

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию

Пензенский государственный университет

Руденко А.К., Руденко М.Н., Семерич Ю.С.

СБОРНИК ЗАДАЧ С РЕШЕНИЯМИ  
ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К СТУДЕНЧЕСКИМ  
МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЛИМПИАДАМ

Пенза, 2009 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Линейная алгебра.....	4
2. Аналитическая геометрия.....	7
3. Математический анализ.....	9
3.1 Графики функций.....	9
3.2 Пределы функций.....	11
3.3 Теоремы дифференциального исчисления о среднем значении.....	15
3.4 Ряды.....	20
Список литературы.....	24

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из средств повышения математической культуры будущих специалистов физико-математического и технического профиля в вузе является подготовка и участие студентов в математических олимпиадах. Студент при этом развивает привычку к точному логическому мышлению, получает творческие исследовательские навыки.

В пособии приводятся задачи, углубляющие теоретический материал. Есть задачи вычислительного характера. Задачи взяты из учебников, задачников, олимпиадных сборников.

Список задач разбит на типы.

Приведены решения всех задач.

Используя пособие, можно проводить личное первенство для студентов первого, второго и старших курсов. Если первенство будет командным, то каждая команда может состоять из трех человек-студентов одной группы, которые решают и сдают для проверки одну общую работу. Получается соревнование между группами, потоками, факультетами.

Можно проводить олимпиады для студентов разных специальностей: экономического, технического, гуманитарного и других профилей.

Победители олимпиады могут претендовать на премии, именные стипендии и другие льготы.

**РАЗДЕЛ 1**  
**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

*Задача 1.1.* Вычислить определитель  $n$ -го порядка

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – действительные числа, такие, что  $\alpha \neq \beta$ .

*Решение.* Представим элементы первого столбца в виде суммы двух слагаемых  $\alpha + \beta, 1 + 0, 0 + 0, \dots, 0 + 0, 0 + 0$ . Тогда определитель  $\Delta_n$  можно представить в виде суммы двух определителей:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}.$$

В первом определителе первый столбец, умноженный на  $\beta$ , вычтем из второго, затем полученный второй столбец, умноженный на  $\beta$ , вычтем из третьего и так продолжаем до последнего  $n$ -го столбца. В результате будем иметь

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha + \beta \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha^n + \beta\Delta_{n-1}.$$

Итак, получили рекуррентное соотношение  $\Delta_n = \alpha^n + \beta\Delta_{n-1}$ . Аналогично, поменяв роли  $\alpha$  и  $\beta$ , получим  $\Delta_n = \beta^n + \alpha\Delta_{n-1}$ . Составим систему уравнений для определения неизвестных  $\Delta_n$  и  $\Delta_{n-1}$

$$\begin{cases} \Delta_n = \alpha^n + \beta\Delta_{n-1}, \\ \Delta_n = \beta^n + \alpha\Delta_{n-1}. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим  $(\alpha^n - \beta^n) + (\beta - \alpha)\Delta_{n-1} = 0$ .

Далее, преобразуем полученное выражение к виду  $\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)\Delta_{n-1}$ .

Отсюда находим

$$\Delta_{n-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Тогда

$$\Delta_n = \alpha^n + \beta \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \alpha^n\beta + \alpha^n\beta - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

Таким образом, получим  $\Delta_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$ .

**Задача 1.2.** Вычислить определитель  $n$ -го порядка

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & -t \end{vmatrix}.$$

*Решение.* Разложим определитель по элементам первой строки:

$$\Delta_n = (-t)\Delta'_{n-1} + (-1)^{1+n} a_1 \Delta''_{n-1},$$

где  $\Delta'_{n-1}$ ,  $\Delta''_{n-1}$  – треугольные определители. Причем у первого определителя выше главной диагонали расположены нули, а на главной диагонали число  $-t$ , у второго определителя ниже главной диагонали расположены нули, а на главной диагонали числа  $a_2, a_3, \dots, a_n$ . Таким образом, получим

$$\Delta_n = (-t)^n + (-1)^{1+n} a_1 a_2 a_3 \dots a_n.$$

**Задача 1.3.** Установить, существует ли невырожденная квадратная матрица  $A$  порядка 2005 с действительными элементами, такая, что  $A^3 + 2A^T = 0$ , где  $0$  – нулевая матрица.

