10.38. В этой игре выигрывает тот, кто получит единицу. Побеждает первый. Выигрышными позициями являются нечётные числа.

10.39. В пункте а) выигрывает второй игрок, в пункте б) — первый. В этой игре выигрышными являются позиции, при которых в каждой кучке нечётное число спичек.

10.40. Выигрывает первый игрок. Занумеруем горизонтали и вертикали шахматной доски в естественном порядке. Координаты поля a1 — $(1,1)$, поля h8 — $(8,8)$. Выигрышными являются позиции, в которых король стоит на поле с чётными координатами. Первый ход — на поле b2.

−	−	+	+	−	−	+	+
−	−	+	+	−	−	+	+
−	−	−	−	−	−	−	−
−	−	−	−	−	−	−	−
−	−	+	+	−	−	+	+
−	−	+	+	−	−	+	+
−	−	−	−	−	−	−	−
−	−	−	−	−	−	−	−

К 10.41

−	−	−	−	−	−	−	+
−	−	−	−	−	+	−	−
−	−	−	−	−	−	+	−
−	−	+	−	−	−	−	−
+	−	−	−	−	−	−	−
−	−	−	−	+	−	−	−
−	−	−	−	−	−	−	−
−	−	−	+	−	−	−	−

К 10.42

10.41. Выигрывает второй игрок. Выигрышные позиции указаны на рисунке.

10.42. Пользуясь анализом с конца, можно получить выигрышные позиции (см. рис.). Выигрывает первый игрок, причём у него есть три варианта первого хода: на поля c5, e3, d1.

10.43. Пронумеруем вертикали (сверху вниз) и горизонтали (справа налево) шахматной доски числами от 0 до 7. Каждой позиции исходной игры сопоставим клетку, находящуюся на пересечении горизонтали с номером, равным числу камней в первой куче, и вертикали с номером, равным числу камней во второй куче. Ходу в первоначальной игре соответствует ход ферзя из 10.42, т. е. мы отождествили игру с 10.42.

10.44. Выигрывает первый. Расстановка плюсов и минусов после переформулировки в терминах клетчатой доски 12×12 (исходному положению соответствует левый нижний угол) показана на рисунке.

10.45. Так может играть первый: он ставит крестик в середину доски, а далее будет ставить крестики симметрично второму относительно этой клетки.

10.46. Эта задача является примером того, что геометрическая интерпретация необязательна для проведения анализа с конца. Здесь плюсами и минусами удобно помечать числа. Плюсом оказываются помечены числа, делящиеся на 10. Таким образом, выигрывает второй игрок.

+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+
−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	+
−	−	−	−	−	−	−	+	+	−	−	+
−	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−	+
+	+	+	+	+	+	−	−	+	−	−	+
−	−	−	−	+	+	−	−	+	−	−	+
−	−	−	−	−	+	−	−	+	−	−	+
+	+	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+
−	+	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+
−	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−	+

К 10.44

10.47. Анализируя с конца, находим выигрышные позиции. Это числа от 56 до 111 и от 4 до 6. Итак, выигрывает первый игрок (его первый ход — в 4, 5 или 6).

10.48. Анализируя с конца, находим выигрышные позиции:

$$500, 250, 125, 62, 31, 15, 7, 3.$$

Выигрывает первый игрок.

10.49. Анализируя с конца, находим выигрышные позиции — числа, делящиеся на 3. Выигрывает первый игрок, первым ходом он может, например, вычесть $1, 4, 16$.

10.50. Витя выигрывает. Лёша при первом своём ходе пишет натуральное число в пределах от 16 до 30. Вите в ответ лучше всего написать число 15. Далее Лёша пишет любое число в пределах от 8 до 14, а Вите следует написать число 7. Затем Лёша пишет число от 4 до 6, а Вите нужно написать число 3. Лёше остается написать только число 2, а Вите — 1.

10.51. Переформулируем пункты а) и б) в терминах шахматной доски. Игра а) оказывается тождественной игре из задачи 10.41. Расстановка плюсов и минусов в пункте б) такая же, как в пункте а) («+» с поля $a2$ и далее через одно). В обоих пунктах выигрывает первый игрок.

10.52. Выигрывает первый игрок. Выигрышными являются позиции с двумя нечётными кучками. Первый ход — съесть кучку из 21 конфеты и разделить кучку из 20 конфет на любые две нечётные кучки.

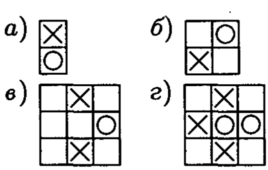
10.53. Выигрывает первый игрок. Выигрышные позиции — те, при которых в максимальной по количеству камней кучке остается $2^n - 1$ камень. Первый ход — первую и вторую кучки можно разбивать как угодно, а третью — на кучку из 63 камней и кучку из 7 камней.

10.54. Выигрывает первый игрок. Поскольку своим ходом он может взять $1, 2, \ldots, 5$ спичек, то второму игроку он всегда оставляет число спичек, кратное 6. Через конечное число ходов он оставит второму игроку ровно 6 спичек.

10.55. Выигрывает первый. Разобьём все целые числа, начиная с 2, на непересекающиеся пары вида $(2k, 2k+1)$. Тогда среди трёх чисел $n, n-1, n-2$ два образуют пару. Начинающий первым ходом фишку, стоящую на поле с тем номером, который не попал в пару, переставляет на поле с номером 1. На ход второго игрока первый ставит оставшуюся фишку на поле с номером, образующим соответствующую пару.

10.56. Если выигрывают чёрные, то белые, не меняя позиции, передают ход.

10.57. Пусть у ноликов есть выигрышная стратегия. Тогда этой стратегией могут воспользоваться крестики, игнорируя свой начальный знак.



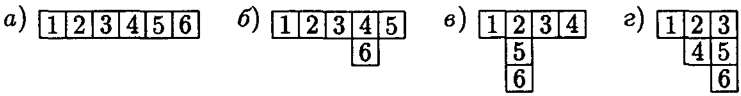
К 10.58

10.58. Начинающий должен поставить первый крестик не слишком близко к границе (не ближе чем на 7 клеток). Легко понять, что наилучший метод защиты для второго игрока состоит в том, чтобы поставить первый нулик по соседству с крестиком. Имеются две принципиально разные возможности (рис. *а* и *б*); прочие сводятся к изображённым поворотом листа. Разберём более трудный вариант, показанный на рис. *б*. Первый игрок ставит крестик, как это показано на рис. *в*. Если нулик не будет поставлен на поле между крестиками, то крестики выигрывают за два хода, поставив 4 знака по вертикали. Наилучший второй ход нуликов и ответ крестиков изображены на рис. *г*. Теперь крестики имеют две свободных «двойки» по диагоналям. Проигрыш нуликов неизбежен, нулики проигрывают максимум через 3 хода по одной из диагоналей.

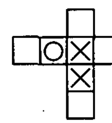
Случай на рис. *а* проще. Крестики выигрывают за пять ходов.

10.59. На доске из 7 клеток, показанной на рисунке, начинающий может выиграть, как бы ни играл его противник: сначала он ставит крестик на пересечении рядов, а затем на одну из средних клеток в ряду, на котором нет нуля.

При любом ходе противника первый может выиграть на третьем ходу. Если доска состоит не более чем из 6 клеток, то второй участник всегда может предотвратить победу первого. Докажем это. Будем называть тройкой три рядом стоящие клетки. На рис. *а* имеется четыре тройки: (1, 2, 3); (2, 3, 4); (3, 4, 5) и (4, 5, 6), а на рис. *г* — 3 тройки: (5, 2, 3); (3, 5, 6) и (1, 4, 6).



К 10.59



К 10.59

Чтобы предотвратить победу первого, второму достаточно поставить по одному нулику на каждую тройку. Если есть не более двух троек, то второй участник может двумя ходами «перекрыть» их. Пусть есть более двух троек. Если рядом стоит 5 или 6 клеток, то все тройки находятся в этом ряду (рис. *а* и *б*). Поставив нолик на третью от края клетку, второй оставляет только одну неперекрытую тройку, которую он может перекрыть вторым ходом. Если имеются 4 рядом стоящие клетки, то существует самое большее одна тройка, нестоящая в этом ряду (рис. *в*). Заняв одну из двух средних клеток ряда длины 4, второй участник перекрывает обе тройки, стоящие в этом ряду, а вторым своим ходом перекрывает оставшуюся тройку.

Остаётся случай, когда никакие четыре клетки не стоят в ряд (при этом 6 клеток могут содержать не более трёх троек). Если есть три тройки, то каждые две из них должны иметь общую клетку (рис. *г*) и есть три такие клетки, в которых пересекаются по две тройки. Поставив нолик на одну из этих клеток, второй участник первым же ходом перекроет две из этих троек, оставшуюся он перекроет вторым ходом.

10.60. Может. Если девочка берёт конфету из коробки, в которой лежит одна конфета, то мальчик берёт конфету из коробки, в которой больше одной конфеты. Если девочка берёт конфету из коробки, в которой ровно две конфеты, то мальчик берёт оставшуюся конфету из той же коробки. Если девочка берёт конфету из коробки, в которой больше двух конфет, то мальчик берёт конфету из коробки, в которой ровно одна конфета.

Доказательство того, что мальчик сможет сделать свой ход, ведётся по индукции. Будем доказывать его в такой форме: мальчик может сделать k ходов, и после его k-го хода число непустых коробок равно $(50 - k)$. База ($k = 0$) очевидна. Докажем переход. Если девочка взяла $(k + 1)$-м ходом конфету из коробки с одной конфетой, то на $50-k-1$ непустых коробок приходится $100-2k-1$ конфет. По принципу Дирихле, найдётся коробка с более чем одной конфетой. Если девочка взяла конфету из коробки с двумя конфетами, то переход очевиден. Если же она взяла конфету из коробки, в которой более двух конфет, то на $50-k$ непустых коробок приходится $100-2k-1$ конфет. Значит, найдётся коробка с одной конфетой.

10.61. Второй выигрывает при числе конфет $2, 4, 16, 32, 64, \ldots$, поскольку из не степени двойки всегда можно получить степень двойки, а из степени двойки (кроме числа 2) можно получить только не степень двойки. Итак, при 50 конфетах выигрывает первый.

10.62. Выиграет А. Самый северо-восточный квартал города будет освещён в любом случае после первого хода. Если у В есть выигрышная стратегия, то у неё есть выигрышный ответ на ход А, состоящий в освещении только северо-восточного квартала. Но этот же ход может сделать А и воспользоваться выигрышной стратегией В.

10.63. а) Выигрывает первый: первым ходом освещаем максимальный квадрат, не совпадающий с данным. Далее — симметричная стратегия. б) Выигрывает первый. Примените индукцию. Первый ход — в правую нижнюю угловую клетку. Далее первый может каждым ходом возвращать доску в состояние «прямоугольник без угловой клетки».

Замечание. Можно доказать, что для любого прямоугольника всегда выигрывает второй. Действительно, пусть второй имеет выигрышную стратегию. Заметим, что при любом начальном ходе правая нижняя клетка всегда освещается. Поэтому если 1-й первым ходом делает ход в правый нижний угол, то любой ход 2-го приведет к тому же результату, если бы 1-й до этого не ходил. Поэтому 1-й сможет теперь применить стратегию 2-го и выиграть. Полученное противоречие показывает, что выигрывает всегда первый (но явной стратегии из этого решения не извлечёшь).

10.64. Указание. Искусственная переборная задача. Выигрывает первый, сказав первым ходом 2 фразы (дальнейшее решение — перебор вариантов). Можно разобрать случаи с другим количеством фраз.

10.65. а) первый, брать 300; б) первый, брать 300 или 500; в) первый, 600; г) первый, 10; д) первый, 201; е) первый, 400; ж) ничья при $a+d=b+c$; иначе выигрывает первый: при $a+d>b+c$ брать d, при $a+d<b+c$ брать b.

10.66. Выигрывает второй. Если первый перекладывает из второй ямки в третью, то второй перекладывает из четвёртой в пятую, и наоборот. Далее второй выигрывает всегда. Если же первый перекладывает из первой ямки во вторую, то второй — из третьей в четвёртую, и наоборот. Далее второй перекладывает шарики только из чётных ямок.

10.67. Выигрывает первый. Сначала он вычёркивает 27, затем для любого $k \equiv i \pmod 5$ при $i \neq 0$, вычеркнутого вторым игроком, первый вычёркивает число, равное $5 - i \pmod 5$. Если второй вычёркивает число, равное $0 \pmod 5$, то первый только один раз вычёркивает число, равное $1 \pmod 5$, а затем на этот ход первый отвечает вычёркиванием числа, равного $0 \pmod 5$; так как $1 + \ldots + 26 = 1 \pmod 5$.

10.68. Сначала первый игрок вычёркивает 9 чисел от 47 до 55. Остальные числа разбиваются на две группы: от 1 до 46 и от 56 до 101. Для любого k, вычеркнутого вторым игроком, первый вычёркивает $|55 - k|$; разность оставшихся чисел равна 55.

10.69. Пусть сначала первый мудрец вычеркнет все нечётные числа, затем второй — все числа, большие 512 (их осталось 256), затем первый все числа, большие 256, и т. д. Тогда в итоге второй уплатит первому 32. Несложно доказать, что первый всегда может добиться разности не меньше 32, а второй — разности не больше 32.

10.70. Витя выигрывает: он выбирает центр какой-то клетки и отмечает точки симметрично точкам Лёши относительно этого центра. После 6 ходов Лёша может отмечать только узлы, расположенные в 6 треугольных областях, образованных каждой стороной шестиугольника и продолжениями соседних с ней сторон.

10.71. Выигрывает первый. Первый закрашивает квадрат $18 \times \times 18$, примыкающий к большей стороне прямоугольника, так, чтобы ось симметрии квадрата и ось симметрии прямоугольника совпали. Тогда относительно этой общей оси остаток прямоугольника распадётся на две одинаковые части. Теперь на каждый ход второго игрока первый отвечает симметричным ходом, причём у первого игрока ход всегда найдется, так как второй не может закрасить квадрат, пересекающий ось симметрии.

10.72. Да. Приведем стратегию второго игрока. Первые 1000 ходов он пропускает. Ход с номером $n > 1000$ он делает так:

1) если на n-м и $(2000-n)$-м местах стоят одинаковые буквы — ничего не делает;

2) если на этих местах — разные буквы, то одна из них не совпадает с той, которая стоит на 1000-м месте. Второй игрок меняет её с 1000-й буквой.

10.73. Разобьём доску на четыре части по две вертикали в каждой. Пусть чёрные в ответ на ход белых в какой-либо части делают ход в той же части. Тогда, если чёрные лишат белых возможности ходить в каждой из частей, то белые не смогут ходить вообще. Итак, достаточно описать выигрышную стратегию чёрных для случая, когда игра происходит в пределах двух вертикалей. Если белые передвигают свою фишку на k клеток вперёд, то чёрные передвигают свою фишку, стоящую в другой вертикали, на k клеток вперёд. Если же белые передвигают свою фишку на k клеток назад, то чёрные передвигают свою фишку, стоящую в той же вертикали, на k клеток вперёд. Тогда после каждого хода чёрных расстояния между фишками, стоящими в одной вертикали, и фишками, стоящими в другой вертикали, становятся одинаковыми. Поэтому на любой ход белых чёрные имеют ответный ход, а, значит, чёрные не могут проиграть. Так как чёрные ходят только вперёд, то игра закончится через конечное число ходов.

10.74. Докажем, что хотя бы одна из граней данного многоугольника не является треугольником. Пусть, напротив, все его n граней — треугольники. Тогда у этого многогранника $3n/2$ рёбер (ибо каждое из трёх рёбер любой грани принадлежит одновременно двум граням) и n вершин (ибо каждая из трёх вершин любой грани принадлежит одновременно трём граням). По формуле Эйлера имеем $n+n-3n/2=2$, т. е. $n=4$, что противоречит условию задачи. Первый игрок, чтобы выиграть, должен первым ходом занять грань A_1, не являющуюся треугольником. Вторым ходом он должен занять свободную грань A_2, прилежащую к грани A_1 и имеющую общие ребра с двумя свободными гранями A_3, A_4, также прилежащим к грани A_1 (это можно сделать, поскольку второй игрок мог занять лишь одну грань, прилежащую к грани A_1). Наконец, третьим ходом он может занять одну из граней A_3 или A_4, не занятую вторым игроком. Итак, первый игрок выигрывает на третьем ходу.

10.75. Пусть $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_9$ — числа, написанные на карточках. Если $a_1+a_9 > a_2+a_8$, то первый ставит число a_9 в клетку 2 (см. рис.), а вторым своим ходом — число a_2 (или a_1) в одну из клеток 1 или 4. Если $a_1+a_9 < a_2+a_8$, то первый ставит число a_1 в клетку 2, а вторым своим ходом — число a_9 (или a_8) в одну из клеток 1 или 4. Если $a_1+a_9 = a_2+a_8$, то первый может применить любую из описанных выше стратегий (при правильной игре второго результат игры в этом случае — ничья).

10.76. 30. Опишем стратегию второго игрока, которая обеспечит ему такую сумму. Разобьём все числа на пары: $(1,2)$; $(3,4), \ldots, (19,20)$. Каждый раз, когда первый ставит какой-нибудь знак перед одним из чисел, кроме 19 и 20, второй должен ставить противоположный знак перед числом той же пары. Как только первый ставит какой-нибудь знак перед числом последней пары, второй ставит тот же знак перед другим из этих чисел. Ясно, что окончательная сумма по модулю будет не меньше чем $19 + 20 - 1 - 1 - \ldots - 1$(9 единиц) $= 30$.

	1	
2		3
	4	

К 10.75

Докажем, что первый может не позволить второму выбрать больше 30, если будет при каждом своём ходе ставить перед наибольшим из оставшихся чисел знак, противоположный знаку имеющейся к этому моменту суммы (если сумма равна 0, то ставится плюс). Рассмотрим некоторую партию. Пусть k-й ход — последний, в результате которого сумма меняет знак (включая ходы, перед которыми сумма равна 0). За первые $k-1$ ходов будут заведомо использованы числа $20, \ldots, 20-(k-1)$. Так как максимальная по модулю сумма, которая может получиться после k-го хода $20-(k-1)+20-k = 41-2k$. За каждый из следующих $10-k$ ходов сумма уменьшается по крайней мере на 1, так как первый каждый раз вычитает из модуля суммы наибольшее из оставшихся чисел m, а второй не может добавить к нему больше $m-1$. Итак, в результате сумма будет не более $41-2k-(10-k) = 31-k \leqslant 30$.

10.77. а) Если n чётно, то всю доску можно разбить на прямоугольники размером 1×2 («домино»). Начинающий всегда будет иметь возможность сделать ход (и тем самым выиграет), если он будет следовать такой стратегии: если фишка стоит на одной из клеток какого-то домино, то он ставит её на вторую клетку того же домино («закрывает» домино).

б) Всегда выигрывает начинающий. При чётном n стратегия та же, что и в а). При нечётном n нужно снова разбить на домино все клетки, кроме угловой; раскрасив доску в шахматном порядке, легко убедиться, что на угловую клетку второй никогда пойти не сможет, поэтому первый выигрывает, следуя той же стратегии.

10.78. а) Пусть $m \geqslant 2n$. Покажем, что первый игрок может сделать в позиции (m,n) такой ход, что полученная позиция станет (для второго игрока) проигрышной. Если позиция $(m-n,m)$ — проигрышная, то искомый ход: $(m,n) \to (m-n,m)$.

Если же эта позиция выигрышная, то в ней существует ход, превращающий её в проигрышную. Поскольку $m - n \geqslant n$, этот ход имеет вид $(m-n, n) \to (m-kn, n)$, где k — некоторое натуральное число. Но тогда искомый выигрышный ход первого игрока: $(m, n) \to (m-kn, n)$. Отметим, что здесь удается доказать, что позиция (m, n) при $m \geqslant 2n$ выигрышная, не предъявляя в явном виде выигрывающей стратегии.

б) При $a \geqslant (1+\sqrt{5})/2$. Каждой позиции (m, n), где $m \geqslant n$, поставим в соответствие точку $x = m/n \geqslant 1$ на числовой оси. При каждом ходе точка x смещается на некоторое целое число k влево; если она попадает в отрезок $0 < x < 1$, то заменяется на обратную: $x \to 1/x$, попадание в 0 — проигрыш. Отметим на оси отрезок $[1/t; t]$ длины 1; $t - 1/t = 1$ при $t = (1+\sqrt{5})/2$. Точки $x = m/n$, лежащие внутри этого отрезка, соответствуют проигрышным позициям, правее него — выигрышным; в самом деле, из такой точки можно очередным (выигрывающим!) ходом попасть в этот отрезок; если $1 < x < t$, то очередной ход выводит из отрезка, а если $x = 1$, то ведет к проигрышу. Поскольку наибольшее число спичек в коробках уменьшается, через несколько ходов игра обязательно закончится.

10.79. Среди 8 чисел найдутся три, не превосходящие $1/6$, причём два из них будут стоять на концах диагонали одной из граней — её и надо выбрать первому.

10.80. а) Выигрышная стратегия для первого игрока: вначале он пишет число 6, после чего второй может написать одно из чисел 4, 5, 7, 8, 9, 10. Разбивая их на пары, первый игрок на ход второго пишет соответствующее парное число.

б) Докажем, что первый имеет выигрышную стратегию при любом значении p.

Рассмотрим новую игру — с теми же правилами, но с одним ограничением: запрещается выписывать на доске число 1 (ясно, что только первый и только первым ходом может написать 1). Если в этой новой игре у первого есть выигрышная стратегия, то она годится и в исходной игре. Если же в новой игре у первого выигрышной стратегии нет, то он в исходной игре может первым ходом написать 1 и тем самым превратить исходную игру в новую с той лишь разницей, что в этой новой игре начинающим будет второй игрок, у которого не будет выигрышной стратегии.

10.81. Выигрывает второй игрок. В начале партии он должен стирать числа, кратные 2 до тех пор, пока таковых не останется. Так как количество чисел, не превосходящих 1000 и кратных 3, равно 333, то второму понадобится не более 333 ходов для того, чтобы ни одно из оставшихся на доске чисел не делилось на 3 (некоторые из чисел, кратных 3, могут быть стёрты и первым игроком). После этого второй делает свои ходы произвольно до того момента, когда на доске останутся три числа. Каждое из них будет давать остаток 1 или 2 при делении на 3, поэтому среди трёх оставшихся на доске чисел обязательно найдутся два, дающие одинаковые остатки. Именно их он и должен оставить.

10.82. Пусть первый игрок называет числа a, b и с. Даже если он выберет их целыми, корни квадратного уравнения могут оказаться иррациональными или даже совсем не существовать. Поэтому ему следует взять числа a, b и c так, чтобы выполнялось равенство $a+b+c=0$: тогда квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ (и все остальные уравнения с теми же коэффициентами, но расположенными в ином порядке) всегда имеет корень $x_1=1$, а также корень $x_2=c/a$, если $a\neq 0$. Для того чтобы корни этого уравнения получились разными, нужно выбрать числа a, b и с так, чтобы они были не равными 0 и такими, чтобы отношение любых двух из них было отличным от 1.

Значит, первый игрок выиграет, если он назовет любые три рациональных числа a, b и с, не равных нулю, попарно различных и таких, что $a+b+c=0$.

10.83. Он должен вписать любое число вместо какой-либо звёздочки во втором равенстве. Далее, если второй игрок вписывает число вместо любой звёздочки в каком-нибудь равенстве, он должен вписать число в то же равенство, причём если вписываемое число — последнее в данном равенстве, его надо подобрать так, чтобы равенство выполнялось.

10.84. Если первый игрок поставит -1 перед x в первой степени, а при втором своём ходе он поставит на последнее оставшееся место число, противоположное тому, которое поставил второй, то получится многочлен вида $x^3-ax^2-x+a=(x^2-1)(x-a)$. Корни этого многочлена: -1, 1, a — целые числа.

10.85. У второго есть выигрыш. За свои четыре хода он заведомо сможет добиться, чтобы оставшаяся для последнего, 5-го хода первого звёздочка стояла при нечётной степени x^{2l+1}. Пусть перед последним 4-м ходом второго возник многочлен $P(x)+*x^m+$ $+*x^{2l+1}$, где $P(x)$ — известный многочлен с числовыми коэффициентами.

Подберём числа a и $c>0$ так, чтобы при любом значении b для многочлена $F(x)=P(x)+ax^m+bx^{2l+1}$ было $cF(l)+F(-2)=0$

(тогда $F(x)$ будет заведомо иметь корень на отрезке $[-2;1]$); для этого достаточно взять

$$c = 2^{2l+1}, \qquad a = \frac{P(-2) - cP(1)}{c + (-2)^m},$$

(конечно, роли 1 и -2 могли бы играть здесь и другие числа разных знаков). Поставив это значение на 4-м ходу, второй обеспечит наличие корня.

10.86. Обозначим четыре разряда (слева направо) через r_1, r_2, r_3, r_4. Игра распадается на две фазы: «дебют» и «эндшпиль» вторая фаза начинается, как только 2-й игрок поставит некоторую цифру в старший разряд r_1. Ясно, что в дебюте 1-й игрок не должен называть маленьких цифр (от 0 до 3) или больших (от 6 до 9), поскольку второй, помещая такую цифру в r_1 (маленькую — в первое число, большую — во второе), переходит в заведомо выигрышный эндшпиль если разность первых цифр не больше 3, то разность чисел не больше 3999. Впрочем, если первый назвал первой цифру 4 (или 5), то второй может добиться разности, не меньшей 4000, сразу перейдя в эндшпиль ходом $r_1 = \binom{4}{*}$ или $r_1 = \binom{*}{5}$, а затем все появляющиеся цифры 0 (соответственно 9) помещая в разряды r_2, r_3, r_4, пока они не заполнятся; естественно, первая же цифра — не 0 (не 9) — будет поставлена в r_1 (что приведет к разности, не превосходящей 3999), и под этой угрозой первый не сможет добиться лучшей финальной позиции, чем $4000 - 0000$ $(9999 - 5999)$. Мы предъявили стратегию второго, доказывающую утверждение а).

Но не может ли он добиться большего, в дебюте расставив в разрядах r_2–r_4 некоторые цифры 4 и 5 и в удачный для себя момент перейдя в эндшпиль? Чтобы помешать этому, первый должен следить за тем разрядом r_i с наименьшим i, в котором стоят цифра и звёздочка либо две разные цифры.

Если $r_i = \binom{*}{4}$ или $r_i = \binom{*}{5}$, он называет цифру 5, если $r_i = \binom{4}{*}$ или $r_i = \binom{5}{*}$ — цифру 4, а позиция с $\binom{4}{*}$ при такой стратегии первого не может получиться. После перехода в эндшпиль из такого дебюта первый может называть нули (если в r_1 цифра поставлена в верхнее число) или девятки (если в нижнее). Утверждение пункта б) доказано.

Можно доказать, что при любом числе разрядов $n > 0$ в такой игре её «цена» — разность, которая получается при наилучшей игре обоих, — равна $4 \cdot 10^{n-1}$.

10.87. Существует. Например, первым ходом игрок А выбирает значение $b = -1$. При любом ходе Б оставшийся ход А делает так, чтобы $4c + a = 0$. Покажем, что для любого a уравнение $x^3 + ax^2 - x - a/4 = 0$ имеет три разных корня. Обозначим левую часть через $f(x)$. Тогда $f(-\infty) = -\infty$, $f(-1/2) = 3/8 > 0$, $f(1/2) = -3/8 < 0$, $f(+\infty) = +\infty$. Ввиду непрерывности $f(x)$, уравнение имеет три разных корня.

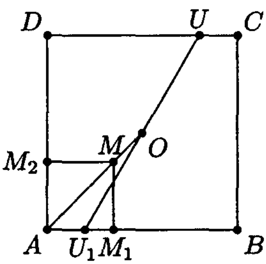
10.88. Выигрывает первый игрок. Опишем его выигрышную стратегию. Вначале он выкладывает на стол $0 : 0$, II отвечает $0 : a$, тогда I выкладывает кость $a : a$. Теперь II делает ход либо $0 : n$, либо $a : n$. В первом случае I выкладывает кость $n : a$, во втором — $n : 0$. Тогда после хода I игрока на концах цепочки будут 0 или a. Это же произойдёт после того, как на ход II игрока $0 : m$ $(a : m)$ I ответит $m : a$ $(m : 0)$. Кости вида $0 : n$ и $a : n$ $(n \neq 0, a)$ разбиваются на пары, поэтому последний ход останется за первым игроком.

10.89. Докажем, что выигрывает Петя. Мысленно разобьём контакты на четыре одинаковых группы A, B, C и D. В каждой группе пронумеруем контакты числами от 1 до 500. Петя будет отвечать на любой ход Васи так, чтобы для каждого номера k от контактов A_k, B_k, C_k и D_k отходило поровну проводов. До начала игры это условие, очевидно, выполняется. Именно благодаря этому условию у Пети всегда будет возможность ответить на ход Васи. Теперь подробнее опишем Петину стратегию. Если Вася перерезает провод между контактами одной группы, например, провод A_iA_j, то Петя перережет провода B_jB_j, C_iC_j и D_jD_j. Если Вася перерезает провод между проводами из разных групп и с разными номерами, например, провод A_iB_j, то Петя в ответ перережет провода A_jB_i, C_iD_j и C_jD_i. Если же Вася перерезал провод между контактами из разных групп с одинаковыми номерами, например, провод A_kB_k, то Петя перережет провод C_kD_k. Заметим, что из описанной стратегии Пети следует, что провода, которые он собирается резать, не будут отрезаны до его хода.

Такие ходы Петя может сделать, так как из возможности отрезать один провод от некоторого контакта следует возможность отрезать по одному проводу от контактов с таким же номером. Отметим, что каждый раз после хода Пети от контактов A_k, B_k, C_k и D_k отходит поровну проводов. Значит, Петя всегда сможет сделать ход, и, так как количество проводов конечно, проиграет Вася.

Игры-преследования

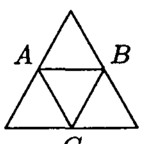
10.90. Покажем, что ученик может убежать от учителя. Обозначим квадрат пруда $ABCD$, его центр O, положение ученика в любой момент точкой M, а учителя — точкой U. Пусть учитель подошёл к точке C, M_1 и M_2 — проекции точки M на стороны AB и AD соответственно, U_1 — точка, симметричная точке U относительно центра O пруда (см. рис.).



К 10.90

Ученик должен плыть по направлению к вершине A до тех пор, пока точка U_1 остается внутри угла M_1MM_2. Как только точка U_1 совпадает с одной из точек M_1 или M_2, ученик поворачивает в направлении этой точки. Чтобы доплыть до берега, ему надо проплыть меньше половины длины квадрата. Учителю же надо пробежать половину периметра квадрата. Значит, путь учителя более чем в 4 раза длиннее, чем путь ученика.

10.91. Сторожа поймают обезьяну, если примут следующий план. Вначале они должны занять вершины A и B (см. рис.); очевидно, можно считать, что обезьяна находится в нижней части рисунка. Теперь один сторож должен спускаться вдоль AC, а второй — контролировать отреэок AB, чтобы обезьяна не проскочила через A или B. Дальнейшее просто.



К 10.91

10.92. Пусть v — максимальная скорость волка. Проведем через точку, в которой находится волк, две прямые, параллельные диагоналям квадрата. Эти прямые в точках C_1, C_2, C_3, C_4 пересекают контур квадрата. Так как скорость перемещения каждой из точек $C_1, \ldots, C_4$ не больше чем $v\sqrt{2} < 3v/2$, то собаки смогут в каждый момент находиться в этих четырёх точках и, значит, не выпустят волка.

10.93. Занумеруем проспекты от 1 до 10 сверху вниз. Пусть первый полицейский находится на первым перекрёстке, второй — на втором, а гангстер находится на верхней полосе. Тогда первый полицейский, пройдя по своему проспекту не более 100 кварталов, обнаружит гангстера. Если же этого не произошло, то, значит, гангстер находится не в первой полосе и полицейские могут спуститься на одну полосу вниз. Контролируя вторую и третью полосы, они гарантируют, что гангстер не попадет на первую полосу. Действуя, как и раньше, и опускаясь каждый раз (если это нужно) на одну полосу вниз, полицейские в какой-то момент обнаружат гангстера.

10.94. Может. Для этого заяц сначала выбирает произвольную вершину A квадрата и бежит к ней по диагонали с максимальной скоростью до тех пор, пока не окажется на расстоянии, меньшем $(\sqrt{2} - 1{,}4)/2$ (сторону квадрата полагаем равной 1). Затем он, не меняя скорости, сворачивает на 90° и движется перпендикулярно диагонали к той стороне квадрата, на которой находится только один волк (если в этот момент волк находится в вершине A, то заяц сворачивает в любую сторону). Нетрудно видеть, что в момент, когда заяц пересечёт сторону квадрата, ни один волк не сможет оказаться в той же точке этой стороны.

Заметим, что если скорость волка в $\sqrt{2}$ раз больше скорости зайца, то волки ловят зайца.

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

11. ДЕЛИМОСТЬ

11.1. Разложение на множители. Простые и составные числа

11.2. Среди чисел есть числа, кратные 3, 5 и два чётных, одно из них делится на 4.

11.3. Если $n = 2k$, то $n^3 - 4n = 8(k-1)k(k+1)$, а $(k-1)k(k+1)$ делится на 6 по 11.1.

11.4. $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11(a + b)$.

11.5. $n^6 - n^4 - n^2 + 1 = (n^2 - 1)^2(n + 1)$.

11.6. 15 руб. Цена лыж делится на 3 и на 5.

11.7. 1, 2, 3, 7. **11.8.** -1, 1, -2, 2. **11.9.** $2, 2^2, \ldots, 2^k$.

11.10. $\overline{ababab} = 10101(10a + b) = 37 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot (10a + b)$.

11.11. а) 4; б) 6; в) 9; г) $(n + 1)(m + 1)$.

11.12. Если n разлагается в произведение двух сомножителей, то меньший не больше $\sqrt{n}$. При $n = 1601$ меньший сомножитель меньше 40, значит, простой делитель не превосходит 37.

11.13. а) $p - 1$; б) $p^2 - p$.

11.14. Каждому делителю d соответствует делитель n/d, поэтому число делителей, отличных от $\sqrt{n}$, всегда чётное число.

11.15. При $n \neq m^2$ меньших делителей меньше $\sqrt{n}$, а всех делителей меньше $2\sqrt{n}$, при $n = m^2$ меньших делителей меньше $\sqrt{n} - 1$, а всех — меньше $2\sqrt{n} - 1$.

11.16. а) $1, \ldots, 1, 2, \ldots, 2, 4, 5, 6$ (89 единиц, 8 двоек). Их сумма 120. б) 1, $2^2, \ldots, 2^{97}, 2^{99}$, 3, $3 \cdot 2^{98}$. Их сумма $3 \cdot 2^{99}$.

11.17. Среди $n+1, \ldots, 2n$ заведомо есть числа, кратные каждому k, где $1 \leqslant k \leqslant n$.

11.18. Если q_i — делитель числа n, то $n = q_i p_i$, где p_i — тоже делитель. Пусть $q_1 < \ldots < q_s$ — все делители n, тогда $p_1 > \ldots > p_s$ — те же делители, но в обратном порядке.

11.19. Число слева не делится на 11, а справа — делится.

11.20. $990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, поэтому $n = 11$.

11.21. Нет, так как в 24! — 4 нуля, а в 25! уже 6 нулей.

11.22. 24. Рассмотреть степень 5 в разложении 100! на простые множители.

11.23. Если в разложение n на простые множители входит 3, то в разложение n^2 входит 9.

11.24. Если разность $a^2 - b^2$ чётна, то чётны $a - b$ и $a + b$, значит, $a^2 - b^2$ делится на 4, а 1998 не делится на 4.

11.25. $4 + 7a = 7(a + 1) - 3$, $a + b = 2 + a - (35 - b) + 33$.

11.26. На 11 делится $(a^2 + 9ab + b^2) - 11ab = (a - b)^2$, поэтому $a - b$ делится на 11, но $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

11.27. $n^2 + 9n - 2$ делится на $n + 11$, значит, на $n + 11$ делится также $(n^2 + 9n - 2) - (n - 2)(n + 11) = 20$. Отсюда, $n + 11 \leqslant 20$, т. е. $n \leqslant 9$. Мальчиков меньше.

11.28. Пусть это число равно $10a + b$, тогда его квадрат равен $10(10a^2+2ab)+b^2$. Число $10a^2+2ab$ чётно, значит, $b^2 = 10(2k+1)+d$, что возможно лишь при $b = 4$ или $b = 6$.

11.29. 17 и 34, 13 и 52. Пусть a и b — двузначные числа, тогда $100a + b = kab$ или $b = a(kb - 100)$, т. е. b делится на a. Полагая $b = ma$, получим $100 = m(ka-1)$. Так как m однозначно и является делителем 100, то $m = 1, 2, 4, 5$, но $m = 1$ и $m = 5$ не подходят.

11.30. Пусть $N = \overline{xa}$, где a — последняя цифра N. Тогда $N = 10x + a$, $N_1 = 10x + 2a = 2(10x + 2a) - 19x$.

11.31. 27. Если некоторое p^k входит в разложение N на простые множители, то k должно быть кратно 3.

11.32. 1 933 096.

11.33. 10^n, $5^3 \cdot 10^n$. Указание. Все A_i должны иметь вид $2^{n_i}5^{m_i}$. При $n_0 > m_0$ нет решений, что следует из $S(A) \leqslant A$ и индукции. При $n_0 < m_0$ из $S(5^n) < 2^{n-3}$ при $n \geqslant 10$ и индукции следует $A_{k-1} = 5^3 \cdot 10^l = A_0$.

11.34. Пусть $N = 100x + 10y + z$ и $x + y + z = 7$. Тогда $N = 7A + (y - z)$, откуда $y = z$.

11.35. Пусть $x = p/q$, если $p/q+q/p = n$, то p^2 должно делиться на q, откуда $q = \pm 1$.

11.36. Из $b^2 - 4ac = 23$ следует $(b-5)(b+5) = 2(2ac-1)$. Но $b-5$ и $b + 5$ — числа одинаковой чётности, поэтому их произведение, если оно чётно, делится на 4, а правая часть — чётное число, не делящееся на 4.

11.37. Рассмотрим 5 чисел последовательности: a, b, c, d, e причём b и e — чётные, a, c, d — нечётные. Имеем $e = cd + 1 = ab^2c + b(a + c) + 2$. Число ab^2c делится на 4 (т. к. b чётно), $b(a + c)$ тоже делится на 4, а e не делится на 4.

11.38. Нельзя. Площадь грани $2^{10} \times 3^{10}$ не кратна 5, а площади граней кирпичиков кратны 5.

11.39. $1+2+2^2+\ldots+2^{1990} = (1+2)+2^2(1+2)+\ldots+2^{1988}(1+2) + 2^{1990} = 3(1+2^2+\ldots+2^{1988}) + 2^{1990}$.

11.40. Нет. $1986 = 12 \cdot 331$. Цифры не делятся на 331.

11.41. Пусть $n(n+1)\ldots(n+99) = k^{100}$. Число k входит множителем в левую часть, но k и $k+1$ взаимно просты (их общий делитель является делителем $k+1-k=1$).

11.42. 108. По индукции можно показать, что число не может иметь более трёх знаков ($10^{n-1} > 12 \cdot 9n$ при $n > 3$). Осталось решить уравнение $100x + 10y + z = 12(x+y+z)$.

11.43. $n^2+3n+5 = (n-7)(n+4)+33$. Если число делится на 11, то $(n-7)(n+4)$ делится на 11, но $n-7 = (n+4)-11$, значит, $(n-7)(n+4)$ делится на 121, а 33 на 121 не делится.

Простые и составные числа

11.44. Пусть $p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, $a > b$, $c > d$, $a > c$, $a \neq c$. Число p^2 можно записать двумя способами: $p^2 = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2 = (ad+bc)^2 + (ac-bd)^2$. Так как $(ac+bd)(ad+bc) = p(ab+cd)$, то $ac+bd$ или $ad+bc$ делится на p. Если $ac+bd$ делится на p, то из левого равенства для p^2 следует, что $ad = bc$. Так как $a > c$, то должно быть $b > d$, а тогда $a^2 + b^2 > c^2 + d^2$. Аналогично рассматривается случай, когда $ad+bc$ делится на p.

11.45. $a+(a+2)+\ldots+(a+2(n-1)) = na+2(1+2+\ldots+(n-1)) = na + n(n-1) = n(a+n-1)$.

11.46. $65(a+b) = 65a + 65b = 65a + 56a = 121a$. Но 65 и 121 взаимно просты, значит $a+b$ делится на $121 = 11 \cdot 11$.

11.47. Из A можно получить любое чётное (кроме 2) число, прибавляя 2. Пусть $B = pn$, где p — простое, $n > 1$. Из A получим $2p$, затем прибавляем $n-2$ раза p.

11.48. а) $1998!+1$. б) Доказательство будем вести индукцией по количеству чисел. При $n=1$ возьмём любой квадрат, больший 1. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ такие числа, что они имеют делители s_i — полные квадраты, большие 1 и $a_i = a_1+i-1$. Рассмотрим $a_{n+1} = a_1+n$, $l = s_1 \ldots s_n$ и $A = l(l+2)a_{n+1}$, тогда $A+a_1, \ldots, A+a_{n+1}$ — искомая последовательность: $A + a_{n+1} = a_{n+1}(l+1)^2$ делится на квадрат. в) Аналогично б), $A = a_{n+1}((l+1)^m - 1)$.

11.49. Да. Перемножим нечётные числа от 1001 до 1999. Так как их 500 и каждое из них меньше 2000, то их произведение меньше $2000^{500} = 32^{100} \cdot 10^{1500} < 100^{100} \cdot 10^{1500} = 10^{1700}$. Припишем к этому числу справа несколько нулей, а затем цифру 1 и ещё три 0 так, чтобы общее число цифр равнялось 1997. Если в полученном числе не менять последнюю цифру, то число будет чётным, а значит, составным. Если изменить последние три 0 на нечётное число, то последние 4 цифры образуют число, на которое делится построенное число.

11.50. Доказательство от противного. Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — все простые числа. Рассмотрим число $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Это число не делится ни на одно из чисел $p_1, \ldots, p_n$ (т. к. оно даёт при делении на них остаток 1) и, значит, является ещё одним простым.

11.51. б) $n^4 + 4m^4 = (n^2 + 2m^2)^2 - (2mn)^2$.

11.52. $3551 = 60^2 - 7^2$.

11.53–11.55. Сумма и разность кубов.

11.56. Множитель 111^{222}.

11.57. $1977 \cdot 1997 + 100 = (1987 - 10)(1987 + 10) + 100 = 1987^2$.

11.58. При $n = 2m$

$$7\overbrace{1\ldots1}^{2m} = \frac{7\overbrace{1\ldots1}^{2m} \cdot 9}{9} = \frac{63\overbrace{9\ldots9}^{2m}}{9} = \frac{8\overbrace{0\ldots0}^{m}{}^2 - 1^2}{9} =$$

$$= \frac{8\overbrace{0\ldots0}^{m}1 \cdot 7\overbrace{9\ldots9}^{m}}{9} = \overbrace{8\ldots8}^{m}9 \cdot 7\overbrace{9\ldots9}^{m}.$$

Если $n = 6m+5$, то число делится на 3 (т. к. его сумма цифр числа делится на 3), если $n = 6m+3$, то число $71\ldots1$ делится на 13 (711 и 111111 делятся на 13), если $n = 6m+1$, то число $11171\ldots1$ делится на 7 (111111 и 1117111 делятся на 7).

11.59. а) Если $n = pm$ и $p \neq m$, то очевидно. Если $p = m$, то $n = p^2 > 4$ или $p > 2$, откуда $n = p^2 > 2p$. Тогда в $(n-1)!$ есть два разных члена p и $2p$. б) Числа p и m не превосходят $n - 3$ (иначе, если, например, $p > n - 3$, то так как $m \geqslant 2$, получим $n = pm > 2(n - 3)$ или $n < 6$. в) Нет. $(n - 4)!$ не делится на n при $n = 6$ или $n = 9$.

11.60. Если $(p - 1)! + 1$ делится на p, то p — не составное (см. 11.59). Пусть p — простое, a — какой-то остаток, тогда $a, 2a, \ldots, (p - 1)a$ все различны по модулю p. ($k_1a - k_2a$ не может делиться на p). Значит, есть такое k, что $ka \equiv 1 \pmod p$. Отметим, что $k \neq a$ при $a \neq 1$, $a \neq p - 1$, иначе $k^2 \equiv 1 \pmod p$ или $(k - 1)(k + 1)$ делится на p, что невозможно. Итак, все остатки в произведении $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1)$, кроме 1 и $p-1$ разбиваются на пары взаимно обратных, т. е.

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1) \equiv 1 \cdot (2 \cdot 2^{-1}) \cdot (3 \cdot 3^{-1}) \cdot \ldots \cdot (p-1) \equiv p-1 \equiv -1 \pmod p.$$

Следовательно, $(p-1)!+1$ делится на p.

11.61. Неверно, при $n=6$ число $6^3+5\cdot 6-1$ равно $5\cdot 7^2$.

11.62. Если свободный член a многочлена не равен $0, \pm 1$, то значения $F(ka)$ при целых k делятся на a. Если $a=\pm 1$, то можно заменой $n=m+l$ «сдвинуть» многочлен так, чтобы у $F(m+l)$ свободный член стал бы неравным ± 1. Например, в 11.61 положим $n=m+1$, тогда $F(m+1)=(m+1)^3+5(m+1)-1$ свободный член равен 5, и поэтому $F(6)$ делится на 5.

11.63. а) $n=3m$. Пусть $n=3m$, тогда $2^n-1=8^m-1$ делится на $8-1=7$. При $n=3m+1$ имеем $2^n-1=2(7+1)^n-1\equiv 1$ (mod 7), при $n=3m+2$ имеем $2^n-1=4(7+1)^m-1\equiv 3$ (mod 7). б) Рассматривается аналогично п. а).

11.64. $2^n\sqrt{2}=[2^n\sqrt{2}]+a$, где $0<a<1$. Если $a<1/2$, то $[2^{n+1}\sqrt{2}]$ — чётное число. Если $a>1/2$, то $2^{n+1}\sqrt{2}=2[2^n\sqrt{2}]+2a$ и $2^{n+1}\sqrt{2}$ — нечётное число, причём $\{2a\}<\{a\}$ ($\{x\}$ — дробная часть x). Умножая $2^n\sqrt{2}$ на последовательные степени 2, будем уменьшать дробную часть результата, пока эта дробная часть не станет меньше $1/2$.

11.65. Обозначим $10^{2^{1000}}$ через a, а $2^{974}+1$ — через n. Тогда наше число a^n+1 и оно кратно $a+1$.

11.66. Два из чисел — одной чётности, например, a и b. тогда p — чётное, но оно и простое, значит, $p=2$, $a=b=1$, $q=r$.

11.67. б) Если $a=1^{2m+1}+2^{2m+1}+\ldots+n^{2m+1}$, то достаточно доказать, что a делится на $n(n+1)/2$ (т. е. $2a$ делится на n и $n+1$). Суммируя попарно крайние члены, легко видеть, что $2a$ делится на $n+1$, а затем, отбрасывая член n^n и суммируя таким же образом оставшуюся сумму, покажем, что a делится на n.

