C_1B} + C_1B^2.$$

Сложив эти равенства, получим

$$CA^2+CB^2=2CC_1^2+2\overline{CC_1}(\overline{C_1A}+\overline{C_1B})+C_1A^2+C_1B^2=$$

$$=2CC_1^2+2C_1A^2=2(CC_1^2+C_1A^2), \qquad (1)$$

так как $|\overline{C_1A}|=|\overline{C_1B}|$ и векторы $\overline{C_1A}$ и $\overline{C_1B}$ противоположно направлены. Далее, согласно свойству пересекающихся хорд, $CC_1\cdot C_1D=C_1A\cdot C_1B=C_1A^2$. Заменив в равенстве (1) C_1A^2 на $CC_1\cdot C_1D$, находим

$$CA^2+CB^2=2CC_1(CC_1+C_1D)=$$

$$=2CC_1\cdot CD.$$

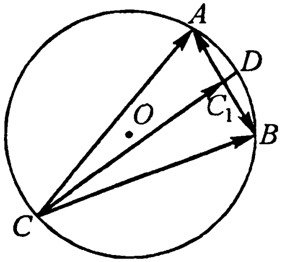


Рис. 5.20

5.31. Выберем единичные векторы $\bar{a}_0$, $\bar{b}_0$ и $\bar{c}_0$, направленные вдоль ребер трехгранного угла. Тогда направляющие векторы $\bar{m}$, $\bar{n}$ и $\bar{p}$ биссектрис трех плоских углов трехгранного угла запишутся в виде $\bar{m}=\bar{a}_0+\bar{b}_0$, $\bar{n}=\bar{c}_0+\bar{a}_0$ и $\bar{p}=\bar{b}_0+\bar{c}_0$. По условию, $\bar{m}\perp\bar{n}$, откуда

$$(\bar{a}_0+\bar{b}_0)(\bar{c}_0+\bar{a}_0)=0;\ \bar{a}_0\bar{c}_0+\bar{b}_0\bar{c}_0+\bar{a}_0^2+\bar{b}_0\bar{a}_0=0;$$

$$\bar{a}_0\bar{c}_0+\bar{b}_0\bar{c}_0+\bar{b}_0\bar{a}_0=-1. \qquad (1)$$

Теперь найдем

$$\bar{m}\,\bar{p}=\bar{a}_0\bar{b}_0+\bar{b}_0^2+\bar{a}_0\bar{c}_0+\bar{b}_0\bar{c}_0=-1+1=0$$

(см. равенство (1)) и, значит, $\bar{m}\perp\bar{p}$. Аналогично получим $\bar{n}\,\bar{p}=0$, т. е. $\bar{n}\perp\bar{p}$.

5.32. Так как $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=0$ и $\overline{OA}\cdot\overline{OC}=0$, то $\overline{OA}\perp\overline{OB}$ и $\overline{OA}\perp\overline{OC}$, а значит, $\overline{OA}\perp(OBC)$, т. е. OA — высота пирамиды $OABC$ (рис. 5.21). Пусть $\angle BOC=\varphi$; тогда $S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin\varphi$. Из условия $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=8$ следует, что

$$|\overline{OB}|\cdot|\overline{OC}|\cos\varphi = 8, \text{ или } 2\cdot 6\cos\varphi = 8,$$

откуда $\cos\varphi = \frac{2}{3}$. Учитывая, что $0 < \varphi < 180°$,

находим $\sin\varphi = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Таким образом,

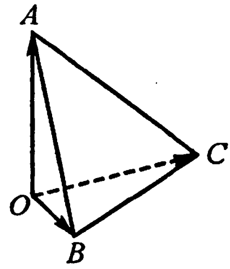


Рис. 5.21

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = 2\sqrt{5} \text{ (кв. ед.)}$$

и окончательно получим

$$V_{AOBC} = \frac{1}{3}S_{\Delta OBC}\cdot AO = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 5 = \frac{10\sqrt{5}}{3} \text{ (куб. ед.)}$$

Ответ: $\frac{10\sqrt{5}}{3}$ куб. ед.