*Решение.* По условию известно, что  $A^3 + 2A^T = 0$ , а отсюда находим  $A^3 = -2A^T$ . Следовательно, получим

$$\begin{aligned} \det(A^3) &= \det(-2A^T), \\ (\det A)^3 &= (-2)^{2005} \det A^T. \end{aligned}$$

Так как  $\det A^T = \det A$ , то

$$\begin{aligned} (\det A)^3 + (-2)^{2005} \det A &= 0, \\ (\det A) \left[ (\det A)^2 + (-2)^{2005} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Но, так как  $(\det A)^2 + (-2)^{2005} \neq 0$ , то отсюда следует, что  $\det A = 0$ . Таким образом, невырожденной матрицы, удовлетворяющей данному уравнению, нет.

**Задача 1.4.** Вычислить производную функции  $f(x) = \det(Ax + E)$  в точке  $x=0$ , если  $A$  – квадратная матрица порядка  $n$  с элементами  $a_{ij} = i \cdot j$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E$  – единичная матрица.

*Решение.* Так как

$$f(x) = \det(Ax + E) = \begin{vmatrix} 1 \cdot 1x + 1 & 1 \cdot 2x + 1 & \dots & 1 \cdot nx + 1 \\ 2 \cdot 1x & 2 \cdot 2x + 1 & \dots & 2 \cdot nx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n \cdot 1x & n \cdot 2x & \dots & n \cdot nx + 1 \end{vmatrix}.$$

Вычислим производную функции  $f(x)$

$$f'(x) = \begin{vmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & \dots & 1 \cdot n \\ 2 \cdot 1x & 2 \cdot 2x+1 & \dots & 2 \cdot nx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n \cdot 1x & n \cdot 2x & \dots & n \cdot nx+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \cdot 1x+1 & 1 \cdot 2x & \dots & 1 \cdot nx \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & \dots & 2 \cdot n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n \cdot 1x & n \cdot 2x & \dots & n \cdot nx+1 \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 \cdot 1x+1 & 1 \cdot 2x & \dots & 1 \cdot nx \\ 2 \cdot 1x & 2 \cdot 2x+1 & \dots & 2 \cdot nx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n \cdot 1 & n \cdot 2 & \dots & n \cdot n \end{vmatrix}.$$

Подставим  $x = 0$

$$f'(x) = \begin{vmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & \dots & 1 \cdot n \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & \dots & 2 \cdot n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n \cdot 1 & n \cdot 2 & \dots & n \cdot n \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + n \cdot n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Задача 1.5.** Доказать, что абсолютная величина определителя квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$ , у которой столбцы являются попарно ортогональными векторами, равна произведению длин векторов-столбцов.

**Решение.** Пронормируем столбцы матрицы  $A$ . Тогда за знак определителя матрицы  $A$  можно вынести множитель, равный произведению длин столбцов. Матрица  $A_1$  из нормированных столбцов будет ортогональной и для нее выполняется условие  $A_1^{-1} = A_1^T$ ,  $A_1 A_1^T = E$ , тогда  $\det A_1^2 = 1$ ,  $|\det A_1| = 1$ .

## РАЗДЕЛ 2

### АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**Задача 2.1.** Найти расстояние от параболы  $y = x^2$  до прямой  $x - y - 2 = 0$ .

**Решение.** Найдем координаты точки  $M$  на параболе, в которой касательная параллельна прямой  $x - y - 2 = 0$ . Для этого представим уравнение прямой

в виде  $y = x - 2$ . Отсюда следует, что угловым коэффициентом прямой  $k = 1$ . Уравнение касательной представим в виде  $y - y_1 = 2x_1(x - x_1)$ . Тогда получим, что  $2x_1 = 1$ , а отсюда  $x_1 = 1/2$ ,  $y_1 = 1/4$ . Теперь вычислим расстояние от точки  $M(1/2, 1/4)$  до прямой  $x - y - 2 = 0$

$$\rho = \frac{\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

**Задача 2.2.** Составить уравнение кривой, проходящей через точку  $A(0, 1)$ , для которой треугольник, образованный отрезком  $OB$  оси  $Oy$ , касательной к кривой в произвольной ее точке  $M(x_1, y_1)$  и радиус-вектором  $OM$  точки касания является равнобедренным. Основанием треугольника служит отрезок  $BM$  касательной от точки касания до оси  $Oy$  (рис. 1).