11.68. $n=1,4$ и вида $n=4k+2$. Если $x^2-y^2=n^2$, то $x-y$ и $x+y$ имеют одинаковую чётность и n либо делится на 4, либо имеет вид $4k\pm 1$. Обратно: при $n=4k$ имеем $x=k+1$, $y=k-1$, если $n=4k\pm 1=2m+1$, то $x=m+1, y=m$.

11.69. Разность двух соседних чисел равна $9010\ldots 0$, т. е. делится на 53 и первое число делится на 53.

11.70. Числа a, b, c можно сокращать на общий множитель, поэтому считаем НОД$(a,b,c)=1$. Если при этом среди чисел a, b, c есть число, отличное от ± 1, то найдется простое p, делящее одно из этих чисел и не делящее другое. Покажем, что p входит в знаменатель одной из несократимых дробей $m = a/b + b/c + c/a$ или $n = a/c + c/b + b/a$. Тогда это число не может быть целым. Пусть $k(x)$ — максимальная степень p в разложении x на простые множители. Считаем, что $k(a)$ максимальна, тогда $k(a) > 0$. Возможны два случая: $k(a) \geqslant k(b) \geqslant k(c) = 0$ или $k(a) \geqslant k(c) \geqslant k(b) = 0$. В первом случае m — сумма двух дробей со знаменателями, не делящимися на p, и несократимой дроби со знаменателем, делящимся на p. Получаем, что знаменатель m делится на m, т. е. m нецелое. Аналогично, во втором случае n не будет целым.

11.71. Будем искать делитель данного числа в виде $3^k - 2^k$. Положим $k = 2k$, $n = 3^{2^t} - 2^{2^t}$, где $t > 2$. Воспользуемся тем, что при натуральном k и различных целых x, y число $x^k - y^k$ делится на $x - y$. Теперь для доказательства того, что $3^{n-1} - 2^{n-1}$ делится на n, достаточно доказать, что показатель $n - 1$ делится на 2^t, т. е. что число $3^{2^t} - 1$ делится на 2^t (поскольку 2^{2^t} делится на 2^t). Докажем по индукции, что при всех натуральных t число $3^{2^t} - 1$ делится на 2^{t+2}. При $t = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно при некотором t. Имеем: $3^{2^{t+1}} - 1 = (3^{2^t} + 1)(3^{2^t} - 1)$. Первый множитель делится на 2, второй — на 2^{t+2}. Утверждение доказано.

11.72. $n = 1$. Если $3^n + 5^n$ делится на $3^{n-1} + 5^{n-1}$, то и $3^n + 5^n - 3(3^{n-1} + 5^{n-1}) = 2 \cdot 5^n$ делится на него.

11.73. Разность двух чисел $30(n - m)$ делится на 7, если $n - m$ делится на 7. Поэтому каждое из 7 данных чисел при делении на 7 дает разные остатки.

11.74. Пусть эти числа p, $p + n$, $p + 2n$. Если $p = 2$, то $p + 2n$ — чётное, поэтому $p > 2$, n — чётно и либо $n = 6k + 2$, либо $n = 6k + 4$. Докажем, что p делится на 3. Если $p = 3m + 1$ и $n = 6k + 2$ ($n = 6k + 4$), то $p + n$ ($p + 2n$) делится на 3 и поэтому не простое. Аналогично рассматривается случай $p = 3m + 2$.

11.75. Пусть $2^{2^t} + 1 = m^5 - n^5 = (m - n)(m^4 + m^3n + m^2n^2 + mn^3 + n^4)$. Так как оно простое, то $m - n = 1$, и, значит, $2^{2^t} = 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$ делится на 5.

11.76. Суммируя попарно крайние члены, получим $pq/(p-1)! = n$ или $m(p - 1)! = pn$. Так как $(p - 1)!$ не делится на p, то m делится на p.

11.77. n — простое и $n = 9$. Если $n = ab$, где $a > 4, b > 4$, $a \neq b$ то в произведение $(n - 1)!$ входят множители a, $2a$, b, $2b$, поэтому $(n - 1)!$ делится на $a^2b^2 = n^2$. Если $n = p^2$, где p —

простое число, то при $p^2 - 1 \geqslant 4p$ в $(n-1)!$ входят p, $2p$, $3p$ и $4p$, и оно делится на $p^4 = n^2$. Остаются два случая: n — простое (из теоремы Вильсона $(p-1)!$ при делении на p дает остаток -1) и $n = 9$ ($8!$ делится на 9, но не делится на 81).

11.78. Используем индукцию. При $n = 1$ берем число 2. Если $A = 2^n \cdot B$ — n-значное число, делящееся на 2^n, то одно из чисел $2 \cdot 10^n + A$ или $1 \cdot 10^n + A$ делится на 2^{n+1}, так как одно из чисел $5^n + B$ или $2 \cdot 5n + B$ чётно.

11.79. Если $q = 2$, то для любого натурального (а не только простого) числа p число $(p+1)^q = (p+1)^2$ является квадратом.

Пусть теперь q — простое число, большее 2. Ясно, что q — нечётное число. Представим число $p+1$ в каноническом виде $p+1 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_s^{a_s}$, где $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$ — все простые делители числа $p+1$, а $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — натуральные числа. Число $(p+1)^q = p_1^{a_1 q} p_2^{a_2 q} \ldots p_s^{a_s q}$ в силу нечётности q будет квадратом тогда и только тогда, когда числа $a_1, a_2, \ldots, a_s$ чётные. В этом случае число $p+1$ является квадратом: $p + 1 = m^2$. Значит, $p = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$.Так как m — натуральное число, а p — простое, то $m - 1 = 1$, $m + 1 = p$, и поэтому $p = 3$. Значит, если $q > 2$ — простое число, то число $(p+1)^q$, где p — простое число, является квадратом тогда и только тогда, когда $p = 3$.

11.80. Если $n < 8$, то данное число $N = 2^8 + 2^{11} + 2^n = 2^n(1 + 2^{8-n} + 2^{11-n})$ является произведением чётного числа 2^n и нечётного числа $1 + 2^{8-n} + 2^{11-n}$. Чтобы число N было квадратом, необходимо, чтобы число n было чётным. Но, как показывает проверка, значения $n = 2, 4, 6, 8$ не удовлетворяют условию задачи.

Если n равно 9 или 10, то число N равно соответственно $2^8 \cdot 11$ или $2^8 \cdot 13$ и также не является квадратом. Если $n > 10$, то $N = (2^4)^2(9+2^{n-8})$. Чтобы N было квадратом, необходимо, чтобы нечётный множитель был квадратом некоторого (нечётного) числа: $9+2^{n-8} = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$, где k — натуральное число. Отсюда находим, что $2^{n-8} = 4(k-1)(k+2)$ или $2^{n-10} = (k-1)(k+2)$.

Заметим, что числа $k-1$ и $k+2$ имеют различную чётность (они отличаются на 3). Поскольку единственным нечётным делителем числа 2^{n-10}, $n > 10$, является число 1, то равенство может иметь место только в том случае, когда $k - 1 = 1$. Отсюда следует, что $k = 2$, $n = 12$.

11.81. Вместе с числом $\overline{a_1 \ldots a_6}$ на 37 делятся числа $\overline{a_1 a_2 a_3} + \overline{a_4 a_5 a_6}$, $\overline{a_2 a_3 a_1 a_6 a_4 a_5}$ и $\overline{a_3 a_1 a_2 a_4 a_6 a_5}$.

11.82. 9440. Пусть $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot p$. Возьмём p такое, что $p - 1$ делится на 11, а $p + 1$ — на 13. Тогда $n = m - 10$.

11.83. $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 - 1 = b$, $a^2 + b^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$.

11.84. $2^{1982} + 1 = (2^{991} + 1)^2 - 2 \cdot 2^{991} = (2^{991} + 1)^2 - (2^{496})^2$.

11.85. По условию существуют натуральные числа p и q, такие, что $p^2 = 2n+1$, $q^2 = 3n+1$. Очевидно, число p нечётное и больше 1. Пусть $p = 2k+1$, где k — натуральное число. Тогда $2n = p^2 - 1 = 2k(2k+2)$, $n = 2k(k+1)$, и поэтому $q^2 = 6k(k+1)+1$. Из этого равенства следует, что число q нечётное и больше 1. Пусть $q = 2l+1$, где l — натуральное число. Тогда $3n = q^2-1 = 2l(2l+2) = 4l(l+1)$. Так как произведение двух последовательных натуральных чисел всегда делится на 2, то из последнего равенства следует, что n делится на 8, что и требовалось доказать.

11.86. Обозначим данное число $1010\ldots101$ (k нулей и $k+1$ единиц, где $k \geqslant 2$) через A_k. Если число k нечётно ($k = 2m+1$), то

$$A_k = 101 \cdot \underbrace{100010001\ldots100010001}_{m+1 \text{ единица, } 3m \text{ нулей}},$$

т. е. составное.

Если k чётно ($k = 2m$), то

$$11A_k = \underbrace{11\ldots11}_{4m+2 \text{ цифры}} = \underbrace{11\ldots11}_{2m+1 \text{ цифры}} \cdot 1\underbrace{00\ldots00}_{2m \text{ цифр}}1.$$

Второй сомножитель делится на 11 (см. 11.225) и больше 11, значит, A_k — составное число.

11.87. 1 и 9. Если число $n = m^2$ имеет $m > 1$ делителей, то m нечётно ($m = 2p+1$), а n имеет ровно p делителей, меньших m, и поэтому делится на $2p - 1$.

11.88. При $n \geqslant 2$ $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$; $x = 6$, $y = 8$, $z = 4$; при $n = 2$: $x = 8$, $y = 3$, $z = 7$.

11.89. 376 и 625. Пусть A — искомое число. Так как $A^2 - A = A(A-1)$ делится на $1000 = 8 \cdot 125$, A и $A - 1$ взаимно просты, то либо A делится на 8 и $A - 1$ — на 125, либо наоборот. Далее из 7 возможных в каждом случае чисел находим ответ.

11.90. $2s = (n^{1987} + 2^{1987}) + \ldots + (2^{1987} + n^{1987}) + 2 = (n+2)M$, где M — целое число.

11.91. 121, 241, 361, 481, 600. Удовлетворяет набор из n чисел $a_i = i \cdot n! + 1$, $i = 1, \ldots, n$. Сумма m чисел делится на m.

11.92. $4^{545} + 545^4 = (2^{545})^2 + 2 \cdot 2^{545} \cdot 545^2 + (545^2)^2 - 2 \cdot 2^{545} \cdot 545^2 = (2^{545} + 545^2)^2 - 2^{546} - 545^2 = (2^{545} + 545^2)^2 - (2^{273} - 545)^2 = (2^{545} + 545^2 + 2^{273} \cdot 545)(2^{545} + 545^2 - 2^{273} \cdot 545)$.

11.93. 1989.

11.94. Если $2n+1 = k^2$, $3n+1 = m^2$, то число $5n+3 = 4(2n+1) - (3n+1) = 4k^2 - m^2 = (2k+m)(2k-m)$ является составным, поскольку $2k - m \neq 1$ (в противном случае — при $2k - m = 1$, число $5n + 3$ равно $2k + m = (m + 1) + m = 2m + 1$ и $(m - 1)^2 = m^2 - (2m + 1) + 2 = (3n + 1) - (5n + 3) + 2 = -2n < 0$, что невозможно). Итак, число $5n + 3$ не может быть простым.

11.95. Пусть $n = pq$, где p и q — различные простые числа. По условию $p + q + 1 = 1000$, следовательно, $p + q = 999$. Поэтому одно из чисел p, q чётно.

Пусть, например, чётно число p. Так как p — простое число, то $p = 2$. Значит, $q = 997$, $n = 1994$.

11.96. Покажем, что $p = 3$. Заметим, что $p^2 + 11 = p^2 - 1 + 12 = (p - 1)(p + 1) + 12$. Если $p \geqslant 5$ простое, то числа $p - 1$ и $p + 1$ оба чётные, и одно из них кратно трём. Поэтому произведение $(p - 1)(p + 1)$ делится на 12, значит, $p^2 + 11$ также делится на 12, а значит, имеет не менее 7 делителей (6 делителей числа 12 и само число, $p^2 + 11 > 12$). Осталось проверить $p = 2$ и $p = 3$.

11.97. Докажем, что для любых $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию, найдется такое a_{n+1}, что $A_{n+1} = a_1^2 + \ldots + a_{n+1}^2$ делится на $B_{n+1} = a_1 + \ldots + a_{n+1}$. Из $A_{n+1} = A_n + (a_{n+1} - B_n)(a_{n+1} + B_n) + B_n^2$ следует, что A_{n+1} делится на B_{n+1}, если $A_n + B_n^2$ делится на $B_n + 1$. Итак, достаточно взять $a_{n+1} = A_n + B_n^2 - B_n$. Так как $B_n^2 - B_n > 0$, то $a_{n+1} > A_n > a_n^2 > a_n$.

11.98. Нет. Пусть $a \geqslant b \geqslant c$ — числа, удовлетворяющие условиям задачи. Тогда $a^2 - 1$ делится на b, a и b взаимно просты. Поэтому $c^2 - 1$, которое по условию делится и на a и на b, должно делиться и на их произведение, откуда следует, что $c^2 - 1 \geqslant ab$. С другой стороны, $a \geqslant c$ и $b \geqslant c$, т. е. $ab \geqslant c^2$. Противоречие.

11.99. Без ограничения общности можно считать, что x и y не делятся на p. Так как n нечётно, то $(x^n + y^n)/(x + y) = x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1}$. Обозначим правую часть равенства через A. По условию $p > 2$, значит, хотя бы одно из чисел x, y больше 1, а так как $n > 1$, то и $A > 1$. Так как $A(x + y) = p^k$, то $A \equiv 0 \pmod p$, $x \equiv -y \pmod p$. Тогда $A \equiv x^{n-1} - x^{n-2}(-x) + \ldots - x(-x)^{n-2} + (-x)^{n-1} \pmod p$ или $A \equiv nx^{n-1} \pmod p$. Так как $nx^{n-1} \equiv 0 \pmod p$, а x не делится на p, то n делится на p. Пусть $n = rs$, где r — простое число, отличное от p. Тогда $(x^s)^r + (y^s)^r = p^k$ — противоречие.

11.100. $n = 2$. Ясно, что ни одно из чисел x, y не кратно 3. Поэтому, если k чётно, то x^k и y^k при делении на 3 дают в остатке 1, а значит, их сумма при делении на 3 дает в остатке 2, т. е. не является степенью 3. Пусть k нечётно. Так как k делится на 3 (см. 11.99), считаем, что $k = 3$. Итак, $x^3 + y^3 = 3^n$, $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 3^n$.

Значит, $x^2-xy+y^2=3^n$. Так как $x^2-xy+y^2>xy\geqslant 2$, то $m>0$. С другой стороны $x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy$ и, значит, так как $x+y$ делится на 3, а xy не делится на 3, то $m<2$. Итак, $m=1$, $n=2$.

11.101. 2. Пусть на последнем месте в строке стоит число x. Сумма всех чисел в строке, кроме x, делится на x; но тогда и сумма всех чисел в строке, равная $1+\ldots+37=37\cdot 19$, делится на x. Отсюда $x=19$, так как число 37 — на первом месте. На третьем месте стоит делитель $37+1=38$, отличный от его делителей 1 и 19, которые уже стоят на других местах.

11.102. Используя формулу бинома Ньютона, докажем тождество

$$(a+b)^7-a^7-b^7=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2.$$

Остается подобрать числа a и b так, чтобы выражение a^2+ab+b^2 делилось на $7^3=343$. Например, $a=18$, $b=1$.

11.103. В качестве A можно взять множество произведений различных простых чисел вида $q_1q_2\ldots q_{q_1}$, где $q_1<q_2<\ldots<q_{q_1}$ (т. е. таких что число сомножителей равно наименьшему из них: в A входит $2\cdot 3$, $2\cdot 5$, $2\cdot 7, \ldots, 3\cdot 5\cdot 7$, $3\cdot 5\cdot 11, \ldots$ и т. д.). Тогда для любого множества $S=\{p_1,p_2,\ldots\}$ простых чисел, где $p_1<p_2<\ldots$, положим $k=p_1$, $m=p_1p_2\ldots p_{p_1}$, $n=p_2p_3\ldots p_{p_1}+1$. Очевидно, что $m\in A$, а $n\notin A$.

11.2. Остатки

11.104. $a_1=r_1+km$, $a_2=r_2+lm$, $a_1+a_2=r_1+r_2+(k+l)m$, $a_1a_2=r_1r_2+(r_2k+r_1l+kl)m$.

11.105. а) 1, б) 6. $1989=3\cdot 663$, в) 1.

11.106. а) $\text{ост}_3(a^2)=0,1$; $\text{ост}_3(a^3)=0,1,2$ б) $\text{ост}_4(a^2)=0,1$; $\text{ост}_4(a^3)=0,1,3$; в) $\text{ост}_5(a^2)=0,1,4$; $\text{ост}_5(a^3)=0,1,2,3,4$; г) $\text{ост}_7(a^2)=0,1,2,4,5$; $\text{ост}_7(a^3)=0,1,6$.

11.107–11.110, 11.112. Указание. Используйте 11.106.

11.111. Эти числа делятся на 3 и 8.

11.113. a и b делятся на 3 и 7.

11.114. 59. $a+1$ делится на 2, 3, 4, 5, 6.

11.115. Рассмотреть остатки деления этой суммы на 3.

11.116. x и x^3 дают одинаковые остатки при делении на 6.

11.117. Если d — нечётно, то q — чётно, что невозможно; если d не делится на 3, то среди p, q и r есть число, делящееся на 3, что также невозможно.

11.118. Одно из чисел x, y делится на 3, иначе z^2 дает остаток 2 при делении на 3. Два нечётных быть не могут, так как квадрат нечётного числа при делении на 8 дает остаток 1. Если одно нечётное, то второе делится на 4, иначе квадрат чётного числа, не делящегося на 4, дает остаток 4.

11.119. Если нет трёх чисел с одинаковыми остатками, то есть числа с остатками 0, 1, 2 — они искомые.

11.120. а) 6, б) 9.

11.121–11.123. Последние цифры степеней равны.

11.124. а) 9. Показатель 999^{99^9} нечётен, поэтому последняя цифра равна $\text{ост}_{10}(9999^{999^{99^9}}) = \text{ост}_{10}(9999^{2k+1}) = \text{ост}_{10}(9^{2k+1}) = \text{ост}_{10}(81^k \cdot 9) = 9$. б) Последняя цифра 7^n зависит от остатка деления n на 4. $7^7 \equiv -1 \pmod 4$, поэтому эта цифра — 3.

11.125. 0. Последняя цифра данного числа s — остаток от его деления на 10, поэтому $s \equiv 10 \cdot (1^2 + \ldots + 9^2) \equiv 0 \pmod{10}$.

11.126. а) 00. Указание. Сгруппируйте кубы (кроме 50^3) попарно: $1^3+99^3, 2^3+98^3, \ldots, 49^3+51^3$. Каждая такая сумма делится на 100. б) 88, 67, 36.

$2^{10} = 1024$, поэтому $2^{10} \equiv -1 \pmod{25}$, $2^{1000} \equiv 1 \pmod{25}$, значит, 2^{1000} может оканчиваться на 01, $01 + 25 = 26$, $01 + 50 = 51$, $01 + 75 = 76$. Но из-за делимости на 4 это могут быть только цифры 76. Тогда 2^{999} может оканчиваться либо на $38 = 76 : 2$, либо на $88 = 176 : 2$. Но опять из-за делимости на 4 число 2^{999} оканчивается на 88.

$$\begin{aligned}3^{999} &= 3^3(3^4)^{249} \equiv 3^3(-19)^{249} \equiv 3^3(-19)(21)^{62} = \\ &= 3^3(-19)21^2(21^4)^{15} \equiv 3^3 \cdot 21^2(-19)^{16} \equiv 3^3 \cdot 21^6 = \\ &= (3 \cdot 441)^3 \equiv 23^3 \equiv 67 \pmod{100}.\end{aligned}$$

$(14^2)^{7 \cdot 14^{13}} \equiv (-4)^{7 \cdot 14^{13}} \pmod{25}$, но $7 \cdot 14^{13} \equiv -2 \pmod 5$, т. е. $7 \cdot 14^{13} = 5p + 3$, а $(-4)^5 \equiv 1 \pmod{25}$, поэтому $14^{14^{14}} \equiv (-4)^3 \equiv 11 \pmod{25}$. Возможные окончания 11, 36, 61, 86, но на 4 делится лишь число с окончанием на 36.

11.127. Если бы $1 + \ldots + n = n(n+1)/2 \equiv 2, 4, 7, 9 \pmod{10}$, то $n(n+1) \equiv 4, 8, 4, 8 \pmod{10}$, но $n(n+1)$ может быть равно только 0, 2, 6 по модулю 10.

11.128. 0000. Квадрат может оканчиваться только цифрами 0, 1, 4, 9, 6, 5. Но $(2k+1)^2 \equiv 1 \pmod 4$, а $(2k)^2 \equiv 0 \pmod 4$, поэтому 11, 99, 66, 55 быть не могут; $(2k)^2 \equiv 0, 4 \pmod{16}$, а $4444 \equiv 12 \pmod{16}$, поэтому 4444 быть также не может.

11.129. $1444 = 38^2$. Из 11.128 квадрат не может иметь более трёх ненулевых цифр.

11.130. 143. Так как $7^4 = 2401$, то из формулы бинома Ньютона (для 2400 и 1) имеем:

$$7^{9999} \equiv 7^3 \cdot 2401^{2499} \equiv 343 \cdot (1 + 2499 \cdot 2400 + 2400^2 N) \equiv$$
$$\equiv 343 \cdot (1 + 600 + 0) \equiv 143 \pmod{1000}.$$

11.131. 0 или 1. Если число делится на 5, то его 100-я степень делится на 125. Для чисел вида $5n \pm 1$ и $5n \pm 2$ с помощью бинома Ньютона имеем ответ.

11.132. Покажем, что $N^{101} - N = N(N^{100} - 1)$ делится на 1000. При N — нечётном $N^{100} - 1 = (N^{50}+1)(N^{25}+1)(N^{25}-1)$ делится на 8. Из 11.131 следует, что если N не делится на 5, то $N^{100} - 1$ делится на 125. Итак, $N^{100} - 1$ делится на $8 \cdot 125 = 1000$.

11.133. Действительно, $2222^{5555}+5555^{2222} = (2222^{5555}+4^{5555}) + (5555^{2222} - 4^{2222}) - 4^{2222}(4^{3333} - 1)$. Первая скобка делится на $2222 + 4 = 2226 = 7 \cdot 318$, вторая — на $5555 - 4 = 5551 = 7 \cdot 793$, третья скобка — на $64 - 1 = 63 = 7 \cdot 9$.

11.134. $n = 8p$, $n = 2p - 1$.

11.135. а) Пусть $p = 30n + r$. Если r — составное, то так как все составные числа, меньшие 30, имеют общие делители с 30, то составным будет p. б) $p = 109$, $109 = 60 + 49$.

11.136. 107.

11.137. 7. Он равен $\text{ост}_{14}(35)$, так как $A = 1981 \cdot 1982n + 35$.

11.138. Нет. Полученное число дает при делении на 3 остаток 2 (см. 11.106).

11.139. а) Нет. Пусть $a = 2n+1$, $b = 2k+1$, тогда $a^2+b^2 = 4p+2$ делится на 2, но не на 4. б) Нет. Остаток квадрата нечётного числа от деления на 4 равен 1.

11.140. Рассмотреть остатки при делении на 4.

11.141. Остатки квадратов чисел при делении на 8 — 0, 1, 4.

11.142. Числа вида $4n + 3$. Остатки суммы двух квадратов от деления на 4: 0, 1, 2.

11.143. Числа вида $9n + 4$. Куб при делении на 9 даёт остатки 0, 1 и 8.

11.144. См. 11.106, п. а).

11.145. Нет: $\text{ост}_4(5n + 1) = 0$, $\text{ост}_4(5k - 1) = 2$.

11.146. $5^k + 7$ делится на 4 и на 3 при нечётном k (3^n — нечётно).

11.147. Нет. Так как простое p (объем) равен произведению длин трёх сторон, то две из этих длин равны 1, а третья — p. Тогда площадь поверхности равна $4p+2$.

11.148. Из 11.106 следует, что среди квадратов есть два с равными остатками.

11.149. Ошибся. Сумма всех чисел равна 74, тогда каждая из сумм чисел, названных мальчиками и девочками в отдельности, должна быть 37. Однако из названных сумм нельзя выбрать часть, дающую в сумме 37: все числа, кроме 5, делятся на 3, $5 \equiv 2 \pmod 3$, а $37 \equiv 1 \pmod 3$.

11.150. Любые два из семи чисел дают одинаковый остаток при делении на 5.

11.151. Покажем, что x и $x+3$ при любом x являются либо плохими, либо хорошими одновременно. Пусть, например, x — плохое, $x+3$ — хорошее, тогда с одной стороны $x+18 = (x+3)+15$ — хорошее, а с другой $x + 18 = ((x + 6) + 6) + 6$ — плохое. Отсюда все числа с одним остатком при делении на 3 либо хорошие, либо плохие. Значит, плохих чисел может быть 333, 334, 666, 667.

11.152. При нечётных n, больших 4. Так как имеется по 5 корзин с чётным и нечётным количеством яблок, то число n — нечётное. При $n = 10p - 5$ ($p = 1, 2, \ldots$) кладем в 5 корзин p яблок и между ними ставим 5 корзин с $p-1$ яблоком, при $n = 10p - 3$ заменяем одну из корзин с p яблоками на корзину с $p+1$ яблоком, при $n = 10p - 1$ заменяем аналогично уже две корзины, при $n = 10p + 1$ — три корзины и т. д.

11.153. 3. Одно из чисел делится на 3.

11.154. 3. **11.155.** 5. **11.156.** $p = 3$.

11.157. Одно из чисел $2^n - 1$, 2^n, $2^n + 1$ делится на 3. (2^n не делится на 3.)

11.158. Пусть $n = 2^m(2p+1)$, $p \neq 0$, обозначим $a = 2^{2^m}$. Тогда $2^n = a^{2p+1}$ — составное.

11.159. а) $1, 3, 7, 9$; б) Нет.

11.160. Очевидно, p — чётно, но не делится на 4. Если $p+1 = a^2$, то $p = (a-1)(a+1)$, a — нечётно, поэтому p делится на 4. Если бы $p-1 = a^2$, то так как p делится на 3, имеем $p-1 = 3m+2$ или $a^2 = 3m + 2$, что невозможно.

11.161. Из условий $p = 3n \pm 1$, тогда $2p + 1 = 6n \pm 2 + 1$. Так как $2p + 1$ — простое, большее 6, то $2p + 1 \neq 6n + 3$, значит, $2p + 1 = 6n - 1$, $p = 3n - 1$, $4p + 1 = 12n - 3 = 3(4n - 1)$.

11.162–11.163. Остатки от деления куба на 9: $0, 1, 8$.

11.164. Число $1967k + 3$ при делении на 7 дает остаток 3.

11.165. Это число при делении на 7 может дать остатки 2 и 3.

11.166. Если $p = 2n$, то $\text{ост}_4(3^p + 1) = 2$, а если $p = 2n + 1$, то $\text{ост}_8(3^p + 1) = 4$.

11.167. Докажем, что любое такое число делится на 11111, значит, степенью двойки не является. Так как 10^5 при делении на 11111 дает в остатке 1, то любое из полученных чисел дает при делении тот же остаток, что и сумма всех чисел на карточках, а эта сумма равна $(11111 + 99999)(10^5 - 1)/2$, т. е. делится на 11111.

11.168. $11 = 36 - 5^2$. Последняя цифра числа $36^k = 6^{2k}$ равна 6, последняя цифра числа 5^l равна 5. Поэтому число $|6^{2k} - 5^l|$ оканчивается либо на 1, либо на 9. Равенство $6^{2k} - 5^l = 1$ невозможно, так как тогда было бы $5^l = (6^k - 1)(6^k + 1)$, а число $6^k + 1$ не делится на 5. При $k = 1$ и $l = 2$ получим 11. Равенство $5^l - 6^{2k} = 9$ также невозможно, так как 5^l при натуральном l не делится на 3.

11.169. 335 и 742. Если натуральное число N удовлетворяет условию задачи, то $100 \leqslant N \leqslant 999$ и $N = 37m + 2$, $N = 11n + 5$, где m и n — целые неотрицательные числа. Значит, нужно найти все неотрицательные целые числа m, n, удовлетворяющие условиям $100 \leqslant 37m + 2 \leqslant 999$, $37m + 2 = 11n + 5$, откуда $3 \leqslant m \leqslant 26$, $37m = 11n + 3$.

Методом перебора по m от 3 до 26 нетрудно найти все пары натуральных чисел $(m; n)$, которые удовлетворяют равенству, $37m = 11n + 3$. Чтобы упростить перебор, запишем это равенство в следующем виде: $11(n - 3m) = 4m - 3$. Тогда видно, что $4m - 3$ должно делиться на 11, а это возможно лишь при $m = 9$ и $m = 20$. Оба значения удовлетворяют условию задачи.

11.170. Рассмотрим n чисел $2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n$. Если n нечётное и $n > 3$, то все эти числа не делятся на n. Обозначим остатки от деления этих чисел на n через $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Они могут принимать лишь значения $1, 2, \ldots, n - 1$. Так как число этих значений равно $n-1$, а число остатков равно n, то среди остатков есть два равных. Пусть $r_i = r_j$, $i < j$. Тогда число $2^j - 2^i = 2^i(2^{j-i} - 1)$ делится на n. Так как числа 2^i и n не имеют общих делителей, то число $2^{j-i} - 1$ делится на n. Здесь $1 \leqslant j - i \leqslant n - 1$.

11.171. $(3; 5; 7)$. Пусть искомые простые числа — p, q, r и $p < q < r$. Любое простое число, отличное от 3, имеет вид либо $3n + 1$, либо $3n + 2$. Квадрат такого числа при делении на 3 дает остаток 1. Значит, сумма квадратов трёх простых чисел, ни одно из которых не равно 3, делится на 3. Так как число $p^2 + q^2 + r^2$ — простое, то одно из чисел p, q, r должно быть равно 3. Возможны случаи: а) $p = 3$, тогда $q = 5$, $r = 7$ и $p^2 + q^2 + r^2 = 83$ — простое число; б) $q = 3$, тогда $p = 2$, $r = 5$ и $p^2 + q^2 + r^2 = 38$ — составное число; в) $m = 3$, тогда $q = 2$, а простых чисел, меньших 2, нет.

11.172. В записи могут участвовать только цифры 1, 3, 7, 9. Но для любого М: M, $M + 3179$, $M + 9137$, $M + 7913$, $M + 1397$, $M+3197$, $M+7139$ дают разные остатки при делении на 7, значит, одно из них делится на 7.

11.173. Докажем, что числа x, y и z дают одинаковые остатки при делении на 3. Тогда из условия будет следовать, что число $x+y+z$ делится на 27. Если числа x, y и z дают разные остатки при делении на 3, то число $(x-y)(y-z)(z-x)$ не делится на 3, а число $x+y+z$, наоборот, делится на 3. Следовательно, по крайней мере два из трёх чисел x, y, z дают одинаковые остатки при делении на 3. Но тогда число $x + y + z = (x - y)(y - z)(z - x)$ делится на 3, а для этого необходимо, чтобы и третье число давало тот же остаток при делении на 3, что и первые два числа.

11.3. Сравнения по модулю

11.176. 1 при n — чётном и -1 при n — нечётном.

11.177. $30^{99} \equiv -1 \pmod{31}$, $61^{100} \equiv 1 \pmod{31}$.

11.178. $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1})$.

11.179. Суммируем попарно крайние члены.

11.180. $10^3 \equiv -1 \pmod 7$, $10^{3n+1} \equiv \pm 3 \pmod 7$, а сумма двух кубов сравнима с 0, ± 1, ± 2 по модулю 7.

11.181. Если среди 51 числа найдутся два, имеющие одинаковые остатки при делении на 100, то из $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ все следует. Пусть все 51 остаток — разные. Разобьём всевозможные остатки на 50 пар — $(0, 50)$ и $(n, 50-n)$, $n = 1, \ldots, 49$. По принципу Дирихле из 51 остатка найдутся два, попадающие в одну пару. Если эта пара — $(0, 50)$, то оба квадрата чисел делятся на 100, в противном случае на 100 делится разность чисел.

11.182. Если x — удобное число, то $(1000001 - x)$ — также удобное.

11.183. 8, так как $1996 \equiv 4 \pmod 6$.

11.184. Да: 288. $18n + 1 \equiv n + 1 \pmod{17}$, положим $n = 16$.

11.185. а) Нет, б) Нет. **11.186.** Например, -1 или $n - 1$.

11.187. 5. **11.188.** 2858.

11.189. Да. Делимость на 20 очевидна, а делимость на 99 следует из того, что $100 \equiv 1 \pmod{99}$ и равенства $19 + 20 + \ldots + 80 = 99 \cdot 31$.

11.190. Нет, $n^2 + n + 1$ не может даже делиться на 5.

11.191. $11^{n+2} + 12^{2n+1} = (133 - 12)11^n + 12 \cdot 144^n = 133 \cdot 11^n + 12(144^n - 11^n)$.

11.192. б) Если два неравных числа отличаются друг от друга не более чем на 15, то они не могут иметь общих делителей, больших 15. Поэтому достаточно показать, что среди 16 последовательных чисел можно найти число, не имеющее с остальными 15 общих делителей 2, 3, 5, 7, 11 и 13. После вычёркивания чётных чисел останется 8 последовательных нечётных чисел. Из них на 3 могут делиться либо 3, либо 2; на 5 и 7 либо 2, либо 1; на 11 и 13 делится не более одного числа. Если среди этих 8 чисел есть не более 5, делящихся на 3, или на 5 или на 7, то искомое одно число найдется. Рассмотрим случаи, когда чисел, делящихся или на 3, или на 5, или на 7, будет не меньше 6.

Случай 1. Среди 8 последовательных нечётных чисел на 3 делятся 3 числа, тогда на 5 могут делиться два из оставшихся чисел только в том случае, если одно из крайних чисел делится на 3, а второе на 5. Вычеркнув эти 5 чисел, оставим 2-е, 5-е и 6-е числа, или же 3-е, 4-е и 7-е. Рассмотрим первый случай. 2-е, 5-е и 6-е числа в ряду всех 16 чисел это 4-е, 10-е и 12-е или 3-е, 9-е и 11-е. Ни одно из этих чисел не может иметь ни с одним из остальных 15 чисел общий делитель 13, так как каждое из остальных чисел отличается от него меньше чем на 13. В данном случае из этих трёх чисел на 7 и на 11 может делиться по одному числу. Аналогично проводится доказательство во втором случае — когда остаются 3-е, 4-е и 7-е.

Случай 2. Если среди наших 8 чисел на 3 делятся два числа, 3-е и 6-е, то возможно, что из оставшихся на 7 делятся 1-е и 8-е, и на 5 делятся 2-е и 7-е. Вычеркнув эти 6 чисел, оставим из наших 8 чисел 4-е и 5-е, которые не будут уже делиться ни на 3, ни на 5, ни на 7. Оба этих числа будут взаимно простыми с каждым из остальных 15 чисел, так как каждое из остальных чисел отличается от них меньше чем на 11 и поэтому не могут иметь с ними общий делитель 11 или 13.

в) Среди чисел $1184, \ldots, 1200$ нет ни одного взаимно простого со всеми остальными.

11.193. Сумма делителей делится на 3 и на 8.

11.194. $a_n - 22$ делится на a_{n-6}. Проследите за остатками от деления на a_{n-6} членов $a_{n-5}, \ldots, a_n$.

11.195. При $n = 2p$: $19 \cdot 8^{2p} + 17 \equiv 0 \pmod 3$; при $n = 4p + 1$: $19 \cdot 8^{4p+1} + 17 = 13 \cdot 8^{4p+1} + 48 \cdot 64^{2p} + 17 \equiv 0 \pmod{13}$; $n = 4p + 3$: $19 \cdot 8^{4p+3} + 17 = 15 \cdot 8^{4p+3} + 4 \cdot 8^3 \cdot 64^{2p} + 17 \equiv 0 \pmod 5$.

11.196. Пусть в последовательности не более одного составного числа. Чтобы все числа были простые, нельзя приписывать чётные цифры, цифру 5, а 1 или 7 можно приписать не более одного раза, так как приписывание этих цифр увеличивает остаток от деления на 3 на 1. Значит, приписать можно только 3. Но к простому числу p можно приписывать не более p троек, так как из чисел $3, 33, \ldots, 3\ldots 3$ (p троек) хотя бы одно кратно p (принцип Дирихле).

11.197. а) Докажем, что все цифры числа, кроме, быть может, первых 50 — нули. Для этого возьмём 51-значное число A и заменим его последнюю цифру a нулем — получим число B. Числа A и B, а, значит, и их разность кратны 2^{50}, откуда $a = 0$, т. е. исходное число кратно 2^{999}.

11.198. Существуют. Если n искомых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ уже построены, то новые $n+1$ чисел строим так: $b_0 = \text{НОК}(a_1, \ldots, a_n)$, $b_1 = a_1 + b_0$, $\ldots$, $b_n = a_n + b_0$.

11.199. Все числа вида $6m + 1$, $6m + 2$.

11.200. $m^n = An^m$, $n^k = Bk^n$, $(m^k)^n = (m^n)^k = A^k(n^m)^k = A^k(Bk^n)^m = A^kB^m(k^m)^n$. Если $(m^k)^n$ делится на $(k^m)^n$, то m^k делится на k^m.

11.201. Из равенства $2^{kn}-1 = (2^n-1)(2^{n(k-1)}+\ldots+1)$ следует, что $2^{kn} - 1$ делится на $2^n - 1$, поэтому $2^{kn+d} - 1 = 2^d(2^{kn} - 1) + 2^d - 1 \equiv 2^d - 1 \pmod{2^n - 1}$. Итак, $2^n - 1$ делится на $2^m - 1$ если и только если n делится на m. При $n = km$: $(2^{km} - 1)/(2^m - 1) = 1+2^m+\ldots+2^{m(k-1)}$. Каждое слагаемое равно 1 по модулю 2^m-1, поэтому $(2^{km}-1)/(2^m-1) \equiv k \pmod{2^n-1}$. Тогда $k = n/m$ делится на $2^m - 1$, а это равносильно тому, что n делится на $m(2m - 1)$.

11.202. $n = 103$, $m = 3$. Из условия следует, что $1978^n - 1978^m = 1978^m(1978^{n-m} - 1) = 1000a$, где a — некоторое натуральное число. Отсюда видно, что $m \geqslant 3$, так как 1978^m должно делиться на 8. Остается найти значения $n - m$, при которых $A = 1978^{n-m} - 1$ делится на 5^3. Легко проверить, что A делится на 5 лишь при $n - m = 4k$. Поскольку нас интересует остаток при делении числа A на 125, можно заменить 1978 на 103, а 103^4 на 6. Далее имеем $6^k-1 = (1+5)^k-1 = 5k+5^2k(k-1)/2+\ldots$, где опущенные слагаемые делятся на 125. Поэтому $2k+5(k-1)k = k(5k-3)$ делится на 25, откуда следует, что k делится на 25. Значит, $n-m = 100k$, а $n + m = 100k + 2m$.

11.203. Пусть для некоторых целых чисел k, m, n имеют место равенства $2d - 1 = k^2$, $5d - 1 = m^2$, $13d - 1 = n^2$. Из первого равенства получаем $2d = k^2 + 1$, здесь k — нечётное и $k^2 + 1$ равно 2 по модулю 4, значит, d — нечётное. Так как d — нечётное, то из второго и третьего равенств следует, что m и n — оба чётные, т. е. $m = 2M$, $n = 2N$. Вычтем из третьего равенства второе; после сокращения на 4 получим $2d = N^2 - M^2$. Значит, число $N^2 - M^2$ равно 2 по модулю 4, чего не может быть, так как если N и M — числа одной чётности, то $N^2 - M^2$ делится на 4, а если разной, то $N^2 - M^2$ — нечётное число. Итак, хотя бы одно из трёх чисел $2d - 1$, $5d - 1$, $13d - 1$ не квадрат.

11.204. Имеем $a_1 = 1$ и $a_2 = p$, где p должно быть наименьшим простым числом, которое не является делителем числа n; $a_k = n-1$ и $r = p-1$ — разность прогрессии. Если n — нечётное число, то $a_2 = 2, r = 1$ и прогрессия имеет вид $1, 2, \ldots, n-1$. Отсюда следует, что n является простым числом. Если n — чётное число, то $p \geqslant 3$.

Случай 1. $p = 3$. Тогда $r = 2$ и прогрессия имеет вид $1, 3, \ldots, n - 1$. Отсюда очевидно, что n является степенью двойки: $n = 2^m$.

Случай 2. $p > 3$. Тогда n делится на 3. Имеем $a_k = a_1 + r(k-1)$, откуда $n - 1 = 1 + (p - 1)(k - 1)$. Значит, $p - 1$ является делителем числа $n-2$. Возьмём произвольный простой делитель q числа $p-1$. Тогда q является делителем числа $n - 2$. Так как $q < p$, то q — делитель n. Общий простой делитель чисел n и $n - 2$ может быть только двойкой, поэтому $p - 1 = 2^i$ и $p = 2^i + 1$. Из того, что число p — простое, следует, что число i — чётное. Далее, $a_3 = a_1 + 2r = 1 + 2(p - 1) = 2p - 1 = 2^{i+1} + 1 = 0 \pmod 3$. Значит, a_3 делится на 3 и n делится на 3, а это противоречит взаимной простоте чисел a_3 и n.

Теорема Дирихле

11.205. Предположим противное и пусть $M = 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot p-1$ (p — наибольшее число вида $3k - 1$), $M \equiv -1 \pmod 3$ и M не делится ни на одно из простых чисел $2, 3, \ldots, p$. Является M простым или же раскладывается на простые множители — в обоих случаях эти простые числа больше p. Покажем, что среди них есть множитель вида $3k - 1$. Если нет, то все простые множители M равны 1 по модулю 3, значит, их произведение равно 1 по модулю 3, но $M \equiv -1 \pmod 3$.

11.206. Рассмотрим $M = 6p_1\cdot\ldots\cdot p_n - 1$ ($p_1, \ldots, p_n$ — конечное число простых множителей вида $6k - 1$), $M \equiv -1 \pmod 6$. Далее аналогично 11.205, учитывая, что простое число, большее 3, равно ± 1 по модулю 6.

Китайская теорема об остатках

11.207. Разность n-го и p-го чисел ($n > p$), равная $d(n-p)$, не делится на m, иначе оказалось бы, что $n-p$ делится на m, но $n-p < m$. Значит, числа прогрессии попарно не сравнимы по модулю m, т. е. для каждого из остатков ровно одно число сравнимо с ним по модулю m.

11.208. Применим индукцию по n. При $n = 1$ теорема очевидна. Пусть она справедлива при $n = k-1$. Тогда найдется число M такое, что $M \equiv r_i \pmod{m_i}$, $i = 1, \ldots, k-1$. Пусть $d = m_1 m_2 \ldots m_{k-1}$. Рассмотрим числа $M, M+d, \ldots, M+(m_k-1)d$. Так как d взаимно просто с m_k, из следует, что среди данных чисел найдется число N, дающее при делении на m_k остаток r_k. Число N при делении на $m_1, \ldots, m_{k-1}$ дает остатки $r_1, \ldots, r_{k-1}$ соответственно.

11.209. По 11.208 существует такое a, что $a \equiv r_1 \pmod{m_1}$, $a \equiv$ $\equiv r_2 - 1 \pmod{m_2}$, ..., $a \equiv r_n - n + 1 \pmod{m_n}$. Тогда $a, a+1, \ldots$, $a+n-1$ удовлетворяют условию задачи.

11.210. а) 48, 49, 50 (2^2, 5^2, 7^2) или 548, 549, 550 (2^2, 3^2, 5^2); б) Пусть $p_1^2, \ldots, p_n^2$ — квадраты n различных простых чисел. Тогда по 11.208 найдется такое m, которое дает при делении на $p_1^2, \ldots, p_n^2$ соответственно остатки $p_1^2 - 1, \ldots, p_n^2 - n$. Поэтому числа $m+1, \ldots, m+n$ будут делиться на $p_1^2, \ldots, p_n^2$.

11.211. 788. Из $3n - 1 = 5l - 2$ имеем $n = 3 + 5p$, т. е. только числа вида $3(3+5p) - 1 = 8 + 15p$ делятся на 3 с остатком -1 и на 5 с остатком -2. Далее из $8 + 15p = 7m - 3$ получим, что только числа вида $53 + 105k$ делятся на 3 с остатком -1, на 5 с остатком -2, на 7 с остатком -3 и т. д. (См. задачи из раздела 12.1.)

11.4. Признаки делимости и другие системы счисления

11.213. Степени 10, со 100, делятся на 4.

11.214. Число делится на 2^n (на 5^n) тогда и только тогда, когда число, образованное его последними n цифрами, делится на 2^n (на 5^n).

11.215. Две последние цифры числа зависят от двух последних цифр числа — a и b, причём $(10a+b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$. Ясно, что цифра десятков b^2 — нечётна.

11.216. Рассмотрите остатки по модулю 16.

11.217. Например, $1\ldots19875$ делится на 125.

11.218. а) 9876543210, б) 9876543120, в) 10234567895, г) 1234567980.

11.219. а) Нет, число 9981 не делится на 27, б) Нет, например 54.

11.220. 42048, 42840. Число делится на 8 (3 последние цифры делятся на 8) и на 9.

11.221. Два: 2970 и 6975.

11.222. 1155, 3150, 4155, 6150, 7155, 9150.

11.223. 10234567896.

11.224. Одним нулем. Число делится на 10, но не на 4, и, значит, не на 100.

11.225. $10^{2n-1} \equiv -1 \pmod{11}$, $10^{2n} \equiv 1 \pmod{11}$.

11.226. Числа делятся на 11.

11.227. $\overline{aabb}$ делится на 11, а $\overline{cdcdcdcd}$ — нет.

11.228. Цифры $1, \ldots, 6$ нельзя разбить на две тройки, разность сумм в которых делится на 11.

11.229. Эти два числа имеют одинаковые остатки при делении на 9 и на 11.

11.230. Число $n(n+1)/2$ оканчивается на ту же цифру, что и $(n+20)(n+21)/2$, так как их разность делится на 10.

11.231. 69. Новое число $100a + b + 2a = 102a + b$ делится на 9, значит, и на 3, но 102 делится на 3, поэтому b делится на 3, а так как $a + b$ делится на 3, то a делится на 3. Из $102a + b = 9(10a + b)$ имеем $3a = 2b$, т. е. a делится на 2, значит, на 6.

11.232. 6125, 6375, 4625, 4875, 5216, 6275, 5264, 5784. Так как произведение 8-значно, то искомое число не может оканчиваться на 0. Произведение делится на 1000, поэтому один из сомножитель делится на 125, а второй на 8. Числа, делящиеся на 125 в конце имеют 125, 375, 625, 875.

11.233. Нельзя. Проследите за последней цифрой.

11.234. $\overline{aba} = 101a + 10b = 7(14a + b) + 3(a + b)$.