5.33. Из произвольной точки O проведем радиусы-векторы $\overline{OA} = \bar{r}_1$, $\overline{OB} = \bar{r}_2$, $\overline{OC} = \bar{r}_3$ и $\overline{OD} = \bar{r}_4$ (рис. 5.22). Теперь выразим через них нужные нам векторы: $\overline{AB} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, $\overline{CD} = \bar{r}_4 - \bar{r}_3$, $\overline{AC} = \bar{r}_3 - \bar{r}_1$, $\overline{DB} = \bar{r}_2 - \bar{r}_4$, $\overline{AD} = \bar{r}_4 - \bar{r}_1$, $\overline{BC} = \bar{r}_3 - \bar{r}_2$. Далее находим склярные произведения

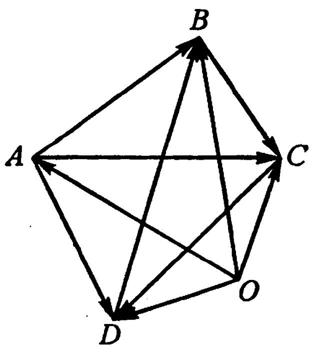


Рис. 5.22

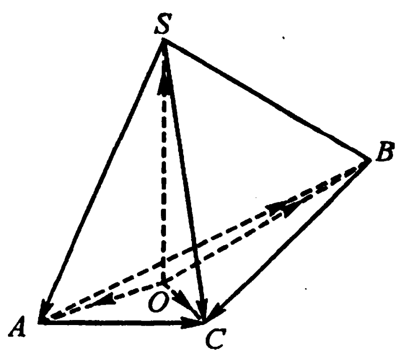


Рис. 5.23

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=(\bar r_2-\bar r_1)(\bar r_4-\bar r_3)=\bar r_2\bar r_4-\bar r_1\bar r_4-\bar r_2\bar r_3+\bar r_1\bar r_3,$$

$$\overline{AC}\cdot\overline{DB}=(\bar r_3-\bar r_1)\ (\bar r_2-\bar r_4)=\bar r_3\bar r_2-\bar r_1\bar r_2-\bar r_3\bar r_4+\bar r_1\bar r_4,$$

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC}=(\bar r_4-\bar r_1)\ (\bar r_3-\bar r_2)=\bar r_4\bar r_3-\bar r_1\bar r_3-\bar r_4\bar r_2+\bar r_1\bar r_2$$

и, наконец, их сумму

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AC}\cdot\overline{DB}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0.$$

5.34. В тетраэдре $SABC$ проведем $SO\perp(ABC)$ (рис. 5.23) и выразим векторы, направленные вдоль ребер пирамиды, через радиусы-векторы $\overline{OA}=\bar r_1$, $\overline{OB}=\bar r_2$, $\overline{OC}=\bar r_3$, $\overline{OS}=\bar r_4$. Имеем $\overline{SA}=\bar r_1-\bar r_4$, $\overline{BC}=\bar r_3-\bar r_2$, $\overline{SB}=\bar r_2-\bar r_4$, $\overline{AC}=\bar r_3-\bar r_1$, $\overline{SC}=\bar r_3-\bar r_4$, $\overline{AB}=\bar r_2-\bar r_1$.