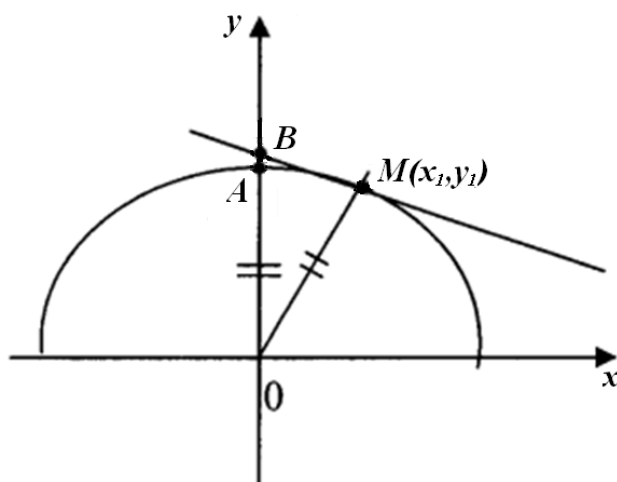


Рис. 1

*Решение.* Пусть  $y = f(x)$  является искомым уравнением кривой. Запишем уравнение касательной, проведенной к кривой  $y = f(x)$  в точке  $M(x_1, y_1)$

$$y - y_1 = y'(x - x_1).$$

Найдем координаты точки  $B$ . При  $x = 0$ , получим  $y - y_1 = -x_1 y'$  или  $y = y_1 - x_1 y'$ . По условию известно, что  $y - x y' = \sqrt{x^2 + y^2}$  или  $x y' = y - \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Отсюда находим, что  $y' = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$  является однородным дифференциаль-

ным уравнением первого порядка. Выполним замену  $t = \frac{y}{x}$ , тогда  $y = tx$ , а

$y' = t'x + t$ . Тогда после подстановки в уравнение, получим

$$t'x + t = t - \sqrt{1+t^2},$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|t + \sqrt{1+t^2}| = -\ln|x| + \ln|C|,$$

$$t + \sqrt{1+t^2} = \frac{C}{x},$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{C}{x},$$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

Найдем неизвестную  $C$  из условия  $y(0) = 1$ , тогда  $1 + 1 = C$ ,  $C = 2$ . Тогда искомое уравнение кривой примет вид  $y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2$  или  $x^2 = 4 - 4y$ .

### РАЗДЕЛ 3

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

### 3.1 Графики функций

*Задача 3.1.* Построить график неявно заданной функции  $\max\{x, y\} = 1$ .

*Решение.* Если  $y < x$ , то  $x = 1$  при  $y < 1$ . Если  $y = x$ , то  $y = x = 1$ . Если  $y > x$ , то  $y = 1$  при  $x < 1$  (рис. 2).

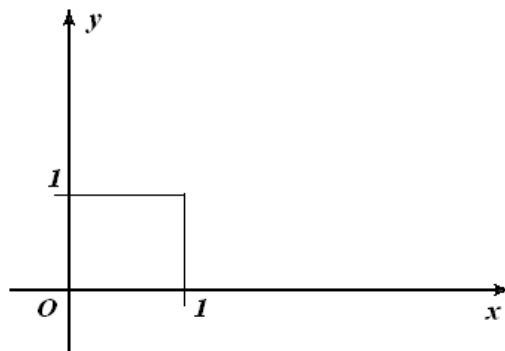


Рис. 2

**Задача 3.2.** Построить график функции  $y = \arcsin(\sin x)$ .

**Решение.** Уравнение  $y = \arcsin(\sin x)$  равносильно системе

$$\begin{cases} \sin y = \sin x, \\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2. \end{cases}$$

Отсюда находим, что  $y = (-1)^n x + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ . Задаем последовательно  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и строим график функции (рис. 3).