11.235. $\overline{abc} = 100a + 10b + c \equiv 2a + 3b + c \equiv b - c \pmod 7$, так как $2(a + b + c) \equiv 0 \pmod 7$.

11.236. а) Число 1001 делится на 7, б) Число делится на 7 (на 13) тогда и только тогда, когда на 7 (13) делится знакопеременная сумма чисел, образованных последовательными тройками цифр данного числа. (Число делится на тройки справа налево.)

11.237. Число делится на 37 тогда и только тогда, когда на 37 делится сумма чисел, образованных последовательными тройками цифр данного числа.

11.238. Пусть число a, составленное из данных цифр, делится на с (с $< a$). Тогда a – с делится на с. Разность двух чисел с одинаковой суммой цифр делится на 9, но с и 9 взаимно просты (c на 3 не делится), поэтому $a - c$ делится на 9с, а 9с — число восьмизначное.

11.239. а), б) Нет. Рассмотрите остатки по модулю 9.

11.240. 6. Воспользуйтесь признаком делимости на 9.

11.241. Нет, $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c)$, $a \neq c$.

11.242. Число состоит из 300 единиц.

11.243. 45. Из условия $100a + b = 9(10a + b)$ имеем $5a = 4b$, т. е. b делится на 5.

11.244. Надо вычеркнуть 2, 7, 9. Число 134 568 должно делиться на 8 и на 9.

11.245. Верна: числа равны по модулю 9.

11.246. Разделим это число на $1\ldots1$ (9 единиц). Получим $10\ldots01\ldots10\ldots01$ (по 8 нулей и всего 9 единиц).

11.247. а) 81 встретится под числом $9\ldots9$ (9 девяток), его номер $1\ldots1$(9 единиц), б) четыре раза подряд 27 встретится раньше — под числами 3969, 3978, 3987, 3996, а 36 — под числом 9999.

11.248. Использовать принцип Дирихле.

11.249. Домножить число на 1111 и доказать, что результат делится на число, состоящее из 1 и 0.

11.250. Нет. $n(n+1) \equiv 0, 1, 2 \pmod 5$, а $1989 \equiv 3 \pmod 5$.

11.251. 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92. Если a, b — цифры, то $a + b = 11$.

11.252. Доказательство по индукции. Представим число, состоящее из 3^{n+1} единицы в виде

$$\underbrace{1\ldots1}_{3^n}\cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{3^n-1}1\underbrace{0\ldots0}_{3^n-1}1.$$

Первый сомножитель делится на 3^n по предположению индукции, а второй делится на 3, так как сумма его цифр делится на 3.

11.253. 625 и 376.

11.254. Нет. Сократив $n!$ на максимальную степень 10, получим число, кратное большой степени 2, однако 1976 не делится на 2^4.

11.255. Число 5^{1000} оканчивается на 5. Пусть в десятичной записи этого числа на n-м месте, считая от конца, стоит 0, а все следующие цифры отличны от 0. Прибавим к этому числу $5^{1000}10^{k-1}$. В результате получится число, делящееся на 5^{1000}, у которого отличны от 0 последние n цифр. Продолжая эту процедуру, можно получить число, у которого последние 1000 цифр отличны от 0. Теперь отбросим все цифры, кроме 1000 последних.

11.256. Пусть $B = A^2$ и $A = 10a+5$. Тогда $B = 100a(a+1)+25$ оканчивается на 25. Число $a(a+1)$ оканчивается либо на 2, либо на 6, либо на 0. Поэтому третья справа цифра числа B равна 6. Итак, $B = 1000n + 625$, т. е. B делится на 5^3, и поэтому на 5^4. Отсюда n делится на 5, значит, 4-я справа цифра B — 0 или 5.

11.257. Да. Выписывая трёхзначные числа, делящиеся на 11, можно среди них найти 3 числа, в записи которых участвуют цифры от 1 до 9. Например, такие числа: 275, 396, 418. С их помощью легко составить десятизначное число, делящееся на 11. Например, $2\,753\,961\,180 = 275 \cdot 10^7 + 396 \cdot 10^4 + 418 \cdot 10$.

11.258. 80. Положим $a = 1\ldots1$ ($n+1$ единиц), $b = 1\ldots1$ (9 единиц). Так как $A = 11a$, то a должно делиться на $B = 9b$, т. е. a должно делится на b и a/b делиться на 9.

Сумма цифр

11.259. Нет. $a^2 \equiv s(a^2) \equiv 1$ или $0 \pmod 3$, а $1970 \equiv 2 \pmod 3$.

11.260. Если последняя цифра квадрата — 5, то предпоследняя — 2. Тогда $N \equiv s(N) \pmod 3 = 5 \cdot 999 + 2 \equiv 2 \pmod 3$, но $a^2 \not\equiv 2 \pmod 3$. Если же квадрат заканчивается на 5*, то он оканчивается на 56 (достаточно перебрать квадраты до 25^2 — последние две цифры n^2 и $(50-n)^2$ одинаковы). Тогда сумма его цифр — $5 \cdot 999 + 6$ — делится на 3, но не на 9.

11.261. 8. $A \equiv s(A) \pmod 9$, $8 \equiv -1 \pmod 9$, $8^{1997} \equiv -1 \equiv 8 \pmod 9$.

11.262. Последняя цифра 2^n может быть 2, 4, 6, 8. Если цифра 6, то всё ясно. Цифра 2 возникает при $n = 4p-3$. $2^{4p-3} \equiv -1 \pmod 3$, поэтому $2^{4p-3} - 2 \equiv 0 \pmod 3$. Цифра 8 рассматривается аналогично. Цифра 4 возникает при $n = 4p-2$. $2^{4p-2} \equiv 1 \pmod 3$, поэтому $2^{4p-2} - 4 \equiv 0 \pmod 3$.

11.263. Сумма цифр, стоящих на чётных местах равна сумме цифр, стоящих на нечётных местах по модулю 11 (см. 11.225), а сумма всех цифр делится на 9.

11.264. Нет. $46(40x+y) \equiv x+y \pmod 9$, а искомое число равно $1 + x + y \pmod 9$.

11.265. Пусть N — данное число, $N \equiv s(N) \equiv 1+\ldots+1967 = 1967 \cdot 1968/2 \equiv 6 \pmod 9$ — делится на 3, но не делится на 9. Значит, N не может быть любой степенью числа.

11.266. Так как $A \equiv s(A) \pmod 9$, то первая разность $A - s(A)$ и последующие делятся на 9. Значит, следующее число (со второго) меньше на 9, 18 или 27. Легко видеть, что при переходе через каждую сотню обязательно встретятся такие два числа, что мы уменьшаем предыдущее число на 18, поэтому числа из 8-й сотни и меньше обратятся в 0 не позднее чем на 93 шаге. А в 9-й сотне 10 чисел, сумма цифр которых равна 18: $909, \ldots, 990$.

11.267. $N \equiv s(N) \pmod 9$, $2N \equiv N \pmod 9$, т. е. $2N - N = N$ делится на 9.

11.268–11.269. Так как $10^k \equiv 1 \pmod{9\ldots9}$ — k девяток), то $(10^k)^n \equiv 1 \pmod{9\ldots9}$ — k девяток), далее доказательство следует признаку делимости на 3 (или 9).

11.270. Если бы все цифры были разными, то их сумма равнялась бы $0 + 1 + \ldots + 9 = 45 \equiv 0 \pmod 9$, однако ни одно число в цепочке на 9 не делится.

11.271. Пусть из 2^k получилось 2^n $(n > k)$. Тогда $2^n - 2^k \equiv 0 \pmod 9$ (так как эти числа составлены из одних и тех же цифр) и $2^{n-k} - 1 \equiv 0 \pmod 9$, но $2^{n-k} = 2^n/2^k < 9$, так как при перестановке цифр число не может увеличиваться в 9 и более раз.

11.272. а) Решений нет: $n + S(n) + S(S(n)) \equiv 0 \pmod 3$, но 1993 на 3 не делится, б) Так как $n < 1993$, $S(n) \leqslant 27$, $S(S(n)) \leqslant 10$, $S(S(S(n))) \leqslant 9$. Из уравнения следует, что $n \geqslant 1993 - 27 - 10 - 9 = 1947$. Все числа n, $S(n)$, $S(S(n))$, $S(S(S(n)))$ равны по модулю 9, а $1993 \equiv 4 \pmod 9$, поэтому $n \equiv 1 \pmod 9$. Из чисел от 1947 до 1993 подходит 1963.

11.273. Очевидно, что если при сложении чисел A и B столбиком не происходит переносов в старшие разряды, то $s(A + B) = s(A) + s(B)$ (тогда цифры числа $A + B$ равны суммам соответствующих цифр чисел A и B). Пусть $X = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ — десятичная запись числа A. Умножим 5 на A столбиком. При сложении переносов происходить не будет, так как старшая цифра числа $5a_i$, не превосходит 4 $(5 \cdot 9 = 45)$, а младшая цифра следующего числа — 0 или 5. Значит, $s(X) = s(5a_1) + \ldots + s(5a_k)$.

11.274. С любого числа от 100 до 109. От 0 до 81 имеем цепочку из девяти вычитаний. Число 81 можно получить из 90 и 99. Но 90 не из какого числа не получишь, а 99 получается из $100, \ldots, 109$.

11.275. Нет. Пусть $S(X)$ — сумма цифр числа X. Из алгоритма сложения в столбик видно, что $S(X + Y) = S(X) + S(Y) - 9P(X, Y)$, где $P(X, Y)$ — число переносов при сложении X и Y в столбик. Отсюда $S(1998X) = S(2000X) - S(2X) + 9P(2X, 1998X) = 9P(2X, 1998X)$, так как $S(2000X) = S(2X)$. Но $P(2X, 1998X) \geqslant$

$\geqslant 3$, так как сумма этих чисел имеет на конце на 3 нуля больше, чем каждое из слагаемых.

11.276. Число, записанное при помощи 3^n единиц, делится на 3^n.

11.277. $c = 9$. $a \leqslant 1962 \cdot 9 < 19999$, поэтому $b \leqslant 1 + 4 \cdot 9 = 37$ и $c \leqslant 9$.

11.278. Да, $1962 + s(1962) = 1980$.

11.279. Положим $S_n = S(n) + n$. Если число n оканчивается на 9, то $S_{n+1} < S_n$, если не на 9, то $S_{n+1} = S_n + 2$. Для любого натурального $m > 2$ выберем наибольшее N, для которого $S_N < m$. Тогда $S_{N+1} \geqslant m$, причём последняя цифра N — не 9, и потому либо $S_{N+1} = m$, либо $S_{N+1} = m + 1$.

11.280. Проверка показывает, что из чисел $n = 1, 2, 3, 4, 5$ подходит только $n = 3$. Докажем, что при $n \geqslant 6$ сумма цифр числа 5^n меньше, чем 2^n (т. е. другие значения n не подходят). Действительно, число 5^n не более, чем n-значное, поэтому сумма его цифр не больше, чем $9n$. С другой стороны, при $n \geqslant 6$ справедливо неравенство $2^n \geqslant 9n$. В самом деле, при $n = 6$ оно верно, а при увеличении n на единицу правая часть этого неравенства увеличивается на 9, а левая — не менее, чем на 64, Значит, неравенство верно и при каждом следующем (большем 6) значении n. Итак, единственным значением n, является значение $n = 3$.

11.281. Заметим, что $9A = 10A - A$. При вычитании этих чисел столбиком ни в одном разряде, кроме младшего, не приходится занимать единицу из следующего разряда. Таким образом, сумма цифр разности равна разности суммы цифр чисел $10A$ и A (которые равны) плюс 9.

11.282. Заметим, что $44n$ есть сумма 4 экземпляров числа n и 4 экземпляров числа $10n$. Если складывать эти числа поразрядно, то в каждом разряде окажется сумма учетверённой цифры из этого же разряда числа n и учетверённой цифры из следующего разряда. Если при этом не происходит никаких переносов, то каждая цифра числа n складывается 8 раз, и сумма цифр во всех разрядах оказывается равной 800. При переносах же сумма цифр, очевидно, уменьшается (так как из одного разряда вычитается 10, а к другому прибавляется только 1). Поэтому в ситуации условия задачи переносов не происходит. Это означает, в частности, что любая цифра числа n не превосходит 2. Тогда при умножении n на 3 просто умножается на 3 каждая его цифра, а, значит, и сумма цифр. Поэтому сумма цифр числа $3n$ равна 300.

11.283. 7. Так как $4444 < 10^4$, то число знаков 4444^{4444} меньше, чем $4 \cdot 4444 = 17776$, поэтому $A < 17\,776 \cdot 9 = 159984$, $B \leqslant 5 \cdot 9 = 45$. Найдём остаток от деления 4444^{4444} на 9. $4444 \equiv (-2) \pmod 9$, поэтому

$$(-2)^{4444} = 2^{4444} = 2 \cdot 8^{1481} \equiv 2(-1)^{1481} \equiv 7 \pmod 9.$$

Тогда B равно 7, 16, 25, 34 или 43, т. е. $s(B) = 7$.

Другие системы счисления

11.284. а) $10101_2 = 21$, $10101_3 = 91$, $211_4 = 37$, $113_6 = 69$, $158_{11} = 184$; б) $1000_{10} = 2627_7$, $69_{10} = 126_7$, $158_{11} = 352_7$.

11.285. а) Да (7-ричная система счисления), б) Нет (второе равенство могло бы выполняться только в 5-ричной системе счисления).

11.286. а) $10201_b = 101_b^2$. б) Пусть x — самая большая цифра в данной системе счисления. Тогда $10101_b = 111 \cdot \overline{x1}_b$.

11.287–11.288. Аналогично десятеричной системе счисления.

11.289. Используем троичную систему счисления. Считаем, что троичная запись каждого числа состоит ровно из k цифр (при необходимости заполним пустующие старшие разряды нулями). Выберем те числа, троичная запись которых содержит только цифры 0 и 1. Их ровно 2^k. Покажем, что это искомый набор. Предположим, что среди этих чисел есть три различных числа x, y, z, удовлетворяющих равенству $x + y = 2z$. Так как числа x и y различаются хотя бы в одном разряде, то в троичной записи их суммы $x + y$ в этом разряде стоит 1. А в записи числа $2z$ встречаются только 0 и 2.

11.290. Набор чисел такой же, как и в 11.289.

11.291. а) первый, б) 1925-й. Пусть стоит n ребят. Запишем n в двоичной системе счисления. Перенеся первую цифру (единицу) в конец, получим двоичную запись водящего: а) $64_{10} = 1000000_2$, $0\ldots01_2 = 1_{10}$, б) $1986_{10} = 11111000010_2$; $11110000101_2 = 1925_{10}$.

11.292. Надо задавать вопросы так, чтобы каждый последующий вопрос уменьшал вдвое количество остающихся возможных вариантов. При такой системе, чтобы угадать один из двух вариантов, достаточно n вопросов. Так как по условию имеется всего $10^7 \leqslant 2^{24}$ различных телефонных номеров, то хватит 24 вопросов. Сами вопросы можно задавать по-разному. Например, можно спросить: «Верно ли, что ваш номер больше 5 000 000? Если ответили «да», то второй вопрос может быть такой: «Больше ли он 7 500 000?» и т. д.

Но проще воспользоваться двоичной системой счисления. Каждое число, меньшее 10 000 000, запишется не более, чем 24 такими цифрами. Можно задавать такие вопросы: «Верно ли, что последняя цифра двоичной записи номера вашего телефона — единица?»; «Верно ли, что предпоследняя цифра — единица?» и т. д. Покажем, что 23 вопросов недостаточно. Действительно, различных комбинаций из 23 слов «да» и «нет» имеется $2^{23} < 10\,000\,000$. Поэтому найдутся два различных номера, приводящих к одинаковой последовательности ответов, и у нас не будет никакой возможности решить, какой из них истинный.

11.293. Сначала за 24 вопроса узнаем 24 цифры двоичной записи телефонного номера. Затем нужно выяснить, верны ли найденные цифры, а если нет, то какая именно цифра неверна. Проще всего задать вопрос: «Все ли цифры верные?» Если ответили «да», то это правдивый ответ (иначе ложь содержалась бы в двух ответах, в последнем и в одном из первых 24, а это противоречит условию). Если же получен ответ «нет», те либо один из первых 24 ответов, либо последний ответ ложны. Не более чей 5 вопросами мы можем выяснить в каком же из 25 ответов ложь ($25 \leqslant 2^5$). При таком способе достаточно $24 + 1 + 5 = 30$ вопросов. Однако количество вопросов можно уменьшить, если 25-й вопрос задать так: «Верны ли первые 15 цифр?» (15 — это наибольшее число вида $2^n - 1$, не превосходящее 24). Рассуждая аналогично, заключаем, что после ответа «нет» потребуется 4 вопроса, а после ответа «да» нужно будет выяснить, все ли оставшиеся 9 цифр верные.

11.294. Да, за 4 операции. Будем делить колоду пополам, а потом складывать карты «через одну», начиная с карты нижней половины.

0101010101010101
0011001100110011
0000111100001111
0000000011111111
1010101010101010
1100110011001100
1111000011110000
1111111100000000

К 11.294

Докажем, что это действительно обращает колоду. Пронумеруем карты числами от 0000 до 1111 в двоичной системе. Тогда достаточно показать, что обращается расположение нулей и единиц в каждом разряде. Легко видеть, что в результате одной операции из каждого расположения на рисунке получается то, что строчкой ниже (а из последнего — первое). Но в начальном положении единицы стоят в положениях, указанных в первых четырёх строках, поэтому в конце оно будет обращено.

Покажем, что за три операции перестановку сделать невозможно. При первой операции одна из частей содержит не менее 8 карт, поэтому после неё есть по меньшей мере 8 карт в первоначальном порядке, при второй операции в одну из частей попадёт по крайней мере четыре из них, т. е. будут 4 карты в исходном порядке. Аналогично, после третьей операции найдётся не менее двух карт, у которых не изменился порядок. Значит, трёх операций мало.

11.295. Утверждение 1 очевидно. Для доказательства утверждения 2 достаточно заметить, что после любого хода изменяется число камней в какой-то кучке, а значит, меняется некоторый разряд его двоичной записи и поэтому меняется чётность числа единиц в соответствующем столбце. Для доказательства утверждения 3 нужно, взяв несколько камней из одной кучки, изменить чётность числа единиц во всех столбцах с нечётным числом единиц. (и только в них). Рассмотрим крайний левый столбец с нечётным числом единиц и выделим кучку, у которой в этом разряде стоит 1. Число камней в этой кучке действительно уменьшится: двоичную запись исходного числа камней нужно изменить в разрядах, соответствующих столбцах с нечётным числом единиц и в старшем из изменившихся разрядов вместо 1 будет стоять 0.

12. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

12.1. Наибольший общий делитель. Линейные уравнения

12.1. Если $a = pm$ и $b = pn$, то $a \pm b = p(m \pm n)$.

12.2. Если $a = pm$ и $b = pn$, то r_1 делится на p, и наоборот.

12.3. а) 1, б) 1, в) 191.

12.4. а) 59/13, б) 83/17, в) 359/113, г) 271/883.

12.5. 11. $\text{НОД}(2n+3; n+7) = \text{НОД}(n+7; -11) \leqslant 11$. При $n = 4 + 11k$ ограничение достигается.

12.6. $2^{10} - 1$.

12.7. Указание. $\text{НОД}(2^m - 1; 2^n - 1) = 2^p - 1$, где $p = \text{НОД}(m; n)$.

12.8. а) 1111, б) $1\ldots1$ ($d = \text{НОД}(m; n)$ единиц) из алгоритма Евклида.

12.9. $\text{НОД}(30n+2; 12n+1) = \text{НОД}(12n+1; 6n) = \text{НОД}(6n; 1) = 1$.

12.10. -3, -2, 1. Выделим из дроби целую часть 3 и найдем целые n, при которых дробь $(2n+16)/(7n+11)$ будет по модулю меньше 1, т. е. не целое число. Это будут $n < -3$ и $n > 1$. Затем проверим дробь при $n = -3, -2, -1, 0, 1$.

12.11. При $n \geqslant 2$ эта дробь лежит в интервале $[1, 2]$.

12.12. а) Пусть такие числа $a \neq b$ существуют; без ограничения общности считаем, что $a < b$. Тогда тройка чисел $(a, a+5, b-a)$, будет удовлетворять условиям пункта б) (если подставить их вместо a, b и с соответственно).

б) Предположим, что $\text{НОК}(a; b) = \text{НОК}(a+c; b+c)$. Если числа a, b и c имеют общий делитель d, то сократим на него. При этом обе части рассматриваемого равенства тоже сократятся на d. Поэтому можно считать, что a, b и с взаимно просты. Тогда числа $a+c$ и $b+c$ тоже взаимно просты. Действительно, если они имеют общий простой делитель p, то на p делится также $(a-b)$ (их разность) и $\text{НОК}(a; b)$ (т. к. он равен $\text{НОК}(a+c; b+c)$). Тогда на p делится одно из чисел a или b, а значит, они оба (т. к. на p делится их разность). Но тогда и $c = (a+c) - a$ делится на p, что противоречит взаимной простоте чисел a, b и с. Следовательно, $\text{НОК}(a+c; b+c) = (a+c)(b+c) > ab \geqslant \text{НОК}(a; b)$. Противоречие доказывает, что указанное равенство невозможно.

12.13. $2000^2 - 1$. Пусть $a = 2000m + n$, $b = 2000n + m$, d — наибольший общий делитель a и b. Тогда d делит также числа $2000a - b = (2000^2 - 1)m$ и $2000b - a = (2000^2 - 1)n$. Поскольку m и n взаимно просты, то d делит $2000^2 - 1$. С другой стороны, при $m = 2000^2 - 2000 - 1$, $n = 1$, получаем $a = (2000^2 - 1)(2000 - 1)$, $b = 2000^2 - 1 = d$.

12.14. Пусть $d = \text{НОД}(b; p-a)$, $b = kd$ и $p - a = ld$. Тогда числа k и l взаимно просты. Далее, $ak + bl = ab/d + (p-a)b/d = pk$. Итак, $ak + bl$ делится на p.

12.15. Если $a+b$ и a^2+b^2 делятся на d, то и $(a+b)^2 - (a^2+b^2) = 2ab$ делится на d. Значит, $2a^2 = 2a(a+b) - 2ab$ и $2b^2 = 2b(a+b) - 2ab$ делятся на d. Но если a и b взаимно просты, то a^2 и b^2 также взаимно просты, поэтому $2a^2$ и $2b^2$ не могут одновременно делиться на $d > 2$.

12.16. Если p и q — взаимно простые числа, то каждое число z представляется в виде $z = px + qy$. Всякое такое представление получается из некоторого фиксированного $z = pa + qb$ по общей формуле $z = p(a - qt) + q(b + pt)$, где t — целое, причём существует единственное представление, для которого $0 \leqslant x \leqslant q-1$. Сопоставим числу пару $(x; y)$ целых чисел такую, что $0 \leqslant x \leqslant q-1$,

$z = px + qy$. Разным числам при этом соответствуют разные пары, причём z будет хорошим при $y \geqslant 0$.

Заметим, что если число $z = px + qy$ — хорошее, то число $z' = (q-1-x)p + (-1-y)q$ — плохое и, наоборот, если z — плохое, то z' — хорошее. Точки $(x; y)$ и $(q-1-x; -1-y)$ симметричны относительно точки $((q-1)/2; -1/2)$, а сами числа z и z' симметричны относительно точки $z_0 = (p(q-1) - q)/2$, так как $z + z' = pq - p - q = 2z0 = c$. Итак, доказано утверждение а). Так как наименьшее хорошее число — 0, то наибольшим плохим будет с, а всего плохих чисел будет $(c+1)/2 = (p-1)(q-1)/2$.

12.17. Если бы $1978^m - 1$ делилось на $D = 1000^m - 1$, то и $1978^m - 1000^m = 2^m(989^m - 500^m)$ делилось бы на D. Но это невозможно, так как $989^m - 500^m < D$ и D нечётно.

12.18. Имеем $(a+1)/b + (b+1)/a = (a^2 + b^2 + a + b)/ab$. Пусть d — наибольший общий делитель чисел a и b. Так как ab делится на d^2, то $a^2 + b^2 + a + b$ делится на d^2. Число $a^2 + b^2$ также делится на d^2. Поэтому $a + b$ делится на d^2 и $\sqrt{a+b} \geqslant d$.

12.19. Решение 1. Положим $m = kd$, $n = ld$, где $d =$ $=$ НОД$(m; n)$. Тогда НОК$(m; n) = kld$ и, значит, $kld + d = kd + ld$. Отсюда получаем, что $(k-1)(l-1) = 0$, т. е. $k = 1$ или $l = 1$. Это означает, что либо m, либо n равно НОД$(m; n)$. Следовательно, либо n делится на m, либо m делится на n.

Решение 2. НОК$(m, n) \cdot$ НОД$(m, n) = mn$, поэтому НОК и НОД — корни уравнения $x^2 - (m+n)x + mn = 0$. Поэтому либо НОК $= m$, НОД $= n$, либо наоборот.

12.20. $m = n = l = 2$. Положим $d =$ НОД$(m; n; l)$. Пусть $m =$ $= dm_1$, $n = dn_1$, $l = dl_1$, тогда $d(m_1 + n_1) = d^2 d_{mn}^2$, где $d_{mn} =$ $=$ НОД$(m_1; n_1)$, откуда $m_1 + n_1 = dd_{mn}^2$. Складывая это равенство с двумя аналогичными, получаем

$$2(m_1 + n_1 + l_1) = d(d_{mn}^2 + d_{ml}^2 + d_{nl}^2). \qquad (*)$$

Покажем, что d взаимно просто с суммой $m_1 + n_1 + l_1$. В самом деле, если у d и этой суммы есть общий делитель $d_1 > 1$, то он будет общим делителем всех чисел m_1, n_1 и l_1 (так как сумма любых двух из них делится на d). Но тогда произведение dd_1 — общий делитель m, n и l, что противоречит определению d. Значит, d — делитель числа 2, откуда $d \leqslant 2$ (равенство $(*)$). Заметим, что d_{mn}, d_{ml}, d_{nl} попарно взаимно просты (иначе у m_1, n_1 и l_1 нашёлся бы общий делитель, не равный 1). Поэтому $m_1 = d_{mn}d_{ml}m_2$, $n_1 = d_{mn}d_{nl}n_2$, $l_1 = d_{nl}d_{ml}l_2$, где m_2, n_2, l_2 — натуральные. Тогда первое из исходных уравнений примет вид $d_{mn}d_{ml}m_2 + d_{mn}d_{nl}n_2 = dd_{mn}^2$. Пусть d_{mn} — наименьшее из чисел d_{mn}, d_{ml}, d_{nl}. Имеем: $d_{ml}m_2 + d_{nl}n_2 \geqslant d_{ml} + d_{nl} \geqslant 2d_{mn} \geqslant dd_{mn}$ (так как $d \leqslant 2$). Итак, все неравенства — равенства, отсюда, $m_2 = n_2 = 1$, $d = 2$ и $d_{mn} = d_{ml} = d_{nl}$. Но из взаимной простоты d_{mn}, d_{ml}, d_{nl} следует, что они равны 1, откуда имеем ответ.

12.2. Линейные уравнения

12.21. Пусть $d = \text{НОД}(a; b)$, тогда левая часть делится на d, правая — нет.

12.22. Проверим, что $(x_0 + bk, y_0 - ak)$ являются решениями: $a(x_0+bk)+b(y_0-ak) = ax_0+by_0 = c$. Докажем, что это все решения. Пусть (x, y) — какое-то решение, тогда $ax + by = c = ax_0 + by_0$ или $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Так как число $x - x_0 = b(y_0 - y)/a$ — целое, а b и a взаимно просты, то число $k = (y_0 - y)/a$ — целое. Поэтому $x - x_0 = bk$, $y - y_0 = -ak$.

12.23. а) $|2; 1; 2; 1; 1; 4; 1; 1; 6; 10; 1; 1; 2|$, б) $|3; 7; 15; 1; 292|$, в) $|0; 1; 99|$, г) $|3; 7; 16|$.

12.24. а) Свёртывание цепной дроби в обыкновенную сводится к операциям двух типов: прибавлению целого числа и обращению. Легко показать, что если дробь a/b несократима, то эти операции также приводят к несократимым дробям. Но $1/q_n$ — несократима, значит, несократимы и все δ_k.

б) Доказательство ведётся индукцией по n. База ($n = 2$) очевидна. Пусть теперь утверждение верно для n. Докажем его для $n + 1$. Пусть $|a_1; \ldots; a_{n+1}| = a_1 + x'/y'$, $|a_1; \ldots; a_n| = a_1 + x/y$, Тогда $y'/x' = |a_2; \ldots; a_{n+1}|$ и $y/x = |a_2; \ldots; a_n|$. Следовательно, $(-1)^{n-1}/(xx') = (y'/x') - (y/x) = (xy' - x'y)/(xx')$, т. е. $xy' - x'y = (-1)^{n-1}$. Отсюда $(a_1 + x'/y') - (a_1 + x/y) = (x'y - xy')/(yy') = (-1)^n/(yy')$.

12.25. Следует из 12.24, п. б).

12.26. Следует из 12.22 и 12.25.

12.27. а) $x = -4+15p$, $y = -5+19p$, б) $x = 33+17p$, $y = 44+23p$, в) $x = 88 + 47p$, $y = 99 + 53p$, г) $x = -3 + 18p$, $y = 6 + 35p$, д) $x = -25 + 71p$, $y = -30 + 85p$, е) $x = -28 + 11p$, $y = -105 + 41p$.

12.28. Уравнение $170x + 190y = 3000$ имеет решение $x = 2$, $y = 14$.

12.29. Уравнение $25x - 36y = 1$ имеет решение $x = 13$, $y = 9$.

12.30. Уравнение $8x - 5y = 13$ имеет единственное решение $x = 6$, $y = 7$, удовлетворяющее условиям $x + y \leqslant 20$ и $x, y > 0$.

12.31. а) $324 = 141 \cdot 2 + 42$ (2 квадрата со стороной 141 мм), $141 = 43 \cdot 2 + 15$ (3 квадрата со стороной 42 мм), $42 = 15 \cdot 2 + 12$ (2 квадрата со стороной 15 мм), $15 = 12+3$ (1 квадрат со стороной 12 мм), $12 = 3 \cdot 4$ (4 квадрата со стороной 3 мм). Итак, длина 3 мм. б) Например, $a = 21$, $b = 13$, при этом $13 = F_7$, $21 = F_8$.

Отметим, что для произвольного n такие a и b можно найти с помощью чисел Фибоначчи (F_{n+2} и F_{n+1}). Напомним, что $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1}+F_n$. При этом построенный прямоугольник $a \times b$ будет иметь наименьшие возможные (при данном n) размеры. Цепная дробь для F_{n+1}/F_n имеет очень простой вид: она состоит из одних единиц.

12.32. $5/8 - 8/13 = 1/104$. Уравнение $13n - 8m = 1$.

12.33. Отложив 19 раз угол в $19°$, получим $19 \cdot 19 = 361$, но $361° - 360° = 1°$, т. е. от стороны первого угла до стороны 19-го угла ровно $1°$.

12.34. $25x - 36y = 1$ решалось в 12.29.

12.35. Решая уравнение, получим $x = -55 - 13k$, $y = -33 - 8k$. Из условий $x < 0$, $y > 0$ находим $-55/13 < k < -33/4$, что невозможно. Итак, на этой прямой таких точек нет.

12.36. Пусть $(x; y)$ — натуральное решение, тогда $a(b - x) = by$, т. е. by делится на a, откуда $y = na$. Аналогично $x = bm$. Подставляя эти соотношения в уравнение, получим $n + m = 1$.

12.37. Продавец кладет на одну чашку 6 банок, а на другую — 2 гирьки и сахар, всего 8 гирек и банок. $100x+450y = 2500$. Общее решение $x = 25+9p$, $y = -2p$. Если гирьки и банки лежат на одной чашке, то $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и наименьшая сумма $x + y = 25 + 7p = 11$ при $p = -2$. Если гирьки лежат на одной чашке, а банки и сахар на другой, то $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$ и наименьшая сумма $x + (-y) = 25$ при $p = 0$. Если банки на одной чашке, а гирьки и сахар на другой, то $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$ и наименьшая сумма 8 при $p = -3$.

12.38. $x = 5p + 3q - 11$, $y = 11 - 5p - 2q$, $z = p$; где p и q — любые целые числа.

12.39. Уравнение $16x + 17y + 40z = 140$ имеет решение $x = 2$, $y = 4$, $z = 1$.

12.40. Если x, y — цены шалтая и болтая, то $125y < 175x < 126y$. Необходимо найти минимальные x и y, удовлетворяющие неравенствам. Деля на 25, получим $5y < 7x < 126y/25$, т. е. $y > 25$. Рассмотрим $7x-5y = 1$, тогда $x = 3+5p$, $y = 4+7p$. Так как $y > 25$, то $p > 3$. При $p = 4$ получим $x = 23$, $y = 32$, но $3 \cdot 23+32 = 101 > 100$.

12.41. Существуют: числа n и $n + 1$, где $n + 1 = 89\ldots90\ldots0$ (221 девятка и 222 нуля). Ищем решение среди чисел вида $n =$

$= \overline{a9\ldots 9}$ (p девяток). Пусть $s(a)$ — сумма цифр числа a, тогда $s(n) = s(a) + 9p$ и $s(n+1) = s(a) + 1$ должно делится на 1997. Для минимального $s(a) = 1996$ имеем $1996 + 9p = 1997k$, минимальное натуральное решение $k = 2$, $p = 222$.

12.3. Нелинейные уравнения и системы уравнений

12.42. $(-4, 9)$, $(20, -33)$, $(4, -9)$, $(-20, 33)$.

12.43. $(\pm 16, \pm 15)$ (4 решения).

12.44. $(5, 2)$, $(2, 5)$, $(0, -3)$, $(-3, 0)$, $(3, 3)$, $(-1, -1)$.

12.45. $(3, 2)$, $(3, -2)$, $(-3, 2)$, $(-3, -2)$.

12.46. Решений нет $\pmod 4$. **12.47.** Решений нет $\pmod 7$.

12.48. Решений нет $\pmod 3$.

12.49. $(5, 6)$, $(-5, -6)$, $(13, 6)$, $(-13, -6)$.

12.50. $(6, -21)$, $(4, 15)$, $(7, -12)$, $(3, 6)$, $(8, -9)$, $(2, 3)$, $(11, -6)$, $(14, -5)$, $(-1, 0)$, $(-4, -1)$, $(23, -4)$, $(-13, -2)$.

12.51. $(5, 6)$, $(-6, -5)$, $(-3, 4)$, $(-4, 3)$. Положим $n = x - y$, $m = xy$, тогда $n(n^2 + 3m) = 91$.

12.52. $(2, 14)$, $(0, -20)$, $(18, -2)$, $(-16, -4)$. Уравнение приводится к виду $(x-1)(y+3) = 17$.

12.53. 1. $(x-1)(x^2 + 2x + 3) = 0$. Второй множитель корней не имеет: $D = 4 - 4 \cdot 3$.

12.54. $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$.

12.55. Решений нет $\pmod 7$. **12.56.** Решений нет $\pmod 5$.

12.57. Решений нет. $x^2 + y^2$ должно делится на 3, значит, $x = 3n$, $y = 3p$ и $19n^2 + 28p^2 = 81$, откуда p может быть 0 и ± 1.

12.58. $(1, 3)$, $(1, -3)$, $(8, 3)$, $(8, -3)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(9, 1)$, $(9, -1)$.

12.59. Решений нет. Преобразовать к виду $t^2 - 8y = 15$ и рассмотреть по модулю 4.

12.60. Решений нет. Если x и y чётны, то левая часть делится на 4, иначе левая часть нечётна.

12.61. Решений нет $\pmod 3$.

12.62. $(\pm 498, \pm 496)$, $(\pm 78, \pm 64)$ (8 решений).

12.63. Решений нет $\pmod 4$. **12.64.** Решений нет $\pmod 8$.

12.65. $(1, 1, 0)$. Из второго уравнения $xy \geqslant 1$, т. е. x и y одного знака, тогда (из первого уравнения) $x > 0$, $y > 0$.

12.66. Решений нет $\pmod 8$.

12.67. Решений нет. Легко видеть, что y нечётно, т. е. $y = 2t + 1$. Подставляя это, получим $x^2 - 10t^2 - 10t = 6$. Но $x^2 \equiv 0, 1$

(mod 4) и $t^2+t \equiv 0, 2 \pmod 4$, поэтому левая часть не может давать остаток 2 при делении на 4.

12.68. $(0,50)$, $(50,0)$, $(2,32)$, $(32,2)$, $(8,18)$, $(18,8)$. Перенеся в левую часть корень из x и возводя в квадрат, получим $y = 50+x - 10\sqrt{2x}$. Тогда $x = 2a^2$, а так как $x \leqslant 50$, то $a^2 \leqslant 25$. По значениям $a = 0, 1, \ldots, 5$ находим x и y.

12.69. $(1,2)$, $(2,1)$.

12.70. $(1,\pm 1)$, $(3,\pm 3)$. При $x > 3$ левая часть $1! + 2! + \ldots + x!$ имеет вид $33 + 10n$, но квадрат числа не может оканчиваться на 3.

12.71. $(1,1,1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(1,-1,-1)$.

Решение 1. Приводя к общему знаменателю, получим, что $xyz > 0$, поэтому из натурального решения можно получить целые решения, заменив значения двух переменных на противоположные. Преобразуя уравнение к виду

$$(xy-xz)^2+(xz-yz)^2+(yz-xy)^2 = 2xyz((1-x)+(1-y)+(1-z)),$$

получим (из неотрицательности обеих частей) единственное натуральное решение $(1,1,1)$.

Решение 2. По неравенству Коши

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{xy}{z}\cdot\frac{yz}{x}\cdot\frac{zx}{y}} = 3\sqrt[3]{xyz} \geqslant 3.$$

Равенство достигается лишь если $xy/z = yz/x = zx/y$ и $xyz = 1$.

12.72. $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$. Преобразовать уравнение к виду $(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2 = 2$.

12.73. Решений нет $\pmod 4$.

12.74. $(0,0,0)$. x^3 чётно, поэтому x^3 делится на 8. Сокращая на 2, видим, что y^3 чётно, поэтому y^3 делится на 8. Сокращая на 2, получим, что z^3 делится на 8.

12.75. Решений нет $\pmod 9$.

12.76. $(4,1)$, $(4,-3)$, $(-4,1)$, $(-4,-3)$. Преобразовать уравнение к виду $(x+y+1)(x-y-1) = 12$.

12.77. Решений нет $\pmod 7$.

12.78. $(0,0,0)$. Покажем, что других решений нет. Пусть $x = 2^n x_1$, $y = 2^m y_1$, $z = 2^p z_1$, где x_1, y_1, z_1 — нечётные. Сокращая обе части на 2 в минимальном показателе, получим $v^2+u^2+w^2 = 2^a vwu$, при этом среди чисел v, u, w чётное число нечётных. Если нечётны два числа, то левая часть не делится на 4, а правая делится. Все числа быть чётными не могут по построению чисел v, u, w.

12.79. $(0,0,0,0)$. **12.80.** $(0,0,0)$. Решение аналогично 12.78.

12.81. Решений нет. n^4 даёт при делении на 16 остаток 0 или 1, поэтому $x_1^4 + \ldots + x_{14}^4$ даёт остаток, не больший 14, а 1599 даёт остаток 15 при делении на 16.

12.82. $(0, 0)$. Пусть x и y — решение. После ряда возведений в квадрат имеем $\sqrt{x + \sqrt{x}} = m$ и $\sqrt{x} = n$ — целые числа, причём $m^2 = n(n+1)$. Если $n > 0$, то должно быть $n^2 < m^2 < (n+1)^2$, тогда $n < m < n+1$ и m — не целое число. Значит, $n = 0$, т. е. $x = 0$.

12.83. Решений нет. Если x, y и z удовлетворяют уравнениям системы, то $z^2 = 2y^2 + 1$ — нечётное число. Так как квадрат чётного числа есть чётное число, то z — число нечётное: $z = 2m + 1$. Используя это представление для числа z, получим $2y^2 = z^2 - 1 = 4m^2 + 4m$, т. е. $y^2 = 2(m^2 + m)$ — чётное число, значит, и y чётное: $y = 2k$. Число $x^2 = y^3 + 7z^4$ нечётное. Поэтому x нечётное: $x = 2n + 1$. Из первого уравнения системы теперь следует, что $4n^2 + 4n + 1 - 8k^3 = 7(z^2)^2 = 7(2y^2 + 1)^2 = 7(4y^4 + 4y^2 + 1)$. Отсюда $3/2 = n^2 + n - 2k^3 - 7y^4 - 7y^2$, что для целых чисел n, k, y невозможно.

12.84. Используя тождество

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x),$$

запишем данное уравнение в виде $(x - y)(y - z)(z - x) = 10$. Обозначая $a = x - y$, $b = y - z$, $c = z - x$, запишем уравнение в виде $abc = 10$. Кроме того, очевидно, $a + b + c = 0$. Легко видеть, что с точностью до перестановки и выбора знаков из равенства $abc = 10$ следует, что числа a, b, c равны либо ± 1, ± 2, ± 5, либо ± 1, ± 1, ± 10. Но во всех этих случаях при любом выборе знаков сумма $a + b + c$ отлична от нуля. Итак, данное уравнение не имеет решений в целых числах.

12.85. $(5, 4)$, $(4, 5)$ и $(0, 0)$. Положив $p = x + y$, $q = x - y$ и подставив $x = (p + q)/2$, $y = -(p - q)/2$ в исходное уравнение, получим, что $7p = 3(p^2 + 3q^2)/4$, т. е. $28p = 3(p^2 + 3q^2)$.

Отсюда следует, что p неотрицательно и делится на 3, т. е. $p = 3k$. Подставив $p = 3k$, получим $28k = 3(3k^2 + q^2)$. Отсюда следует, что k делится на 3, поэтому $k = 3m$. Подставив $k = 3m$, получим $28m = 27m^2 + q^2$, $m(28 - 27m) = q^2$. Так как $q^2 \geqslant 0$, то либо $m = 0$, либо $m = 1$. Если $m = 0$, то $k = 0$, $p = 0$, $q = 0$, и, значит, $x = y = 0$. Если же $m = 1$, то $k = 3$, $p = 9$, $q^2 = 1$. При $q = 1$, получаем $x = 5$, $y = 4$, а при $q = -1$ — $x = 4$, $y = 5$.

12.86. $(1,0,3,1)$, $(-1,0,-3,-1)$, $(3,1,1,0)$, $(-3,-1,-1,0)$. Из системы получаем:

$$(xz-2yt)^2+2(xt+yz)^2=(x^2+2y^2)(z^2+2t^2)=11,$$

откуда либо $x^2+2y^2=1$, либо $z^2+2t^2=1$.

12.87. Решений нет. Переписав уравнение в виде $(x+y)^3 = 7(x^2y+xy^2)+4$, получим $(x+y)^3\equiv 4 \pmod 7$, что невозможно.

12.88. Решений нет. Если x и y удовлетворяют данному уравнению, то $x^5>y^5$ и, значит, $x>y$. Запишем данное уравнение в виде

$$(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)=1993.$$

Поскольку 1993 — простое число, а $x-y>0$, то $x-y$ равно 1 или 1993. Первый случай невозможен, так как $1993\equiv 3 \pmod 5$, а левая часть исходного уравнения (при $x-y=1$) имеет вид $(y+1)^5 - y^5=5(y^4+2y^3+2y^2+y)+1\equiv 1 \pmod 5$. Второй случай также невозможен: второй множитель в уравнении должен быть равен 1, однако

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=(x^3+y^3)(x+y)+x^2y^2=$$
$$=(x+y)^2(x^2-xy+y^2)+x^2y^2\geqslant x^2y^2>1.$$

12.89. $(\pm1,0)$, $(\pm4,3)$, $(\pm4,5)$. Правая часть неотрицательна, значит, $y\geqslant 0$, откуда левая часть не меньше $(2y-1)^2$ (модуль разности y^2 и любого квадрата целого числа не меньше $(2y-1)$). Из $(2y-1)^2\leqslant 1+16y$ имеем $y\leqslant 5$.

12.90. $(-9,\pm12)$, $(-4,\pm12)$, $(1,\pm12)$, $(-8,0)$, $(-7,0)$, $(-1,0)$, $(0,0)$. Положим $z=x^2+8x$, тогда $z^2+7z=y^2$. При $z>9$ имеем $(z+3)^2<z^2+7z=y^2<(z+4)^2$, т. е. число y^2 заключено между квадратами двух последовательных чисел, что невозможно. Поэтому $x^2+8x=z\leqslant 9$, откуда $-9\leqslant x\leqslant 1$. Далее перебираем $x=-9,\ldots,1$.

12.91. $(0,-1)$, $(-1,-1)$, $(0,0)$, $(-1,0)$, $(5,2)$, $(-6,2)$. Умножив обе части уравнения на 4 и прибавив к ним 1, получим

$$(2x+1)^2=(2y^2+y)^2+3y^2+4y+1=(2y^2+y+1)^2-(y^2-2y).$$

Если y отлично от -1, 0, 1 и 2, то $3y^2+4y+1>0$ и $y^2-2y>0$, при этом $(2y^2+y)^2<(2x+1)^2<(2y^2+y+1)^2$. Эти неравенства означают, что $(2x+1)^2$ лежит между двумя последовательными квадратами, а при это при целых x невозможно.

12.92. $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(2,6)$, $(2,-6)$, $(3,12)$, $(3,-12)$.

12.93. Положим $x=n^2-1$, тогда $y=n(n^2-1)$.

12.94. 15 решений. После возведения в квадрат получим $y = 1960 + x - 28\sqrt{10x}$, тогда $x = 10a^2$ (a — целое) и $\sqrt{y} = (14 - a)\sqrt{10}$. Таким образом, получаем 15 решений при $a = 0, \ldots, 14$.

12.95. Избавимся от двух кубов с помощью подстановки $z = -x$. Получим $2x^2 + y^2 = y^3$, $2x^2 = (y-1)y^2$. Решение найдется, если $(y-1)/2$ будет квадратом, тогда $y = 2k^2 + 1$, $x = k(2k^2 + 1)$.

12.96. При делении на 8 квадраты натуральных чисел дают остатки 0, 1 или 4. Тогда, сумма двух квадратов (следовательно, и $a^2 + b^2 - 8c$) не может давать остатка 6 при делении на 8.

12.97. Пусть данное уравнение имеет решение для конечного числа простых чисел $p_1, \ldots, p_n$. Пусть $P = p_1 \ldots p_n$. Тогда число $P^2 + P + 1$ не делится ни на одно из чисел $p_1, \ldots, p_n$ и, значит, имеет простой делитель q, не совпадающий ни с одним из этих чисел. Отсюда уравнение $x^2 + x + 1 = qy$ имеет целое решение $(P, (P^2 + P + 1)/q)$.

12.98. а) Обозначим левую часть уравнения через $P(x, y)$. Её можно переписать так:

$$P(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y-x)^3 - 3(y-x)x^2 - x^3 = \\ = -y^3 + 3y(x-y)^2 + (x-y)^3.$$

Значит, $P(x,y) = P(y-x, -x) = P(-y, x-y)$. Поэтому если пара чисел (x, y) является решением данного уравнения, то ему удовлетворяют также ещё две пары: $(y - x, -x)$ и $(-y, x - y)$. Все эти три пары различны, так как в противном случае $x = y = 0$, что невозможно при $n \neq 0$.