По условию, $SA^2+BC^2=SB^2+AC^2=SC^2+AB^2$, откуда переходя к радиусам-векторам, получим

$$r_1^2-2\bar r_1\bar r_4+r_4^2+r_3^2-2\,\bar r_3\bar r_2+r_2^2=r_2^2-2\bar r_2\bar r_4+r_4^2+r_3^2-$$
$$-2\,\bar r_3\bar r_1+r_1^2=r_3^2-2\,\bar r_3\bar r_4+r_4^2+r_2^2-2\,\bar r_2\bar r_1+r_2^2. \qquad (1)$$

Но

$$\bar r_1\bar r_4=\bar r_2\bar r_4=\bar r_3\bar r_4=0 \qquad (2)$$

(согласно условию перпендикулярности векторов), а потому из равенств (1) следует, что

$$\bar r_3\bar r_2=\bar r_3\bar r_1=\bar r_2\bar r_1. \qquad (3)$$

Тогда

$$\overline{SA}\cdot\overline{BC}=(\bar r_1-\bar r_4)\ (\bar r_3-\bar r_2)=\bar r_1\bar r_3-\bar r_4\bar r_3-\bar r_1\bar r_2+\bar r_4\bar r_2=0$$

(в силу равенств (2) и (3)), т. е. $SA\perp BC$. Аналогично устанавливаем, что $SC\perp AB$, $SB\perp AC$.

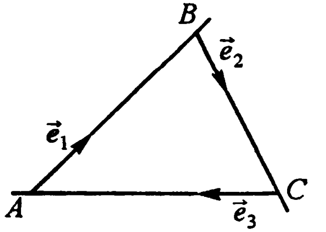


Рис. 5.24

5.35. На сторонах треугольника построим единичные векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ (рис. 5.24). Суммой этих векторов является некоторый вектор $\bar{d}$, т. е. $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 = \bar{d}$. Возведем обе части равенства в квадрат:

$$\bar{e}_1^2 + \bar{e}_2^2 + \bar{e}_3^2 + 2\bar{e}_1\bar{e}_2 + 2\bar{e}_1\bar{e}_3 + 2\bar{e}_2\bar{e}_3 = \bar{d}^2,$$

или

$$1+1+1+2\cos(\pi - B) + 2\cos(\pi - A) + 2\cos(\pi - C) = \left|\bar{d}\right|^2.$$

Так как $\left|\bar{d}\right|^2 \geq 0$, то $3 - 2\cos B - 2\cos A - 2\cos C \geq 0$, откуда

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Оглавление

Часть II. Геометрия

АВТОРСКИЙ КОЛЛЕКТИВ

Егерев Виктор Константинович
Зайцев Владимир Валентинович
Кордемский Борис Анастасьевич
Маслова Тамара Николаевна
Орловская Ираида Федоровна
Позойский Роман Исаевич
Ряховская Галина Сергеевна
Сканави Марк Иванович
Суходский Андрей Матвеевич
Федорова Нина Михайловна

Учебное издание

Егерев Виктор Константинович
Зайцев Владимир Валентинович
Кордемский Борис Анастасьевич и др.

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

с решениями

8–11 классы

Редактор *А. М. Суходский*
Компьютерная верстка *Е. Ю. Репиной*

Подписано в печать с готовых диапозитивов заказчика 18.10.2011.
Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага газетная. Печать высокая с ФПФ.
Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 32,76. Доп. тираж 3000 экз. Заказ 1057.

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — учебная литература

ООО «Издательство Оникс».
115093, Москва, ул. Б. Серпуховская, д. 44, офис 19.
Почтовый адрес: 117418, Москва, а/я 26.
Отдел реализации: тел. (495) 649-85-07.
Интернет-магазин: www.onyx.ru

ООО «Издательство «Мир и Образование».
115193, Москва, ул. 5-я Кожуховская, д. 13, стр. 1.
Тел./факс (495) 742-43-51, 742-43-54.
E-mail: mir-obrazovanie@onyx.ru

ООО «Издательство Астрель».
129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а.

Издание осуществлено при техническом содействии
ООО «Издательство АСТ»

Издано при участии ООО «Харвест». ЛИ № 02330/0494377 от 16.03.2009.
Республика Беларусь, 220013, г. Минск, ул. Кульман, д. 1, корп. 3, эт. 4, к. 42.
E-mail редакции: harvest@anitex.by

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
ЛП № 02330/0150496 от 11.03.2009.
Республика Беларусь, 220600, г. Минск, ул. Красная, 23.