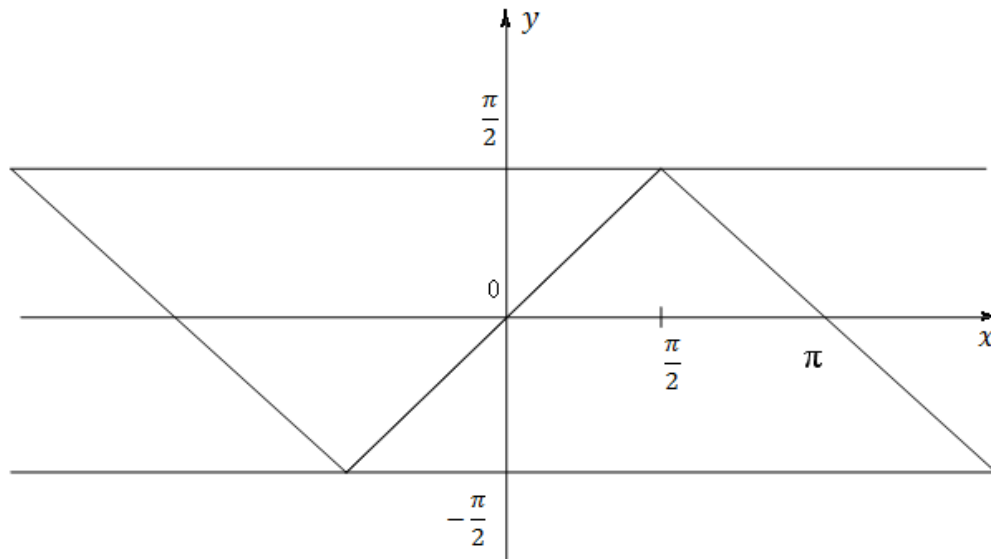


Рис. 3

**Задача 3.3.** Построить график функции  $y = \arcsin(\cos x)$ .

**Решение.** Уравнение  $y = \arcsin(\cos x)$  равносильно системе

$$\begin{cases} \sin y = \cos x, \\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin y = \sin(\pi/2 - x), \\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2. \end{cases}$$

Отсюда находим, что  $y = (-1)^n (\pi/2 - x) + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ . Задаем последовательно  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  и строим график функции (рис. 4).

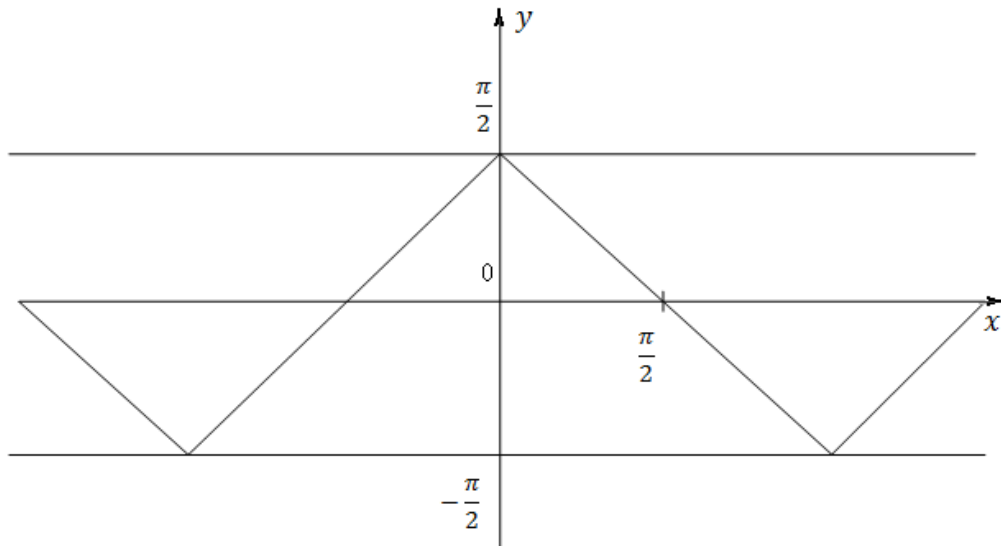


Рис. 4

### 3.2 Пределы функций

**Задача 3.4.** Вычислить, не пользуясь правилом Лопиталья

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

*Решение.* Воспользуемся формулой Тейлора для функции  $y = \sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n-1}(x).$$