б) Чтобы убедиться в том, что это уравнение не имеет целых решений, достаточно доказать, что его левая часть ни при каких целых x и y не дает при делении на 9 остаток 2, поскольку $2891 = 9 \cdot 321 + 2$. Для доказательства воспользуемся таблицей, в которой приведены всевозможные остатки от деления на 9 чисел a, $3a$ и a^3.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$3a$	0	3	6	0	3	6	0	3	6
a^3	0	1	8	0	1	8	0	1	8

К 12.98

Из таблицы видно, что остаток 2 в левой части уравнения может получиться тогда и только тогда, когда остатки от деления x^3, $3xy^2$ и y^3 на 9 соответственно равны 1, 0, 1; 0, 6, 8 или 8, 6, 0. В первом случае $3xy^2$ делится на 9, поэтому x или y делится на 3 и не может давать при делении на 9 остаток 1. Во втором и третьем случаях соответственно x или y делится на 3, поэтому $3xy^2$ делится на 9 без остатка, а не дает остаток 6, как нам требуется.

Показательные уравнения

12.99. $(0, 1991)$. При $x > 0$ левая часть меньше 2, при $x < 0$ левая часть нечётна.

12.100. Решений нет $\pmod 5$.

12.101. $(0,1)$, $(1,2)$. При $x \not\equiv 0 \pmod 3$ имеем $y = 2p$, тогда $3^x = (2^x - 1)(2^x + 1)$, отсюда $2^x - 1 = 1$.

12.102. $(0,0)$, $(1,2)$. Записывая уравнение в виде $(1+x)(1+x^2) = 2^y$, получим $1+x = 2^m$, $1+x^2 = 2^{y-m}$, или, подставляя, $2^{y-m-1} \times (1 + 2^{2m-y+1} - 2^{3m-y}) = 1$, и при $m > 0$ имеем $y - m - 1 = 0$ и $2m - y + 1 = 3m - y$ или $m = 1$, $y = 2$, $x = 1$. А при $m = 0$ имеем $x = y = 0$.

12.103. $(4,2)$, $(2,4)$, (n,n), где n — натуральное. Пусть (x,y), где $x \geqslant y$ — решение. Тогда ясно, что в разложении x и y должны участвовать только одинаковые простые множители, т. е. $x = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ и $y = p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k}$. Подставляя в уравнение, имеем: $\alpha_1/\beta_1 = \ldots = \alpha_k/\beta_k = a/b \geqslant 1$, тогда $x = y^{a/b}$. Подстановка в уравнение дает $ay/b = y^{a/b}$ или $a/b = y^{a/b-1}$, откуда $b = 1$ и $a = y^{a-1}$. Легко показать по индукции, что $a < 2^{a-1}$ при $a > 2$, поэтому $a < y^{a-1}$ (при $y > 2$). Для $a = 2$ и $a = 1$ получаем ответ.

12.104. $(1, \pm 3)$. По модулю 2 имеем $y = 2p + 1$.

12.105. $(3, \pm 3)$. $2^x = (y-1)(y+1)$. Отсюда $y - 1 = 2^p$, $y + 1 = 2^n$ (достаточно рассмотреть $y \geqslant 0$) и $p < n$. Тогда $2^n - 2^p = 2$, т. е. $2^p(2^{n-p} - 1) = 2$, откуда $n - p = 1$, $p = 1$.

12.106. $(0, \pm 2)$, $(3, \pm 5)$, $(4, \pm 7)$. При $y = 3p + 2$ имеем:

$$2^x = (3p+1)(p+1).$$

Подходят $p = 0, 1$, а при $p \geqslant 2$ получим $4(p+1) > 3p+1 > 2(p+1)$, значит, $p + 1$ и $3p + 1$ — не степени 2 одновременно. Аналогично рассматривается случай $y = 3p + 1$.

Уравнения в цифрах

12.107. а) $x = 3$, $y = 4$. $100 \leqslant (x+y)^3 < 1000$ или $5 \leqslant x + y \leqslant 9$, далее действуем перебором. б) $x = 5$, $y = 1$, $z = 2$.

12.108. $x = 1$, $y = 2$, $z = 5$. Сумма $x + y + z \leqslant 27$ и является делителем 1000, т. е. она может быть равна 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25.

12.109. 145, 150, 295. Основание другой системы — 15. Пусть x, y, z — цифры сотен, десятков, единиц, c — основание новой системы счисления. Тогда $2(100x + 10y + z) = c^2x + cy + z$, откуда $(200 - c^2)x + (20 - c)y + z = 0$. Если $0 < c \leqslant 14$, то

$$(200 - c^2)x + (20 - c)y + z \geqslant 4x + 6y + z \geqslant 4,$$

если же $c \geqslant 16$ —

$$(200 - c^2)x + (20 - c)y + z \leqslant -56x + 4y + z \leqslant -56 + 36 + 9 = -11.$$

Поэтому $c = 15$. Подставляя его в уравнение, имеем: $-25x + 5y + z = 0$. Отсюда $z = 0$ или 5.

Уравнения в натуральных числах

12.110. 14. Пусть x и y — число сороконожек и драконов, n — число ног у дракона. Тогда $x+3y = 26$, $40x+ny = 298$. Из второго уравнения $x \leqslant 7$, а из первого — $x \equiv 2 \pmod 7$. Подставляя такие x в уравнения, находим только одно целое n — 14 (при $x = 5$).

12.111. Один — первое, двое — второе и двое — третье.

12.112. Пусть спортсмен x раз попал в восьмёрку, y раз — в девятку, z раз — в десятку. По условию задачи $8x+9y+10z = 100$. Отсюда следует, что $8x + 8y + 8z = 8(x + y + z) < 100$, т. е. число выстрелов $x + y + z < 100/8 < 13$. Так как $x + y + z > 11$, то получаем, что $x + y + z = 12$. Но тогда уравнение принимает вид $y + 2z = 4$. Отсюда следует, что y — чётное число, $y = 2t$, $t \geqslant 1$, т. е. $t+z = 2$. Так как $t \geqslant 1$ и $z \geqslant 1$, то единственной возможностью являются равенства $t = 1$, $z = 1$, т. е. $y = 2$, и, значит, $x = 9$, $z = 1$.

12.113. $(1, 2, 3)$. Пусть $x < y < z$. Тогда $x+y < 2z$, $(x+y)/z < 2$, откуда $x + y = z$. Отсюда $x + z = 2x + y$ и $2x$ делится на y. Но $2x < 2y$, значит, $y = 2x$ и $x = 1$.

12.114. Нет. Так как порядок замены знаков не важен, считаем, что вначале поменяли знаки в n строках, затем в p столбцах. Число минусов стало $(n+p)100-np = 1970$, т. е. $(100-n)(100-p) = 8030$, при этом $1 \leqslant n, p \leqslant 100$, но таких n и p нет, поскольку $8030 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 73$ нельзя разложить на два множителя, каждый из которых меньше 100.

12.115. $(5, 4, 7)$. Пусть x, y, z — число рыбаков в группах. Тогда имеем $13x + 5y + 4z = 13$, $x + y + z = 16$. Отсюда получим $9x = 49 - y$. Так как $y = 16 - x - z < 16$, то $33 \leqslant 49 - y \leqslant 49$, и $49 - y$ делится на 9. Но $9x = 36$ ($x = 4$, $y = 13$, $z = -1$) — невозможно, поэтому $9x = 45$, откуда $x = 5$, $y = 4$, $z = 7$.

12.116. $(1,1,1)$, $(2,1,1)$, $(3,2,1)$, $(7,3,2)$. Пусть $a \geqslant b \geqslant c$. При $c = 1$ получим три первых решения. Пусть $c \geqslant 2$. Заметим, что a, b, c попарно взаимно просты. Если, например, p — делитель a и b, то p — делитель ac и b и $ac + 1$ не делится на p, а тем более на b, значит, $a > b > c$. Число $s = ab + ac + cb + 1$ делится на каждое из чисел a, b и c, а в силу их взаимной простоты и на их произведение, поэтому $s \geqslant abc$. Если $b \geqslant 4$, то $a \geqslant 5$, $abc \geqslant 40$ и

$$s = ab + ac + cb + 1 \leqslant abc/2 + abc/4 + abc/5 + 1 = \\ = abc - abc/20 + 1 \leqslant abc - 40/20 + 1 < abc.$$

Значит, $b < 4$, откуда $c = 2$ и $a = 7$.

12.117. Кубиков может быть 60, 72, 84, 90, 120. Пусть параллелепипед имеет размеры $m \times n \times p$ $(m \geqslant n \geqslant p)$. Всего неокрашенных кубиков будет $(m-1)(n-1)(p-1)$. Тогда

$$mnp = 2(m-1)(n-1)(p-1),$$

откуда $2 < p < 5$. (Если $p \geqslant 5$, то $2 \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{p-1}{p} \geqslant 2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 > 1$.) Далее при $p = 3$ и $p = 4$ решаем уравнение относительно m и n.

12.118. 7 дней. Пусть n и p — число дней, когда дежурило 9 и 10 богатырей, причём каждый из них дежурил m раз. Тогда $9n + 10p = 3m$. При $m = 1$ нет решений, при $m = 2$ получим $n = 4$, $p = 3$.

12.119. $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Следует из единственности разложения в цепную дробь.

12.120. $(2,2,1)$, $(1,1,2)$. Пусть $x \leqslant y$, тогда $xyz \leqslant 2y$, т. е. $xz \leqslant 2$, откуда $x \leqslant 2$, $z \leqslant 2$.

12.121. $\{x,y,z\} = \{1,2,3\}$ (6 решений). Пусть $x \leqslant y \leqslant z$, тогда $xyz \leqslant 3z$, т. е. $xy \leqslant 3$.

12.122. $\{x,y,z\} = \{1,2,3\}$ (6 решений).

12.123. а) $\{x,y,z\} = \{2,3,6\}$, $\{2,4,4\}$, $\{3,3,3\}$;

б) $\{x,y,z\} = 1, a, -a$ $(a \neq 0)$.

12.124. $(x,y,z,t) = (3,2,5,1)$, $(2,3,5,1)$, $(3,2,1,5)$, $(2,3,1,5)$, $(1,5,3,2)$, $(5,1,3,2)$, $(1,5,2,3)$, $(5,1,2,3)$ и $(2,2,2,2)$. Сложив уравнения, после преобразований получим:

$$(x-1)(y-1) + (z-1)(t-1) = 2.$$

Либо оба слагаемых равны 1, либо одно равно 2, а другое — 0.

12.125. $(4,1,6,5)$, $(6,5,4,1)$. Возведем уравнения в квадрат и сложим их: $(a^2+d^2)(b^2+c^2) = 1517 = 37 \cdot 41$. Множители 37 и 41 — простые и единственным образом представляются в виде суммы квадратов: $37 = 1^2 + 6^2$, $41 = 4^2 + 5^2$.

12.126. $(1,3)$, $(3,5)$. Пусть $y \geqslant 6$. Тогда $3^x + 5 \equiv 0 \pmod{64}$, что верно лишь при $x = 16n + 11$. Но $3^{16n+11} + 5 \equiv 12 \pmod{17}$, а $2^y \not\equiv 12 \pmod{17}$. Осталось проверить $y = 1, \ldots, 5$.

12.127. $(2;1;1)$. Пусть x, y, z удовлетворяют данной системе уравнений. Тогда из первого уравнения системы следует, что $y < x$ и $z < x$. Так как x, y, z натуральны, то $y \leqslant x-1$, $z \leqslant x-1$. Из этих неравенств и второго уравнения данной системы следует, что $x^2 \leqslant 2(x-1+x-1)$, $(x-2)^2 \leqslant 0$, откуда $x = 2$. Так как $y \leqslant x-1 = 1$, то $y = 1$. Аналогично находим, что $z = 1$. Подстановкой в данную систему убеждаемся, что тройка $(2;1;1)$ является решением системы. Других решений данная система не имеет.

12.128. Доказательство проведём методом от противного. Пусть существуют такие натуральные числа m, n, p, что $m^m+n^n = p^p$. Тогда $p^p > m^m$, $p^p > n^n$. Из этих неравенств следует, что $p > m$ и $p > n$. (Действительно, если бы, например, $p \leqslant m$, то $p^p \leqslant m^p \leqslant m^m$, что противоречит неравенству $p^p > m^m$.) Значит, $p \geqslant m+1$, $p \geqslant n+1$. Поэтому $p^p \geqslant (m+1)^{m+1} = (m+1)(m+1)^m \geqslant 2(m+1)^m > 2m^m$, т. е. $p^p > 2m^m$ и, аналогично, $p^p > 2n^n$. Складывая эти неравенства, получаем $2p^p > 2m^m + 2n^n$. Противоречие.

12.129. $(5,6)$. Положим $x - y = p$, тогда $p^3 \leqslant (3p-1)y^2 + (3p^2 - p)y + p^3 = 61$, значит $p \leqslant 3$.

12.130. $(11,6)$. $2^y(2^{x-y} - 1) = 1984 = 2^6 \cdot 31$.

12.131. Любая пара чисел, определённая рекуррентным способом: $x_1 = 50$, $y_1 = 7$, $x_{n+1} = 50x_n + 357y_n$, $y_{n+1} = 7x_n + 50y_n$.

12.132. $(1,1)$ и $(2,4)$. Данное уравнение равносильно уравнению

$$(7^x - 1)/(7-1) = 2^{y-1},$$

или

$$7^{x-1} + 7^{x-2} + \ldots + 1 = 2^{y-1}.$$

Отсюда вытекает, что $y > 0$. Пара $(1,1)$ является решением уравнения. Если $y > 1$, то справа в уравнении стоит чётное число, а слева — сумма нечётных чисел в количестве x. Значит, x — чётное число и уравнение можно записать в виде

$$(7+1)(7^{x-2} + 7^{x-4} + \ldots + 7^2 + 1) = 2^{y-1},$$

или

$$7^{x-2} + 7^{x-4} + \ldots + 1 = 2^{y-4}.$$

Отсюда вытекает, что $y > 3$. Пара $(2,4)$ является решением уравнения. При $y > 4$ справа в уравнении стоит чётное число, а слева — сумма нечётных чисел в количестве $(x/2)$. Значит, $(x/2)$ —

чётное число, т. е. число x делится на 4, и уравнение можно записать в виде

$$(7^2+1)(7^{x-4}+7^{x-8}+\ldots+7^4+1)=2^{y-4}.$$

Левая часть этого уравнения делится на 5 (т. к. $7^2+1=50$), а правая часть — нет. Значит, уравнение при $y>4$ не имеет решений в натуральных числах.

12.133. Рассматривая остатки при делении на 3 получаем, что y чётно. Пусть $y=2t$, тогда $2^{2t}=x^2+615$ и $(2^t-x)(2^t+x)=615=$ $=3\cdot5\cdot41$. Осталось представить 615 в виде произведения двух множителей, сумма которых равна степени 2, что можно сделать единственным образом: $615=123\cdot5$, откуда $t=6$, $x=59$, $y=12$.

12.134. Пусть $x=kn$, $y=np$, $z=kp$, где k, n, p — натуральные числа. Для таких чисел произведение любых двух делится на третье, значит, числа будут искомыми, если $kn-np+kp=1$, т. е. $kp=n(p-k)$. Рассмотрим те решения, для которых $p-k=1$, тогда $p=k+1$, $n=k^2+k+1$. Итак, получена бесконечная серия решений: $x=k(k^2+k+1)$, $y=(k^2+k+1)(k+1)$, $z=k(k+1)$.

12.135. Поскольку $1991=11\cdot181$, ищем требуемое разложение в виде $1/1991=1/x+1/(11x)+1/(181x)$. Отсюда $x=11+181+$ $+1991=2183$.

Замечание. Существуют и другие тройки чисел, удовлетворяющие условию задачи, например: $1/2123+1/13937+1/384263=$ $=1/1991$.

12.136. а) Решение 1. Решение $(13;3;14)$ данного уравнения порождает бесконечную серию его решений вида $(k^3 13;k^2 3;k^3 14)$, где $k\in\mathbb{N}$

Решение 2. Запишем уравнение в виде $y^3=z^2-x^2$. Так как $y^3=((y^3+1)/2)^3-((y^3-1)/2)^3$, то при нечётном $y>1$ можно взять $z=(y^3+1)/2$, $x=(y^3+1)/2$. Таким образом, любая тройка $((y^3-1)/2;y;(y^3+1)/2)$, где y — нечётное число, $y>1$, является решением данного уравнения. б) Решение $(2^8;2^6;2^5)$ данного уравнения порождает бесконечную серию его решений вида $(k^{20}2^8;k^{15}2^6;k^{12}2^5)$.

12.137. $a=1$ (февраль), $b=4$ (апрель, июнь, сентябрь, ноябрь), $c=7$ (остальные месяцы года).

12.138. Пусть $a+b+c\leqslant11$. Тогда $28a+30b+31c\leqslant11\cdot31=341$. Противоречие. Пусть $a+b+c\geqslant13$. Тогда $28a+30b+31c\geqslant13\cdot28=$ $=364$, причём равенство достигается только при $a=13$, $b=c=0$. Во всех остальных случаях $28a+30b+31c\geqslant366$. Противоречие. Остаётся единственный случай $a+b+c=12$.

12.139. $(a, b, m, n) = (2^r, 2^r, 2r, 2r+1)$ для любого натурального r. Так как $a^2 + b^2 - 2ab > ab$, то $m < n$. Пусть $d =$ НОД$(a; b)$, тогда $a = dA$, $b = dB$, $(A^2 + B^2)^m = (AB)^n d^{2(n-m)}$. Если p — делитель A, то он должен быть делителем B. Но A и B взаимно просты, поэтому $A = 1$. Аналогично, $B = 1$. Так как $2(n-m) > 1$, то d — делитель $(A^2 + B^2)^m = 2^m$, т. е. d — степень 2. Значит, $a = b = 2^r$ для некоторого r. Из соотношения $(2r+1)m = 2rn$ и взаимной простоты $2r+1$ и $2r$ имеем $m = 2Mr$, $n = (2r+1)N$. Отсюда $M = N$, но m и n взаимно просты, поэтому $M = N = 1$.

Уравнения в простых числах

12.140. $(2, 2, 5)$. Так как $z > 2$ и простое, т. е. нечётное, то x — чётное, т. е. $x = 2$.

12.141. Решений нет. Из $y^3 = (z^2 - x)(z^2 + x)$ и простоты y получаем либо $z^2 - x = 1$, $z^2 + x = y^3$, либо $z^2 - x = y$, $z^2 + x = y^2$. У этих систем решений в простых числах нет. Действительно, в первом случае имеем $x = (z-1)(z+1)$, откуда $z = 2$, $x = 3$, $y^3 = 7$. Во втором случае имеем $2x = y(y-1)$, поэтому если $y - 1 > 3$, то x — составное (т. к. тогда $(y-1)/2$ — целое, большее 1). В случае $y = 2$ имеем $x = 1$, а при $y = 3$ — $z^2 = 6$.

12.142. $(3, 3, 5)$. Из $2^{x+1} = (z-y)(z+y)$ имеем $z = 2^{n-1} + 2^{x-n}$, $y = 2^{x-n} - 2^{n-1}$, где n — целое. При $n - 1 \geqslant 1$ y и z — два чётных числа и они не могут быть одновременно простыми. Если $n = 1$, то $z = 2^{x-1} + 1$, $y = 2^{x-1} - 1$ — два последовательных нечётных числа, значит одно из них делится на 3, тогда либо $z = 3$, либо $y = 3$. При $z = 3$, $y = 1$ — не простое.

Общие уравнения второй степени с двумя неизвестными

12.143. Легко проверить, что формулы в задаче задают пифагорову тройку. Пусть у пифагоровой тройки НОД$(x; y; z) = 1$ и для определённости x чётно, а y и z нечётны. Тогда $x^2 = z^2 - y^2 = (z+y)(z-y) = (2a)(2b)$, где $a = (z+y)/2$, $b = (z-y)/2$ — целые числа. Числа a и b взаимно просты: если бы они имели общий делитель, больший 1, то такой же делитель имели бы и числа $z = a + b$, $y = a - b$ и x, т. е. НОД$(x; y; z) \neq 1$. Раскладывая a и b в произведения простых множителей, заметим, что любой множитель должен входить в произведение $4ab = x^2$ только в чётной степени, причём если он входит в разложение a, то не входит в разложение b и наоборот. Поэтому сами числа a и b являются квадратами целых чисел. Положим $m = \sqrt{a}$, $n = \sqrt{b}$, тогда получим равенства $y = a - b = m^2 - n^2$, $z = a + b = m^2 + n^2$ и $x = 2mn$.

13. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ НА ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА. ТЕОРЕМЫ ФЕРМА И ЭЙЛЕРА

13.1. а) Например: $2 + 2 - 2 - 2 = 0$, $(2 + 2) : (2 + 2) = 1$, $(2 : 2) + (2 : 2) = 2$, $(2+2+2) : 2 = 3$, $2 \cdot 2 + (2 - 2) = 4$, $2 \cdot 2 + 2 : 2 = 5$, $2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 6$, $2 + 2 + 2 + 2 = 8$, $22 : 2 - 2 = 9$, $2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 = 10$; б) Нет.

13.2. а) $99 + 99/99$, б) $91 + 5742/638$.

13.3. $97524/10836$.

13.4. а) n раз, поскольку это произведение равно

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} = \frac{(1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)) \cdot (2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2^n,$$

б) Так как среди чисел $1, \ldots, 1984$ на 2 делится $[1984/2] = 992$ числа, на 4 — $[992/2] = 496, \ldots$, на 2^{10} — $[3/2] = 1$, то двойка входит в это разложение

$$992 + 496 + 248 + 124 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 1979 \text{ раз}.$$

13.5. а) $(((((((1 : 2) : 3) : 4) : 5) : 6) : 7) : 8) : 9 = 1/(2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9)$.
б) $1 : (((((((2 : 3) : 4) : 5) : 6) : 7) : 8) : 9) = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$.

13.6. Наименьшее число — $1112213\ldots199222\ldots899991$, наибольшее — $9988997\ldots911888\ldots211119$. Их сумма равна $1\ldots10$ (162 единицы и 1 ноль).

13.7. а) 00000123450, б) 99999785960.

13.8. 1941, 470. **13.9.** 3087.

13.10. а) $9 = (x + 1/x)^2$, $x^2 + (1/x)^2 = 7$, б) 24.

13.11. Индукция.

13.12. а), б) Приведем все слагаемые в суммах M и N к общему знаменателю и рассмотрим ту дробь, в знаменателе которой стоит самая высокая степень 2 (такая дробь только одна). Тогда у этой дроби дополнительный множитель — число нечётное. У всей суммы M (или N) знаменатель — чётное число, а числитель — нечётное, так как состоит из суммы чётных чисел и одного нечётного. в) Рассмотрим в K дробь с самой высокой степенью 3 в знаменателе. Аналогично получим, что знаменатель в K делится на 3, а числитель — не делится.

13.13. 2, 3, 5, 7 и 11. Любое p, большее 11, можно записать в виде $p = (p - 9) + 9$.

13.14. $1, 2, \ldots, 12, 14$. Поскольку $1+\ldots+12+13 = 91$, лишь одно число больше своего номера при упорядочивании по возрастанию.

13.15. Разобьём натуральные числа на группы по три числа:

$$(1,2,3), \ldots, (34,35,36), (37,38,39), \ldots$$

В первых 12 группах находятся 11 простых чисел, а в каждой из следующих не больше одного простого, так как последнее число в каждой группе делится на 3, а из двух других одно чётно. Поэтому при $n \geqslant 12$ число p_n находится в $(n+1)$-й группе или ещё дальше, что и означает, то $p_n > 3n$.

13.16. а) Да, например, 7125. б) Нет. Пусть x — зачёркиваемая цифра, n — число остальных цифр, y — число, остающееся после зачёркивания. Тогда $10^n x + y = 58y$ или $10^n x = 57y$. Но 57 имеет простой множитель 19, которого слева нет.

13.17. 105263157894736842.

13.18. $1\ldots12\ldots2 = \underbrace{1\ldots1}_{100}\cdot(10^{100}+2) = \underbrace{3\ldots3}_{100}\cdot\underbrace{3\ldots34}_{100}$.

13.19. -20. Из условия $a + b + c = 100$ и $a + b/2 = 80$. Вычитая первое уравнение из второго, получим $a - c = -20$.

13.20. $(a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + \ldots + (n-1)(a_{n-1} - a_n) + na_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

13.21. 30 и 35. Пусть ненулевых чисел — n, из них p отрицательны, $(n-p)$ положительны. Тогда отрицательные произведения получатся при умножении отрицательного числа на положительное, т. е. всего $p(n-p) = 1000$ и $p \geqslant 1$, $n - p \leqslant 100$. У уравнения два решения: $n = 70$ и $n = 65$.

13.22. 100 для чисел, оканчивающихся на 2 нуля.

$$(100a + 10b + c)/(a + b + c) = (99a + 9b)/(a + b + c) + 1 \leqslant$$
$$\leqslant (99a + 9b)/(a + b) + 1 = 90a/3(a+b) + 9 + 1 \leqslant 90a/a + 10 = 100.$$

13.23. 6210001000. Из условия $a_1 + \ldots + a_{10} = 10$.Обозначим $a_1 = n$, по условию, среди цифр числа ровно n нулей, значит, эти нули и цифра n занимают $n+1$ разряд в числе, а сумма этих цифр равна n. Поэтому оставшиеся $10 - (n+1) = 9 - n$ цифр (заведомо не нули) в сумме дают $10 - n$, т. е. сумма этих цифр больше их количества, что возможно лишь, если одна из этих цифр — 2, а остальные $8-n$ цифр — 1. Итак, $a_1 = n$, $a_2 = 8-n$, $a_3 = 1$, откуда $a_1 + a_2 + a_3 = 9$, значит, $a_4 + \ldots + a_{10} = 1$, т. е. среди последних цифр одна 1, остальные шесть — 0.

13.24. При нечётном k. Пусть $n+1,\ldots,n+k$ и $m+1,\ldots,m+k$ — две группы чисел. При их сложении получим $p+1,\ldots,p+k$, сумма которых равна сумме всех чисел заданных групп: $(2p+k+1)k/2=(2n+k+1)k/2+(2m+k+1)k/2$, т. е. $2(p-n-m)=k+1$, откуда k должно быть нечётным. Решение при нечётном $k=2q-1$: $n+1,n+3,\ldots,n+2q-1$; $n+2,\ldots,n+2q-2$ и $m+q,m+q-1,\ldots,m+1$; $m+2q-1,\ldots,m+q+1$.

13.25. Пусть A — максимальное множество, которое можно получить. Тогда в нем чередуются чётные и нечётные числа. Легко видеть, что любой (не крайний) элемент равен среднему арифметическому своих соседей, т. е. A является арифметической прогрессией, содержащей n и m. А так как n и m делятся на разность прогрессии, то разность равна 1. Значит, мы получим все числа от 0 до n.

13.26. Пусть M — не степень 2, тогда $M=2^n(2m+1)$. Найдем натуральные a и p, для которых $a+\ldots+(a+p-1)=M$. При $2^n>m$: $a=2^n-m$, $p=2m+1$; при $2^n\leqslant m$: $a=m+1-2^n$, $p=2^{n+1}$. Пусть $M=a+(a+1)+\ldots+(a+k)=(2a+k)(k+1)/2$, тогда $(2a+k)-(k+1)=2a-1$ — нечётно, поэтому одно из чисел чётно, а другое — нечётно и M — не степень 2.

Отметим, что только в случае, если число простое, разложение его в сумму последовательных натуральных чисел единственно.

13.27. 8 способами. Пусть $(p+1)+\ldots+(p+n)=1971$ или $(2p+n+1)n=2\cdot3^3\cdot73$. Так как $2p+n+1>n$ и $73>2\cdot3^3$, то 73 — не делитель n, поэтому $n=1,2,3,6,9,18,27,54$.

13.28. 3025. Квадрат может оканчиваться только на 5, значит, на 25.

13.29. а) $(1996(1996+1)+1)^2$, б) Это число равно $(1994^2-5)^2$, т. к. $(a-3)(a-1)(a+1)(a+3)+16=(a^2-5)^2$.

13.30. $(n-1)n(n+1)(n+2)+1=(n^2+n-1)^2$.

13.31. а) $\underbrace{1\ldots1}_{n}\underbrace{5\ldots5}_{n-1}6=\underbrace{3\ldots3}_{n-1}4^2$, поскольку

$$\underbrace{3\ldots3}_{n-1}4^2=(\underbrace{9\ldots9}_{n}/3+1)^2=((10^n-1)/3+1)^2=$$
$$=((10^{2n}-1)+4(10^n-1))/9+1=1\ldots15\ldots56,$$

б) $\underbrace{4\ldots4}_{n}\underbrace{8\ldots8}_{n-1}9=\underbrace{6\ldots6}_{n-1}7^2$.

13.32. $10\ldots030\ldots030\ldots1=(10\ldots01)^3$ (по n нулей).

13.33. $\underbrace{1\ldots1}_{2000}-\underbrace{2\ldots2}_{1000} = \underbrace{1\ldots1}_{1000}\underbrace{0\ldots0}_{1000}-\underbrace{1\ldots1}_{1000} = (10^{1000}-1)\times$ $\times\underbrace{1\ldots1}_{1000} = (10^{1000}-1)^2/9 = \underbrace{3\ldots3}_{1000}{}^2$.

13.34. Может: $(999^2-499)+\ldots+(999^2+499)=999^3$.

13.35. Пусть $x=a^2+b^2$, $y=c^2+d^2$. Тогда $xy=(ac+bd)^2+$ $+(bc-ad)^2$.

13.36. Нет. Соотношение $m^2+(m+1)^2=n^4+(n+1)^4$ преобразуется к виду $m(m+1)=(n(n+1))\cdot(n(n+1)+2)$. Остаётся доказать, что произведение двух последовательных чисел не может равняться произведению двух чисел, отличающихся на 2.

13.37. $N=10^n$. Пусть N — p-значное число, т. е. $10^{p-1}\leqslant N<$ $<10^p$. Тогда

$$10^{2p-2}\leqslant N\cdot10^{p-1}\leqslant N^2<N\cdot10^p<10^{2p},$$

поэтому N^2 — число $(2p-1)$-значное либо $2p$-значное. Пусть оно $(2p-1)$-значно. Тогда $N^2=N\cdot10^{p-1}+N_1$, или $N(N-10^{p-1})=$ $=N_1$, где N_1 не более чем $(p-1)$-значно. Если $N-10^{p-1}\neq0$, то $N(N-10^{p-1})\geqslant N\geqslant10^{p-1}$ — по крайней мере p-значное число. Поэтому $N-10^{p-1}=0$.

Пусть теперь оно $2p$-значно. Аналогично получим $N(N-10^p)=$ $=N_1$, где N_1 не более чем p-значно. Но $N<10^p$, поэтому N_1 отрицательно, что невозможно.

13.38. Пусть $\overline{a\ldots f}$ — данный набор p цифр. Рассмотрим два числа: $N_1=\overline{a\ldots f0\ldots0}$ и $N_2=\overline{a\ldots f9\ldots9}$ (по p цифр $a\ldots f$ и $3p$ нулей и девяток). Пусть n^2 такой наибольший квадрат, что $n^2<N_1$. Ясно, что $n<10^{2p}$. Тогда $N_1<(n+1)^2=n^2+2n+1<$ $<N_1+2\cdot10^{2p}+1<N_1+10^{3p}-1=N_2$. Поэтому $(n+1)^2$ — искомый квадрат.

13.39. Покажем, что если числа a, b и c не имеют общего делителя, то abc — полный квадрат. Пусть p — простое число и c делится на p^n, тогда из равенства $ab=-c(a+b)$ следует, что одно из чисел a и b делится на p^n, а другое не делится на p; значит, abc делится на p^{2n}. Аналогично рассуждая про делители a и b, получим, что любое простое число входит в произведение abc в чётной степени. Если у чисел a, b, c есть общий делитель, то он войдет в произведение в кубе.

13.40. 10 квартир с суммой цифр 9.

13.41. 44, 50, 47. При двузначном B получим 47.

13.42. 49. Докажите, что больше и меньше 49 не может быть.

13.43. Да, например $1\ldots1$ (50 единиц). **13.44.** 95 210.

13.45. Например число, где стоят 1 в разрядах $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{1000}$, а в остальных разрядах — 0. Его сумма цифр 1001. При возведении в квадрат получим 1 в разрядах с номером 2^{2i} ($i = 0, 1, \ldots, 1000$), 2 — в разрядах 2^{i+j} ($i, j = 0, 1, \ldots, 1000$, $i \neq j$) и 0 в остальных разрядах. Сумма цифр этого квадрата равна 1001^2.

13.46. 201. Пусть $n(A)$ — число цифр, равных A. Из условия следует, что если цифры B и C симметричны относительно середины числа, то $n(B) = C$ и $n(C) = B$. Но тогда эти цифры всюду должны стоять на симметричных местах, поэтому $n(B) = n(C)$ и $B = C$. Отсюда, $n(A) = A$, причём цифра на 15-м (среднем) месте встречается нечётное число раз, а все остальные цифры — чётное число раз. Но тогда Значит, в нашем числе ровно 2 двойки, 4 четвёрки, 6 шестёрок, 8 восьмёрок и 9 девяток. Сумма его цифр равна 201.

13.47. Если $s(X)$ — сумма цифр X, то можно вывести, что $s(A+B) \leqslant s(A) + s(B)$ и $s(AB) \leqslant s(A)s(B)$. Тогда в пункте а) имеем: $s(K) = s(1000K) = s(125 \cdot 8K) \leqslant s(125)s(8K) = 8s(8K)$. б) Аналогично, $s(N) = s(10^5 N) = s(2^5 5^5 N) \leqslant s(32)s(5^5 N) = 5s(5^5 N)$. Оценки улучшить нельзя, так как $s(125) = 8s(1000)$, $s(32) = 5s(10^5)$.

13.48. Преобразуем выражение к виду $(x-2y)(x-y)(x+y) \times (x+2y)(x+3y)$. Легко видеть, что все сомножители различны, а 33 нельзя разложить более, чем на 4 разных сомножителя.

13.49. Легко проверить, что $2^{10} = 1024$, поэтому $2^{100} = 1024^{10}$. Так как 1000^{10} представляет собой число, составленное из единицы с 30 нулями, а $1024^{10} > 1000^{10}$, число 2^{100} не может иметь меньше 31 цифры. С другой стороны,

$$\left(\frac{1024}{1000}\right)^{10} < \left(\frac{1025}{1000}\right)^{10} = \left(\frac{41}{40}\right)^{10} < \frac{41}{40} \cdot \frac{40}{39} \cdot \ldots \cdot \frac{32}{31} = \frac{41}{31} < 10.$$

Значит, $2^{100} < 10 \cdot 1000^{10}$, откуда следует, что 2^{100} содержит меньше 32 цифр. Итак, число 2^{100} состоит из 31 цифры.

Эту задачу очень легко решить, если пользоваться логарифмами: так как $\lg 2 \approx 0{,}3010$, то $\lg 2^{100} = 100 \lg 2 \approx 30{,}10$ и, значит, число 2^{100} имеет 31 цифру.

13.50. Одно из слагаемых равно 164, а каждое из остальных равно 163. (Числа должны быть примерно равными.)

13.51. Не может. Пусть $\overline{abcd}$ — искомое 4-значное число и $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 1008$. Так как $a > d$, то вычитая с конца, получим $a = d + 2$, $c = b + 1$, но тогда цифра сотен у разности должна быть 9, а не 0.

13.52. Так как $1974^n > 10^{3n}$, то p — число цифр в 1974^n не меньше $3n$. Пусть у $2^n + 1974^n$ больше цифр, чем у 1974^n. Тогда $2n + 1974^n \geqslant 10^p$. Легко видеть, что $987^n < 2^{p-n}5^p \leqslant 987^n + 1$, так как 10^p делится на 2^n. Значит, $2^{p-n}5^p = 987^n + 1$, $p - n \geqslant 2n$. Если $n \geqslant 2$, то $2^{p-n}5^p$ делится на 8, но $987 + 1 \equiv 2, 4, 6 \pmod 8$.

13.53. 410 256. Обозначим число через $x = 4 \cdot 10^n + A$, после перестановки первой цифры в конец получим $y = 10A + 4$. Тогда $4 \cdot 10^n + A = 4(10A + 4)$ или $13A = 4 \cdot 3\ldots32$ ($n - 1$ тройка). Деля «в столбик» на 13, находим наименьшее $A = 10256$, откуда $x = 410256$.

13.54. 5 человек. Пусть m — объем молока, p — объем кофе, n — численность семьи. Примем объём чашки за 1, тогда $m+p = n$, $m/4 + p/6 = 1$. Отсюда $m + 2n = 12$, и, значит, m чётно. Но если $m \geqslant 4$, то $n \leqslant m$, что невозможно. Следовательно, $m = 2$, откуда $n = 5$.

13.55. $7 \cdot 143 \cdot 143 = 143\,143$. Пусть x, y — искомые трёхзначные числа. Тогда $7xy = 1000x + y$ или $7y = 1000 + y/x$, y/x — целое число в пределах от 1 до 9, поэтому $1001 \leqslant 7y \leqslant 1009$, $143 \leqslant y \leqslant 144$. Отсюда $y/x = 1$, $y = 143$, $x = 143$.

13.56. Число 180 625 после вычёркивания 8 уменьшается в 17 раз. Пусть b — вычеркнутая цифра, a — часть числа слева от b, c — справа от b, тогда число имеет вид $\overline{abc}$. Рассмотрим отношение исходного числа к полученному:

$$r = \frac{a10^n + b10^{n-1} + c}{a10^{n-1} + c}, \qquad (*)$$

где $c < 10^{n-1}$, $r - 10 = (b10^{n-1} - 9c)/(a10^{n-1} + c) < b/a \leqslant 9/a \leqslant 9$. Итак, $r \leqslant 19$.

Поскольку r число целое, то $a \leqslant 9$. Поэтому для поиска максимального исходного числа нужно найти максимальное n. Перепишем $(*)$ в виде $(b + 10a - ra)10^{n-1} = (r-1)c$. Число c по условию не оканчивается нулем, поэтому разложение c на простые множители либо не содержит двоек, либо не содержит пятёрок.

Случай 1. c не содержит двоек. Рассмотрим максимальную степень двойки у сомножителя $r - 1$. Это 16. Поэтому $n \leqslant 5$. При $n = 5$: $(b - 7a)5^{4q} = c$. Получаем, что c делится на 625, $a = 1$, $b = 8$ или $b = 9$. При $b = 9$ число оканчивается нулем, и потому не подходит. При $b = 8$ получаем $c = 625$ и ответ 180 625.

Случай 2. c не содержит пятёрок, тогда $r - 1$ делится на степень пятёрки не выше первой, поэтому не больше 2, и число заведомо не будет максимальным.

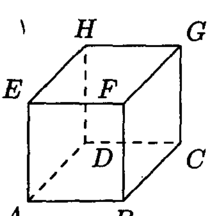
13.57. 57. Разложим 1995 на множители $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$. Значит, цифрами исходного числа могут быть только 3, 5 и 7. Легко видеть, что трёхзначным или однозначным число быть не может (в первом случае его произведение на $3 \cdot 5 \cdot 7$ равно 1995, т. е. оно равно 19, а во втором оно не делится на 19). Из двузначных чисел, составленных из этих цифр, на 19 делится только 57. Легко убедиться, что 57 удовлетворяет условию.

13.58. Так как каждая цифра участвует в разрядах единиц, десятков и сотен по одному разу, то ответ равен $(0+1+\ldots+9)+$ $+(0+10+\ldots+90)+(0+100+\ldots+900)=4995$.

13.59. Да, 50!. Множитель 1 появится в произведении 100 раз, множитель 2 — 99 раз, 3 — 98 раз и т. д. до единственного множителя 100. Значит, произведение можно представить в виде

$$2^{99} \cdot 3^{98} \cdot \ldots \cdot 99^2 \cdot 100 = a^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100 = a^2 \cdot 2^{50} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 50.$$

13.60. Поскольку 300 и 198 делятся на 6, Петя сможет снять лишь сумму, кратную 6 долларам. Максимальное число, кратное 6 и не превосходящее 500, — это 498. Докажем, что снять 498 долларов возможно. Произведем следующие операции: $500-300=200$, $200+198=398$, $398-300=98$, $98+198=296$, $296+198=494$. Сумма, лежащая в банке, уменьшилась на 6 долларов. Проделав аналогичную процедуру 16 раз, Петя снимет 96 долларов. Затем он может снять 300, положить 198 и снова снять 300. В результате у него будет 498 долларов.



К 13.61

13.61. Обозначим вершины куба буквами A, B, C, D, E, F, G, H так, как показано на рисунке, а числа, стоящие в вершинах куба — соответствующими маленькими латинскими буквами. Рассмотрим наименьшее из этих чисел. Без ограничения общности мы можем считать, что это число a (оно находится в вершине A). Тогда числа в соседних с A вершинах (это вершины B, D и E) могут принимать только значения a или $a+1$ (так как $a-1<a$). Значит, какие-нибудь два из чисел b, d и e равны. Пусть равные числа стоят в вершинах B и E (остальные случаи рассматриваются аналогично). В этом случае ответом будут диаметрально противоположные вершины E и C: $e=b$, а числа c и b отличаются не более, чем на 1, поэтому числа e и c отличаются не более, чем на 1.

13.62. Нет, не может. Докажем методом от противного. Предположим, что найдутся два натуральных числа k и n такие, что

$n(n+1) = 2k(2k+2)$. Отметим числа $2k$ и $2k+2$ на числовой оси и рассмотрим два случая: $n \geqslant 2k$ и $n > 2k$. Если $n \leqslant 2k$, то $n+1 < 2k+2$, поэтому $n(n+1) < 2k(2k+2)$. Противоречие. Если $n > 2k$, то $n+1 \geqslant 2k+2$, поэтому $n(n+1) > 2k(2k+2)$. Противоречие.

13.63. Разобьём данные 23 числа на восемь групп из стоящих подряд чисел: три группы по пять чисел и четыре группы по два числа (в каком порядке эти группы расположены, неважно). Каждую группу заключим в скобки, а между группами расставим знаки умножения. Если расставить знаки внутри каждой группы так, чтобы результат операций в группе из двух чисел делился на 2, а в группе из пяти чисел — на 5, то всё выражение будет делиться на $2^4 \cdot 5^3 = 2000$.

Покажем, что такая расстановка знаков в группах существует. Если числа в группе из двух чисел разной чётности, то между ними нужно поставить знак умножения, если одинаковой чётности — сложения. Результат, очевидно, будет делиться на 2. Рассмотрим группу из чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, идущих именно в таком порядке. Выпишем остатки от деления на 5 следующих пяти сумм: a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, $a_1+a_2+a_3+a_4$, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$.

Если один из остатков равен 0, то соответствующая сумма делится на 5. В этом случае нужно расставить знаки сложения между числами, входящими в эту сумму, саму сумму (если требуется) заключить в скобки, а все оставшиеся промежутки между числами группы заполнить знаками умножения. Если же ни один из остатков нулю не равен, то, согласно принципу Дирихле, среди них найдутся два одинаковых остатка. Пусть, например, суммы $a_1+\ldots+a_i$ и $a_1+\ldots+a_j$ $(i<j)$ дают одинаковые остатки при делении на 5. Тогда их разность, представляющая собой сумму подряд стоящих чисел $a_{i+1}+\ldots+a_j$, делится на 5, и мы опять расставляем знаки сложения, заключаем эту сумму в скобки, а оставшиеся позиции заполняем знаками умножения. Таким образом, в любом случае нам удастся расставить знаки в группе из пяти чисел так, чтобы результат делился на 5.

13.64. Докажем, что если $f(n) = n^3 + an^2 + bn + c$, то $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ не могут одновременно быть полными квадратами. Легко убедиться, что $f(4) - f(2) \equiv 2b \pmod 4$ и $f(3) - f(1) \equiv 2b+2 \pmod 4$. Значит, обе эти разности чётны. Поскольку полные квадраты дают остаток 0 или 1 при делении на 4, $f(3)-f(1)$ и $f(4)-f(2)$ делятся на 4. Но тогда $2 \equiv (2b+2) - 2b \equiv (f(3)-f(1)) - (f(4)-f(2)) \equiv 0 - 0 \equiv 0 \pmod 4$. Противоречие.

13.65. $2^{15}3^{10}5^6$.

13.66. Не может. Пусть число, оканчивающееся на 1999, является квадратом натурального числа A и $A = 10B + x$, где x — последняя цифра числа A. Поскольку A^2 оканчивается на 9, то и x^2 оканчивается тоже на 9, поэтому $x = 3$ или $x = 7$. Если $x = 3$, то $A^2 = 10(10B^2 + 6B) + 9$, а $10B^2 + 6B$ чётно, значит, предпоследняя цифра A^2 чётная и не может быть равной 9. Если $x = 7$, то $A^2 = 10(10B^2 + 14B + 4) + 9$, а $10B^2 + 14B + 4$ чётно, значит, предпоследняя цифра A^2 чётная и не может быть равной 9.

13.67. Может. Вместе с компьютером он строит такую последовательность: 123, 225, 327, 429, 531, 135, 237, 327, 429 и т. д.

13.68. Пусть $m(m+1)$ является p-й степенью. Так как m и $m+1$ взаимно просты, то каждое из них должно быть p-й степенью. Но это невозможно: если $m = a^p$, то уже $(a+1)^p > (a+1)a^{p-1} = a^p + a^{p-1} > m + 1$ $(p > 1)$.

13.69. $41^2 = 1681$. Пусть n^2 удовлетворяет условию, тогда $n^2 = 100a^2 + b$, где $0 < b < 100$. Поэтому $n > 10a$ и, значит, $n \geqslant 10a+1$. Это означает, что $b = n^2 - 100a^2 \geqslant 20a + 1$, откуда $20a + 1 < 100$, и поэтому $a \leqslant 4$. При $a = 4$ лишь $n = 41$ удовлетворяет условию: если $n > 41$, то $n^2 - 40^2 \geqslant 42^2 - 40^2 > 100$.

13.70. Нет. Пусть $y \leqslant x$. Тогда $x^2 < x^2 + y \leqslant x^2 + x < (x+1)^2$, т. е. $x^2 + y$ не является квадратом целого числа.

13.71. 108, 135, 180, 117. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — искомые числа, s — их сумма, a — первая цифра каждого их них. Ясно, что $100a \leqslant x_i \leqslant 100(a+1)$, тогда $x_i + 300a \leqslant s < x_i + 300(a+1)$, откуда $1 + 300a/x_i \leqslant s/x_i < 1 + 300(a+1)/x_i$, значит $1 + 3a/(a+1) < s/x_i < 4 + 3/a$. При $a = 1$ имеем $2{,}5 < s/x_i < 7$, а при $a \geqslant 2$ — $3 < s/x_i < 5{,}5$. Так как три из четырёх частных s/x_i — целые и разные, то случай $a \geqslant 2$ невозможен. Поэтому $a = 1$ и целые частные могут быть равны 3, 4, 5 и 6. Но 3 и 6 не могут быть одновременно, так как отношение любых двух трёхзначных чисел от 100 до 199 меньше 2. Остались 2 случая: частные 3, 4, 5 и 6, 5, 4. В обоих случаях s делится на 60. В первом случае числа $12n$, $15n$, $20n$ и $13n$. Первая цифра одинакова лишь при $n = 9$, что и дает ответ. Во втором случае числа $10n$, $12n$, $15n$ и $23n$ не подходят, так как отношение $23n$ и $10n$ больше 2.