Тогда получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \dots - (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - R_{2n-1}(x)}{x^3} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

**Задача 3.5.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx) - 1}{x}$ .

*Решение.* Воспользуемся правилом Лопиталья, получим

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx) - 1}{x} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1+2x)\dots(1+nx) + 2(1+x)\dots(1+nx) + \dots + n(1+x)(1+2x)\dots(1+(n-1)x) \right] = \\ & = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

**Задача 3.6.** Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n})$ .

*Решение.* Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2\left(\pi\left[\sqrt{n^2 + n} - n + n\right]\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\alpha(n) + \pi n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \pi\alpha(n) \cos \pi n + \cos \pi\alpha(n) \sin \pi n)^2 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2\left(\frac{\pi(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1. \end{aligned}$$

**Задача 3.7.** Найти предел суммы с помощью определенного интеграла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}, \quad p > 0.$$

*Решение.* Как известно,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n), \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}], \quad \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \rightarrow 0.$$

Однако, в некоторых случаях выражение под знаком предела (интегральная сумма) задается в виде

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \varphi_1(n) + \dots + \varphi_n(n).$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_1(n) + \dots + \varphi_n(n)) = \int_a^b f(x) dx.$$

Поэтому в нашем случае выражение под знаком предела является интегральной суммой для функции  $f(x) = x^p$  при  $x \in [0, 1]$ ,  $\xi_k = \frac{k}{n}$ ,  $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ . Поэтому

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

**Задача 3.8.** Найти предел суммы с помощью определенного интеграла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$$

*Решение.* Выражение под знаком предела является интегральной суммой для функции

$$f(x) = \sqrt{1+x} \text{ при } x \in [0, 1], \xi_k = \frac{k}{n}, \Delta x_k = \frac{1}{n}.$$

Поэтому  $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$ .

**Задача 3.9.** Найти предел суммы с помощью определенного интеграла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( 1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right).$$

*Решение.* Выражение под знаком предела является интегральной суммой для функции

$$f(x) = \cos \frac{\pi x}{2} \text{ при } x \in [0, 1], \xi_k = \frac{k}{n}, \Delta x_k = \frac{1}{n}.$$

Поэтому  $\int_0^1 \cos \frac{\pi}{2} x dx = 2 \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{\pi} \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$ .

**Задача 3.10.** Найти предел суммы с помощью определенного интеграла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left( a + k \frac{b-a}{n} \right) \right].$$

*Решение.* Выражение под знаком предела является интегральной суммой для функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{b-a} f(x) \text{ при } x \in [a, b], \xi_k = a + k \frac{b-a}{n}, \Delta x_k = \frac{b-a}{n}.$$

Поэтому  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

**Задача 3.11.** Найти предел суммы с помощью определенного интеграла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = k.$$

*Решение.* Прологарифмируем обе части равенства

$$\ln \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot \sqrt[n]{\frac{2}{n}} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{\frac{n}{n}} = \ln k.$$

Отсюда находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \ln \frac{1}{n} + \ln \frac{2}{n} + \dots + \ln \frac{n}{n} \right).$$

Выражение, стоящее под знаком предела, является интегральной суммой для функции  $f(x) = \ln x$  при  $x \in [0, 1]$ ,  $\xi_k = \frac{k}{n}$ ,  $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ .

$$\text{Поэтому } \int_0^1 \ln x dx = x \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 dx = 0 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} - 1 = -1. \text{ Отсюда на-}$$

ходим, что  $k = e^{-1}$ .