13.72. $n = k$ и $k = 1, 8, 9$. Если n^n имеет k цифр, а k^k — n цифр, то $10^{k-1} \leqslant n^n < 10^k$ и $10^{n-1} \leqslant k^k < 10^n$. Пусть для определённости $k \leqslant n$. Тогда $n^n < 10^n$, т. е. $n < 10$ и $k < 10$. Непосредственной проверкой получим, что лишь $10^7 < 8^8 < 10^8$ и $10^8 < 9^9 < 10^9$.

13.73. 15 чисел $(111, \ldots, 999, 407, 518, 629, 370, 481, 592)$. Пусть $A = \overline{abc}$ — искомое число, тогда из условия имеем $222(a+b+c) = 6(100a + 10b + c)$ или $7a = 3b + 4c$, $7(a - b) = 4(c - b)$. Отсюда либо $a = b = c$, либо $a - b = 4$, либо $b - a = 4$.

13.74. 105. Пусть $\overline{xyz}$ — искомое число.По условию задачи $7(10x + z) = 100x + 10y + z$, которое после приведения подобных членов и сокращений принимает вид: $3z = 15x + 5y$. Из уравнения следует, что z делится на 5 и $z > 0$, так как $x > 0$. Поэтому $z = 5$, а цифры x, y удовлетворяют уравнению $3 = 3x + y$, имеющему единственное решение $x = 1$, $y = 0$.

13.75. Рассмотрим сначала случай, когда по кругу записаны 2^n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n-1}, a_{2^n}$. Отправляясь от числа a_1 и вычёркивая каждое второе число, мы за один круг вычеркнем все числа с чётными номерами и снова придём к a_1. Останутся только числа с нечётными номерами, таких чисел, будет 2^{n-1}. После последующего обхода по кругу и соответствующих вычёркиваний снова придём к a_1, а на круге останется 2^{n-2} чисел. Очевидно, после n обходов по кругу останется только одно число a_1. Пусть теперь по кругу записаны числа $1, 2, 3, \ldots, 1909, 1910, 1911, 1912, \ldots, 1978, 1979$. Заметим, что $1979 = 955 + 1024 = 955 + 2^{10}$. Отправляясь от числа 1 и вычёркивая каждое второе число, вычеркнем 955 чисел. После этого на круге останется 2^{10} чисел и первым будет $a_1 = 1911$: $1911, 1912, \ldots, 1978, 1979, 1, 3, \ldots, 1909$. Как показано выше, отправляясь от $a_1 = 1911$, после 10 обходов по кругу и вычёркиваний мы оставим только число $a_1 = 1911$.

13.76. $2 \cdot 10^5$. Пусть n — искомое натуральное число. По условию существуют такие натуральные числа a и b, что $n = 2a^5$, $n = 5b^2$. Из первого из этих равенств следует, что n — чётное число. Тогда из второго равенства вытекает, что и b также чётное число: $b = 2k$. В таком случае $n = 20k^2$, $a^2 = n/2 = 10k^2 = 2 \cdot 5 \cdot k^2$.

Последнее равенство означает, что 2 и 5 — делители числа а (так как никаких других простых делителей, кроме делителей числа a, число a^5 иметь не может). Итак, $a = 2 \cdot 5m$, $k^2 = 10^4m^5$. Но $m \geqslant 1$. Следовательно, $k^2 \geqslant 10^4$ и $n = 20k^2 \geqslant 2 \cdot 10^5$. Число $n = 2 \cdot 10^5$ удовлетворяет условиям задачи: $n/2 = 10^5$, $n/5 = 200^2$.

13.77. Нет. Последовательность n_k, начиная с некоторого номера p стабилизируется, т. е. $n_p = n_{p+1} = \ldots$

13.78. Нет. Покажем, что если нечётное k-значное ($k \geqslant 2$) число N является квадратом некоторого натурального числа, то у числа N предпоследняя цифра чётная. Пусть N — нечётное число, являющееся квадратом числа M, т. е. $N = M^2$. Ясно, что M

нечётно, и пусть $M = 10a + b$, где a и b — цифры и b нечётно. Тогда $N = M^2 = (10a+b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$. Мы видим, что две последние цифры числа N определяются суммой $20ab + b^2$. В этой сумме первое слагаемое $20ab$ оканчивается на 0, а его предпоследняя цифра чётна, а второе — квадрат нечётного однозначного числа и совпадает с одним из следующих чисел $1^2 = 1$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $9^2 = 81$. Итак, число b^2 либо является нечётным однозначным числом, либо двузначным числом, предпоследняя цифра которого чётна, а последняя — нечётна. Значит, при сложении чисел $20ab$ и b^2 получается число, последняя цифра которого нечётна, а предпоследняя — чётна.

13.79. а) $k = 3$; $720 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 8 \cdot 9 \cdot 10$. б) Если $m(m+1) = n(n+1)(n+2)(n+3)$, то $m^2 + m + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$, что невозможно.

13.80. $7744 = 88^2$. Искомое число N по условию имеет вид $\overline{aabb}$, поэтому $N = 1000a+100a+10b+b = 1100a+11b = 11(100a+b)$. Так как число N делится на 11 и является квадратом, то оно делится на 11^2, и, значит, число $100a+b$ делится на 11. Из равенства $100a+b = 99a + (a + b)$ следует, что число $a + b$ делится на 11. Так как a, b — цифры, то $0 < a + b < 19$, и, следовательно, $a + b = 11$.

Итак, $N = 11(99a + 11) = 11 \cdot 11(9a + 1)$. Чтобы число N было квадратом, необходимо (и достаточно), чтобы число $9a + 1$ было квадратом. Перебирая цифры находим единственное подходящее значение $a = 7$. Следовательно, $b = 4$.

13.81. $n = 5$. Легко видеть, что наименьшее значение n, удовлетворяющее условию задачи, равно 5. Докажем, что среди чисел $n > 5$ нет таких чисел. При любом n число 2^n оканчивается или на 2, или на 4, или на 6, или на 8. Так как по условию сумма цифр числа 2^n равна 5, то две последние возможности исключаются.

Если число 2^n, $n > 5$, оканчивается на 4 и сумма его цифр равна 5, то оно не делится на 32, так как последние три цифры его не делятся на 8. В то же время число 2^n, $n > 5$, делится на $2^6 = 64$ и тем более делится на 32. Поэтому, если число 2^n при $n > 5$ удовлетворяет условию задачи, то оно не может оканчиваться на 4.

Предположим теперь, что у числа 2^n, $n > 5$, удовлетворяющего условию задачи, последняя цифра в десятичной записи равна 2. Тогда оно оканчивается либо на 02, либо на 22, либо на 12. Первые два случая, очевидно, невозможны, так как эти числа не делятся на 4. Пусть, наконец, число 2^n оканчивается на 12. Тогда оно оканчивается либо на 012, либо на 112, либо на 212. Если число оканчивается на 012, то оно не делится на 8. Если число оканчивается на 212 и сумма его цифр равна 5, то оно равно 212 и не является, значит, степенью числа 2.

Остаётся ещё одна возможность: число 2^n оканчивается на 112, т. е. имеет вид $10\ldots01112$ (m нулей). Этот случай также невозможен, так как для чисел 1112 ($m = 0$) и 10112 ($m = 1$) это проверяется непосредственно. А при $m > 1$ число $10\ldots01112 = 10^{m+3}+112$ не делится на 32, так как 10^{m+3} делится на 32, а 112 на 32 не делится, и, значит, также не является, степенью 2. Итак, если число 2^n при $n > 5$, удовлетворяет условию задачи, то оно не может оканчиваться на 2.

13.82. Рассмотрим произвольное трёхзначное число $\overline{abc}$ и обозначим через F разность $\overline{abc} - (a^3 + b^3 + c^3)$. Тогда

$$F = 100a + 10b + c - a^3 - b^3 - c^3 =$$
$$= (100a - a^3) + (10b - b^3) + (c - c^3) = f_1(a) + f_2(b) + f_3(c),$$

где $f_1(a) = 100a - a^3$, $f_2(b) = 10b - b^3$, $f_3(c) = c - c^3$. Число F будет наибольшим тогда, когда будут наибольшими величины $f_1(a)$, $f_2(b)$ и $f_3(c)$. Подставляя $a = 1, \ldots, 9$ в $f_1(a)$ находим, что наибольшее значение $f_1(a)$ равно 384 и достигается при $a = 6$. Аналогично наибольшие значения $f_2(b)$ и $f_3(c)$ равны 12 и 0 достигаются при $b = 2$ и при $c = 0$ и $c = 1$. Значит, наибольшее значение разности F равно $384 + 12 + 0 = 396$ и достигается при $\overline{abc} = 621$ и $\overline{abc} = 620$.

Так как числа $f_1(a) = 99a-(a-1)a(a+1)$, $f_2(b) = 9b+(b-b^3) = 9b - (b-1)b(b+1)$, $f_3(c) = -(c-1)c(c+1)$ делятся на 3, то на 3 делится число F и наименьшее положительное значение разности не меньше 3. Значение 3 достигается при $\overline{abc} = 437$, 474, 856.

13.83. Если десятичная запись числа A, не являющегося степенью 10, содержит N цифр, то $10^{N-1} < A < 10^N$, т. е. $N-1 < \lg A < N$. Таким образом, $N = \lg A + a$, где $0 < a < 1$. В нашем случае имеем:

$$m = \lg 2^{1984} + a_1 = 1984 \lg 2 + a_1, \text{ где } 0 < a_1 < 1,$$
$$n = \lg 5^{1984} + a_2 = 1984 \lg 5 + a_2, \text{ где } 0 < a_2 < 1,$$

и поэтому $m + n = 1984(\lg 2 + \lg 5) + a_1 + a_2 = 1984 + a_1 + a_2$. Отсюда следует, что число $a_1 + a_2$ целое, а так как $0 < a_1 + a_2 < 2$, то $a_1 + a_2 = 1$. Следовательно, $m + n = 1985$.

Замечания. 1. Аналогично доказывается, что общее количество цифр в десятичных записях чисел 2^q и 5^p равно $p + q$.

2. Вычислив с достаточной точностью $\lg 2$ и $\lg 5$, можно показать, что число цифр в записи числа 2^{1984} равно 598, а число цифр в записи числа 5^{1984} равно 1387.

13.84. $x = 9$, $y = 0$; $x = 4$, $y = 2$.

13.85. 2178. Пусть $\overline{xyzt}$ — искомое число. Тогда: $4 \cdot \overline{xyzt} = \overline{tzyx}$. Отсюда, следует что x — чётное число. Покажем, что $x = 2$. Действительно, при $x \geqslant 3$ число слева является пятизначным. Значит, $x = 2$.

Произведение $4t$ может оканчиваться цифрой 2 только в случаях $t = 3$ и $t = 8$. Цифра $t = 3$ не подходит, ибо само число не меньше 8000. Остаётся лишь возможность $t = 8$. В этом случае условие задачи: $4(2000 + 100y + 10z + 8) = 8000 + 100z + 10y + 2$ или $2z = 13y + 1$. Отсюда $y = 1$, $z = 7$.

13.86. Прямоугольник удовлетворяет условиям, если для его сторон x и y ($x \geqslant y$) выполнены неравенства $xy > m$ и $x(y-1) < m$. При любом $m > 12$ эта система имеет решения: $x = n-1$, $y = n+2$ при $m = n^2$; $x = n$, $y = n + 1$ при $n^2 < m < n(n+1)$; $x = n - 1$, $y = n+3$ при $m = n(n+1)$ и $x = y = n+1$ при $n(n+1) < m < (n+1)^2$.

13.87. 142 857. Пусть $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ — искомое число. По условию $\overline{a_na_1\ldots a_{n-1}} = 5\overline{a_1a_2\ldots a_n}$. Отсюда после преобразований получаем: $a_n \cdot 9\ldots 95$ ($n-2$ девяток) $= 49 \cdot \overline{a_1a_2\ldots a_n}$. Так как левая часть должна делиться на 49, а a_n — цифра, то $9\ldots 95$ должен делиться по крайней мере на 7. Наименьшее число вида $99\ldots 95$, делящееся на 7 — это 99995, которое получается при $n = 6$. Значит, в записи числа содержится по крайней мере 6 цифр. Тогда равенство принимает вид: $99995a_6 = 49 \cdot \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ или $14285a_6 = 7 \cdot \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$. Число 14285 не делится на 7, значит, $a_6 = 7$.

13.88. Да. Имеется всего 6 четырёхзначных чисел (с 0), делящихся на 1992: 0000, 1992, 3984, 5976, 7968, 9960. Поэтому достаточно взять число, у которого ни одно из цифр не совпадает ни с одной из цифр выписанных чисел, стоящих на соответствующих местах (например, 2111).

13.89. 29. Поскольку однозначные числа не имеют общих цифр, то $N > 9$. А так как числа, соседние с числом 9, должны содержать девятку в своей записи, то меньшее из них не может быть меньше, чем 19, а большее — меньше, чем 29. Следовательно, $N \geqslant 29$. Равенство $N = 29$ возможно, поскольку условиям задачи удовлетворяет, например, такой порядок расстановки чисел от 1 до 29 по кругу:

$$1, 11, 10, 20, 21, 12, 2, 22, 23, 3, 13, 14, 4, 24, 25, 5,$$
$$15, 16, 6, 26, 27, 7, 17, 18, 8, 28, 29, 9, 19.$$

13.90. $2 \cdot 3^{658}$. Пусть наибольшее значение произведения достигается для следующей записи в виде слагаемых числа 1976: $1976 =$

$= a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Покажем, что все a_i больше 1. Действительно, если хотя бы одно из них было бы равно 1, то, объединив его с любым другим слагаемым в одно слагаемое, мы получили бы большее произведение, поскольку $1 + a > 1a$. С другой стороны, каждое a_i, меньше 5, так как для $a_k \geqslant 5$ выполнено неравенство $a_k < 3(a_k - 3)$, т. е., заменив a_k на два слагаемых 3 и $a_k - 3$, мы увеличили бы произведение. Наконец, заметим, что при замене четвёрки суммой двух двоек произведение не изменится, поэтому можно считать, что все a_k принимают значения 2 и 3. Остаётся обнаружить, что количество двоек не больше двух. Действительно, $2+2+2 = 3+3$, но $2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3$. Поскольку $1976 = 658 \cdot 3 + 2$, нужное нам произведение равно $2 \cdot 3^{658}$.

13.91. $(7; 50)$, $(37; 50)$, $(50; 7)$, $(50; 37)$. Эта задача после прочтения её условия вызывает желание просто перебрать все возможные комбинации.

Сначала оценим число q. Поскольку $44^2 < 1977 < 45^2$, то $q \leqslant 44$. Пусть $q = 44$. В этом случае $r = 41$, и условие $a^2 + b^2 = (a+b)q + r$ можно записать в виде $(a - 22)^2 + (b - 22)^2 = 1009$. Введя обозначения $a - 22 = x$ и $b - 22 = y$, получим уравнение $x^2 + y^2 = 1009$. Так как квадраты целых чисел могут оканчиваться лишь на 0, 1, 4, 5, 6 и 9, то сумма двух квадратов будет оканчиваться на 9 только тогда, когда слагаемые оканчиваются на 0 и 9 или на 5 и 4. Поэтому достаточно в качестве одного из неизвестных рассматривать числа, оканчивающиеся на 0 или 5, а поскольку его квадрат не превосходит 1009, само число может быть лишь одним из 7 чисел: 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30. Рассматривая в качестве x эти 7 чисел, нетрудно убедиться, что число $1009 - x^2$ окажется квадратом целого числа лишь при $x = \pm 15$; при этом $y = \pm 28$. Из соображений симметрии находим второй набор возможных решений: $x = \pm 28$, $y = \pm 15$. Отсюда получаем 4 возможных значения для пары (a, b): $(7, 50)$, $(37, 50)$, $(50, 7)$ и $(50, 37)$. Можно было бы предположить, что дальше будет рассмотрен случай $q = 43$, $r = 128$, затем $q = 42$ и т. д., однако все эти случаи удается рассмотреть вместе, доказав, что при $q \leqslant 43$ решений нет.

Итак, пусть $q \leqslant 43$, тогда $r \geqslant 128$. Воспользовавшись известным неравенством $(a + b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$, получим $(a + b)^2/2 \leqslant (a + b)q + r$. Далее, умножив, обе части последнего неравенства на 2 и разделив на $a + b$, имеем $(a + b) \leqslant 2q + 2r/(a + b)$. Так как $r < a+b$, то $r < a+b \leqslant 2q+2r/(a+b) < 2q+2 \leqslant 88$, т. е. $r < 88$ — противоречие с $r \geqslant 128$.

13.92. Заметим сначала, что число k взаимно просто с 10. В самом деле, существует число, делящееся на k и начинающееся с 1, обращённое число также делится на k и оканчивается на 1. Возьмём число $\overline{500ab\ldots z}$, делящееся на k, тогда на k делятся: $\overline{z\ldots ba005}$, $\overline{z\ldots ba00500\ldots 0} + \overline{500ab\ldots z} = \overline{z\ldots ba01000a\ldots z}$, обращённое последнее число $\overline{z\ldots bz00010a\ldots z}$, $\overline{z\ldots a00010a\ldots z} - \overline{z\ldots a01000a\ldots z} = \overline{990\ldots 0}$, откуда 99 делится на k.

13.93. а) Из всех чисел вида $2^{k_1}+\ldots+2^{k_n}$, делящихся на 2^m-1, выберем числа с наименьшим n, а из полученных чисел выберем число с наименьшим $k_1+\ldots+k_n$. Все числа в наборе $(k_1,\ldots,k_n)$ различны. Если $n<m$, то $k_i \leqslant m-1$ и $2^{k_1}+\ldots+2^{k_n} < 2^m-1$. б) Нет. Пусть $P = a_1 10^r + \ldots + k_r$ — наименьшее из чисел, делящихся на $M = 11\ldots 1$ (m единиц) и имеющих сумму цифр, меньшую m. Тогда $m \leqslant r$ и число $P_1 = P - (10^r - 10^{r-m})$, делящееся на M, меньше P и имеет сумму цифр, не большую сумму цифр P.

13.94. а) $49 = 7^2$, $1681 = 41^2$. Пусть $(10x+t)^2 = 100x^2+20xt+t^2$, где $20xt+t^2$ — квадрат натурального числа, меньшего 10, x и t — целые числа от 1 до 9 и $x^2 > 10$. Тогда $x \geqslant 4$ и $xt \leqslant 4$, что возможно лишь при $x = 4$ и $t = 1$.

б) Да, например $256\,036 = 506^2$.

в) Чтобы получить нужное особое число вида $(10^5x+1)^2 = 10^{10}x^2 + 2\cdot 10^5x + 1$, достаточно найти целое x такое, что $10^9 < x^2 < 10^{10}$ и $2\cdot 10^5x + 1 = y^2 < 10^{10}$. Можно взять $x = 5\cdot 10^4 - 1$ (искомым 20-значным числом будет $(4\,999\,900\,001)^2$).

г) Для любого k особым $4k$-значным числом может быть лишь $(10^kx+t)^2 = 10^{2k}x^2 + 2\cdot 10^kxt + t^2$ при $10^{2k-1} \leqslant x^2 < 10^{2k}$, откуда $x > 3\cdot 10^{k-1}$ и $6\cdot 10^{2k-1}t < 10^{2k}$, откуда $t = 1$. При этом равенство $2\cdot 10^kx + 1 = (2u+1)^2$, эквивалентное $2^{k-1}5^kx = u(u+1)$, выполняется в трёх случаях: 1) $u+1$ делится на $5\cdot 10^{k-1}$; 2) u делится на 2^{k-1}, $u+1$ — на 5^k; 3) u делится на 5^k, $u+1$ — на 2^{k-1}. Каждый случай дает не более одного решения, удовлетворяющего условию $u < 5\cdot 10^{k-1}$, эквивалентному $2u+1 < 10^k$ (в случаях 2 и 3) достаточно рассмотреть разность двух решений, чтобы прийти в противоречие с этим условием. Поэтому существует не более трёх (более детальные рассуждения показывают, что не более двух) особых чисел.

д) Для любого k существует по крайней мере одно $(4k+2)$-значное число, а именно $z^2 = v + w^2$, где $v = 25\cdot 10^{2k-1}$, w — наименьшее натуральное число, большее $\sqrt{v}$. Пусть $y = w^2 - v$, при этом $z^2 = 4vw^2 + y^2 = 10^{2k+1}w^2 + y^2$ «состоит» из w^2 и y^2 и будет особым, если выполнены неравенства $0 < y^2 < 10^{2k+1}$ и

$10^{2k} \leqslant w^2 < 10^{2k+1}$. Так как $w - 1 < \sqrt{v}$ и $(w-1)^2 \leqslant v - 1$, то $y < 2\sqrt{v}$ и $y^2 < 4v = 10^{2k+1}$; далее $10^{2k} < v < w^2 = v + y < < v + 2\sqrt{v} < 3v < 10^{2k+1}$. С помощью компьютера можно найти при $k = 7$ число, квадрат которого — 30-значное особое число: $z = 25 \cdot 10^{13} + 15811389^2 = 500000022109321$.

Малая теорема Ферма

13.95. $ka - kb$ делится на kn, т. е. $k(a - b) = mkn$, поэтому $a - b = mn$.

13.96. а) 1. $2^{100} \equiv 1 \pmod{101}$ (101 — простое). б) 9. $3^{102} = = 9 \cdot 3^{100} \equiv 9 \pmod{101}$.

13.97. $300^{3000} = (300^{500})^6 \equiv 1 \pmod 7$, аналогично $300^{3000} \equiv 1$ (mod 11) и (mod 13). Значит, $300^{3000} - 1$ делится на 7, 11, 13, т. е. на 1001.

13.98. 7. $8(8^{31})^{29} \equiv 8 \cdot 8^{31} \equiv 8^3 \cdot 8^{29} \equiv 64^2 \equiv 6^2 \equiv 7 \pmod{29}$.

13.99. $(7^{12})^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ и $(7^{10})^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, но $11 \cdot 13 = = 143$.

13.100. Это число делится на 31.

13.101. $(a + b)^p \equiv a + b \pmod p$, но $a^p \equiv a \pmod p$ и $b^p \equiv b$ $(\mathrm{mod}\ p)$, откуда $a^p + b^p \equiv a + b \pmod p$. Второй способ — с помощью бинома Ньютона.

13.102. Для целого x верно $x^5 \equiv x \pmod{30}$.

13.103. а) Докажите, что $p^q + q^p - p - q$ делится на p и на q.

13.104. Положите $b = a^{p-2}$.

13.105. $(n^8 + 1)(n^8 - 1) = n^{16} - 1 \equiv 0 \pmod{17}$.

13.106. а) $1\ldots1$ (p единиц) $= (10^p - 1)/9$, а $10^p - 1$ не делится на p, так как $10^p - 1 \equiv 10 - 1 = 9 \pmod p$. б) $1\ldots1$ ($p - 1$ единица) $= = (10^{p-1} - 1)/9$, а $10^{p-1} - 1$ делится на p, так как p взаимно просто с 10 и 9.

13.107. Указание. $10^p \equiv 10 \pmod p$, $10^{2p} \equiv 100 \pmod p, \ldots$, $10^{8p} \equiv 10^8 \pmod p$.

Теорема Эйлера

13.108. 4 ломаные. Ломаные с одинаковыми звеньями получатся, если соединять последовательно каждую точку с k-й по счёту после неё до тех пор, пока не вернемся в исходную точку. Перебором $k = 1, \ldots, 19$ получим, что 20-звенные ломаные получаются при $k = 1$ (правильный 20-угольник), 3, 7 и 9. При любом

n разных по форме правильных n-звенных замкнутых ломаных будет $\varphi(n)/2$.

13.109. Взаимно простые с p^α — это те, которые не кратны p. Чисел, кратных p и меньше p^α будет $(p^\alpha/p)-1 = p^{\alpha-1}-1$. Тогда $\varphi(p^\alpha) = (p^\alpha - 1) - (p^{\alpha-1} - 1) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

13.110. Расположим числа от 1 до m так: в 1-й строке от 1 до n, во 2-й — от $n+1$ до $2n$, $\ldots$, в m-й — от $(m-1)n+1$ до mn. Тогда в каждой строке $\varphi(n)$ чисел, взаимно простых с n, а в каждом столбце $\varphi(m)$ чисел, взаимно простых с m. Так как m и n взаимно просты, то число взаимно просто с mn тогда и только тогда, когда оно стоит на пересечении столбца с номером, взаимно простым с n, и строки с номером, взаимно простым с m.

13.111. Следует из 13.109 и 13.110.

13.112. Доказательство почти такое же, как у теоремы Ферма. Рассмотрим остатки от деления на m и взаимно простые с m: $a_1 = 1, \ldots, a_{\varphi(m)}$. Пусть остаток от деления a на m есть a', тогда из взаимной простоты a и m следует, что a' совпадает с одним из a_i. Легко видеть, что $(a')^{\varphi(m)} \equiv a^{\varphi(m)} \pmod m$. Рассмотрим $\varphi(m)$ чисел: a', a_2a', $\ldots$, $a_{\varphi(m)}a'$. Все остатки от деления на m у них разные, поэтому, перемножив их, получим $a' \cdot a_2a' \cdot \ldots \cdot a_{\varphi(m)}a' = 1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{\varphi(m)}(a')^{\varphi(m)} \equiv 1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{\varphi(m)} \pmod m$. Так как все a_i взаимно просты с m, то по лемме имеем $(a')^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

13.113. $341 = 11 \cdot 31$. $2^{341} - 2 = 2(2^{340} - 1)$. Достаточно доказать, что $2^{340} - 1$ делится на 11 и на 131. Но $2^{340} = (2^{34})^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, $2^{340} = 2^{5 \cdot 68} = 32^{68} \equiv 1^{68} \pmod{31}$.

13.114. Если a делится на 561, то это очевидно. Пусть a не делится на 561. Тогда достаточно доказать, что $a^{560} - 1$ делится на 11, 3 и на 17 $(11 \cdot 3 \cdot 17 = 561)$, $(a^{56})^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, $(a^{280})^2 \equiv 1 \pmod 3$, $(a^{36})^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ (при a взаимно простом с 11, 3 и 17). Если a делится, например, на 17, то $a^{561} - a$ делится на 17.

13.115. а) Доказательство аналогично доказательству теоремы Ферма. Рассмотрим числа $1, \ldots, 131$. Тогда

$$\begin{aligned}
2^{131} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 131 &= 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 262 = \\
&= 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 130 \cdot (263 - 131) \cdot (263 - 129) \cdot \ldots \cdot (263 - 1) \equiv \\
&\equiv 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 130 \cdot (-131) \cdot (-129) \cdot \ldots \cdot (-1) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 131 \cdot (-1)^{66} \equiv \\
&\equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 131 \pmod{263}.
\end{aligned}$$

б) Пусть $m = 3^{n+1}$. По теореме Эйлера $2^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, но $\varphi(3^{n+1}) = 3^{n+1} - 3^n = 3^n \cdot 2$ и поэтому $(2^{3^n})^2 - 1 = (2^{3^n} - 1)(2^{3^n} + 1)$ делится на 3^{n+1}. А $2^{3^n} - 1$ не делится на 3, так как по индукции $2^{3^n} \equiv -1 \pmod{3}$, значит, на 3^{n+1} делится $2^{3^n} + 1$.

13.116. Простое p не может иметь вид $4k$ и $4k + 2$. Пусть $p = 4k + 3$. Тогда по теореме Ферма $z^{p-1} = z^{4k+2} \equiv 1 \pmod{p}$, но $z^{4k+2} = (z^2)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{p}$ из условия. Противоречие. Поэтому p может иметь вид только $4k + 1$.

13.117. При $p = 2$ любое из чисел $2^{2k} - (2k)$ делится на p. Пусть $p > 2$, тогда по теореме Ферма $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, $2^{m(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$. Если же $m \equiv -1 \pmod{p}$, то $2^{m(p-1)} - m(p-1) = 2^{m(p-1)} + m - mp \equiv 0 \pmod{p}$. Итак, при $p > 2$ любое из чисел $2^n - n$, где $n = (kp - 1)(p - 1)$ (k — натуральное), делится на p.

13.118. 1972 раза. Любое число n выписано столько раз, сколько имеется чисел, меньших n и взаимно простых с n — $\varphi(n)$. Но 1973 — простое число.

13.119. Пусть решение есть. Тогда x чётно, иначе $x^2 = (2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1 \equiv 1 \pmod{4}$, откуда $y^3 = x^2 + 5 \equiv 2 \pmod{4}$, что невозможно (так как в этом случае y чётно, откуда $y^3 \equiv 0 \pmod{4}$). Из чётности x следует, что $y^3 = x^2 + 5 \equiv 1 \pmod{4}$, поэтому $y \equiv 1 \pmod{4}$. Обозначим $x = 2n$, $y = 4m + 1$, тогда из уравнения имеем $4(n^2 + 1) = x^2 + 4 = y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1) = 4m(16m^2 + 12m + 3)$, откуда $n^2 + 1 = md$, где $d = 16m^2 + 12m + 3 \equiv 3 \pmod{4}$. Заметим, что хотя бы один из простых делителей числа d должен иметь вид $p = 4l + 3$. Действительно, так как d нечётно, то все его простые делители нечётны. Если бы все они были равны 1 по модулю 4, то и d было бы равно 1 по модулю 4. Итак, $n^2 + 1 = md \equiv 0 \pmod{p}$, поэтому $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$ и $n^{p-1} = n^{4l+2} = (n^2)^{2l+1} \equiv -1 \pmod{p}$, что противоречит малой теореме Ферма.

КОМБИНАТОРИКА И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

14. КОМБИНАТОРИКА

14.1. Правила суммы и произведения

14.1. а) 18, б) 36, в) 45. **14.2.** а) 11, б) 21, в) 20.

14.3. а) 10, б) 120, в) 54.

14.4. По правилу произведения имеем $100^2 = 10\,000$ способов.

14.5. 20. **14.6.** а) 8, б) 9. **14.7.** 48. **14.8.** 25; 20. **14.9.** 480; 437.

14.10. 1024; 4032.

14.11. Белый квадрат выбираем 32 способами и вычёркиваем соответствующие горизонталь и вертикаль. На оставшейся части доски есть 24 чёрных квадрата. Всего $32 \cdot 24 = 768$ способов выбора.

14.12. По правилу произведения $12 \cdot 9 \cdot 10 = 1080$.

14.13. $6 \cdot 5 = 30$. **14.14.** 147.

14.15. Можно купить либо по экземпляру каждого романа, либо том, содержащий два романа и экземпляр третьего романа. По правилам суммы и произведения получаем $6 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 134$ способа.

14.16. Можно купить ещё том, содержащий романы «Рудин» и «Отцы и дети» и один экземпляр «Дворянского гнезда». Добавляется $3 \cdot 3 = 9$ способов, а всего имеем 143 способа.

14.17. Большее число выборов, если взято яблоко, так как $11 \cdot 10 > 12 \cdot 9$.

14.18. $6 \cdot 8 \cdot 10 = 480$; если первые два волчка упали на сторону «1», то третий волчок может упасть 10 способами: аналогично рассматриваются случаи, когда на такую сторону падают другие два волчка; всего получаем $6 + 8 + 10$ способов, но при этом один способ (когда на сторону «1» падают все три волчка) считается трижды; поэтому остается 22 способа.

14.19. 10. По 2 способа, если 2, 3, 4 белых грани, и по 1 в других случаях.

14.20. Если повторяющаяся 3 раза цифра — 0, то, добавляя одну из 9 других цифр, получим 9 чисел. Если повторяется не 0, то чисел $9 \cdot 4 \cdot 9$. Всего 333 числа.

14.2. Размещения, перестановки, сочетания

14.21. Так как порядок красок не играет роли, то $C_5^3 = 10$ способов.

14.22. а) Здесь порядок красок уже важен; поэтому имеем $A_5^3 = 60$ способов. б) Если одна полоса красная, то имеем $3 \cdot A_4^2 = 36$ способов.

14.23. $A_5^2 = 20$ словарей. **14.24.** $A_{10}^2 - A_5^2 = 70$.

14.25. Получаем размещения с повторениями из 13 карт по 4. Всего $13^4 = 28\,561$ способ. Если среди карт не должно быть пар, то имеем размещения без повторений; их число $A_{13}^4 = 17\,160$.

14.26. Так как достаточно выбрать одну чёрную и одну красную карту, то получаем $13^2 = 169$ способов выбора.

14.27. В одной команде играет один юноша, а в другой — двое. Юношей можно разбить на команды тремя способами. После этого надо выбрать в первую команду трёх девушек из пяти. Это можно сделать $C_5^3 = 10$ способами. Всего по правилу произведения получаем $3 \cdot 10 = 30$ способов разбивки на команды.

14.28. Число способов разбить n различных предметов на k групп равно k^n. В нашем случае имеем $3^6 = 729$ способов.

14.29. Из исходного множества $(0, 1, 2, \ldots, 9)$ набираются выборки с повторениями, содержащие по 7 элементов.

14.30. $10(10^7 - 1)/7$. Найти сумму чисел, представляющих количество различных выборок по одному, двум и далее до семи элементов исходного множества.

14.31. 243. **14.32.** A_{10}^7.

14.33. 2^n. Исходное множество состоит из двух элементов, а выборки с повторениями — из n элементов.

14.34. 720.

14.35. а) Разобьём все способы упорядочить ораторов на пары, состоящие из способов, которые получаются друг из друга перестановкой А и Б. В каждой паре есть ровно один способ, удовлетворяющий поставленному условию. Поэтому имеем $5!/2 = 60$ способов.

б) Если А выступает непосредственно перед Б, мы можем считать их за одного оратора. Поэтому имеем $4! = 24$ способа.

14.36. а) Выбор мест для мужчин и для женщин можно сделать двумя способами. После этого мужчин можно посадить на выбранные места $5!$ способами. Столько же способов рассадить женщин. Всего $2(5!)^2 = 28\,800$ способов. б) Получаем в 10 раз меньше способов, чем в пункте а), т. е. 2880 способов.

14.37. Общее число способов вынуть 10 карт равно C_{52}^{10}. Число способов, при которых не выбирают ни одного туза, равно C_{48}^{10}. Поэтому хотя бы один туз будет в $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$ случаях. Ровно один туз в $C_4^1 C_{48}^9$ случаях, не менее двух тузов в $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} - 4C_{49}^9$ случаях и ровно два туза в $C_4^2 C_{48}^8$ случаях (выбираем двух тузов C_4^2 способами и ещё 8 карт из 48 — C_{48}^8 способами).

14.38. 3^m способов. **14.39.** 2^{32}.

14.40. Выберем, кто из трёх пассажиров, которым неважно как сидеть, сядет лицом к паровозу. Это можно сделать тремя способами. На каждой скамье можно пересаживать пассажиров $5!$ способами. Всего получаем $3(5!)^2 = 43\,200$ способов.

14.41. $A_9^4 = 3024$. **14.42.** $C_{52}^{15} = 2\,598\,960$.

14.43. Номеров, содержащих одну букву — $32 \cdot 10^4$, две буквы — $32^2 \cdot 10^4$ и три буквы — $32^3 \cdot 10^4$. Всего по правилу суммы есть $33\,820 \cdot 10^4$ номеров.

14.44. а) $2 \cdot 29!$; б) $28 \cdot 29!$.

14.45. 968. Найти сумму чисел различных аккордов, содержащих по 3, 4 и далее до 10 звуков. Один аккорд, состоящий из k звуков, — выборка k элементов из исходного множества, содержащего 10 элементов; порядок элементов в выборе несущественен.

14.46. $40 \cdot 39 \cdot C_{38}^5$. Председатель и секретарь образуют выборку без повторений, состоящую из двух элементов исходного множества, содержащего 40 элементов. 5 членов комиссии образуют выборку без повторений некоторого состава из исходного множества, содержащего 38 членов.

14.47. Свойство вытекает из формулы для C_n^r либо использовать то, что r-сочетания и $(n - r)$-сочетания образуют взаимно дополнительные пары.

14.48. Разбить r-сочетания на два класса — содержащие некоторый элемент и не содержащие его.

14.49. Справа стоит число всех n-размещений с повторениями из элементов двух типов. Разобьём их на классы, отнеся в k-й класс те, в которые входят k элементов первого типа и $n - k$ элементов второго типа. Число размещений k-го класса — C_n^k.

14.50. Справа стоит число всех m-сочетаний с повторениями из элементов $n+1$ типа. Разобьём их на классы, отнеся в k-й класс сочетания, в которые k раз входят элементы первого типа. Число сочетаний k-го класса — это число $(m-k)$-сочетаний с повторениями из элементов $n+1$ типа.

14.51. Справа стоит количество путей, ведущих из вершины треугольника Паскаля к числу, стоящему на n-м месте в $2n$-й строке. Каждый такой путь проходит ровно через одно число n-й строки. Количество путей, проходящих через число, стоящее на k-ом месте, равно $(C_n^k)^2$.

14.52. Указание. Разложите каждый член в сумму по 14.48.

14.53. Рассмотрим m-размещения с повторениями из элементов n сортов. Число m-размещений с повторениями, не содержащих элементов первых k сортов, т. е. состоящее из элементов остальных $n-k$ сортов, равно $(n-k)^m$.

14.54. Указание. Используйте математическую индукцию.

14.3. Перестановки и сочетания с повторениями. Комбинированные задачи

14.55. Сначала положим в каждый кошелёк по одному пятаку. Затем распределим 7 пятаков по 5 кошелькам. Это можно сделать $C_{11}^4=330$ способами.

14.56. $C_{14}^2=91$. **14.57.** C_{30}^8. **14.58.** C_{34}^4.

14.59. а) Из 5 дней надо выбрать два, когда дают яблоки. Всего $C_5^2=10$ способов. б) Аналогично получаем C_{m+n}^m. в) $P(2,3,4)=$ $=1260$.

14.60. $\overline{C}_{10}^{12}$, $\overline{C}_{10}^{8}$, C_{10}^8. **14.61.** $P(2,2,2,1,1)=5040$.

14.62. Каждый из n пассажиров может выбрать любую из m остановок. Поэтому имеем m^n способов распределения. Если учитывать лишь количество пассажиров, вышедших на каждой из остановок, то получаем C_{m+n-1}^{m-1} способов.

14.63. Это число равно $P(m,n,p)=(m+n+p)!/(m!\,n!\,p!)$.

14.64. Камни можно переставлять $P(5,6,7)$ способами. При циклических перестановках и при симметриях (всего 36 преобразований) браслет остается неизменным. Получаем $P(5,6,7)/36=$ $=18!/(36\cdot 5!\,6!\,7!)$ способов.

14.65. 2520.

14.66. 165 Указание. Выборка с заданным числом повторений объёма 8 набирается из четырёх групп однородных элементов.

14.67. $C_{16}^7 = C_{16}^9$. Выборка с заданным числом повторений объёма 7 набирается из 10 групп одинаковых элементов.

14.68. $52!/(13!)^4$. Это число выборок состава $(13, 13, 13, 13)$.

14.69. C_{m+1}^n. Рассмотрим выборку с заданным числом повторений, имеющую состав $(m+1, n)$, где $m+1$ — число промежутков между m белыми шарами, а n — число чёрных шаров. Число различных расстановок равно числу всевозможных выборок состава $(m+1, n)$.

14.70. $2 \cdot (6!)^2$. Определить, ученики с каким вариантом будут сидеть слева можно двумя способами, а рассадить 6 учеников каждого ряда на места — $6!$ способами.

14.71. Воспользоваться неравенством $C_{2n+k}^n C_{2n-k}^n \leqslant (C_{2n}^n)^2$.

14.72. Ребёнок может получить либо одно, либо два, либо три имени, причём все имена различны. Всего $300 + 300 \cdot 299 + 300 \cdot 299 \cdot 298 = 26\,820\,600$ различных имён.

14.73. Отношение соседства сохраняется при циклических перестановках и при симметричном отражении. В случае четырёх человек мы имеем $2 \cdot 4 = 8$ преобразований, сохраняющих отношение соседства. Так как общее число перестановок равно $4! = 24$, то имеем $24 : 8 = 3$ различных способа рассадки. Если за столом сидят 7 человек, то имеем $7!/14 = 360$ способов, вообще, в случае n человек $(n-1)!/2$ способов. Число способов, при которых два данных человека сидят рядом, вдвое больше числа способов посадить 6 человек (в силу возможности поменять этих людей местами). Значит, оно равно $5! = 120$. Точно так же число способов, при которых данный человек имеет данных двух соседей, равно $4! = 24$.

14.74. $C_8^5 C_{10}^2$. **14.75.** $C_{32}^4 C_4^2$.

14.76. $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$. Искомое число равно разности общего числа способов вынуть 10 карт из 52 и числа способов вынуть 10 карт из 48 таким образом, чтобы среди 10 карт не было туза.

14.77. $C_5^4 C_{15}^2 C_{10}^3$. **14.78.** 120. **14.79.** $4 \cdot C_{44}^4$. **14.80.** $A_{10}^4 A_6^4$.

14.81. По правилу произведения $7 \cdot 9 = 63$ способа. Первый может выбрать книги для обмена $C_7^2 = 21$ способом, а второй $C_9^2 = 36$ способами. Всего $21 \cdot 36 = 756$ способов обмена.

14.82. а) Каждая книга может попасть к любому из 8 сыновей. Поэтому имеем $8^5 = 32\,768$ способов. б) $A_8^5 = 6720$ способов.

14.83. $C_{30}^4 = 27\,405$; $A_{30}^4 = 657\,720$.

14.84. Сначала выбираем 6 абонентов C_n^6 способами. Располагаем этих абонентов в любом порядке и разбиваем на пары

(1-й, 2-й, потом 3-й, 4-й и, наконец, 5-й, 6-й). Это можно сделать 6! способами. Так как абонентов можно переставлять внутри каждой пары, а также несущественен порядок пар, то общее число способов надо разделить на $2^3 \cdot 3! = 48$. Всего получаем $n!/(48(n-6)!)$ способов.

14.85. Так как каждый студент может получить три вида оценок, то имеем $3^4 = 81$ способ сдачи экзаменов.

14.86. Так как ожерелья остаются неизменными при циклических перестановках бусинок и переворачивании, то можно составить $7!/14 = 360$ видов ожерелий.

14.87. Виды ожерелий отличаются друг от друга числом маленьких бусинок, заключённых между двумя большими. Поэтому имеем три вида ожерелий.

14.88. $A_{10}^7 = 604\,800$; $C_{10}^3 = 120$. Если две девушки заведомо будут приглашены на танец, то имеется A_7^2 вариантов выбора их партнёров; оставшиеся 5 юношей выбирают партнёршу из числа 8 девушек A_8^5 способами, а всего имеем $A_7^2 A_8^5 = 282\,240$ способов. Наконец, если данные две девушки приглашены на танец, то ещё пять девушек можно выбрать C_8^5 способами.

14.89. Офицера можно выбрать C_3^1 способами, сержантов C_6^2 способами и рядовых C_{60}^{20} способами. Всего по правилу произведения получаем $C_3^1 C_6^2 C_{60}^{20}$ способов выбора. Если в отряд должен войти командир роты и старший из сержантов, то получаем $C_5^1 C_{60}^{20}$ способов выбора.

14.90. Четырёх девушек можно выбрать C_{12}^4 способами. Затем выбираем A_{15}^4 способами юношей (существен порядок). Всего $C_{12}^4 A_{15}^4 = 17\,417\,400$ способов.

14.91. Любая курица либо входит, либо нет в число выбранных. Поэтому имеем 2^3 способов выбора кур. Так как по условию хотя бы одна курица будет выбрана, получаем 7 способов выбора кур. Точно так же есть $2^4 - 1 = 15$ способов выбора уток и $2^2 - 1 = 3$ способа выбора гусей. Всего $7 \cdot 15 \cdot 3 = 315$ способов.

14.92. Можно выбрать двух, трёх или четырёх женщин. Двух женщин можно выбрать C_4^2 способами. После того надо выбрать 4 мужчин, что можно сделать C_7^4 способами. По правилу произведения получаем $C_4^2 C_7^4$ способов. Если выбирают трёх женщин, то получают $C_4^3 C_7^3$ способов, а если четырёх — то $C_7^4 C_7^3$ способов. Всего $C_4^2 C_7^4 + C_4^3 C_7^3 + C_4^4 C_7^3 = 371$ способ.

14.93. Число должно оканчиваться одной из следующих комбинаций: 12, 24, 32, 44, 52; первые же две цифры могут быть произвольными. Всего $5^2 \cdot 5 = 125$ чисел.

14.94. Так как числа не могут начинаться с нуля, то имеем $7^4 - 7^3 = 2058$ чисел.

14.95. а) 1225. Учесть, что первая цифра числа не может быть равна нулю. б) 750.

14.96. Книги в чёрных переплётах можно переставить $m!$ способами, а в красных — $n!$ способами. Всего по правилу произведения $m!n!$ способов. Если книги в чёрных переплётах стоят рядом, то надо ещё выбрать для них место между книгами в красных переплётах. Это можно сделать $n+1$ способами. Всего получаем $m!n!(n+1) = m!(n+1)!$ способов.

14.97. Каждый из 15 человек может или войти или не войти в группу. Так как группа не может быть пустой, то получаем $2^{15} - 1$ способов. Для n человек имеем $2^n - 1$ способов.

14.98. Число p_k может войти в данный делитель с показателями $0, 1, \ldots, \alpha_k$ — всего $\alpha_k + 1$ способами. По правилу произведения число делителей равно $(\alpha_1+1)\ldots(\alpha_n+1)$. Чтобы найти сумму делителей, рассмотрим выражение

$$(1 + p_1 + \ldots + p_1^{\alpha_1})\ldots(1 + p_n + \ldots + p_n^{\alpha_n}).$$

Если раскрыть в нем скобки, то получим сумму, в которую каждый делитель входит ровно один раз. По формуле суммы геометрической прогрессии получаем, что эта сумма равна

$$\frac{(p_1^{\alpha_1-1} - 1)\ldots(p_n^{\alpha_n-1} - 1)}{(p_1 - 1)\ldots(p_n - 1)}.$$

14.99. Искомое число k делится на 2 и 9, поэтому пусть m_1 — кратность 2, m_2 — кратность 3, m_3 — кратность $p_3, \ldots, m_n$ — кратность p_n. Тогда по 14.98 $14 = (m_1+1)(m_2+1)\ldots(m_n+1)$, где $m_1 + 1 \geqslant 2$, $m_2 + 1 \geqslant 3$, откуда $m_1 = 1$, $m_2 = 6$, т. е. $k = 2 \cdot 3^6$.

При замене 14 на 15 получим $k = 2^2 \cdot 3^4$ или $k = 2^4 \cdot 3^2$. Ясно, что k не может иметь 17 делителей (как и любого простого числа делителей).

14.100. Добавим к 32 буквам 5 одинаковых «перегородок» и рассмотрим все перестановки полученных объектов, при которых ни одна перегородка не стоит в начале или конце и никакие две перегородки не стоят рядом. Буквы переставляются 32! способами, а для перегородок имеем 31 место и их можно поставить C_{31}^5 способами. Учитывая, что порядок слов несущественен, получаем $32!C_{31}^5/6!$ способов составить слова.