**Задача 3.12.** Найти предел суммы с помощью определенного интеграла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

*Решение.* Преобразуем выражение в скобках

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right).$$

Выражение, стоящее под знаком предела, является интегральной суммой для функции  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  при  $x \in [0, 1]$ ,  $\xi_k = \frac{k}{n}$ ,  $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ . Поэтому

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln |1+x| \Big|_0^1 = \ln 2.$$

**Задача 3.13.** Найти предел суммы с помощью определенного интеграла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right).$$

*Решение.* Преобразуем выражение в скобках

$$\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}} \right)$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right).$$

Выражение, стоящее под знаком предела, является интегральной суммой для функции  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  при  $x \in [0, 1]$ ,  $\xi_k = \frac{k}{n}$ ,  $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ . Поэтому

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

**Задача 3.14.** Найти предел суммы с помощью определенного интеграла

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right).$$

**Решение.** Выражение, стоящее под знаком предела, является интегральной суммой для функции  $f(x) = \frac{1}{\pi} \sin x$  при  $x \in [0, \pi]$ ,  $\xi_k = \frac{k\pi}{n}$ ,  $\Delta x_k = \frac{\pi}{n}$ . Поэтому

$$\text{мы } \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}.$$

### 3.3 Теоремы дифференциального исчисления о среднем значении

**Задача 3.15.** Доказать неравенства

а)  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$

**Решение.** По теореме Лагранжа  $\sin x - \sin y = \cos \xi \cdot (x - y)$ . Так как  $|\cos \xi| \leq 1$ , то получаем требуемое;

б)  $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leq |a - b|.$

**Решение.** По теореме Лагранжа

$$\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \frac{1}{1+\xi^2} (a - b).$$

Так как  $\frac{1}{1+\xi^2} \leq 1$ , то получаем требуемое;

в)  $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$  при  $0 < a < b$ .

г)  $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$  при  $0 < b < a$ .

**Задача 3.16.** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема на  $[x_1, x_2]$ , причем  $0 < x_1 < x_2$ . Доказать, что

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{array} \right| = \xi f'(\xi) - f(\xi), \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

*Решение.* Преобразуем правую часть равенства, используя теорему Коши

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_2 - x_1} (x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = \\ &= \frac{\left( \frac{f(x)}{x} \right)' \Big|_{x=\xi}}{-\left( \frac{1}{x} \right)' \Big|_{x=\xi}} = \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} \xi^2 = \xi f'(\xi) - f(\xi). \end{aligned}$$

**Задача 3.17.** Доказать, что если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на  $[a, b]$ , дифференцируемы на  $(a, b)$ , а также  $f(a) = 0$ ,  $g(b) = 1$ ,  $f(x) > 0$ ,  $g(x) > 0$ ,  $x \in (a, b)$ , то уравнение  $\frac{f'(x)}{f(x)} \ln g(x) + \frac{g'(x)}{g(x)} = 0$  имеет, по крайней мере, один корень на  $(a, b)$ .

*Решение.* Рассмотрим функцию  $F(x) = f(x) \ln g(x)$  и применим теорему Ролля.

$$F'(x) = f'(x) \ln g(x) + f(x) \frac{g'(x)}{g(x)} = 0.$$

Разделим обе части на  $f(x)$  и будем иметь

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \ln g(x) + \frac{g'(x)}{g(x)} = 0, \quad x \in (a, b).$$

**Задача 3.18.** Доказать, что

$$e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}, \quad 0 < x < 1.$$

**Решение.** Применим теорему Коши к функциям  $f(x) = e^{2x}$  и  $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$

на отрезке  $[0, x]$

$$\frac{e^{2x} - 1}{\frac{1+x}{1-x} - 1} = \frac{2e^{2\xi}}{\frac{2 \cdot 1}{(1-\xi)^2}} = e^{2\xi} (1-\xi)^2 < 1, \quad \text{если } 0 < \xi < 1.$$

Рассмотрим

$$\varphi(x) = e^{2x} (1-x)^2,$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= 2e^{2x} (1-x)^2 - 2e^{2x} (1-x) = 2e^{2x} (1-2x+x^2-1+x) = \\ &= 2e^{2x} (x^2-x) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= 4e^{2x} (x^2-x) + 2e^{2x} (2x-1) = 2e^{2x} (2x^2-2x+2x-1) = \\ &= 2e^{2x} (2x^2-1), \end{aligned}$$

$$\varphi''(0) < 0, \quad \varphi''(1) > 0, \quad \varphi''(x) = 0, \quad \alpha_{1,2} = \pm\sqrt{0.5},$$

$$\varphi_{\max}(0) = 1, \quad \varphi_{\min}(1) = 0,$$

$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = e^{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \approx 0.04$$

Следовательно, неравенство верное.