14.101. Из C_{17}^{12} способов выбрать 12 человек в C_{15}^{10} случаях в выбранных входят данные два человека. Поэтому остаётся $C_{17}^{12} - C_{15}^{10}$ допустимых выборов.

14.102. Добавим к 20 книгам четыре одинаковых разделяющих предмета и рассмотрим все перестановки полученных объектов. Их число равно $24!/4!$ Каждой перестановке соответствует свой способ расстановки книг. Аналогично получаем, что число способов надеть кольца равно $8!/3! = 6720$.

14.103. Чашки расставляются A_4^3 способами, блюдца A_5^3 и чайные ложки A_6^3 способами. Всего по правилу произведения $A_4^3 \cdot A_5^3 \cdot A_6^3 = 172\,800$ способов.

14.104. Если муж пригласит в гости k женщин, то число приглашённых им мужчин равно $6-k$. Тогда жена пригласит $6-k$ женщин и k мужчин. По правилам суммы и произведения такой выбор можно сделать числом $(C_5^0)^2(C_7^6)^2+(C_5^1)^2(C_7^5)^2+\ldots+(C_5^5)^2(C_7^6)^2 = 267\,148$ способов.

14.105. На левом борту могут сидеть 0, 1, 2, 3 или 4 человека из числа тех, кому безразличен выбор борта. Если из их числа выбрано k человек, то надо выбрать ещё $4-k$ человек из числа 10, предпочитающих левый борт. После этого остается $12+(9-k)$ кандидатов, из которых выбираем 4 гребцов на правый борт. Всего имеем $C_9^k C_{10}^{4-k} C_{21-k}^4$ способов выбора. Суммируя по k, получаем ответ.

14.106. Число 9 можно разбить на 3 разных слагаемых тремя способами: $9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 2+3+4$. Сумма, меньшая, чем 9, будет в 4 случаях: $1+2+3 = 6$, $1+2+4 = 7$, $1+2+5 = 1+3+4 = 8$. Так как три жетона можно вынуть C_{10}^3 способами, то в $C_{10}^3 - 4 = 116$ случаях сумма не меньше 9.

14.107. Сначала выберем по одной карте каждой масти. Это можно сделать 13^4 способами. После этого выберем ещё две карты. Если они разных мастей, то это можно сделать $12^2C_4^2 = 864$ способами. Комбинируя эти способы с различными способами выбрать первые 4 карты и учитывая возможность перестановки порядка выбора двух карт одной масти, получаем $216 \cdot 13^4$ способов. Если новые две карты имеют одну и ту же масть, то получаем $4 \cdot C_{12}^2 = 264$ способов выбора. По тем же соображениям они приводят к $88 \cdot 13^4$ способам выбора всех карт. Всего получаем $304 \cdot 13^4$ способов.

14.108. В первый день участников выбираем $C_{10}^6 = 210$ способами, во второй — $C_{10}^6 - 1 = 209$ и в третий — $C_{10}^6 - 2 = 208$ способами. Всего $210 \cdot 209 \cdot 208 = 9\,129\,120$ способов.

14.109. Так как $C_6^3 = 20$, то каждый способ выбора компания будет использован ровно один раз. Число перестановок этих способов равно $20!$.

14.110. Каждый юноша может выбирать из 5 мест работы, а каждая девушка — из 4 мест. Всего получаем $5^3 \cdot 4^2 = 2000$ способов выбора.

14.111. На первом месте можно написать любую из 33 букв, а на каждом из следующих — любую из 32 букв (исключается предшествующая буква). Всего имеем $33 \cdot 32^4 = 34\,603\,008$ слов.

14.112. Сначала выберем призёров, а потом распределим между ними книги. По правилу произведения получаем $C_{20}^6 P(3,2,1)$ способов. Во втором случае сначала выберем, кто получил первую книгу, потом, кто получил вторую, и, наконец, кому досталась третья книга. Всего $C_{20}^3 C_{20}^2 C_{20}^1$ способов распределения.

14.113. Поставим в соответствие каждой кости (p,q) кость $(n-p, n-q)$. Если $p+q = n-r$, то $(n-p)+(n-q) = n+r$. Значит, число костей с суммой очков $n-r$ равно числу костей с суммой очков $n+r$. Общее число всех костей домино равно C_{n+1}^2.

14.114. По условию задачи места, занятые женщинами и мужчинами, чередуются. Поэтому имеем $2(7!)^2$ способов.

14.115. Выберем по одной лошади из каждой пары AA', BB', CC' (8 способов выбора), трёх лошадей из остальных 10 ($C_{10}^3 = 120$ способов) и выберем порядок запрягания лошадей (6! способов) Всего $8 \cdot 6! C_{10}^3 = 691\,200$ способов.

14.116. Согласные можно выбрать C_9^4 способами, а гласные — C_7^3 способами. Выбранные 7 букв можно переставлять 7! способами. Всего получаем $C_9^4 C_7^3 \cdot 7!$ способов. Если никакие две согласные не стоят рядом, то порядок букв такой: СГСГСГС. Здесь мы имеем лишь $3!\,4!$ перестановок и $C_9^4 C_7^3 3!\,4!$ слов.

14.117. а) Мужчин можно разбить на пары $10!/(5!(2!)^5)$ способами (учитывая перестановки внутри пар и перестановки самих пар). Женщины разбиваются $10!/(2!)^5$ способами (здесь играет роль порядок пар). Всего $(10!)^2/2^{10}5!$ способов.

б) Сначала выберем одного мужчину и одну женщину, которые окажутся в той же лодке, что и выбранная ранее пара (9^2 способов). Затем разбиваем оставшихся на 4 группы $(8!)^2/(4! \cdot 2^8)$ способами. Всего $(9!)^2/(4! \cdot 2^8)$ способов.

в) Если данные двое мужчин попадают в одну и ту же группу (и в ней же находятся их жены), то остальные могут разбиться на группы $(8!)^2/(4! \cdot 2^8)$ способами. Если же они попадают в разные группы, то эти группы можно дополнить $(A_8^2)^2$ способами, после чего разбить остальных на группы $(6!)^2/(3! \cdot 2^6)$ способами. Всего $17(8!)^2/2^8 4!$ способов.

14.118. Если число, изображённое первыми тремя цифрами, равно x, то число, изображённое последними тремя цифрами, может принимать значения $0, 1, \ldots, 999 - x$ — всего $1000 - x$ значений. Так как x меняется от 100 до 999, то нам надо найти сумму натуральных чисел от 1 до 900. Она равна $901 \cdot 900/2 = 405\,450$.

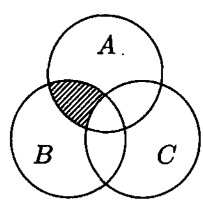
14.119. Белые шашки можно расставить C_{32}^{12} способами. После выбора 12 полей для белых шашек остается 20 полей для чёрных, на которые их можно поставить C_{20}^{12} способами. Всего $C_{32}^{12}C_{20}^{12}$ способов.

14.120. Решение 1. Разбиваем все перестановки букв слова «Юпитер» на классы так, что перестановки одного и того же класса отличаются друг от друга только порядком гласных. Число классов равно $P_6/P_3 = 120$. Лишь одна перестановка из каждого класса удовлетворяет поставленному условию. Поэтому их число равно 120.

Решение 2. Разобьём шесть мест, на которые ставятся буквы, на две группы по 3 места: для гласных и для согласных. (Это можно сделать $C_6^3 = 20$ способами.) Гласные на их места расставляются единственным образом, а согласные — $3! = 6$ способами. Всего 120 способов.

14.121. Последовательность гласных выбирается $2!$ способами, согласных — $4!$ способами. Наконец, перед первой гласной можно поставить 0, 1 или 2 согласные. Всего по правилу произведения имеем $2! \cdot 4! \cdot 3 = 144$ способа.

14.122. Выберем 3 буквы из 5 согласных и поставим их на указанные места (A_5^3 способов). Оставшиеся 5 букв произвольным образом расставим на остальные 5 мест ($5!$ способов). Всего $5! \cdot A_5^3 = 7200$ способов.



К 14.124

14.123. По правилу произведения $C_5^2C_3^1 = 30$ способов; $C_4^1C_3^1 = 12$ способов.

14.124. б) Доказательство проводится рассмотрением всех семи областей на рисунке. (Такой рисунок называется *кругами Эйлера* или *диаграммой Эйлера*.) Например, число элементов в заштрихованной области входит в выражение дважды с плюсом ($n(A)$ и $n(B)$) и один раз с минусом ($-n(A \cap B)$), т. е. эти элементы считаются один раз.

14.125. $6 = 20 + 11 - (35 - 10)$. **14.126.** 0%.

14.127. $40 = 100 - 15 - 20 - 25$.

14.128. По формуле включений и исключений число работающих равно $6+6+7-4-3-2+1=11$. Только английский язык знают $6-4-2+1=1$, только французский знают $7-3-2+1=3$.

14.129. По формуле включений и исключений пирожки взяли $92-47-38-42+28+31+26-25=25$ человек.

14.130. 65, 25, 94. Вводя в качестве неизвестных число абитуриентов, получивших «отлично» по одному или двум из трёх предметов, получим систему из шести уравнений с шестью неизвестными.

14.131. Если a и b стоят рядом, мы можем объединить их в один знак. Учитывая, что a и b можно переставить местами, получаем $2(n-1)!$ перестановок, в которых a и b стоят рядом. Поэтому они не стоят рядом в $n!-2(n-1)!$ перестановках. Точно так же получаем, что a, b и с не стоят рядом в $n!-6(n-2)!$ перестановках. Никакие два из элементов a, b, с не стоят рядом в $n!-6(n-1)!+6(n-2)!$ перестановках (по формуле включений и исключений).

14.132. Пусть 1-й ковёр и 2-й перекрываются по площади S_1, 1-й и 3-й — по площади S_2, 2-й и 3-й — по площади S_3, а все вместе — по площади S_4. Тогда $6=9-(S_1+S_2+S_3)+S_4$, откуда $S_1+S_2+S_3=3+S_4>3$.

14.133. От 4 $(4=10-3-2-1)$ до 7.

14.134. От 40 до 75. Ясно, что максимальное число — 75. Посчитаем минимальное. Не имеют красной грани $100-80=20$ кубиков, синей — 15, зелёной — 25. Сумма 60 есть максимальное число кубиков, не имеющих грани всех трёх цветов. Достигается этот максимум, когда три множества, состоящие из 20, 15 и 25 кубиков, не имеют попарно общих элементов. Значит, минимальное число кубиков, имеющих грани всех трёх цветов, равно $100-60=40$.

14.135. От 53% до 80%.

14.136. Если $n=2k$, то наименьшее число перестановок равно $2C_k^2=k(k-1)$; если $n=2k+1$, то оно равно $C_k^2+C_{k+1}^2=$ $=k^2$. Наименьшее число перестановок получается, если всех людей разделить на две одинаковые ($n=2k$) или отличающиеся на 1 ($n=2k+1$) группы, разделив круглый стол по диаметру, а затем в каждой половине сделать сначала перестановку одного человека со всеми людьми этой половины, затем перестановку второго со всеми (кроме первого), затем — третьего и т. д.

14.137. $44\cdot 1985+1$. По условию любые два множества пересекаются по одному элементу. Докажем, что существует элемент, содержащийся во всех множествах. Предположим противное. Возьмём первое множество A_1. В нём найдется элемент a, который принадлежит по крайней мере ещё 45 множествам — $A_2, A_3, \ldots, A_{46}$, так как в противном случае общее число множеств не превосходило бы $44 \cdot 45 + 1 = 1981$, что не так. По нашему предположению, имеется множество, не содержащее элемента a. Оно пересекается по одному элементу с $A_1, A_2, \ldots, A_{46}$ и поэтому содержит 46, а не 45 элементов. Противоречие.

14.138. Всего существует $3^3 = 27$ различных трёхзначных чисел, в записи которых участвуют цифры 1, 2, 3. Кроме первых двух цифр в последовательности нажатий кнопок, каждая из остальных цифр служит последней цифрой какого-то трёхзначного числа. Значит, в искомой последовательности должно быть не менее $27 + 2 = 29$ цифр. Приведём 29 цифр, которых достаточно для открытия замка:

$$11123222133313121223113233211.$$

14.139. Четырёхзначные числа с неповторяющимися цифрами из цифр $1, 2, \ldots, 9$ можно составить $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ способами. Для любого числа, принадлежащего этому множеству, в том же множестве существует число, каждая цифра которого дополняет соответствующую цифру исходного числа до 10, т. е. все числа множества можно разбить на пары. Всего — $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6/2$ таких пар. Сумма чисел, образующих одну пару, равна $1000 \cdot 10 + 100 \cdot 10 + 10 \cdot 10 + 10 = 11110$. Значит, сумма членов, образующих рассматриваемое множество, равна $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 11110/2$.

14.140. Пусть $F(n)$ — число способов, которыми можно вложить n писем $L_1, \ldots, L_n$ в n конвертов $K_1, \ldots, K_n$ так, чтобы ни одно письмо не попало в «свой» конверт. Требуется вычислить $F(6)$. Пусть, перепутав письма и конверты, мы вложили письмо L_1 в конверт K_i $(i \neq 1)$. Возможны два случая.

Случай 1. Письмо L_i попало в конверт K_1. Тогда остальные 4 письма (ошибочно) вложены в 4 остальных конверта, что можно сделать $F(4)$ способами. Поскольку K_i может быть любым из 5 конвертов, то разложить 6 писем по 6 конвертам так, чтобы письмо L_1 попало в конверт K_i $(i \neq 1)$, письмо L_i — в конверт K_1 и остальные письма также оказались в «чужих» конвертах, нам удастся $5 \cdot F(4)$ способами.

Случай 2. Письмо L_i не попало в конверт K_1. Условимся на минуту считать, что письмо L_i должно быть отправлено в конверте K_1. Тогда ни одно из писем $L_2, \ldots, L_6$ не попало в «свой» конверт. Разложить в полном беспорядке 5 писем по 5 конвертам можно $F(5)$ способами, а K_i, как и прежде, может быть любым из 5 конвертов.

Следовательно, разложить 6 писем по шести конвертам так, чтобы письмо L_1 попало в конверт K_i $(i \neq 1)$, письмо L_i не попало в конверт K_1 и остальные письма также оказались в «чужих» конвертах, нам удастся $5 \cdot F(5)$ способами.

Итак, $F(6) = 5F(5) + 5F(4)$. Аналогично $F(5) = 4F(4) + 4F(3)$, $F(4) = 3F(3) + 3F(2)$, $F(3) = 2F(2) + 2F(1)$. Так как $F(1) = 0$, $F(2) = 1$, то $F(3) = 2$, $F(4) = 9$, $F(5) = 44$, $F(6) = 265$.

В решении этой задачи число 6 не имеет особого значения. Все рассуждения остаются в силе при произвольном числе n писем и n конвертов. Повторяя их, мы получим $F(n) = (n-1)F(n-1) + (n-1)F(n-2)$. Это соотношение вместе с $F(1) = 0$, $F(2) = 1$ позволяют найти зависимость $F(n)$ от n:

$$F(n) = n!(1/2! - 1/3! + \ldots + (-1)^n/n!).$$

Эта задача называется задачей Бернулли — Эйлера о перепутанных письмах.

14.141. Ответ зависит от того, включено ли в число подмножеств пустое множество. В 1-м случае (пустое множество входит в число подмножеств) ответ на 1 больше, чем во 2-м. Далее рассматриваем лишь непустые подмножества.

Пусть p — число всех возможных разбиений множества Z, содержащего n элементов, на 2 непустых подмножества. Тогда $2p$ означает число всех подмножеств множества Z, непустых и отличных от самого множества Z.

Число $2p$ мы найдем как сумму числа подмножества, содержащих $1, 2, \ldots, (n-1)$ элементов. Поскольку подмножеств, содержащих k элементов, существует столько же, сколько способов выбрать k элементов из n, то по формуле бинома Ньютона получаем $2^n - 2p = 2$, откуда $p = 2^{n-1} - 1$

14.142. $12!/(6! \cdot 2^6) = 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$. Первое подмножество из двух элементов можно выбрать C_{12}^2 способами. Второе множество из 2 элементов, отличное от 1-го, мы выбираем из 10 оставшихся элементов исходного множества. Сделать это можно C_{10}^2 способами. Аналогично, 3-е множество из 2 элементов можно выбрать C_8^2 способами и т. д. Значит, 6 подмножеств, каждое из которых содержит по 2 элемента, можно выбрать $C_{12}^2 C_{10}^2 \cdots C_2^2 = 12!/2^6$ способами. Однако любое разбиение исходного множества на 6 различных подмножеств, каждое из которых содержит по 2 элемента, встретится при этом 6! раз, поскольку разбиение не зависит от того, в какой последовательности мы выбираем 6 подмножеств.

14.143. $C_{11}^5 = 462$. Докажем, что для каждой группы из 5 человек существует замок, который может открыть любая другая группа. Действительно, если две группы из пяти человек не могут открыть замок, то и их объединение, в котором по меньшей мере шесть человек, не может открыть его, что противоречит условию. Таким образом, число замков не меньше $C_{11}^5 = 462$.

Доказательство этого утверждения показывает и путь построения примера — каждой группе из пяти человек сопоставим замок, ключи от которого будут у остальных шести членов комиссии. Ясно, что тогда никакие пять человек не смогут открыть «свой» замок, а любые шесть смогут открыть все замки, поскольку для каждого замка среди них найдётся человек, не входящий в «его» группу.

14.144. Найдем количество различных пар непересекающихся подмножеств при условии, что в паре выделены первое и второе подмножества. Для каждого из n элементов есть три возможности: его можно или включить в первое подмножество, или включить во второе подмножество, или не включать ни в одно из них. Поэтому количество указанных пар равно 3^n. Среди них есть одна пара, в которой оба подмножества пусты. Оставшиеся $(3^n - 1)$ пары в свою очередь разбиваются на двойки совпадающих пар, если разрешить переставлять в парах местами первое и второе подмножества. Таким образом, существует $(3^n - 1)/2$ (неупорядоченных) пар подмножеств, из которых хотя бы одно не пусто. Всего же $(3^n - 1)/2 + 1 = (3^n + 1)/2$ различных пар подмножеств, удовлетворяющих условию задачи.

14.145. Пусть числа $C_n^k, C_{n+1}^k, \ldots, C_{n+k}^k$ имеют общий делитель $d \in \mathbb{N}$. Тогда числа $C_n^{k-1} = C_{n+1}^k - C_n^k, \ldots, C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k}^k - C_{n+k-1}^k$, также имеют общий делитель d. Аналогично получаем, что числа $C_n^{k-2}, \ldots, C_{n+k-2}^{k-2}$ имеют общий делитель d. Продолжая аналогичные рассуждения и далее, получим в итоге, что число $C_n^0 = 1$ делится на d. Следовательно, $d = 1$.

14.146. Так как для каждого значения $k = 1, 2, \ldots, n-1$ выполнены соотношения $C_n^{k-1} = kC_n^k/(n-k+1), C_n^{k+1} = (n-k)C_n^k/(k+1)$, $C_n^k \neq 0$, то равенство $2C_n^k = C_n^{k-1} + C_n^{k+1}$ равносильно равенству $2 = k/(n-k+1) + (n-k)/(k+1)$, или $(n-2k)^2 = n+2$.

Следовательно, искомые значения $n \in \mathbb{N}$ обязаны иметь вид $n = m^2 - 2$, где $m \geqslant 2$. Однако если $m = 2$, то $n = 2$ и равенство

$(n-2k)^2 = n+2$ не выполняется при единственно возможном в этом случае значении $k = 1$. Если же $m > 2$, то это равенство справедливо, например, при $k = m(m-1)/2-1$ (указанное значение k является целым и удовлетворяет неравенствам $0 < k < n$, так как одно из чисел m или $m-1$ является чётным и при $m > 2$ имеют место оценки $0 < m(m-1)/2-1 < m^2-2$). Итак, искомые значения n — это все числа вида $n = m^2-2$, где $m \geqslant 3$.

14.147. Найдем количество троек натуральных чисел (x, y, z), для которых $x \leqslant y \leqslant z$ и $x+y+z = 6n$. При каждом значении $k = 1, 2, \ldots, n$ выпишем все тройки, для которых $x = 2k-1$ и соответственно $x = 2k$:

$$(2k-1; 2k-1; 6n-4k+2), (2k-1; 2k; 6n-4k+1), \ldots,$$
$$(2k-1; 3n-k-1; 3n-k+2), (2k-1; 3n-k; 3n-k+1),$$

и соответственно

$$(2k; 2k; 6n-4k), (2k; 2k+1; 6n-4k-1), \ldots,$$
$$(2k; 3n-k-1; 3n-k+1), (2k; 3n-k; 3n-k).$$

Поэтому количество всех выписанных троек равно

$$S_k = (3n-k)-(2k-2)+(3n-k)-(2k-1) = 6n-6k+3,$$

а количество всех троек, удовлетворяющих условию задачи, равно $S_1 + \ldots + S_n = 3n^2$.

14.148. Каждому набору из 6 различных натуральных чисел от 1 до 49 (без ограничения общности считаем их расположенными в порядке возрастания) $a_1 < a_2 < \ldots < a_6$ поставим в соответствие набор вида a_1, a_2-1, a_3-2, a_4-3, a_5-4, a_6-5.

Числа в последнем наборе различны в том и только в том случае, если в исходном наборе не было последовательных чисел, и всегда расположены в порядке неубывания. Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между множествами наборов из 6 различных чисел от 1 до 49, среди которых нет последовательных чисел, и всех наборов из 6 различных чисел от 1 до 44. Количество элементов в каждом из этих множеств равно C_{44}^6, а количество всех наборов из 6 различных чисел от 1 до 49 равно C_{49}^6. Итак, количество наборов, в которых есть последовательные числа, равно $C_{49}^6 - C_{44}^6$.

14.149. а) Положительное число $C_{2m}^m/(m+1) = C_{2m}^m - C_{2m}^{m-1}$ является целым. б) Пусть дано число m. Так как при $n = m$ число $kC_{2n}^{n+m}/(n+m+1) = k/(2m+1)$, должно быть натуральным, то искомое значение k должно делиться на $2m+1$, поэтому $k \geqslant 2m+1$. Пусть $k = 2m+1$. Тогда при $n = m$ положительное число $kC_{2n}^{n+m}/(n+m+1)$ является натуральным, а при $n > m$ оно равно $C_{2n}^{m+n} - C_{2n}^{n+m+1}$, т. е. является целым. Итак, искомое наименьшее значение k равно $2m+1$.

14.150. Из тождества $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$, пользуясь биномом Ньютона, получаем

$$C_{2n}^0 + \ldots + C_{2n}^{2n}x^{2n} = (C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n)(C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n).$$

Приравнивая коэффициенты при x^n и учитывая, что $C_n^k = C_n^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, получаем соотношение $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$, откуда легко следует требуемое.

14.151. 927. Обозначим через x_n количество способов выбрать из чисел $1, 2, \ldots, n$ набор из нескольких чисел (возможно, не содержащий ни одного числа), в котором нет никаких трёх последовательных чисел. Несложно показать, что при $n \geqslant 3$ имеет место равенство $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}$. А поскольку $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 7$, находим $x_4 = 13$, $x_5 = 24, \ldots, x_{11} = 927$.

14.152. 2^{n-2} дробей. Прежде всего ясно, что в полученной дроби x_1 будет стоять в числителе, а x_2 окажется в знаменателе при любой расстановке скобок (знак деления, стоящий перед x_2, относится либо к самому x_2, либо к какому-либо выражению, содержащему x_2 в числителе). Остальные буквы $x_3, x_4, \ldots, x_n$ могут располагаться в числителе или знаменателе совершенно произвольным образом; отсюда следует, что всего можно получить 2^{n-2} дробей: каждая из $n-2$ букв $x_3, x_4, \ldots, x_n$ может оказаться независимо от остальных в числителе или знаменателе.

Докажем это утверждение по индукции. При $n = 3$ можно получить две дроби: $(x_1 : x_2) : x_3 = x_1/(x_2x_3)$ и $x_1 : (x_2 : x_3) = (x_1x_3)/x_2$, так что утверждение верно. Пусть оно справедливо при $n = k$ в докажем его для $n = k+1$. Пусть выражение $x_1 : x_2 : \ldots : x_k$ после некоторой расстановки скобок записывается в виде некоторой дроби A. Если в это выражение вместо x_k подставить $x_k : x_{k+1}$, то x_k окажется там же, где и было в дроби A, а x_{k+1} будет стоять не там, где стояло x_k (если x_k было в знаменателе, то x_{k+1} окажется в числителе и наоборот).

Теперь докажем, что можно добавить x_{k+1} туда же, где стоит x_k. В дроби A после расстановки скобок обязательно будет выражение вида $(p : x_k)$, где p — буква x_{k-1} или некоторая скобка; заменив $(p : x_k)$ выражением $((p : x_k) : x_{k+1}) = p : (x_kx_{k+1})$, получим, очевидно, ту же самую дробь A, где вместо x_k стоит x_kx_{k+1}.

14.153. Пусть размеры прямоугольника $m \times n$ клеток. Доказательство проводится индукцией по $m+n$. По существу в решении этой задачи доказываются равенства $C_{m+n-1}^{m-1} = nC_{m+n-1}^{m} = (m+n-1)C_{m+n-2}^{m-1}$ (в задаче $n = km$).

14.154. Рассмотрим все пары цифр, стоящих в разных числах в одном разряде. Поскольку пар чисел 10, то всего таких пар цифр будет $10n$. При этом пар разных цифр, т. е. пар $(1, 2)$ в каждом разряде не меньше 4 и не больше 6, так что среди $10n$ выбранных пар общее количество пар $(1, 2)$ заключено между $4n$ и $6n$.

С другой стороны, так как каждые два числа совпадают в m разрядах, то каждая пара чисел дает $n - m$ пар $(1, 2)$. Поэтому общее число таких пар $10(n - m)$. Итак, $4n \leqslant 10(n - m) \leqslant 6n$, откуда $2/5 \leqslant m/n \leqslant 3/5$.

14.155. При $n = 1$ четыре числа 11, 21, 12, 22 удовлетворяют условию. Докажем утверждение задачи по индукции.

Обозначим через a' число, полученное из a заменой цифр 1 на 2 и 2 на 1, а через ab — число, полученное приписыванием к a числа b. Пусть построено множество A_n из 2^{n+1} чисел, каждое из которых 2^n-значно, причём каждые два из чисел отличаются не менее чем в 2^{n-1} разрядах. Рассмотрим множество A_{n+1}, состоящее из чисел aa и aa', где $a \in A_n$. Все такие числа 2^{n+1}-значны, всего их 2^{n+2}. Кроме того, любые два из них отличаются не менее чем в 2^n разрядах. В самом деле, числа aa и aa', а также числа aa и bb' при любых a и b отличаются ровно в 2^n разрядах (в тех разрядах, где a и b отличаются, a' и b' совпадают, и наоборот); числа aa и bb по предположению индукции отличаются не менее чем в 2^n разрядах.

14.156. Нет. Всего существует 128 двухбуквенных слов длины 7. Из них «невозможными» будут $3 \cdot 8 + 10 \cdot 4 + 30 \cdot 2 = 124$ слова.

14.157. $3456 = 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$. Если все цифры десятизначного числа различны, то их сумма равна 45, и поэтому это число делится на 0. Значит, если оно делится на 11111, то оно делится и на 99999. Пусть $a_0, \ldots, a_9$ — цифры десятизначного число. Легко показать, что $a_0 + a_5 = 9$, $a_1 + a_6 = 9$, $a_2 + a_7 = 9$, $a_3 + a_8 = 9$, $a_4 + a_9 = 9$. Итак, последние пять цифр интересного числа полностью определяются его первыми цифрами, а первые пять цифр можно выбирать произвольно, следя только, чтобы никакие две из них не давали в сумме 9 и a_9 не равнялось нулю.

14.158. В соответствии с каждой перестановкой запишем вектор $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ такой, что $l_i = 1$, если $i \in S$ — неподвижная точка данной перестановки, и $l_i = 0$ в противном случае. Так как число перестановок равно $n!$, то получим $n!$ векторов. Подсчитаем общее число единиц во всех этих векторах двумя способами. Число векторов, в записи которых участвует ровно k единиц, равно $p_n(k)$, поэтому общее число единиц во всех векторах составляет $1p_n(1) + 2p_n(2) + \ldots + np_n(n)$.

С другой стороны, число векторов, у которых на i-м месте стоит единица, равно $(n-1)!$. Следовательно, число единиц, стоящих на i-м месте, во всех векторах равно $(n-1)!$, а общее число единиц во всех векторах равно $n(n-1)! = n!$. Итак, $p_n(1) + 2p_n(2) + \ldots + np_n(n) = n!$.

14.159. Вместо множества $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ удобно рассмотреть множество $A = \{-994, -993, \ldots, 993, 994\}$, получающееся вычитанием из каждого элемента данного множества числа 995. Пусть

$$B_1 = \{993, -496, -497\}, \quad B_2 = \{-993, 496, 497\}, \ \ldots$$
$$B_{2k+1} = \{993 - 4k, 2k - 496, 2k - 497\},$$
$$B_{2k+2} = \{4k - 993, 496 - 2k, 497 - 2k\}, \ \ldots$$
$$B_{115} = \{665, -382, -383\}, \quad B_{116} = \{-665, 382, 383\}.$$

Положим $B_{117} = \{-1, 0, 1\}$. Все множества B_i $1 \leqslant i \leqslant 117$ имеют по 3 элемента, сумма которых равна 0. Из соображений чётности следует, что вторые элементы множеств $B_1, \ldots, B_{116}$ не могут совпадать с какими-либо первыми или третьими элементами этих множеств, все первые элементы этих множеств по абсолютной величине больше всех третьих элементов. Значит, множества B_i, попарно не пересекаются. Кроме того, если какое-либо число x является элементом одного из множеств B_i, то число $(-x)$ также является элементом одного из множеств B_i.

Заметим, что $14 \cdot 117$ элементов множества A, которые не принадлежат ни одному из множеств B, разбиваются на $7 \cdot 117$ пар чисел, имеющих противоположные знаки. Добавив произвольным образом по 7 таких различных пар чисел к выбранным выше множествам B_i, получим искомое разбиение множества A на 117 попарно непересекающихся множеств.

Замечание. Можно также доказать, что множество $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$ представимо в виде объединения k непересекающихся множеств с одинаковыми суммами элементов, если k является делителем числа n, $1 < k < n$.

14.160. Не более трёх. Указание. Пусть последняя точка A_{1969} лежит между точками A_k и A_l. Тогда A_{1968} находится между точками A_{k-1} и a_{l-1} (за исключением случаев $k = 1$ и $l = 1$, рассматриваемых отдельно), поэтому дуги, возникшие в результате 1968-го разбиения, имеют такие же длины, как и некоторые возникшие ранее.

14.161. а) Последовательность из n «блоков» $123\ldots n$; i-ю цифру любой перестановки можно взять из i-го блока.

б) Выпишем $n-1$ раз подряд «блок» $123\ldots n$ и затем 1. Проверим, что эта последовательность универсальна. В самом деле, если в перестановке $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ хоть одна пара соседних чисел k_j, k_{j+1} стоит в порядке возрастания, то их можно взять из одного блока $12\ldots n$ (j-го по порядку) при этом последняя 1 даже не понадобится. Если это не так, то перестановка обязательно совпадает с $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$; тогда из j-го блока нужно взять $n-j$, и пригодится последняя 1.

в) Отметим для каждого числа k (от 1 до n) первое его вхождение в универсальную последовательность. Одно из отмеченных чисел встречается на n-м месте от начала или даже дальше. Пусть для определённости таким числом будет n. Перед ним стоит по крайней мере $n-1$ чисел. После него стоит последовательность, которая должна быть универсальной для перестановок чисел $(1, 2, \ldots, n-1)$, и по индукции мы можем считать доказанным, что её длина не меньше $n(n-1)/2$. Поэтому длина n-универсальной последовательности не меньше $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$.

г) Заметим, что если число n входит в n-универсальную последовательность лишь один раз, то до него и после него должна стоять $(n-1)$-универсальная последовательность. Отсюда получим более точную оценку снизу, чем в пункте в).

Пусть l_n — длина минимальной n-универсальной последовательности. Тогда $l_2 = 3$. Докажем, что $l_3 = 7$, Пример: 1213121 или 1231231. Если какое-то число (скажем, 3) входит в последовательность лишь один раз, то её длина не меньше $1 + 2l_2 \leqslant 7$. В другом случае рассмотрим число, которое впервые встретится на 3-м месте или позже (пусть это будет 3). За ним встретится ещё раз 3, а также 2-универсальная последовательность, так что общая длина не меньше $2+1+1+l_2 = 4+l_2 = 7$. Аналогично убеждаемся в том, что $l_4 = 12$. Пример: 123412314231. Оценки: если некоторое число входит в последовательность лишь один раз, то её длина не меньше $1+2l_3 = 15$, в другом случае она не меньше $3+1+1+l_2 = 12$. То же рассуждение показывает, что $l_n \geqslant n(n+1)/2 + n - 2$.

д) Можно доказать, что n-универсальной является такая последовательность длины $n^2 - 2n + 4$:

$$n12\ldots(n-1)n12\ldots(n-2)n(n-1)\ldots12n3\ldots(n-1)1n2 \qquad (*)$$

где в каждый из $n-2$ блоков $12\ldots(n-1)$ вставлено n (после $n-1$, затем после $n-2$, ..., наконец, после 2), кроме того, n стоит в начале и в конце, имеющем вид $1n2$. (Так изготовлен второй пример для $n = 4$.) Для этого достаточно убедиться в том, что слева от k-го вхождения n в $(*)$ можно вычёркиванием получить любую последовательность из $k-1$ различных чисел (среди $1, 2, \ldots, n-1$), а справа — любую из $n-k$ таких чисел; дело в том, что обе эти части — левая и правая — после вычёркивания всех вхождений n (правая — также после циклической перенумерации) имеют такой тип: $r-1$ раз блок $12\ldots m$, затем $12\ldots r$, где $r < m = n-1$.

Эта последовательность обладает свойством «(m, r)-универсальности»: из неё вычёркиванием можно получить любую последовательность r разных чисел (среди $1, 2, \ldots, m$).

14.162. а) Разобьём десять цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$ на две группы по 5 цифр в каждой (например, от 0 до 4 — одна группа, от 5 до 9 — другая). Достаточно использовать ящики, у которых обе цифры берутся из одной группы, поскольку такие две цифры есть в любом трёхзначном номере.

б) Кроме 10 ящиков $00, 11, \ldots, 99$, которые точно будут заняты, потребуется не менее 30 ящиков, чтобы разместить билеты с тремя разными цифрами: таких билетов всего $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$, а в каждый ящик с номером $\overline{pq}$ $(p \neq q)$ помещается не более $3 \cdot 8 = 24$ из них ($\overline{zpq}$, $\overline{pzq}$ и $\overline{pqz}$, где z — любая цифра, отличная от p и q).

в) Пусть x — наименьшее количество номеров занятых ящиков, начинающихся с одной какой-либо цифры ($x \geqslant 1$); поскольку все цифры равноправны, мы можем считать, что меньше всего номеров начинается с 9 и эти номера — $\overline{99}, \ldots, \overline{9y}$, где $y = 10 - x$. Тогда любой билет $\overline{9pq}$, где $p < y$, $q < y$, не может помещаться в ящиках $\overline{9p}$ и $\overline{9q}$, т. е. должен быть занят ящик $\overline{pq}$. Таким образом, заняты по крайней мере все y^2 ящиков с номерами, у которых обе цифры — от 0 до $y-1$, и ещё по крайней мере x^2 ящиков, начинающихся с одной из цифр от y до 9 (не менее чем по x для каждой из этих x цифр), т. е. всего занято не менее $y^2 + x^2 = (10-x)^2 + x^2 \geqslant 50$ ящиков.

г), д) Для данных натуральных чисел k и s, $k < s$, обозначим через $F(k, s)$ наименьшее из чисел $x_1^2 + \ldots + x_k^2$, где $x_1, \ldots, x_k$ — натуральные числа, в сумме дающие s; величину $F(k, s)$ можно выразить через k и s — наименьшее значение суммы квадратов достигается, когда числа x_k «почти равны», точнее, если $s = kq+r$, $0 \leqslant r < k$, то $k-r$ из них равны q и r остальных $q+1$, так что

$$F(k,s) = (k-r)q^2 + r(q+1)^2 = kq^2 + r(2q+1).$$

Удобно рассматривать более общую задачу — для k-значных «билетов» с s «цифрами» от 0 до $s-1$ (в нашей задаче $s = 10$). Докажем, что наименьшее число $M(k,s)$ ящиков с номерами $\overline{pq}$ $(p, q = 0, \ldots, s-1)$, в которые можно поместить билеты, вычеркнув $k-2$ цифры, равно $F(k-1, s)$.

В частности, в задаче г) $M(4,10) = F(3,10) = 3^2+3^2+4^2 = 34$, а ответ к задаче д) дается таблицей

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$M(k,10) = F(k-1,10)$	50	34	26	20	18	16	14	12	10

Неравенство $M(k,s) \geqslant F(k-1,s)$ можно доказать индукцией по $k+s$, рассуждая так же, как в пункте в):

$$M(k,s) \geqslant \min_{1 \leqslant x \leqslant s} (M(k-1, s-x) + x^2).$$

Для размещения билетов по $F(k-1,s) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{k-1}^2$, ящикам достаточно, как в пункте а), разбить s цифр на $k-1$ группу (по $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ цифр) и оставить ящики, у которых обе цифры из одной группы.

15. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

15.1. 12/365. **15.2.** 5/12.

15.3. 1/3. Число всех двузначных чисел равно 90. Число двузначных чисел, делящихся на 3, находится из уравнения $99 = 12 + 3(n-1)$.

15.4. 0,4. **15.5.** 3/13.

15.6. $P(A) = 1/8$; $P(B) = 3/8$. Пространство элементарных событий состоит из выборок с повторениями. составленных из букв Ц и Г. Оно содержит $2^3 = 8$ элементов. Событию A благоприятна только одна выборка (Ц, Ц, Ц), а событию B — три: (Ц, Ц, Г), (Ц, Г, Ц), (Г, Ц, Ц). Таким образом, $P(A) = 1/8$; $P(B) = 3/8$.

15.7. 1/6. **15.8.** 1/2. **15.9.** а) 89/99, б) 10/99. **15.10.** 1/8.

15.11. C_n^2/C_{n+m}^2. **15.12.** 1/720. **15.13.** 245/354.

15.14. nmk/C_{n+m+k}^3. **15.15.** C_{30}^4/C_{45}^4. **15.16.** $4/C_{15}^2$.

15.17. Три судьи могут выбрать победителя 10^3 способами. В $A_{10}^3 = 720$ случаях они назовут трёх различных кандидатов.

Поэтому совпадение хотя бы у двух судей будет в 280 случаев. Доля таких случаев равна 0,28.

15.18. 1/60. Пространство элементарных событий состоит из всех перестановок с заданным числом повторений, имеющих состав $(3,2,1)$. Благоприятной будет только одна такая перестановка.

15.19. $\frac{5\cdot 3!\cdot 4!}{7!}$. **15.20.** $2\cdot 4!3!/7!$.

15.21. $24\cdot 48!\,13^4/52!$. Пространство элементарных событий состоит из всех выборок, имеющих состав $(13,13,13,13)$. Благоприятными считаются выборки состава $(12,12,12,12)$, к каждой из которых присоединяют один из четырёх тузов.

15.22. $(5!)^2/10!$. **15.23.** $50/C_{15}^5$. **15.24.** $C_n^k C_{N-n}^{m-k}/C_N^m$.

15.25. $4/C_{48}^6$, $C_6^5 C_{42}^1/C_{48}^6$, $C_6^4 C_{42}^2/C_{48}^6$, $C_6^3 C_{42}^3/C_{48}^6$.

15.26. $C_{48}^5 C_4^1/C_{52}^6$, $C_{44}^4 C_4^1 C_4^1/C_{52}^6$.

15.27. $C_4^2 C_2^1/C_6^3 = 0{,}6$. **15.28.** $2C_{18}^8/C_{18}^{10}$.

15.29. Рассмотрим предпоследний бросок. После него общая сумма должна быть либо $12, 11, \ldots, 8$, либо 7. Если она равна 12, то общий результат будет с равной вероятностью принимать значения $13, \ldots, 18$. Аналогично при сумме 11 конечный результат с равной вероятностью принимает значения $13, \ldots, 17$ и т. д. Число 13 появляется как равный кандидат в каждом случае и является единственным числом такого рода. Итак, число 13 — наиболее вероятное.

В общем случае те же доводы показывают, что наиболее вероятная сумма, впервые превышающая n $(n > 5)$, есть $n+1$.

15.30. Обозначим через a количество зелёных мячей в красной коробке. Тогда число красных мячей в зелёной коробке плюс количество зелёных мячей в красной коробке равно $2a+1$. Так как $a \leqslant 5$, то $1 \leqslant 2a+1 \leqslant 11$. Непростые нечётные числа в этих пределах — 9 и 1 (1 — не простое и не составное), откуда $a = 0$ или $a = 4$. Вероятность получить выборку с $a = 0$ или $a = 4$ равна $C_6^5/C_{14}^5 + C_8^4 C_6^1/C_{14}^5$.

15.31. Вероятность проигрыша B — 0,6, проигрыша C — 0,7; вероятность непроигрыша B — 0,4, непроигрыша C — 0,3. При последовательности BCB не проиграть подряд две партии можно тремя способами:

1. не проиграть все три партии, вероятность этого события $0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4$;

2. не проиграть первые две партии (вероятность $0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}6$);

3. не проиграть последние две партии (вероятность $0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4$).

Сложив три вероятности, получим число $0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 1{,}6$.

При последовательности CBC аналогично получим вероятность не проиграть подряд две партии — $0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 1{,}7$. Итак, последовательность CBC лучше.

15.32. Пусть общее количество шаров в первой и второй урнах равно m_1 и m_2 (для определённости $m_1 < m_2$), а количество белых шаров в этих урнах равно k_1 и k_2 соответственно. Тогда вероятность того, что оба вынутых шара белые, равна $(k_1/m_1) \cdot (k_2/m_2)$. Получаем соотношения: $(k_1/m_1) \cdot (k_2/m_2) = 27/50$, $m_1 + m_2 = 25$.

Так как $27m_1m_2 = 50k_1k_2$, то хотя бы одно из чисел m_1, m_2 делится на 5. Но сумма m_1+m_2 тоже делится на 5, поэтому каждое из чисел m_1, m_2 делится на 5. Таким образом, имеем всего две возможности: либо $m_1 = 5$, $m_2 = 20$, либо $m_1 = 10$, $m_2 = 15$. В случае $m_1 = 5$, $m_2 = 20$ получаем $k_1k_2 = 54$, где $0 \leqslant k_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant k_2 \leqslant 20$.

Перебрав все возможные значения k_1, найдем $k_1 = 3$, $k_2 = 18$. Тогда в первой урне 2 чёрных шара, во второй тоже 2 чёрных шара, и вероятность вытащить пару чёрных шаров равна $(2/5) \times \times (2/20) = 0{,}04$. Аналогично, в случае $m_1 = 10$, $m_2 = 15$ находим $k_1 = 9$, $k_2 = 9$. Тогда в первой урне 1 чёрный шар, во второй — 6 чёрных шаров, и вероятность вытащить 2 чёрных шара равна $(1/10) \cdot (6/15) = 0{,}04$ (в обоих случаях ответы одинаковы).

15.33. $1 - C_{86}^5/C_{90}^5$. Пусть p — требуемая вероятность, k — число способов, которыми из первых 90 натуральных чисел можно выбрать 5 таких, что любые два из них отличаются между собой больше чем на 1. Тогда $p = 1 - k/C_{90}^5$. Найдем k.

Рассмотрим набор из пяти чисел $1 \leqslant a < b < c < d < e \leqslant 90$, среди которых нет двух последовательных, ему однозначно соответствует набор различных чисел a, $b-1$, $c-2$, $d-3$, $e-4$, которые могут принимать любые значения от 1 до 86. Число способов, которыми можно выбрать 5 разных чисел из первых 86, равно C_{86}^5.

15.34. Обозначим через d вероятность того, что случайно выбранный учащийся даст правильный ответ. Вероятность совпадения ответа случайно выбранного учащегося с ответом учителя равна сумме вероятности αd правильного ответа обоих и вероятности $(1-\alpha)(1-d)$ неправильного ответа обоих. Поэтому условие задачи можно записать в виде $\alpha d + (1-\alpha)(1-d) = 1/2$, или $(\alpha - 1/2)(d - 1/2) = 0$.

Если $\alpha = 1/2$, то это условие выполнено и отношение числа мальчиков к числу девочек в классе может быть любым. Пусть $\alpha \neq 1/2$, тогда $d = 1/2$. Обозначим через x и y число мальчиков и девочек в классе. Вероятность d правильного ответа случайно выбранного учащегося класса равна сумме вероятности $\beta x/(x+y)$ того, что будет выбран мальчик и он даст правильный ответ, и вероятности $\gamma y/(x+y)$ того, что будет выбрана девочка и она даст правильный ответ. Итак, условие задачи имеет вид $\beta x/(x+y) + \gamma y/(x+y) = 1/2$, или $(\beta - 1/2)x = (1/2 - \gamma)y$.

Поэтому, если $\beta = \gamma = 1/2$, то отношение числа мальчиков к числу девочек в классе может быть любым, если $\beta = 1/2$, но $\gamma \neq 1/2$, то класс состоит только из одних мальчиков; если же $\beta \neq 1/2$, то отношение числа мальчиков к числу девочек в классе равно $(1-2\gamma)/(2\beta-1)$ (разумеется, при условии, что дробь неотрицательна).

15.35. Разобьём все возможные пары троек вершин на C_n^6 групп, собирая в одной группе те и только те пары троек, которые образуют одинаковые шестёрки вершин. С одной стороны, каждая такая группа содержит столько элементов, сколькими способами можно разбить шестёрку фиксированных вершин на две тройки, т. е. $C_6^3 = 20$ элементов. С другой стороны, существует ровно 6 способов разбить шестёрку на две тройки, удовлетворяющие требуемому в задаче условию. Поэтому искомая вероятность равна $6/20 = 0{,}3$.

15.36. Если из трёх вершин две уже выбраны, то число способов, которыми можно выбрать третью вершину так, чтобы полученная тройка оказалась односторонней, зависит от углового расстояния l между двумя первыми вершинами. (Угловым расстоянием между вершинами A и B назовем величину $l = \angle AOB \cdot (n/\pi)$, где O — центр $2n$-угольника; при этом всегда $l \leqslant n$, а угловое расстояние между соседними вершинами равно 1.) При $l < n$ третью вершину можно выбрать $(l-1)+2(n-l) = 2n-1-l$ способами; если же $l = n$, то её можно выбрать произвольно, т. е. $2n-2$ способами. Далее, для каждого значения $l = 1, \ldots, n-1$ есть ровно $2n \cdot 2 = 4n$ способов выбрать сначала первую, а затем вторую вершину на угловом расстоянии l от первой. Наконец, для $l = n$ есть только $2n$ таких способов. Поэтому общее количество способов последовательного выбора трёх вершин равно

$$2n(2n-2) + 4n(2n-2+2n-3+\ldots+2n-n) = 6n^2(n-1).$$

Число односторонних троек подсчитано при условии, что в каждой тройке вершины упорядочены. Если же этого не делать, то число троек уменьшится в 6 раз. Количество способов произвольным образом выбрать 3 вершины равно $C_{2n}^3 = 2n(2n-1)(2n-2)/6$, поэтому искомая вероятность равна $3n/(2(2n-1))$.