**Задача 3.19.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ .

**Решение.** Преобразуем выражение в скобках

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = k.$$

Воспользуемся теоремой Ролля, согласно которой существует такое число  $c$ , что выполняется условие

$$\sqrt{x} < c < \sqrt{x+1}.$$

Тогда

$$\frac{\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = \cos c,$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos c \cdot \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0.$$

**Задача 3.20.** Доказать неравенство

$$e^x - 1 > \ln(1+x), \quad x > 0.$$

*Решение.* Применим теорему Коши к функциям  $f(x) = \ln(1+x)$  и  $g(x) = e^x$  на  $[0, x]$

$$\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{e^x - 1} = \frac{1}{(1+\xi)e^\xi} < 1, \quad \xi > 0.$$

**Задача 3.21.** Показать, что

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n+\theta}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n)$ .

*Решение.* Рассмотрим функцию  $f(x) = \sqrt{n+x}$ ,  $x \in [0, 1]$ . Применим теорему Лагранжа к этой функции. Найдем, что

$$\begin{aligned} \theta(n) &= \frac{1}{4(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} - n = \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2}{4} - n = \frac{2\sqrt{n^2+n} + 2n + 1 = 4n}{4} = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{n^2+n} - 2n}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{n^2+n} - n}{2} = \frac{1}{4} + \frac{n}{2(\sqrt{n^2+n} + n)}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(n) = \frac{1}{2}$ .

**Задача 3.22.** Пусть

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3-x & 5-3x^2 & 3x^3-1 \\ 2x^2-1 & 3x^5-1 & 7x^8-1 \end{vmatrix}.$$

Доказать, что найдется число  $C$ ,  $0 < C < 1$ , такое, что  $f'(C) = 0$ .

*Решение.* Так как

$$f(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad f(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

тогда по теореме Ролля найдется число  $C$ ,  $0 < C < 1$ , такое, что  $f'(C) = 0$ .

**Задача 3.23.** Пусть

$$c_0 + \frac{c_1}{2} + \dots + \frac{c_n}{n+1} = 0.$$

Доказать, что многочлен  $c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$  имеет хотя бы один действительный корень.

*Решение.* Рассмотрим многочлен

$$P_{n+1}(x) = c_0x + \frac{c_1x^2}{2} + \dots + \frac{c_nx^{n+1}}{n+1}.$$

По условию  $P_{n+1}(1) = 0$ , кроме того  $P_{n+1}(0) = 0$ . Поэтому существует такое число  $x_0 \in (0, 1)$  такое, что  $P'_{n+1}(x_0) = 0$ ,  $P'_{n+1}(x)$  совпадает с многочленом  $c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ .

**Задача 3.24.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , дифференцируема на  $(a, b)$  и  $f(a) = f(b) = 0$ , то  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  уравнение  $\alpha f(x) + f'(x) = 0$  имеет на  $(a, b)$  хотя бы один корень.

*Решение.* Рассмотрим функцию  $F(x) = e^{\alpha x} f(x)$ , которая на  $(a, b)$  удовлетворяет условиям теоремы Ролля, поэтому ее производная

$$F'(x) = \alpha e^{\alpha x} f(x) + e^{\alpha x} f'(x) = e^{\alpha x} (\alpha f(x) + f'(x))$$

имеет хотя бы один корень на  $(a, b)$ .

**Задача 3.25.** Пусть функция  $f(x)$  дважды дифференцируема на  $[0, 1]$  и удовлетворяет условиям  $f'(1) < 2f(1)$ ,  $f''(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ . Доказать, что

$$\int_0^1 f(x) dx > 0.$$

*Решение.* Представим функцию

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(c)}{2}(x-1)^2, \quad c \in [0, 1].$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 f(1) dx + f'(1) \int_0^1 (x-1) dx + \frac{f''(c)}{2} \int_0^1 (x-1)^2 dx = \\ &= f(1) - \frac{f'(1)}{2} + A. \end{aligned}$$

По условию

$$A = \frac{f''(c)}{2} \int_0^1 (x-1)^2 dx > 0, \quad f(1) - \frac{f'(1)}{2} > 0.$$

Следовательно,  $\int_0^1 f(x) dx > 0$ .

### 3.4 Ряды

**Задача 3.26.** Доказать, что при любом натуральном  $n$  истинно тождество

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}. \quad (1)$$

*Решение.* Применим метод математической индукции. При  $n=1$  имеем  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ . Запишем теперь доказываемое равенство при  $n=k+1$  и при  $n=k$ .

При  $n=k+1$ , получим

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} = \\ = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}. \end{aligned} \quad (2)$$

При  $n=k$ , получим

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k}. \quad (3)$$

Вычитая почленно эти два равенства, получим

$$\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1},$$

или

$$\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}.$$

Таким образом получили истинное равенство. Значит, если истинно равенство (3), то истинно и равенство (2), а поэтому в силу математической индукции тождество (1) справедливо при любом натуральном  $n$ .

*Задача 3.27.* Найти  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ .

*Решение.* Заметим, что  $S^{(4)}(x) - S(x) = 0$ . Решим данное дифференциальное уравнение при дополнительных условиях  $S(0) = 1$ ,  $S'(0) = 0$ ,  $S''(0) = 0$ ,  $S'''(0) = 0$ . Составим характеристическое уравнение  $\lambda^4 - 1 = 0$ . Отсюда находим, что

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0,$$

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}, y_3 = \cos x, y_4 = \sin x.$$

Тогда получим

$$S(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – произвольные постоянные, которые найдем из условий

Из дополнительных условий находим

$$S'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - C_3 \sin x + C_4 \cos x,$$

$$S''(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x,$$

$$S'''(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 \sin x - C_4 \cos x.$$

Тогда

$$S'(0) = C_1 - C_2 + C_4 = 0,$$

$$S''(0) = C_1 + C_2 - C_3 = 0,$$

$$S'''(0) = C_1 - C_2 - C_4 = 0.$$

Отсюда следует, что  $C_1 = \frac{1}{4}$ ,  $C_2 = \frac{1}{4}$ ,  $C_3 = \frac{1}{2}$ ,  $C_4 = 0$ .

Таким образом, получаем  $S(x) = \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x$ .

**Задача 3.28.** Доказать, что если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $a_n > 0$  сходится, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ ,  $p > 1$  также сходится. Верно ли обратное утверждение?

*Решение.* Так как  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Следовательно, начиная с некоторого номера  $N$ , все члены ряда удовлетворяют неравенству  $0 < a_n < 1$ , значит  $a_n^p < a_n$  и ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p$  сходится. Обратное утверждение неверно. Например, при  $p > 1$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  сходится, а при  $p = 1$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится.

**Задача 3.29.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \dots$$

*Решение.* Так как  $\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4}$ , то получим

$$\sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{4}} = 2 \sin \frac{\pi}{8},$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = 2 \sin \frac{\pi}{16},$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = 2 \sin \frac{\pi}{32}.$$

Продолжая до  $n$  члена ряда, получим  $a_n = 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$ . Так как  $\sin x < x$  при  $x > 0$ , то  $a_n = 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} < 2 \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n}$ . Таким образом, получили ряд

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

который является сходящимся, а, следовательно, исходный ряд также сходится.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих математических олимпиад по математике. – М.: Наука, 1987. – 207 с.
2. Сборник докладов семинара «Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе», Вып. 8. – СПб.: ТПП, 2006.
3. Методическое руководство для студенческих кружков. Составители: Беляков Л.М. и др. – Челябинск, 1976. – 108 с.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 2009. – 560 с.