15.37. Так как чётность числа белых шаров, содержащихся в урне, не меняется после каждой операции, то последний шар будет белым тогда и только тогда, когда число n нечётно. Поэтому искомая вероятность равна либо 1 (если n нечётно), либо 0 (если n чётно).

15.38. Пусть у игроков A и B выпадает m и k «орлов» соответственно. Тогда искомая вероятность p события $m > k$ равна вероятности q события $(n+1)-m > n-k$, т. е. вероятности того, что у игрока A выпадает больше «решек», чем у игрока B (так как при каждом бросании монеты «орёл» и «решка» выпадают с равной вероятностью). С другой стороны, событие $m > k$ имеет место тогда и только тогда, когда $n-m < n-k$, т. е. когда $(n+1)-m \leqslant n-k$ (поскольку $n-m$ и $n-k$ — целые числа). Поэтому $p = 1-q$, откуда имеем $p = q = 1/2$.

15.39. Найдем количество строк $(i_1; \ldots; i_n)$, удовлетворяющих условию. Число i_n может принимать четыре значения: $n, \ldots, n-3$. Число i_n может принимать 5 значений: $n, n-1, \ldots, n-4$, за исключением того значения, которое уже занято числом i_n. Итак, число i_{n-1} также может принимать 4 значения. Аналогично, каждое из чисел $i_{n-2}, \ldots, i_4$ может принимать 4 значения. Числа i_1, i_2, i_3 могут быть выбраны произвольным образом из трёх значений, оставшихся после выбора чисел $i_n, \ldots, i_4$. Итак, среди всех $n!$ возможных строк имеется $4^{n-3} \cdot 3!$ строк, удовлетворяющих требуемому условию. Значит, искомая вероятность равна $4^{n-3} \cdot 3!/n!$.

15.40. Лучше изменить свой выбор. При первоначальном выборе вероятность того, что деньги в выбранной шкатулке — $1/3$, вероятность того, что деньги в одной из двух других — $2/3$. После того как ведущий открыл ту из оставшихся шкатулок, которая была пустой, вероятность нахождения выигрыша в третьей шкатулке становится равной $2/3$. (Вероятность выигрыша при сохранении первоначального выбора по-прежнему равна $1/3$.)

ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

16. НЕРАВЕНСТВА

16.1. Числовые неравенства

16.1. а) $5^3 < 3^5$, б) $2^7 > 5^3$, в) $3^2 > 2^3$, г) $2^{10} < 3^7$, д) 4^{53}, е) 8^{91}.

16.2. $2^{100} < 3^{100}$, поэтому достаточно доказать, что $2 \cdot 3^{100} < 4^{100}$ т. е. что $(4/3)^{100} > 2$.

16.3. а) Обозначим число 1234568 через x. Тогда исходное неравенство превратится в $(x-1)(x+1) < x^2$, что очевидно.

б) $\dfrac{1975}{1987} = 1 - \dfrac{12}{1987} = 1 - \dfrac{120012}{19871987} < 1 - \dfrac{120012}{19871988} = \dfrac{19751976}{19871988}$.

в) Обозначим числитель первой дроби через m, а знаменатель — через n. Тогда вторая дробь равна $(m+1)/(n+2)$. Так как, очевидно, $2m > n$, то $mn+2m > mn+n$ или $m/n > (m+1)/(n+2)$.

16.4. Обозначим числитель дроби через x. Тогда вся дробь равна $a = x/(10x-9)$, $1/a = 10 - 9/x$ и чем больше x, тем меньше a. Итак, первая дробь больше второй.

16.5. Обозначим числитель первой дроби через m, а знаменатель — через n. Тогда $(m+1)/(n+1) - m/n = (n-m)/(n(n+1))$. Так как $n > m$, вторая дробь больше.

16.6. $16\ldots6/6\ldots64 > 16/70 > 2/9 > 19\ldots9/9\ldots95$.

16.7. а) Первое число равно 0, поэтому оно меньше. б) Введем обозначение $n = 1970$. Имеем:

$$\left(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}\right)^2 = 2n + 2\sqrt{n^2-1} < 2n + 2n = \left(2\sqrt{n}\right)^2.$$

16.8. $100^2 > 150 \cdot 50$, поэтому первое число больше.

16.9. $(1{,}01)^{100} > 2$ (по неравенству Бернулли (см. 16.31)), поэтому $(1{,}01)^{1000} > 2^{10} = 1024 > 1000$.

16.10. а) Разобьём слагаемые на пары:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots = \frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \ldots > \frac{1}{6} + \frac{1}{20} = \frac{13}{60} > \frac{1}{5}.$$

б) Заметим, что $1+\sqrt[n]{3} > 2\cdot 3^{1/2n}$. Поэтому

$$\left(1+\sqrt{3}\right)\ldots\left(1+\sqrt[11]{3}\right) > 2^{10}\cdot 3^{1/4+1/6+\ldots+1/22} > 2^{10}\cdot 3 > 1991,$$

так как

$$\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{22}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}\right)\right) > \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=1.$$

16.11. Так как $99! > 100$, то $A < B$.

16.12. $\dfrac{1}{5001}+\dfrac{1}{5002}+\ldots+\dfrac{1}{5100} < \dfrac{1}{5000}\cdot 100 = \dfrac{1}{50} < 1/49$.

16.13. 8^{85}. $7^{90} > 6^{91}$, так как

$$(7/6)^{90}=(1+1/6)^{90} > 1+90/6=16 > 6.$$

$7^{90} > 5^{100}$, так как

$$(7/5)^{90}=((1{,}4^3)^2)^{15} > (2{,}3^2)^{15} > 5^{15} > 5^{10}.$$

$8^{85} > 7^{90}$, так как $(8/7)^{18}=(((8/7)^2)^3)^3 > 2^3=8$.

16.14. а), в) Решение 1. Обозначим данное произведение через A и рассмотрим также произведение $B=2/3\cdot 4/5\cdot\ldots\cdot 98/99$. Так как $2/3 > 1/2,\ldots,1 > 99/100$, то $B > A$. Но,как нетрудно видеть, $AB=1/100$. Отсюда следует, что $A^2 < AB = 1/100$, а значит, $A < 1/10$. Далее, $B < 2A$, следовательно, $A\cdot 2A > AB = 1/100$ и, значит, $A > 1/(10\sqrt{2}) > 1/15$.

Решение 2. Введем, как выше, обозначение A. Тогда

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{99^2-1}{100^2} < A^2 < \frac{1^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{4^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{99^2}{100^2-1}.$$

Разлагая теперь числители дробей слева и знаменатели дробей справа по формуле разности квадратов, получим:

$$\frac{1}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{98\cdot 100}{100\cdot 100} < A^2 < \frac{1}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{99\cdot 99}{99\cdot 101}$$

или, после сокращения, $1/200 < A^2 < 1/101$. Тогда $1/15 < A < 1/10$.

Совершенно так же можно доказать и более общее соотношение

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

б) Докажем, что при $n > 1$ выполняется неравенство

$$\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Доказательство проще всего провести методом математической индукции. При $n = 1$ имеем равенство. Предположим теперь, что для какого-то значения n неравенство выполняется. Умножим обе части на $(2n+1)/(2n+2)$. Так как

$$\left(\frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}}\right)^2 = \frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2(3n+4)+n} < \frac{1}{3n+4},$$

то

$$\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n+2)} < \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}.$$

Подставив в это неравенство $n = 50$, получим более сильное неравенство (так как $\sqrt{3\cdot 50+1} \approx 12{,}288 < 12$.)

16.15. $\sin 1 < \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2 < 7/8 < \log_3 \sqrt{7}$.

16.16. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8}{4} \geqslant 1{,}1.$$

Переходя к десятичным логарифмам, получим:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\lg 5}{\lg 4} + \frac{\lg 6}{\lg 5} + \frac{\lg 7}{\lg 6} + \frac{\lg 8}{\lg 7}\right) > 1{,}1.$$

По неравенству Коши левая часть больше, чем

$$\sqrt[4]{\frac{\lg 5 \lg 6 \lg 7 \lg 8}{\lg 4 \lg 5 \lg 6 \lg 7}} = \sqrt[4]{\log_4 8} = \sqrt[4]{1{,}5} > 1{,}1.$$

Замечание. Вычисления показывают, что $\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 \approx 4{,}4289$, т. е. приведённая в задаче оценка весьма точная.

16.17. Осуществим следующие преобразования и оценим результат:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1000} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{1000}\right) <$$
$$< \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{30} = \frac{23}{60} < \frac{24}{60} = \frac{2}{5}.$$

16.18. Второе. Обозначим $1977 = n$. Тогда неравенство следует из того, что

$$(n+1)^{n-1}(n-1)^{n+1} < (n+1)^n(n-1)^n = (n^2-1)^n < n^{2n}.$$

16.19. $\ln 1{,}01 > 2/201$. Функция $f(x) = \ln(1+x) - 2x/(x+2)$ возрастает при $x > 0$, поскольку

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0.$$

16.20. а) Разделим единичный круг на 18 равных секторов с углом $20°$. Площадь каждого такого сектора равна $1/18$ площади единичного круга, т. е. $\pi/18$. Так как площадь треугольника внутри сектора меньше площади сектора, то $\sin 20°/2 < \pi/18$, откуда $\sin 20° < \pi/9$. Так как $\pi/9 < 7/20$, то $\sin 20° < 7/20$, ч. т. д.

б) График функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi/6]$ является выпуклым вверх, поэтому при всех $x \in [0; \pi/6]$ он расположен выше графика прямой $y = 3x/\pi$, проходящей через его концевые точки, т. е. через точки с координатами $(0; 0)$ и $(\pi/6; 1/2)$. Значит, при всех $x \in (0; \pi/6)$ выполняется неравенство $\sin x > 3x/\pi$. Полагая в этом неравенстве $x = \pi/9$, получаем: $\sin 20° = \sin(\pi/9) > 1/3$, ч. т. д.

16.2. Доказательство неравенств

16.21. После переноса всех слагаемых влево получим неравенство $(a/2 - b + c)^2 \geqslant 0$.

16.22. Выделим полные квадраты:

$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(b - \frac{2}{3}c\right)^2 + \frac{2}{3}\left(c - \frac{3}{4}d\right)^2 + \frac{5}{8}\left(d - \frac{4}{5}\right)^2 \geqslant 0.$$

16.23. Неравенство доказывается сложением двух неравенств:

$$(2^k - 1)(2^l - 1)(2^m - 1) > 0 \quad \text{и} \quad 2^{k+l+m} > 2^k + 2^l + 2^m.$$

Второе верно, так как $2^{k+l+m} \geqslant 2^{k+2} = 4 \cdot 2^k > 2^k + 2^l + 2^m$ (при $k \geqslant l \geqslant m$).

16.24. $2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 = -(a^2+b^2+c^2) \leqslant 0$.

16.25. Неравенство эквивалентно $(x - y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})/\sqrt{xy} \geqslant 0$.

16.26. Перенесём всё в одну сторону: $(a^3 + b^3 - a^2b - ab^2) + (b^3 + c^3 - b^2c - bc^2) + (a^3 + b^3 - a^2c - ac^2) \geqslant 0$. Каждую скобку разложим на множители: $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 = (a^2 - b^2)(a - b) \geqslant 0$.

16.27. Решение аналогично разобранной задаче.

16.28. Докажем по индукции. Пусть $a_n = 1/2^2 + \ldots + 1/n^2$, $b_n = 1 - 1/n$. База очевидна. Переход: $1/k^2 = a_k - a_{k-1} < b_k - b_{k-1} = 1/(k(k-1))$.

16.29. а) База очевидна. Переход — $(n + 1)! = (n + 1)n! > 2^n(n + 1) > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. б) База очевидна. Переход: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot 2n = 4n \geqslant 2(n + 1)$.

16.30. При $n \geqslant 10$.

16.31. Первый способ — по индукции, второй — с помощью бинома Ньютона.

16.32. В неравенстве
$$\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$
положив $x = a + 1/a$, $y = b + 1/b$, получим
$$\frac{1}{2}\left(\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2\right) \geqslant \frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2.$$
Выражение $1/ab$ достигает наименьшего значения, когда произведение ab достигает наибольшего значения. Но из неравенства $ab \leqslant ((a+b)/2)^2 = 1/4$ имеем $1/ab \geqslant 4$, $1 + 1/ab \geqslant 5$. Отсюда получим требуемое неравенство. Равенство достигается лишь при $a = b = 1/2$.

16.33. Да. Если каждое из n чисел равно $1/n$, то их сумма равна 1, а сумма их квадратов — $1/n$, и при $n > 100$ она меньше 0,01.

16.34. Неравенство между средним арифметическим и геометрическим для чисел $a, b, b, \ldots, b$ (n чисел b).

16.35. Неравенство Коши–Буняковского для векторов $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{Y} = (1/2, 1/3, 1/6)$ Равенство имеет место только если $x_1 : x_2 : x_3 = 1/2 : 1/3 : 1/6$.

16.36. Положим $f(x) = \sin x$, $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.

16.37. Положим $a = x^5$, $b = y^5$.

16.38. Из $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ следует $a^2 > b^2 + c^2 - 2bc = (b-c)^2$, что равносильно $a > |b - c| \geqslant c - b$ $(a > 0)$. Отсюда $a + b > c$.

16.39. Заметим, что $a \leqslant 1$, $b \leqslant 1$, $c \leqslant 1$. Из справедливости неравенства $x(1-x) \leqslant 1/4$ при всех x следует, что $a(1-b)b \times (1-c)c(1-a) \leqslant 1/64$. Но, перемножив данные неравенства, получим $a(1-b)b(1-c)c(1-a) > 1/64$. Противоречие.

16.40. Пусть для определённости $|a| \geqslant |b|$. Тогда $|a+b| \leqslant 2|a|$ и, значит, $(a+b)^{50} \leqslant 2^{50}a^{50} < 2^{50}(a^{50} + b^{50})$.

16.41. Рассмотрим три случая.

1) $x \leqslant 0$. Каждый одночлен неотрицателен.
2) $0 < x < 1$. В этом случае $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = (1-x) + x^4(1-x^5) + x^{12} > 0$.
3) $x \geqslant 1$. Тогда $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 = (x^9 + x)(x^3 - 1) + 1 \geqslant 1 > 0$.

16.42. Положим $x = (a^2+b^2)/(ab)$. Тогда $x > 2$ (по неравенству о средних), поэтому достаточно доказать, что при $x \geqslant 2$ верно, что $x + 1/x \geqslant 2{,}5$, т. е. что $x^2 - 2{,}5x + 1 = (x-2)(x-0{,}5) \geqslant 0$.

16.43. Докажем по индукции, что для любого $k < n$:
$$1 + k/n < (1+1/n)^k < 1 + k/n + k^2/n^2.$$

Для $k = 1$ оно очевидно. Пусть оно верно для некоторого k, докажем его для $k+1$. Имеем

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} \geqslant \left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{k+1}{n}+\frac{k}{n^2} > 1+\frac{k+1}{n}.$$

Заметим, что это неравенство верно для любого целого положительного k. Используя теперь $k < n$, получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} < \left(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{n(k+1)-k^2}{n^3} < 1+\frac{k+1}{n}+\frac{(k+1)^2}{n^2},$$

ибо $n(k+1) > k^2$ при $n > k$. Подставив в выведенные неравенства значение $k = n-1$, получим $2 = 1 + n/n \leqslant (1+1/n)^n < 1 + n/n + n^2/n^2 = 3$.

16.44. а) В силу 16.43, $(1{,}001)^{1000} = (1+1/1000)^{1000} > 2$.

б) Первое число:

$$\frac{1001^{999}}{1000^{1000}} = \frac{1}{1001}\cdot\left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} = \frac{1}{1001}\cdot\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} < \frac{3}{1001} < 1.$$

16.45. а) Решение 1. Из сравнения разложений $(1+1/n)^n$ и $(1+1/(n+1))^{n+1}$ по формуле бинома Ньютона следует, что второе число больше первого, откуда и следует утверждение.

Решение 2. Исходное неравенство нетрудно привести к виду

$$\frac{n+2}{n+1} > \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^n.$$

Теперь воспользуемся оценкой

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^n < \frac{k+1}{k}\cdot\frac{k}{k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{k-n+2}{k-n+1} = \frac{k+1}{k-n+1}$$

для $k = n(n+2)$. Осталось лишь доказать простым перемножением скобок, что $(n+2)/(n+1) > (n+1)^2/(n^2+n+1)$.

б) Неравенство приводится к виду

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} < \frac{n+2}{n+1}.$$

Воспользовавшись оценкой пункта а), получим, что достаточно доказать неравенство

$$\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\cdot\frac{n^2+2n+1}{n^2+n} < \frac{n+2}{n+1}.$$

Избавившись от знаменателей и раскрыв скобки, получим

$$n^5 + 5n^4 + 9n^3 + 8n^2 + 4n < n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1,$$

что верно при всех $n > 0$.

16.46. Неравенство равносильно $(1 + 1/n)^n \leqslant n$. Далее используем 16.43.

16.47. Пусть неравенства задачи справедливы для некоторого n. Чтобы доказать их для $n + 1$, достаточно проверить следующие неравенства

$$\frac{((n+1)/2)^{n+1}}{(n/2)^n} \geqslant n+1 \geqslant \frac{((n+1)/3)^{n+1}}{(n/3)^n}.$$

После сокращения на $n + 1$ эти неравенства приводятся к неравенствам $(1 + 1/n)^n/2 \geqslant 1 \geqslant (1 + 1/n)^n/3$, которые следуют из неравенств $2 \leqslant (1 + 1/n)^n \leqslant 3$ (см. 16.43). Для $n = 6$ неравенство верно: $(6/2)^6 = 729 > 6! = 720 > (6/3)^6 = 64$.

16.48. Доказательство проведем методом математической индукции.

1. Докажем, что $n! > (n/e)^n$ при любом целом положительном n. Действительно, при $n = 1$ это неравенство, очевидно, выполняется. Предположим, что неравенство доказано, и покажем, что в этом случае будет выполняться неравенство $(n + 1)! > ((n+1)/e)^{n+1}$. Из 16.45, п. а, $e/(1 + 1/n)^n > 1$, поэтому

$$(n+1)! = n!(n+1) > (n/e)^n(n+1) = \frac{((n+1)/e)^{n+1}e}{(1+1/n)^n} > ((n+1)/e)^{n+1}.$$

2. Перейдем к $n! < n(n/e)^n$. С помощью логарифмических таблиц нетрудно проверить, что при $n = 7$ неравенство верно. Из 16.45, п. б, $e/(1 + 1/n)^{n+1} < 1$, поэтому

$$(n+1)! = n!\,(n+1) < (n+1)n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n = \frac{(n+1)((n+1)/e)^{n+1}e}{(1+1/n)^{n+1}} < (n+1)((n+1)/e)^{n+1}.$$

16.49. а) $\sin\beta - \sin\alpha = 2\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})\cos(\frac{\beta+\alpha}{2}) < 2\frac{\beta-\alpha}{2}$ (поскольку $\sin x < x$, $\cos x < 1$).

б) $\beta - \alpha < \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)/(1 + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha) < \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha$ (т. к. $\operatorname{tg} x > x$).

16.50. Неравенство преобразуется к виду

$$(a + b + c)(abc - (a + b - c)(c + a - b)(b + c - a)) \geqslant 0. \qquad (*)$$

Среди чисел $a+b-c$, $c+a-b$, $b+c-a$ не более одного отрицательного (если $a + b - c < 0$, $b + c - a < 0$, то $2b < 0$). Если отрицательно ровно одно из этих чисел, то их произведение неположительно и, следовательно, оба сомножителя левой части (*) неотрицательны. Если же они все неотрицательны, то

$$a^2b^2c^2 \geqslant (a^2-(b-c)^2)(b^2-(c-a)^2)(c^2-(a-b)^2) = \\ = (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2$$

или $abc-(a+b-c)(b+c-a)(c+b-a) \geqslant 0$, откуда следует (*).

16.51. Левая часть равна $(x^5+y^5)/(x+y)$. Так как $x > \sqrt{2}$ и $y > \sqrt{2}$, то $x^5+y^5 > 2(x^3+y^3)$ и $(x^5+y^5)/(x+y) > 2(x^3+y^3)/(x+y) = 2(x^2-xy+y^2) \geqslant x^2+y^2$.

16.52. Обозначим левую часть через $f(x)$. Легко видеть, что $f(x) = (1+x^{2n+1})/(1+x)$. Если $x \geqslant 1$, то, очевидно, $f(x) \geqslant 1$, если же $0 \leqslant x < 1$, то знаменатель не превосходит 2 и опять же дробь больше 1/2. Наконец, при $x < 0$ каждое слагаемое в $f(x)$ положительно, поэтому $f(x) > 1$.

16.53. Обозначим $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$. Поскольку $x^2-xy+y^2 \geqslant xy$, имеем: $x^3+y^3 \geqslant xy(x+y)$, откуда

$$\frac{1}{1+a+b} = \frac{z}{z+z(x^3+y^3)} \leqslant \frac{z}{x+y+z}.$$

Складывая полученное неравенство с аналогичными, получим неравенство задачи.

16.54. Данные задачи напоминают теорему Виета. Рассмотрим многочлены

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \quad \text{и} \quad Q(x) = (x-b_1)(x-b_2)(x-b_3).$$

Они отличаются только свободным членом (достаточно раскрыть скобки). Поэтому график одного многочлена получается из графика другого сдвигом вдоль оси ординат. При $x \leqslant b_1$ имеем $Q(x) \leqslant 0$, в частности $Q(a_1) \leqslant 0$. Значит, график $y = Q(x)$ получается из графика $y = P(x)$ сдвигом вниз или совпадает с ним. В частности, $Q(a_3) \leqslant P(a_3) = 0$. Но при $x > b_3$ имеем $Q(x) > 0$, значит $a_3 \leqslant b_3$.

16.55. $(n!)^2 = (1\cdot n)\cdot(2\cdot(n-1))\cdot\ldots\cdot(n\cdot 1)$. Покажем, что каждая скобка (кроме первой и последней) больше n. Если пара имеет вид $((k+1)\cdot(n-k))$, то $(k+1)(n-k) = k(n-k)+(n-k) > k+(n-k) = n$.

16.56. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

16.57. Решение 1. Предположим противное, т. е. $a+b+c < 3$. Умножая это неравенство на ab, получим $ab^2+(a^2-3a)b+1 < 0$. Это означает, что для функции $y(x) = ax^2+(a^2-3a)x+1$ имеем $y(b) < 0$. Так как $y(x) > 0$ при большом x, то функция имеет два вещественных корня, значит, её дискриминант положителен: $a(a-1)^2(a-4) > 0$. Итак, $a > 4$ и тем более $a+b+c > 4$. Противоречие.

Решение 2. Пусть $x = \ln a$, $y = \ln b$, $z = \ln c$. Тогда $x+y+z = 0$. Функция e^x выпукла вниз, поэтому (по неравенству Иенсена) $(e^x+e^y+e^z)/3 > e^{(x+y+z)/3} = 1$.

16.58. Разделив обе части равенства $a+b+c=1$ по очереди на a, b, c и сложив, получим

$$1/a + 1/b + 1/c = 3 + (a/b + b/a) + (b/c + c/b) + (c/a + a/c).$$

Используя то, что каждая скобка не меньше 2, получим неравенство задачи.

16.59. Пусть $p = a+b+c > 0$, $q = ab+bc+ac > 0$, $r = abc > 0$. Тогда многочлен $P(x) = x^3 - px^2 + qx - r$ принимает отрицательные значения при $x \leqslant 0$. Значит, все корни этого многочлена, равные по обратной теореме Виета, числам a, b, c являются положительными.

16.60. Так как $a < b < c < d$, то $y - x = ab + cd - ac - bd = (a-d)(b-c) > 0$, $z - y = ac + bd - ad - bc = (a-b)(c-d) > 0$. Таким образом, $x < y < z$.

16.61. Неравенство равносильно

$$(a^2-bc)^2+(b^2-ac)^2+(c^2-ab)^2+(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2 \geqslant 0.$$

Другое решение использует скалярное произведение. Пусть $\vec{X} = (a^2, b^2, c^2)$, $\vec{Y} = (bc, ca, ab)$, тогда исходное неравенство в векторной форме: $\vec{X}\vec{Y} \leqslant \vec{X}^2$. Далее воспользуемся неравенством Коши–Буняковского и тем, что $\vec{Y}^2 \leqslant \vec{X}^2$.

16.62. Это неравенство Чебышева для n чисел. Левая часть представляет собой сумму n^2 слагаемых двух типов: n слагаемых вида a_ib_i, где $i = 1, \ldots, n$ и $n(n-1)$ слагаемых вида a_ib_k, где $i, k = 1, \ldots, n$, $i \neq k$. Слагаемые второй группы можно разбить на пары и для каждой пары справедливо неравенство:

$$a_ib_k + a_kb_i = (a_ib_i + a_kb_k) - (a_i - a_k)(b_i - b_k) < a_ib_i + a_kb_k,$$

поэтому сумма слагаемых второго типа меньше суммы произведений, индекс которых принимает каждое из значений ровно $(n-1)$ раз.

16.63. Из того, что $B < (A+B)/2 < A$ (поскольку $B < A$) и $\dfrac{(a-b)^2}{8(A-B)} = \dfrac{A+B}{2}$, следует искомое.

16.64. Применяя теорему о средних и учитывая, что числа $\log_b a$, $\log_c b$, $\log_a c$ положительны, а их произведение равно 1, получим

$$\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{a+c} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{9}{a+b+b+c+c+a} = \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

16.65. Без ограничения общности можно считать, что $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Преобразуем разность между правой и левой частями неравенства к виду $(a-b)^2(a+b-c) + c(b-c)(a-c)$. Теперь для доказательства требуемого неравенства остается заметить, что полученное выражение неотрицательно, так как $a+b > c$, $b \geqslant c$, $a \geqslant c$, $c > 0$.

16.66. Если $a = b = c = 0$, то неравенство справедливо. Пусть $s = a+b+c > 0$, тогда левую часть преобразуем к виду

$$\frac{a+b+c}{s} - \frac{a(1-a)}{s}\left(\frac{1}{b+c+1} - (1-b)(1-c)\right) -$$
$$- \frac{b(1-b)}{s}\left(\frac{1}{c+a+1} - (1-c)(1-a)\right) -$$
$$- \frac{c(1-c)}{s}\left(\frac{1}{a+b+1} - (1-a)(1-b)\right) \leqslant 1,$$

так как $(a+b+c)/s = 1$, а каждая скобка неотрицательна: $\dfrac{1}{b+c+1} - (1-b)(1-c) \geqslant 0$, поскольку

$$(1-b)(1-c)(1+b+c) = 1-(b+c)^2+bc(b+c) = 1-(b+c)(b+c-bc) \leqslant 1.$$

Аналогично доказывается неотрицательность и остальных скобок.

16.67. Из неравенства $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ получим, что $(a^2+b^2) + (c^2+d^2) \geqslant 2(ab+cd) \geqslant 4\sqrt{abcd} = 4$, $ab+cd \geqslant 2$, $bc+ad \geqslant 2$, $ac+bd \geqslant 2$.

Пользуясь общей теоремой о среднем арифметическом и среднем геометрическом, можно решить задачу другим способом, а также доказать, что для любых n положительных чисел с произведением 1 сумма их квадратов не меньше n, а сумма $n(n-1)/2$ их попарных произведений не меньше $n(n-1)/2$.

16.68. Для любого m $(m = 1, \ldots, n)$ среди m пар (a_k, b_k) $(k = 1, \ldots, m)$ одно из неравенств $a_k \geqslant b_k$ или $b_k \geqslant a_k$ выполнено не менее чем для $m/2$ пар. Пусть, например, $b_k \geqslant a_k$ не менее чем в $m/2$ парах. Если b_i — наименьшее из этих b_k, то $b_i \leqslant 2/m$. Поэтому $a_i + b_i \leqslant 2b_i \leqslant 4/m$, а поскольку $i \leqslant m$, то $a_m + b_m \leqslant \leqslant a_i + b_i \leqslant 4/m$.

16.69. Возведём все равенства

$$a_1 = 0, \quad |a_2| = |a_1 + 1|, \ldots, |a_{n+1}| = |a_n + 1|$$

в квадрат и сложим. Сокращая, получим $a_{n+1}^2 = 2(a_1 + \ldots + a_n) + +n \geqslant 0$, откуда $a_1 + \ldots + a_n \geqslant -n/2$. Другое решение (по индукции) можно получить, заметив, что удаление пары последовательных членов $a_n \geqslant 0$, $a_{n+1} = -a_n - 1$ со средним $-1/2$ приводит к допустимой последовательности.

16.70. Перемножив первое и второе неравенства, получим $(a+b)^2 < ab + cd$, но $(a+b)^2 \geqslant 4ab$, поэтому $ab + cd \geqslant 4ab$, т. е. $cd \geqslant 3ab$. Перемножив второе и третье неравенства, имеем $ab(ab+cd) > (a+b)^2cd \geqslant 4abcd$, откуда $ab+cd > 4cd$, т. е. $ab > 3cd$. Итак, одновременно $ab > 3cd$ и $cd > 3ab$, что невозможно.

16.71. Циклически сдвинем x_i так, что $x_1 \leqslant x_2$ Тогда неравенство вытекает из тождества

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 - (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 =$$
$$= 4(x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4) =$$
$$= 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) + 4x_5(x_2 - x_1) + 4x_1x_4.$$

Вообще, неравенство $(x_1+\ldots+x_n)^2 \geqslant c_n(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1)$ выполнено при всех положительных $x_1, \ldots, x_n$ для следующих (наибольших) c_n: $c_2 = 2$, $c_3 = 3$, $c_4 = 4$ (причём при этих n неравенство верно для всех x_i, не обязательно положительных), а также для $c_n = 4$ при всех $n \geqslant 5$ (при $x_i > 0$). Последнее утверждение получается из доказанного для $n = 5$ индукцией: если передвинуть циклически номера так, чтобы x_{n+1} было наименьшим, то

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1})^2 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \geqslant$$
$$\geqslant -4x_1x_n + 4x_1x_{n+1} + 4x_nx_{n+1},$$

поскольку

$$2x_{n+1}(x_2 + \ldots + x_{n-1}) + (x_{n+1} - 2x_1)(x_{n+1} - 2x_n) \geqslant 0.$$

16.72. Без ограничения общности можно считать, что $a \geqslant b \geqslant \geqslant c$. Тогда $c(a-c)(b-c) \geqslant 0$, откуда $c^3+abc \geqslant ac^2+bc^2$. Достаточно доказать, что $a^3 + b^3 + 2abc \geqslant ab(a+b) + a^2c + b^2c$, Последнее неравенство преобразуется к виду $(a-b)^2(a+b-c) \geqslant 0$. Легко видеть, что равенство в данном неравенстве возможно лишь при $a = b = c$.

16.73. Пользуясь неравенством $ab \leqslant (a+b)^2/4$, для произвольного числа $c > 0$ имеем:

$$P = (x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) =$$
$$= \left(\frac{x_1}{c} + \ldots + \frac{x_n}{c}\right)\left(\frac{c}{x_1} + \ldots + \frac{c}{x_n}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{x_1}{c} + \frac{c}{x_1} + \ldots + \frac{x_n}{c} + \frac{c}{x_n}\right)^2.$$

Заметим, что функция $f(t) = c/t + t/c$ принимает наибольшее на $[a; b]$ значение обязательно на том или другом конце промежутка; выберем c так, чтобы эти значения совпадали: $f(a) = f(b)$, т. е. возьмём $c = \sqrt{ab}$. Тогда при $a \leqslant t \leqslant b$ будет $f(t) \leqslant \sqrt{a/b} + \sqrt{b/a}$. Поэтому $P \leqslant n^2(\sqrt{a/b} + \sqrt{b/a})^2/4 = n^2(a+b)^2/4ab$.

Заметим, что при чётном n неравенство дает точную оценку левой части, а при нечётном её можно несколько уточнить. (Для $n = 5$ эта задача предлагалась на олимпиаде США.)

16.74. Положим $f(x) = (x - a_1)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$. Выделив полный квадрат, получим:

$$f(x) = n(x - b_n)^2 + f(b_n) \qquad (*)$$

(при проверке нужно учесть, что $nb_n = a_1 + \ldots + a_n$). При $n = 1$ нужные неравенства очевидны ($C = D$). Чтобы доказать их, пользуясь методом математической индукции, достаточно доказать неравенства $0 < f(b_{n+1}) - f(b_n) < (a_{n+1} - b_{n+1})^2$, поскольку при добавлении к $a_1, \ldots, a_n$ ещё одного числа a_{n+1} величина C возрастает на $(a_{n+1} - b_{n+1})^2$, а D — на $(a_{n+1} - b_{n+1})^2 + f(b_{n+1}) - f(b_n)$. Левое неравенство сразу вытекает из равенства $(*)$ при $x = b_{n+1}$, правое следует из равенств

$$(n+1)b_{n+1} = nb_n + a_{n+1}, \quad n(b_{n+1} - b_n) = a_{n+1} - b_{n+1},$$
$$f(b_{n+1}) - f(b_n) = n(b_{n+1} - b_n)^2 = (a_{n+1} - b_{n+1})^2/n.$$

Тождество $(*)$, выражающее суммы квадратов расстояний до n точек через квадрат расстояния до их «центра масс» (или «среднего значения»), часто используется в теории вероятностей, статистике, а его аналоги на плоскости и в пространстве — в геометрии.

16.75. Положим $s = x_1 + \ldots + x_n$. Поскольку $x_i \geqslant x_i^2$ для каждого $i = 1, \ldots, n$, то нужное неравенство следует из неравенства $(s+1)^2 \geqslant 4s$, эквивалентного, очевидно, $(s-1)^2 \geqslant 0$.

16.76. Из уравнения следует, что $x^3 - y^3 < x - y$. Поделив обе части на положительное число $(x-y)$ (оно положительно, поскольку $x - y = x^3 + y^3 > 0$), получим $x^2 + xy + y^2 < 1$, откуда следует требуемое неравенство.

16.77. Пусть $f(x) = a\cos x + b\cos 3x$. Тогда $f(\pi n) = (-1)^n a + (-1)^n b$; $f(\pi/3) = a/2 - b$; $f(2\pi/3) = -a/2 + b$. Поэтому $|a+b| \leqslant 1$, $|a - 2b| \leqslant 2$.

16.78. $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geqslant 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}(\sqrt[12]{x} + \sqrt[4]{x})} \geqslant 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$.

16.79. Используем метод от противного. Пусть $\sin\alpha\cos\beta > 1/2$, $\sin\beta\cos\gamma > 1/2$, $\sin\gamma\cos\alpha > 1/2$. Перемножая эти неравенства, получаем

$$\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma > 1/8,$$

или $\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma > 1$,что невозможно. Следовательно, хотя бы одно из исходных неравенств не имеет места.

16.80. $b < a < c$. Докажем, что $\sin(\cos y) < \cos(\sin y)$. Подставляя $x = \cos y$ в неравенство $\sin x < x$, справедливое при $x > 0$, получаем оценку $\sin(\cos y) < \cos y$. Далее, из неравенства $y \geqslant \sin y$ имеем оценку $\cos y \leqslant \cos(\sin y)$, так как функция $\cos x$ убывает на данном интервале. Таким образом, $\sin(\cos y) < \cos y \leqslant \cos(\sin y)$.

16.81. Перемножив неравенства $(a+b)/2 \geqslant \sqrt{ab}$ и $a+b+1/2 \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$, получим искомое.

16.82. $x^{\sin^2\alpha} \cdot y^{\cos^2\alpha} \leqslant \max(x, y) < x + y$.

16.83. $x = \pi m$, $y = \pi n$ $(m, n \in \mathbb{Z})$. Из условия следует, что $\sin x \sin y \leqslant 0$. Поэтому $|\sin x - \sin y| = |\sin x| + |\sin y| \geqslant |\sin x| \cdot |\sin y|$.

16.84. Достаточно доказать, что при всех x верно неравенство $|\sin x| + |\sin(x+1)| + |\sin(x+2)| > 8/5$.

16.85. Переставим числа $a_1, \ldots, a_n$ так, что $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. При этом левая часть возрастёт. Неравенство теперь следует из оценок:

$$\frac{2}{a_1 + a_2} \leqslant \frac{1}{a_1},$$

$$\frac{2k-1}{a_1 + \ldots + a_{2k-1}} \leqslant \frac{2k-1}{a_k + \ldots + a_{2k-1}} \leqslant \frac{2k-1}{ka_{k-1}} < \frac{2}{a_{k-1}}$$

при $2 \leqslant k \leqslant (n+1)/2$,

$$\frac{2k}{a_1 + \ldots + a_{2k}} \leqslant \frac{2k}{a_{k+1} + \ldots + a_{2k}} \leqslant \frac{2}{a_k} \text{ при } 2 \leqslant k \leqslant n/2.$$

16.86. $k^3 = (a+A)(b+B)(c+C) = abc + ABC + k(aB + bC + cA)$.

16.87. $(1+1/(2n))^n-(1-1/(2n))^n-1 = a_3/(2n)^3+a_5/(2n)^5+\ldots$, где $a_3, a_5, \ldots > 0$.

16.88. $t^4 - t + 1/2 = (t^2 - 1/2)^2 + (t - 1/2)^2$. Оба слагаемых одновременно не равны нулю.

16.89. Так как $1+a = (1-b)+(1-c)$, то $1+a \geqslant 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$. Аналогично получим неравенства для b и c, затем полученные три неравенства перемножаем.

16.90. Рассмотрим выражение $a^2 + ab + b^2 - 3(a + b - 1)$ как квадратный трёхчлен относительно a. Его дискриминант равен $-3(b-1)^2 \leqslant 0$.

16.91. Дважды примените неравенство $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$.

16.92. Домножим обе части неравенства на 2 и преобразуем его к виду: $(a+b+c)^2+a^2+b^2-c^2 < 0$, $a^2+b^2-c^2 < -(a+b+c)^2 \leqslant 0$. Отсюда $a^2 + b^2 - c^2 < 0$, или $a^2 + b^2 < c^2$.

16.93. Удобно перейти к новым переменным $x = 1/a$, $y = 1/b$, $z = 1/c$, также положительным и связанным условием $xyz = 1$. Данное неравенство эквивалентно следующему: $S = x^2/(y + z) + y^2/(z + x) + z^2/(x + y) \geqslant 3/2$. Применяя неравенство Коши–Буняковского к векторам

$$\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}, \frac{y}{\sqrt{z+x}}, \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right) \quad \text{и} \quad \left(\sqrt{y+z}, \sqrt{z+x}, \sqrt{x+y}\right),$$

получаем $(x + y + z)^2 \leqslant 2S(x + y + z)$, т. е. $S \geqslant (x + y + z)/2$. Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трёх положительных чисел, получаем:

$$S \geqslant \frac{3}{2} \cdot \frac{x+y+z}{3} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}.$$

16.94. Пусть a_{i_1} — максимальное из a_i. Выберем a_{i_2} — наибольшее из чисел в знаменателе дроби с числителем a_{i_1}, и т. д., a_{i_k} — наибольшее из чисел в знаменателе дроби с числителем $a_{i_{k-1}}$. Ясно, что в конце концов мы придём к a_{i_1}, т. е. $a_{i_{r+1}} = a_{i_1}$. Если номера $1, \ldots, n$ расположить по кругу, то i_{k+1} и i_k (а также i_r и i_1) будут стоять рядом или через одно; значит, $r \geqslant n/2$. Данная сумма больше чем

$$\frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}} + \ldots + \frac{a_{i_r}}{2a_{i_1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{a_{i_3}} + \ldots + \frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}\right) = \frac{S}{2}.$$

Поскольку среднее арифметическое не меньше среднего геометрического, то

$$S/r \geqslant \sqrt[r]{\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} \cdot \frac{a_{i_2}}{a_{i_3}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}} = 1.$$

Следовательно, $S \geqslant r$, т. е. исходная сумма больше чем $S/2 \geqslant \geqslant r/2 \geqslant n/4$.

Может показаться, что всегда верно более сильное неравенство: $a_1/(a_2+a_3)+a_2/(a_3+a_4)+\ldots+a_n/(a_1+a_2) \geqslant n/2$. В самом деле, это было доказано для нечётных $n \leqslant 11$ и чётных $n \leqslant 12$, но уже для чётных $n \geqslant 14$ и нечётных $n \geqslant 27$ это неверно.

16.3. Текстовые задачи

16.95. 1 руб. 23 коп. Из второго условия книга стоит дешевле 1 руб. 24 коп, а из первого — дороже 1 руб. 22 коп.

16.96. 1 руб. 11 коп. Из первого условия 1 кг ирисок стоит дешевле 10/9 руб., а из второго — дороже 11/10 руб.

16.97. По условию удвоенная сумма денег, вложенных каждым мальчиком, не превосходит суммы, вложенной двумя остальными. Если бы один из мальчиков дал более 2 руб., то два остальных дали бы меньше 4 руб., т. е. меньше удвоенной суммы денег первого. Итак, каждый дал не более 2 руб. Так как мяч стоил 6 руб., то каждый дал 2 руб.

16.98. Расположим грибников по числу найденных грибов, так что 1-й набрал больше всех грибов, а 7-й — меньше всех. Если 4-й набрал не меньше 15 грибов, то первые трое собрали не меньше чем $16+17+18=51$ гриб. Если же 4-й набрал 14 грибов или меньше, то 4-й, 5-й, 6-й и 7-й набрали вместе не больше чем $14+13+ +12+11=50$ грибов, а значит, первые трое — не менее 50 грибов.

16.99. 23. Число Сашиных грибов должно делиться на 3 и на 5.

16.100. На 1. Пусть m, n — количество мальчиков и девочек, a, b — стоимость пирожка и булочки. Тогда $ma+nb+1=mb+na$ или $(m-n)(b-a)=1$, откуда $m-n=1$.

16.101. Сложив все 10 сумм, получим 72. Так как каждое из пяти исходных чисел входит в четыре суммы, то сумма искомых чисел равна $72:4=18$. Сумма двух наименьших, очевидно, равна 0, а двух наибольших — 15. Значит, третье по величине число равно $18-0-15=3$. В ряду сумм второе место занято, очевидно, суммой первого и третьего чисел. Поскольку эта сумма равна 2, наименьшее число равно $2-3=-1$. Ясно, что второе число равно $0-(-1)=1$. Аналогично находим, что два наибольших числа равны 5 и 10.

Во втором случае сумма десяти данных чисел равна 158. Сумма искомых чисел должна равняться $158:4$, что невозможно, так как искомые числа — целые. Значит, ответ на второй вопрос задачи отрицателен.

16.102. Больше доля голубоглазых среди блондинов. Пусть a — количество всех людей, b — количество блондинов, c — количество голубоглазых, d — количество голубоглазых блондинов. Условие задачи означает, что $d/c > b/a$. Умножив обе части неравенства на c/b, получим $d/b > c/a$.

16.103. Если банк начисляет проценты раз в месяц. Пусть проценты начисляются раз в год. Тогда в конце первого года вклад будет равен

$$(1000 + 1000 \cdot 5/100) = 1000(1 + 5/100) \text{ руб.}$$

В конце второго года вклад увеличится на 5% уже от этой суммы и станет равным

$$1000(1 + 5/100)(1 + 5/100) = 1000(1 + 5/100)^2 \text{ руб.}$$

Рассуждая аналогично, увидим, что через 10 лет вкладчик получит $1000(1 + 5/100)^{10}$ руб. Если же проценты начисляют раз в месяц, то таким же образом получим, что вкладчик через 10 лет (120 месяцев) получит $1000(1 + (5/12)/100)^{120}$ руб.

Из неравенства Бернулли следует, что второе число больше первого.

Пусть в банк кладётся K руб. и банк выплачивает p% годовых. Рассуждая аналогично, мы увидим, что через m лет вкладчик получит $K(1+p/100)^m$ руб. (так называемая *формула сложных процентов*).

Из неравенства Бернулли следует, что если сократить сроки выплаты и пропорционально уменьшить процент начисления, то вкладчик получит большую сумму. Это связано с тем, что при $a > 0$ последовательность $x_n = (1 + a/n)^n$ возрастает. Однако слишком большой выгоды от сокращения сроков вкладчик получить не сможет, так как эта последовательность ограничена. Её предел равен числу e^a. Если на калькуляторе подсчитать суммы из задачи, то в первом случае мы получим около 1629 руб., во втором — около 1647 руб., а $1000e^{0,5}$ — около 1649.

16.104. У Подосиновикова. Пусть в колонне оказалось k переполненных и l непереполненных автобусов. Обозначим количество пассажиров, едущих в переполненных автобусах, через A, а количество остальных — через B. Тогда $A > 50k$, $B \leqslant 50l$ и, значит, $A/k > 50$, $B/l \leqslant 50$, поэтому $A/k > B/l$. Из этого неравенства вытекают следующие: $B/A < l/k$, $(A + B)/A < (l + k)/k$, откуда $100\% \cdot A/(A + B) > 100\% \cdot k/(l + k)$.

В последнем неравенстве слева стоит процент людей, едущих в переполненных автобусах, а справа — процент переполненных автобусов.

16.105. а) 7. Пусть в кружке n участников, из них m девочек. Нам надо найти наименьшее натуральное n, при котором существует такое натуральное m, что $2/5 < m/n < 1/2$. Перебирая значения n от 2 до 7, находим, что этому неравенству удовлетворяет только дробь $3/7$ со знаменателем 7. Таким образом, 7 — наименьшее возможное значение n.

б) 33, в) 16. Здесь действовать перебором довольно утомительно.

Поступим следующим образом. Мы должны найти решение неравенств $43/100 < m/n < 44/100$ с наименьшим натуральным n. Разложим $43/100$ и $11/25$ в цепные дроби:

$$\frac{43}{100} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{14}}}, \qquad \frac{11}{25} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}},$$

возьмём общую часть этих разложений, а на том шаге, где разложения отличаются: ($1 + 1/2$ и 14), вставляем наименьшее натуральное число, лежащее в интервале между выписанными, (т. е. 2), и в результате получаем ответ:

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{7}{16}.$$

Этот алгоритм позволяет быстро найти дробь m/n с наименьшим знаменателем n в любом заданном интервале $0 < a < m/n < p$. Докажем это.

Будем проводить доказательство по индукции. Итак, мы ищем такие x_1, z_1, z_0, что выполняется неравенство

$$a_1 + \frac{p_1}{p_0} \leqslant x_1 + \frac{z_1}{z_0} \leqslant b_1 + \frac{r_1}{r_0},$$

и, кроме того, минимальны $\alpha_0 = z_0$ и $x_1 z_0 + z_1$. (Здесь и далее предполагается, что p_1/p_0 и т. п. — правильные дроби.) Если $a_1 \neq b_1$, то ответ очевиден — $x_1 = \lceil a_1 + p_1/p_0 \rceil$,* $z_1 = 0$, $z_0 = 1$. Пусть

* $\lceil x \rceil = -[-x]$ — минимальное целое число, не меньшее x.

теперь $a_1 = b_1$. Тогда, очевидно, $x_1 = a_1$. Сократив на a_1 и развернув дроби, получим:

$$\frac{1}{a_2 + \frac{p_2}{p_1}} \leqslant \frac{1}{x_2 + \frac{z_2}{z_1}} \leqslant \frac{1}{b_2 + \frac{r_2}{r_1}}.$$

Теперь надо минимизировать $\alpha_1 = z_1 x_2 + z_2$. Если $a_2 \neq b_2$, то $x_2 = \lceil a_2 + p_2/p_1 \rceil$, $z_2 = 0$, $z_1 = 1$. При этом $\alpha_1 = x_2$, т. е. минимально. Если же $a_2 = b_2$, то $x_2 = a_2$. Покажем, что если минимизировать сначала z_1, а потом — z_2, то получится минимальное α_1. Пусть z_1 и z_2 — значения, полученные пошаговой оптимизацией, а z_1' и z_2' — значения, при которых α_1 минимально. Если $z_1 = z_1'$, то, очевидно, $z_2 = z_2'$. Если же $z_1 < z_1'$, то $z_2 \leqslant z_2'$. (Если $z_2 > z_2'$, то $z_2 - 1 \geqslant z_2'$, поэтому $(z_2 - 1)/z_1 > z_2'/z_1' \geqslant r_2/r_1$, но тогда z_2 не минимально при данном z_1.) Но тогда $z_1 x_2 + z_2 < z_1' x_2 + z_2'$. Шаг индукции доказан.

16.106. Предположим, что Али-Баба смог унести из пещеры x кг золота и y кг алмазов. В этом случае он сможет получить $20x + 60y$ динаров. Поскольку Али-Баба может поднять не более 100 кг, то $x + y \leqslant 100$.

Кроме того, 1 кг золота занимает 1/200 часть сундука, а 1 кг алмазов занимает 1/40 часть сундука. Значит, взятые Али-Бабой сокровища займут $x/200 + y/40$ часть сундука. В распоряжении Али-Бабы только один сундук, поэтому получаем новое ограничение на количество взятого им сокровища: $x/200 + y/40 \leqslant 1$ или, умножив последнее неравенство на 200, $x + 5y \leqslant 200$.

Таким образом, x и y удовлеворяют системе

$$x + y \leqslant 100x + 5y \leqslant 200 \qquad (*)$$

Сложив эти неравенства и умножив обе части последнего неравенства на 10, получим: $20x + 60y < 3000$. Значит, Али-Баба сможет получить за сокровища не более 3000 динаров. Осталось, показать, что Али-Баба сможет унести сокровища на 3000 динаров. Для этого, необходимо и достаточно чтобы в неравенствах $(*)$ были выполнены равенства. Решив соответствующую систему уравнений, найдём $x = 75$, $y = 25$. Итак, Али-Баба сможет получить 3000 динаров, взяв из пещеры 75 кг золота и 25 кг алмазов.

16.107. Переставим цифры так, чтобы выполнялись неравенства $a_1 \geqslant a_4 \geqslant a_2 \geqslant a_5 \geqslant a_3 \geqslant a_6$. Тогда $0 \leqslant (a_1 + a_2 + a_3) - (a_4 + a_5 + a_6) \leqslant (a_1 + a_2 + a_3) - (a_2 + a_3 + a_6) = a_1 - a_6 \leqslant 9$.

16.108. За 12 минут. Ясно, что если Малыш и Карлсон хотят съесть завтрак за наименьшее время, то начать и кончить есть они должны одновременно, иначе один из них может помочь другому и сократить затраченное время.

Обозначим через x, y, z доли торта, варенья и молока, которые съел Малыш; тогда $(1-x)$, $(1-y)$, $(1-z)$ — доли этих продуктов, которые съел Карлсон, а время, которое они затратили, равно $t = 10x + 13y + 14z = 6(1-x) + 6(1-y) + 7(1-z)$.

Тем самым мы приходим к задаче: найти наименьшее значение величины $t = 10x + 13y + 14z$, если числа x, y, z удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1 \quad \text{и}$$
$$10x + 13y + 14z = 6(1-x) + 6(1-y) + 7(1-z).$$

Из последнего соотношения получим $z = (19 - 16x - 19y)/21$. Подставляя это выражение в формулу для t, получаем:

$$t = \frac{-2x + y + 38}{3}.$$

Из этой формулы мы видим, что t будет тем меньше, чем больше x и чем меньше y. Возьмём самое большое возможное значение x и самое меньшее y: $x = 1$, $y = 0$. При этом $t = 12$ минут, а $z = 1/7$ будет в допустимых пределах. Значит, наименьшее значение t достигается в том случае, когда Малыш съедает торт и выпивает $1/7$ кастрюли молока, а Карлсон съедает всё варенье и выпивает $6/7$ кастрюли молока.

Мы свели задачу к задаче линейного программирования: найти минимум линейной функции при условии, что переменные неотрицательны и удовлетворяют системе линейных неравенств и уравнений. Укажем простое общее правило, указывающее оптимальный план распределения продуктов.

Пусть a_i — время, за которое i-й продукт может съесть Малыш, b_i — время, за которое его может съесть Карлсон, при этом пусть продукты занумерованы в порядке возрастания отношений этих времён:

$$a_1/b_1 \leqslant a_2/b_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n/b_n.$$

План, при котором время завтрака будет наименьшим, состоит в следующем: Малыш начинает с первого продукта и ест их дальше по порядку номеров, а Карлсон начинает одновременно с ним с последнего продукта и ест их в обратном порядке.

16.109. Воспользуемся тем, что $x + 1/x \geqslant 2$ при $x > 0$, причём равенство имеет место лишь при $x = 1$. Сложив уравнения, получим:

$$6 = x_1 + \ldots + x_n + 1/x_1 + \ldots + 1/x_n \geqslant 2n, \qquad (*)$$

т. е. $n \leqslant 3$. Если $n = 3$, $(*)$ обращается в равенство, поэтому $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. При $n = 2$, решая квадратное уравнение, получим $x_1 = (3 - \sqrt{5})/2$, $x_2 = (3 + \sqrt{5})/2$. При $n = 1$ система несовместна.

16.110. Заметим, что m и n входят симметрично в условие задачи, поэтому можно считать, что $m \geqslant n \geqslant 2$. При этом $n^{1/m} \leqslant n^{1/n}$. Таким образом, достаточно доказать неравенство $n^{1/n} \leqslant 3^{1/3}$. При $n = 2$ неравенство верно, возьмём теперь натуральный логарифм от обеих частей неравенства и докажем, что $\ln n/n \leqslant \ln 3/3$ при $n \geqslant 3$. Производная функции $\ln x/x$ равна $(1 - \ln x)/x^2$. Она отрицательна при $x > 3 > e$. Следовательно, функция $\ln x/x$ убывает при $x \geqslant 3$.

16.111. Либо все три числа равны 0, либо одно из них равно 0, а два других — 1. Заметим, что все три числа неотрицательны, так как каждое из них — квадрат. Обозначим их в порядке убывания: $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$. Тогда $x - z \geqslant y - z \geqslant 0$, откуда $(x - z)^2 \geqslant (y - z)^2$. Но $(x - z)^2 = y$, а $(y - z)^2 = x$. Итак, с одной стороны, $x \geqslant y$, с другой, $y \geqslant x$, откуда $x = y$. Тогда получаем $z = 0$ и $x = x^2$, т. е. $x = 0$ или $x = 1$.

16.112. Наибольшее значение равно 1/4. Это значение достигается, например, при $x_1 = x_2 = 1/2$ и $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Покажем, что $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 \leqslant 1/4$ при всех неотрицательных значениях x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. В самом деле, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 \leqslant (x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4)$, так как если раскрыть в правой части скобки, то получатся все члены, стоящие в левой части, и ещё несколько неотрицательных членов.

Применив к числам $u = x_1 + x_3 + x_5 \geqslant 0$ и $v = x_2 + x_4 \geqslant 0$, составляющим в сумме 1, неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим, получим $(x_1 + x_3 + x_5)(x_2 + x_4) = uv \leqslant (u + v)^2/4 = 1/4$.

Аналогично можно доказать, что для любых n неотрицательных чисел $x_1, \ldots, x_n$, дающих в сумме 1, наибольшее значение $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$ равно 1/4.

16.113. Минимальное значение $s_{\min}$ равно $-[n/2]$. а) Сумму s всевозможных попарных произведений чисел $x_1, \ldots, x_n$ можно записать:

$$s = \frac{1}{2}\left((x_1 + \ldots + x_n)^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2\right).$$

Отсюда видно, что $s \geqslant -n/2$. Если n чётно, то, положив половину из x_k равными 1, а половину — равными -1, получим $s = -n/2$. Если же n нечётно, то (поскольку s — целое) $s \geqslant -(n-1)/2$; наименьшее значение s достигается, если в последовательности имеется $(n+1)/2$ единиц и $(n-1)/2$ минус единиц.

б) Сводится к задаче а): каждое из x_k можно последовательно заменить на 1 или -1 так, что величина суммы всевозможных попарных произведений не будет увеличиваться (x_k заменяем на -1, если сумма остальных чисел неотрицательна, и на 1, если отрицательна). Поэтому ответ здесь такой же, как и в а).

16.114. Пусть x, y, $1/(xy)$ — эти числа. Если $x + y + 1/(xy) > 1/x + 1/y + xy$, то после преобразований получим $(x-1) \times (y-1)(1/(xy) - 1) > 0$, откуда видно, что положительным должен быть ровно один из сомножителей.

16.115. Наименьшее s, равное $1 - 2^{-1/n}$, достигается при $x_k = 2^{k/n}(1 - 2^{-1/n})$. Положим $y_0 = 1$, $y_k = 1 + x_1 + \ldots + x_k$ ($k = 1, \ldots, n$). Тогда $y_n = 2$, $x_k = y_k - y_{k-1}$. Если все данные числа не превосходят s, т. е. $x_k/y_k = (y_k - y_{k-1})/y_k = 1 - y_{k-1}/y_k \leqslant s$, то $1 - s \leqslant y_{k-1}/y_k$. Перемножив эти неравенства ($k = 1, 2, \ldots, n$), получим: $(1-s)^n \leqslant y_0/y_n = 1/2$, откуда $s \geqslant 1 - 2^{-1/n}$. Это значение достигается, когда для всех k выполняется равенство $2^{-1/n} = 1 - s = y_{k-1}/y_k$, т. е. y_k образуют геометрическую прогрессию $y_1 = 2^{1/n}$, $y_2 = 2^{2/n}, \ldots, y_n = 2$. Тогда $x_k = 2^{k/n} - 2^{(k-1)/n}$.

16.116. Из условия следует, что

$$\sin\alpha(\sin\alpha - \cos\beta) = \sin\beta(\cos\alpha - \sin\beta).$$

Если $\sin\alpha > \cos\beta$ и $\cos\alpha > \sin\beta$, то $\sin^2\beta + \cos^2\beta < 1$. Неравенства $\sin\alpha < \cos\beta$, $\cos\alpha < \sin\beta$ также невозможны. Поэтому $\sin\alpha = \cos\beta$, $\cos\alpha = \sin\beta$.

16.117. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — данные числа и

$$S_n = (x_n + x_2)/x_1 + (x_1 + x_3)/x_2 + \ldots + (x_{n-1} + x_1)/x_n.$$

а) $S_n = (x_2/x_1 + x_1/x_2) + \ldots + (x_1/x_n + x_n/x_1) \geqslant 2n$.

б) Неравенство $S_n \leqslant 3n$ доказывается по индукции. Для этого следует рассмотреть случай $n = 3$ и заметить, что наибольшее из чисел $x_1, \ldots, x_n$ равно сумме своих соседей.

16.118. Пусть $m = [n/2]$, так что $n = 2m$ или $n = 2m + 1$. Занумеруем данные числа следующим образом: $x_0 = 1$ — «начальное» число; $x_1, \ldots, x_m$ — идущие подряд по часовой стрелке от x_0; $x_{-1}, \ldots, x_{-m+1}$ (и x_{-m}, если n нечётно) — идущие подряд против часовой стрелки от x_0.

а) Если любые два соседние числа различаются не более чем на ε, то $x_1 \geqslant 1-\varepsilon, \ldots, x_m \geqslant 1-m\varepsilon$, $x_{-1} \geqslant 1-\varepsilon$, ..., $(x_{-m} \geqslant 1-m\varepsilon)$. Сложив эти неравенства (без последнего), включая также равенство $x_0 = 1$, и, учитывая, что сумма всех n чисел равна 0, получим:

$$0 > n - (1+2+\ldots+(m-1)+m+(m-1)+\ldots+1)\varepsilon = n - m^2\varepsilon,$$

откуда $\varepsilon \geqslant n/m^2 \geqslant 4/n$ (поскольку $m^2 \leqslant n^2/4$).

При чётном n эта оценка является точной. При нечётном $n = 2m+1$ её можно, используя ещё x_{-m}, слегка улучшить: $\varepsilon \geqslant n/(m^2+m) = 4n/(n^2-1)$.

б) Здесь можно дважды воспользоваться результатом а). Пусть наибольшая по модулю разность соседних чисел на окружности равна ε. Согласно а), $\varepsilon \geqslant 4/n$. С другой стороны, «нормированные» разности соседних чисел набора $(x_1, \ldots, x_n)$ — числа $y_k = (x_k - x_{k-1})/\varepsilon$ — в свою очередь удовлетворяют всем условиям задачи а), поэтому для некоторого k

$$\left|\frac{x_{k+1}+x_{k-1}}{2} - x_k\right| = \left|\frac{x_{k+1}-x_k}{2} - \frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right| = \frac{\varepsilon}{2}|y_{k+1}-y_k| \geqslant \frac{8}{n^2}.$$

(здесь иногда индекс нужно, конечно, уменьшить или увеличить на n, так как числа расположены на окружности).

в), г) Покажем, как для любого n получить наилучшую возможную оценку сверху для величины δ — максимальной по модулю разности между числом на окружности и средним арифметическим двух его соседей и построить оптимальный (с наименьшим значением δ) набор. При этом набор (x_k) можно сразу считать симметричным: $x_k = x_{-k}$, поскольку замена x_k на $(x_k + x_{-k})/2$ сохраняет все свойства, оговорённые в условии задачи, и оценку $|x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}| \leqslant 2\delta$. Прежде чем оценивать сами числа x_k, оценим разности $x_{k-1} - x_k$, начиная с x_0, а затем — начиная с противоположной точки (середины набора). Поскольку $x_1 = x_{-1}$, то

$$\begin{aligned}
x_0 - x_1 &\leqslant |-x_{-1} + 2x_0 - x_1|/2 \leqslant \delta,\\
x_1 - x_2 &\leqslant (x_0 - x_1) + |-x_0 + 2x_1 - x_2| \leqslant 3\delta,\\
x_2 - x_3 &\leqslant (x_1 - x_2) + |-x_1 + 2x_2 - x_3| \leqslant 5\delta, \qquad (1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{k-1} - x_k &\leqslant (2k-1)\delta.
\end{aligned}$$

При чётном $n = 2m$, когда x_m и x_{-m} — одно число, аналогично получим:

$$
\begin{gathered}
x_{m-1} - x_m \leqslant \delta, \\
x_{m-2} - x_{m-1} \leqslant 3\delta, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_{m-j} - x_{m-j+1} \leqslant (2j-1)\delta.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Если $n = 2m + 1$ нечётно (x_m и x_{-m} — два соседних числа), то

$$
\begin{gathered}
x_{m-1} - x_m \leqslant 2\delta, \\
x_{m-2} - x_{m-1} \leqslant 4\delta, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_{m-j} - x_{m-j+1} \leqslant 2j\delta.
\end{gathered} \tag{2'}
$$

Нетрудно видеть, что для k, меньшего, чем $m/2$, лучшей оценкой для $(x_{k-1} - x_k)$ будет (1), а для k, большего $m/2$ — (2) или (2′); для оптимального набора чисел (x_k) соответствующие неравенства должны стать равенствами, при этом график оптимальной последовательности будет лежать на кусочках парабол.

Чтобы доказать это и привести точную оценку δ для каждого n нужно разобрать отдельно четыре случая, соответствующие разным остаткам n при делении на 4. Пусть, например $n = 4l + 2$. Из (1) и (2) следует, что $x_k = x_{-k} \geqslant 1 - s_k\delta$, где s_k — сумма первых k чисел в строке:

$$1, 3, \dots, 2l-1, 2l+1, 2l-1, \dots, 3, 1.$$

Точная оценка δ получится из условия, что сумма всех x_k равна 0, а оптимальным будет набор $x_k = x_{-k} = 1 - s_k\delta$. В частности, для $n = 30$ ($l = 7$) получим $0 = x_0 + 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_{14}) + x_{15} \geqslant$ $\geqslant 30 - S\delta$, где $S = 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_{14}) + s_{15}$. Эту сумму удобно считать так: поскольку

$$
\begin{aligned}
s_{15} = 1 + 3 + \ldots + 11 + 13 + 11 + \ldots + 3 + 1 = 113 = \\
= s_1 + s_{14} = s_2 + s_{13} = \ldots = s_7 + s_8,
\end{aligned}
$$

то $S = (2 \cdot 7 + l)s_{15} = 15 \cdot 113$. Таким образом, $\delta \geqslant 2/113$, причём $\delta = 2/113$ только для набора $x_k = x_{-k} = 1 - s_k\delta$, равного $1 - k^2\delta$ при $k = 0, \dots, 7$ и равного $-1 + (15 - k)^2\delta$ при $k = 8, \dots, 15$.

Аналогично можно получить точные границы δ для любого n и убедиться, что при всех n верно неравенство $\delta \geqslant 16/n^2$ (при больших n эта оценка близка к точной).

Непрерывный аналог этой задачи — найти наибольшую возможную разность между максимумом и минимумом периодической функции с периодом T, у которого вторая производная не превосходит по модулю 1. Эта задача проще, чем «дискретный» вариант. График функции, имеющей наибольшее «колебание», также состоит из кусочков параболы.

17. МНОГОЧЛЕНЫ, УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

17.1. 0. Сумма коэффициентов многочлена $f(x)$, равна $f(1)$.

17.2. Докажите, что при любом рациональном, но не целом x многочлен $P(x)$ не может быть целым числом.

17.3. Доказательство проводится индукцией по степени многочлена. Пусть утверждение доказано для многочленов степени n, тогда $P(0)$ — свободный член рационален, и по предположению индукции коэффициенты многочлена $(P(x) - P(0))/x$ — рациональны.

17.4. Да. Например, $x(x+1)(x+2)\dots(x+1991)/1992$.

17.5. $f(0) = q$, $f(1) = 1 + p + q$, $f(-1) = 1 - p + q$. Если все три числа по модулю меньше $1/2$, то

$$1 < |2+2q| = |(1+p+q)+(1-p+q)| < |1+q+p| + |1-p+q| < 1.$$

Противоречие.

17.6. Если $p \geqslant 0$, то функция x^3+px+q строго возрастает (как сумма строго возрастающей функции x^3 и неубывающей $px+q$) и, значит, каждое значение (в частности, 0) принимает не более одного раза. Поэтому уравнение не может иметь трёх корней.

17.7. При $a = -2$. Пусть многочлены $f(x) = x^4 + ax^2 + 1$ и $g(x) = x^3 + ax + 1$ имеют общий корень x_0. Тогда, умножив второй многочлен на x и вычитая из первого, получим многочлен, имеющий тот же корень, а этот многочлен — просто $f(x) - xg(x) = 1 - x$. Его единственный корень $x_0 = 1$. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют этот корень при $a = -2$; чтобы убедиться в этом, достаточно приравнять нулю $f(1)$ и $g(1)$ — оба эти числа равны $a + 2$.

Вообще говоря, для того чтобы многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имели общий корень x_0, нужно, чтобы оба они делились на многочлен $x - x_0$ (теорема Безу). Найти общий делитель наибольшей степени двух многочленов можно с помощью алгоритма Евклида — так же, как и наибольший общий делитель двух чисел.

17.8. Пусть многочлен $P(x)$ равен 7 при $x = a$, $x = b$, $x = c$ и $x = d$. В таком случае уравнение $P(x) - 7 = 0$ имеет 4 целых корня a, b, c и d. Это значит, что многочлен $P(x) - 7$ делится на $(x - a)$,

$(x-b)$, $(x-c)$, $(x-d)$, т. е. $P(x)-7=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)p(x)$, где $p(x)$ может равняться 1.

Предположим теперь, что многочлен $P(x)$ принимает при целом значении $x=A$ значение 14. Подставив $x=A$ в последнее равенство, мы получим: $7=(A-a)(A-b)(A-c)(A-d)p(A)$, что невозможно, так как целые числа $(A-a)$, $(A-b)$, $(A-c)$ и $(A-d)$ все различны, а 7 нельзя разложить в произведение 5 множителей, из которых по крайней мере 4 отличны друг от друга.

17.9. -1. Вычитая второе уравнение из первого, получим $x=1$.

17.10. Подберём два числа a и b так, чтобы иметь равенство: $x^3+px+q=x^3+a^3+b^3-3abx$. Тогда $a^3+b^3=q$ и $ab=-p/3$ или $a^3b^3=-p^3/27$. Отсюда по теореме Виета

$$a^3=q/2+\sqrt{q^2/4+p^3/27},\quad b^3=q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27}.$$

Теперь из тождества имеем

$$x^3+px+q=x^3+a^3+b^3-3abx=(a+b+x)(a^2+b^2+x^2-ab-ax-bx),$$

откуда решения исходного уравнения — $x_1=-a-b$ и решения квадратного уравнения $x^2-(a+b)x+a^2+b^2-ab=0$.

17.11. а) Да. Удобно искать такой многочлен в виде $p(x)=$ $=ax(x-1)+bx+c$. Подставляя в это тождество $x=0$, $x=1$ и $x=2$, получаем для определения коэффициентов a, b, c удобную «треугольную» систему линейных уравнений

$$c=19,\qquad b+c=85,\qquad 2a+2b+c=1985,$$

из которой находим:

$$c=19,\qquad b=66,\qquad a=917$$

и получаем ответ:

$$p(x)=917x^2-851x+19.$$

Заметим, что точно так же удобно искать многочлен степени не выше n, принимающий в данных $n+1$ точках $c_1,c_2,\ldots,c_{n+1}$, данные значения. Записав $p(x)$ в виде

$$p(x)=b_0+b_1(x-c_1)+b_2(x-c_1)(x-c_2)+\ldots+b_n(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)$$

и подставляя в это тождество $x=c_1,c_2,\ldots,c_{n+1}$, мы получаем треугольную линейную систему для определения $n+1$ неизвестных коэффициентов $b_0,b_1,\ldots,b_n$.

Указанный метод нахождения многочлена с данными значениями называется *способом интерполяции Ньютона*.

б) Нет, не существует. Для доказательства воспользуемся следующим утверждением.

Теорема. Если дан многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, то для любых целых чисел c и d целое число $p(\mathrm{c}) - p(d)$ делится на число $\mathrm{c} - d$.

Доказательство. Пусть $p(x) = a_0 + xa_1 + \ldots + x^n a_n$, тогда $p(\mathrm{c}) - p(d) = a_1(\mathrm{c} - d) + a_2(c^2 - d^2) + \ldots + a_n(\mathrm{c}^n - d^n)$. Каждое слагаемое делится на $c - d$.

Согласно этой теореме, число $p(19) - p(1) = 66$ должно делиться на число $19 - 1 = 18$, что неверно, откуда и следует ответ.

17.12. При $a = -1/8$. Указание. Если график функции $f(x)$ имеет ось симметрии $x = b$, то $f(x) = \alpha(x-b)^4 + \beta(x-b)^2 + \gamma$.

17.13. 1. Все такие трёхчлены имеют вид $(x + p/2)^2 + 1$.

17.14. $(2, -3, -6)$, $(-2, 3, 6)$. Пусть a, b, c — корни уравнения. Тогда $ab + ac + bc = 0$. Отсюда и из условия, что $|a|$ и $|b|$ — простые числа, имеем $\mathrm{c} = kab$, где k — целое. Получаем $1 + k(a+b) = 0$. Значит, $a + b = \pm 1$. Но среди простых чисел есть лишь одна пара отличающихся на 1. Это 2 и 3. Итак, $|a|$, $|b|$ и $|c|$ равны 2, 3 и 6.

17.15. а) $N(2x^2-1)^2 - 2x^3 + 3x$, б) $N(2x^4-1)^2 - 2x^6 + 3x^2$, где N — целое, большее 1.

17.16. $x = y = \pm \sqrt[1980]{1/2}$. Приведем первое уравнение к виду $(x-y)(x^2+xy+y^2-3) = 0$. Так как x и y по модулю не превосходят 1 (из второго уравнения), то лишь первый множитель может равняться 0. Значит, $x = y$.

17.17. $(0;0;a)$, $(0;a;0)$, $(a;0;0)$. Возведя в куб первое уравнение и вычтя из него третье, получим $3(x+y)(x+z)(y+z) = 0$. Если $x + y = 0$, то $z = a$ (из первого уравнения). Тогда (из второго) $x^2 = y^2 = 0$, т. е. $x = y = 0$. Аналогично рассматриваются остальные случаи.

17.18. $(1,0)$; $(0,1)$. Из второго уравнения следует, что $x \leqslant 1$ и $y \leqslant 1$. Тогда $x^3 \leqslant 1$ и, следовательно, из первого уравнения $y \geqslant 0$; аналогично $x \geqslant 0$. Если $0 < x < 1$, то $x^3 > x^4$, $y^3 \geqslant y^4$ и уравнения противоречат друг другу.

17.19. $x = y = z = t = 0$. Приведите уравнение к виду

$$x^2/4 + (x/2 - y)^2 + (x/2 - z)^2 + (x/2 - t)^2 = 0.$$

17.20. Из данного уравнения следует, что $x^2 = (4 - x^2)^{3/2}$. Возводя обе части в квадрат и извлекая кубический корень, получаем: $4 - x^2 = x^2$, откуда $x^2 = 2$. Проверка показывает, что только $\sqrt{2}$ — корень данного уравнения.

17.21. $y = x$ или $y = z$.

17.22. Заменами $x = x_1^2$, $y = y_1^2$, $z = z_1^2$ и возведением обеих частей уравнения в квадрат приходим к 17.21.

17.23. $\{0; 99; 49\frac{50}{99}\}$.

17.24. $(0;0)$, $(2+\sqrt{2}; 2+\sqrt{2})$, $(2-\sqrt{2}; 2-\sqrt{2})$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $f(x) = f(y)$, где $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$ строго возрастает (т. к. $f'(x) > 0$).

17.25. $x = y = 0$ и $x = y = -1$. Покажем, что других решений нет.

Случай 1. $x > 0$, тогда $(1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 1+x+\ldots+x^7 > > 1+x^7$. Из первого уравнения имеем $y > x$, значит $y > 0$ и из второго уравнения $x > y$. Противоречие.

Случай 2. $x < -1$, тогда из первого уравнения $y < -1$ и, следовательно, $1+y^7 = 1+(x+x^2)+(x^3+x^4)+(x^5+x^6)+x^7 > 1+x^7$. Отсюда $y > x$. Аналогично из второго уравнения получим $x > y$.

Случай 3. $-1 < x < 0$. Рассматривается аналогично второму.

17.26. $x = \dfrac{\sqrt[5]{12}-1}{\sqrt[5]{12}+1}$, $\quad y = \dfrac{\sqrt[5]{9/2}-1}{\sqrt[5]{9/2}+1}$.

Указание. Сделайте замену

$$x = \frac{u-1}{u+1}, \quad y = \frac{v-1}{v+1}.$$

17.27. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $a \neq b$. Тогда $x \neq y$. Решим систему относительно параметров a и b. Выразим из второго уравнения a и подставим в первое, получим квадратное относительно b уравнение, из которого $b_1 = y^3 + 3yx^2$, $b_2 = y^3 - 3yx^2$ и далее $a_1 = x^3 + 3xy^2$, $a_2 = x^3 + 3xy^2$. Условие положительности параметров и неизвестных позволяет отбросить (a_2, b_2). Итак, имеем систему: $a = = x^3 + 3xy^2$, $b = y^3 + 3yx^2$. Складывая и вычитая уравнения системы, получим $(x+y)^3 = a+b$, $(x-y)^3 = a-b$, откуда ответ $x = (\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a+b})/2$, $y = (\sqrt[3]{a+b} - \sqrt[3]{a-b})/2$.

Случай 2. $a = b > 0$. Тогда система имеет бесконечно много решений $x = y > 0$ и не имеет решений, для которых $x \neq y$.

17.28. Пусть $P(p) = 0$. Одно из чисел $p-1$ и p чётно. Пусть, например, p чётно, тогда разность $P(p) - P(0)$ также чётна, поскольку она делится на чётное число p (см. 17.11). Но тогда и $P(0)$ чётно. Противоречие. Аналогично, при чётном $p-1$ получим, что $P(1)$ чётно.

17.29. Если $a > 0$, то при большом p решений нет вообще. Если $a < 0$, то при большом p меньший корень будет отрицательным (из графика). Значит, $a = 0$.

17.30. По 17.11, если $a \neq b$ — целые числа, то $P(a) - P(b)$ делится на $a-b$. Пусть $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 2$, $P(b) = 3$. Тогда $P(b)-P(a_i) = 1$ делится на $b-a_i$ $(i = 1, 2, 3)$, откуда $|a_i-b| = 1$. Но это равенство не может выполняться для трёх различных чисел.

17.31. Рассмотрим многочлены

$$\begin{gathered} P_1(x) = P(x) - P(x-1), \\ P_2(x) = P_1(x) - P_1(x-1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n(x) = P_{n-1}(x) - P_{n-1}(x-1) \end{gathered}$$

(многочлен $P_i(x)$ называется *i-й разностью многочлена* $P(x)$). Нетрудно проверить, что степень многочлена $P_i(x)$ равна $n-i$ и что $P_i(x)$ при любом целом x делится на p. Но $P_n(x) = n!$, поэтому $n!$ кратно p.

17.32. Достаточно доказать, что из делимости $4^{m-n} - 1$ на 3^{k+1} следует, что $m - n$ делится на 3^k. Это следует из того, что наименьшее a такое, что $4^a - 1$ делится на 3^{k+1} равно 3^k.

17.33. $x^4 + x^3 - tx^2 + x + 1$ при малом $t > 0$ (можно, например, взять $t = 1/3$). Если требуемое свойство верно для квадрата и куба этого многочлена, то оно верно и для любой его степени.

17.34. Найдём такой многочлен $Q(x)$, что $P(Q(x))$ делится на $P(x)$. Например, таким многочленом является $Q(x) = x + P(x)$ (или, более общо, всякий многочлен вида $P(x)R(x) + x$). Действительно, если $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, то

$$\begin{aligned} P(x+z) = P(x)+a_1z+a_2((x+z)^2-x^2)+\ldots+a_n((x+z)^n-x^n)) = \\ = P(x) + z(a_1 + (2x + z)a_2 + (3x^2 + 3xz + z^2)a_3 + \ldots). \end{aligned}$$

Подставляя сюда $z = P(x)$, получим, то $P(Q(x))$ делится на $P(x)$. Поскольку степень $Q(x)$ больше 1, степень $P(Q(x))$ больше степени $P(x)$, поэтому второй сомножитель отличен от константы.

17.35. $Q(x) = \mathrm{const}$, либо $Q(x) = x$. Проверим, что указанные многочлены подходят. Если $P(x) \neq c$ при всех x, то $P(P(x)) = P(y) \neq c$. Если $P(x) \neq x$ при всех x, то в силу непрерывности либо $P(x) > x$, либо $P(x) < x$ при всех x. В первом случае $P(P(x)) > P(x) > x$, а во втором — $P(P(x)) < P(x) < x$. Проверим, что других решений нет. Проще всего искать контрпример в виде $P(x) = Q(x) - c$, поскольку тогда $P(x) \neq Q(x)$ при всех x. Обозначим через $\deg Q$ степень многочлена Q.

Случай 1. $\deg Q = 1$. Тогда $Q(x) = ax + b$. Если $a \neq 1$, то в качестве $P(x)$ можно взять $Q(x) - 1$, а если $a = 1$, то $x + b/2$.

Случай 2. $\deg Q$ — нечётное число, большее 1. Положим $P(x) = Q(x) - 1$. Тогда $P(P(x)) - Q(x)$ есть многочлен степени $(\deg Q)^2$. Но многочлен нечётной степени всегда имеет корень.

Случай 3. $\deg Q$ — чётное число, большее 0. Можно считать, что старший коэффициент многочлена Q положителен. (Поскольку подстановка $Q_1(x) = -Q(-x)$, $P_1(x) = -P(-x)$ изменяет знак старшего коэффициента, а свойства всех интересующих нас уравнений сохраняются.) Пусть $P(x) = Q(x) - c$. При достаточно больших x имеем $P(P(x)) > Q(x)$. Если подобрать такое c, чтобы при некотором x значение $P(P(x))$ было меньше $Q(x)$, то в силу теоремы о промежуточном значении уравнение $P(P(x)) = Q(x)$ будет иметь решение. Теперь подберём c. Пусть a — точка минимума $Q(x)$, x_0 — такая точка, что $Q(x_0) > a$. Положим $c = Q(x_0) - a$. Получим $P(P(x_0)) = P(a) = Q(a) - c < Q(x_0)$, что нам и надо.

17.36. Пусть M — такое натуральное число, что $P(x) > 1$ при $x \geqslant M$. Положим $L = P(M)\ldots P(M+k)$. Докажем, что если $m = M + L$, то числа $P(m)$, $P(m+1), \ldots, P(m+k)$ являются составными.

Действительно, пусть $0 \leqslant t \leqslant k$. Тогда $P(m+t)$ — составное, поскольку $P(M+L+t) = (P(M+L+t) - P(M+t)) + P(M+t)$ делится на $P(M+t) > 1$. (Первое слагаемое делится на L, т. к. при любых целых $y \neq z$ число $P(y) - P(z)$ делится на $y - z$ (см. 17.11).)

17.37. Пусть $x = a + 1/a$. Докажем по индукции, что $a^n + 1/a^n$ выражается через x многочленом T_n степени n с целыми коэффициентами. В самом деле,

$$T_1(x) = x, \quad a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = x^2 - 2 = T_2(x),$$

$$xT_n(x) - T_{n-1}(x) = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) - \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right) =$$
$$= a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} = T_{n+1}(x).$$

Подставляя $a = \sqrt[n]{2+\sqrt{3}}$, получим, что число $a + 1/a$ является корнем уравнения $T_n(x) = 4$. При $n = 4$ и $n = 5$ получим уравнения $x^4 - 4x^2 - 2 = 0$ и $x^5 - 5x^3 + 5x - 4 = 0$ соответственно.

17.38. Пусть

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots,$$
$$G(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots,$$
$$F(x)G(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots.$$

Очевидно, $a_0 = b_0 = 1$. Допустим, что $b_1 = \ldots = b_{t-1} = 1$ и $b_t = 0$, при этом $a_1 = \ldots = a_{t-1} = 0$ и $a_t = 1$. Покажем, что окаймлённых нулями отрезков, длина которых меньше t, также не существует. Предположим противное и рассмотрим самый левый из таких отрезков: $b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{i+k}$, где $k+1 < t$. Имеем: $c_i = a_0 b_i, \ldots, c_{i+k} = a_0 b_{i+k}$; далее, $c_{i+t} = a_t b_i$. Рассмотрим отрезок $c_{i+k+1}, \ldots, c_{i+t-1}$, его длина — $d = t-k-1$ $(0 < d < t)$. Посмотрим, как получается $c_{i+k+1} = a_z b_y$. Так как $z \leqslant t$, то $yi+k+1-t < i$. Значит, b_y лежит в одном из отрезков длины t. Умножая a_z на все единицы этого отрезка, получаем отрезок длины t, содержащий c_{i+k+1}. Значит, этот отрезок содержит хотя бы одно из чисел: c_{i+k}, c_{i+t}. Противоречие. Следовательно, многочлен с коэффициентами b_i представим в виде произведения многочлена $1 + x + \ldots + x^{t-1}$ на многочлен, все коэффициенты которого — нули или единицы.

17.39. Рассмотрим квадратный трёхчлен $f(x) = x^2+bx+ac$. Из условия следует, что $f(c) = c^2+bc+ac = (a+b+c)c > 0$. В точке c функция $f(x)$ принимает отрицательное значение, следовательно, парабола $y = f(x)$ пересекает ось Ox в двух точках, т. е. имеет два различных корня. Значит, дискриминант этого квадратного трёхчлена положителен: $b^2 - 4ac > 0$.

17.40. Заметим, что $f(x) = (x+6)^2-6$. Тогда $f(f(f(f(f(x))))) = (x+6)^{32} - 6$. Осталось выписать ответ: $x = -6 \pm \sqrt[32]{6}$

17.41. $(n-q)^2 + (m-p)(mq-np) < 0$. Пусть x_1, x_2 — корни первого трёхчлена, x_3, x_4 — корни второго трёхчлена, один их которых лежит внутри, а другой вне (x_1, x_2). Тогда имеем

$$(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)(x_4 - x_2) < 0.$$

Выразив m и n через x_2, x_1, получим $f(x_3)f(x_4) < 0$, где $f(x) = x^2 + mx + n$, далее выражая p и q, получим условие. Обратно, пусть выполнено условие. Тогда все преобразования можно провести в обратную сторону и достаточно доказать вещественность корней. Если x_3, x_4 — невещественные, то они комплексно сопряжены, но тогда $f(x_3)$ и $f(x_4)$ комплексно сопряжены.

Поэтому $f(x_3)f(x_4) \geqslant 0$ — противоречие. Отсюда x_3, x_4 — вещественные числа, $f(x_3)$ и $f(x_4)$ — вещественные числа разных знаков, значит трёхчлен $f(x)$ имеет вещественные корни — x_1, x_2.

17.42. Условия: $2a^3 - 9ab + 27c = 0$ и $a^2 - 3b \geqslant 0$. Если корни образуют прогрессию, то сумма двух из них равна удвоенному третьему, поэтому из теоремы Виета третий корень равен $-a/3$. Подставляя его в уравнение, получим первое условие и квадратное уравнение, которому удовлетворяют два остальных корня. Условие их вещественности — положительность дискриминанта и есть второе условие.

17.43. $b^3 = a^3c$, $c \neq 0$, c заключено между $-a^3/3$ и $a^3/27$. Алгебраический вид последнего условия: $a^2 + 2am - 3m^2 > 0$, где $m^3 = -c$. Условия получаются после подстановки выражения корней через первый член и знаменатель прогрессии в теорему Виета.

17.44. Если x целое, то $f(0) = c$ и $f(1) = a + b + c$ — целые числа, значит, $a+b$ — целое. Далее, $f(2) = 4a+2b+c$, откуда $2a = f(2)-2(a+b)-c$ — целое. Обратно, $ax^2+bx+c = 2ax(x-1)/2 + (a+b)x+c$. Так как $x(x-1)/2$ — целое при целом x, то трёхчлен принимает целые значения.

Несложно показать, что для $ax^3 + bx^2 + cx + d$ аналогичное условие таково: $6a$, $2b$, $a + b + c$ и d — целые числа.

17.45. Многочлен $x^4 + px^2 + q$ имеет четыре действительных корня в том и только в том случае, если многочлен $y^2 + py + q$ (относительно $y = x^2$) имеет два неотрицательных корня, т. е. p и q удовлетворяют условиям $p^2 \geqslant 4q$, $q \geqslant 0$, $p \leqslant 0$. Если исходный многочлен имеет четыре действительных корня (а именно: $-x_1$, $-x_2$, x_2, x_1, где без ограничения общности $x_1 \geqslant x_2 \geqslant 0$), то они образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда совместна система $-2x_2 = -x_1 + x_2$, $x_1^2 + x_2^2 = -p$, $x_1^2x_2^2 = q$, т. е. когда $q = 0{,}09p^2$. Итак, все искомые пары чисел p, q описываются условиями $p \leqslant 0$, $q = 0{,}09p^2$. ($p^2 \geqslant 4q$ и $q \geqslant 0$ вытекают из последнего равенства).

17.46. а) Значения $P(x)$ при всех целых x имеют одинаковую чётность тогда и только тогда, когда каждое из чисел

$$P(x+1) - P(x) = ((x+1)^2 + p(x+1) + q) - (x^2 + px + q) = 2x + 1 + p$$

делится на 2, т. е. когда p нечётно. При этом чётность всех значений $P(x)$ однозначно определяется по чётности числа $q = P(0)$. Таким образом, все значения $P(x)$ чётны (нечётны) при нечётном p и чётном (соответственно, нечётном) q.

б) Поскольку $Q(x) = x(x^2 + p) + q$, то $Q(3x) = 3x(9x^2 + p) + q$ делится на 3 при всех целых x тогда и только тогда, когда число q делится на 3. При этом $Q(3x \pm 1) = (3x \pm 1)(9x^2 \pm 6x + 1 + p) + q \equiv \pm (1 + p) \pmod 3$ делится на 3 в том и только в том случае, когда число $1 + p$ делится на 3. Таким образом, все значения $Q(x)$ делятся на 3 при условиях $q \equiv 0 \pmod 3$, $p \equiv 2 \pmod 3$.

17.47. Пусть $P(x) = (x + a)Q(x)$, тогда подставив $x = -a$, получим $-a^5 - 3a^4 - 6a^3 - 3a^2 - 9a - 6 = 0$. Это равенство не может выполняться, так как если a делится на 3, то целое число в левой части не делится на 9 (и потому не 0), а при a, не делящемся на 3, не делится на 3. Пусть $x^5-3x^4+6x^3-3x^2+9x-6=(x^2+a_1x+a_2)\times$ $\times(x^3+b_1x^2+b_2x+b_3)$, тогда

$$a_2b_3=-6, \qquad a_1b_3+a_2b_2=9,$$
$$a_1b_2+a_2b_1+b_3=-3, \qquad a_1b_1+a_2+b_2=6.$$

Из первого равенства следует, что только одно из чисел a_2, b_3 делится на 3. Если это число b_3, то из второго равенства следует, что b_2 делится на 3, из третьего равенства следует, что b_1 делится на 3, в силу четвёртого равенства a_2 должно делиться на 3. Противоречие. Случай, когда a_2 делится на 3, разбирается аналогично.

17.48. Докажем по индукции. Так как p — нечётное число, то при $n=0$ утверждение выполнено. Предположим, что оно выполнено для некоторого n. Тогда $x_1^{n+2}+x_2^{n+2}=-p(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})+$ $+(x_1^n+x_2^n)$ — целое, а так как каждый делитель $x_1^{n+2}+x_2^{n+2}$ и $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ является делителем $x_1^n+x_2^n$, то $x_1^{n+2}+x_2^{n+2}$ и $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ взаимно простые по предположению индукции.

17.49. Легко показать, что если $a=m+n\sqrt{p}$ — корень многочлена с целыми коэффициентами (m, n, p — целые, p — не точный квадрат), то и $b=m-n\sqrt{p}$ также является корнем этого многочлена.

17.50. По теореме Виета имеем равенства $a+b=-p$, $ab=1$, $c+d=-q$, $cd=1$, из которых получаем $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=$ $=q^2-p^2$.

17.51. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и $|f(a)|=|f(b)|=|f(c)|=1$, где a, b, c — разные целые числа. Пусть x_0 — целый корень многочлена. Тогда $f(x)=(x-x_0)q(x)$ и $|a-x_0||q(a)|=1$. Так как эти числа целые, то $|a-x_0|=1$ и, аналогично, $|c-x_0|=|b-x_0|=1$. Следовательно, хотя бы два из чисел a, b и c равны. Противоречие.

17.52. По теореме Виета для корней x_1, x_2, x_3 многочлена $\alpha x^3-\alpha x^2+\beta x+\beta$ имеем $x_1+x_2+x_3=1$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\beta/\alpha$, $x_1x_2x_3=-\beta/\alpha$. Поэтому

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=$$
$$=\frac{(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)}{x_1x_2x_3}=-1.$$

17.53. Доказательство проведем индукцией по n. При $n=0$ утверждение верно, так как в этом случае $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}=$

$= x^2 + x + 1$. Предположим, что для некоторого значения $n-1$ утверждение выполняется, т. е. многочлен $(x+1)^{2n-1}+x^{n+1}$ делится на многочлен x^2+x+1. Но тогда многочлен $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2} = (x+1)^2(x+1)^{2n-1}+x\cdot x^{n+1} = (x^2+2x+1)(x+1)^{2n-1}+x\cdot x^{n+1} = (x^2+x+1)(x+1)^{2n-1} + x((x+1)^{2n-1}+x^{n+1})$ также делится на многочлен x^2+x+1.

17.54. Любой многочлен вида $P(x) = ax$, где a — константа, удовлетворяет условиям задачи. Докажем индукцией по n, что для каждого искомого многочлена $P(x)$ выполнены равенства $P(n) = nP(1)$. При $n = 0$ и $n = 1$ эти равенства верны. Пусть они уже доказаны для чисел $n-1$ и n. Тогда $P(n+1) = 2P(n) - P(n-1) = (n+1)P(1)$, а значит, равенство справедливо и для числа $n+1$. Поскольку многочлен $P(x) - P(1)x$ имеет бесконечно много корней $x = 0, 1, 2, \ldots$, то он равен нулю. Таким образом, искомые многочлены имеют вид $P(x) = ax$.

17.55. Функция $P(x)$ имеет на прямой одну точку минимума $x_0 = -p/2$. При $x < x_0$ эта функция убывает, а при $x > x_0$ — возрастает. Поэтому для множества A значений функции $P(x)$ на отрезке $[-1; 1]$ имеем следующее:

если $p < -2$, то $x_0 > 1$ и $A = [P(1); P(-1)] = [1+p+q, 1-p+q]$;

если $-2 \leqslant p \leqslant 2$,то $-1 \leqslant x_0 \leqslant 1$ и $A = [P(x_0); \max\{P(-1); P(1)\}]$, т. е. $A = [q-p^2/4, 1-p+q]$ при $-2 \leqslant p \leqslant 0$ и $A = [q-p^2/4; 1+p+q]$ при $0 \leqslant p \leqslant 2$;

если $p > 2$, то $x_0 < -1$ и $A = [P(-1); P(1)] = [1-p+q, 1+p+q]$.

17.56. Пусть a, b, c, d — корни многочлена $P(x) = (x-a)\times (x-b)(x-c)(x-d)$.

Докажем равенство $(ab)^3 + (cd)^3 + ab + cd + 1 = 0$ (из которого будет вытекать требуемое, поскольку

$$(ab)^6 + (ab)^4 + (ab)^3 - (ab)^2 - 1 = (ab)^3\left((ab)^3 - \frac{1}{(ab)^3} + ab - \frac{1}{ab} + 1\right) = 0,$$

так как по теореме Виета $abcd = -1$). Действительно, из равенств $P(a) = P(b) = 0$ имеем $a^3 = 1/(a+1)$, $b^3 = 1/(b+1)$, откуда получаем $(ab)^3 = 1/((1+a)(1+b)) = (1+c)(1+d)/P(-1) = -(1+c)(1+d)$.

Аналогично, $(cd)^3 = -(1+a)(1+b)$. Из этих равенств имеем:

$$(ab)^3+(cd)^3+ab+cd+1 = -(1+c)(1+d)-(1+a)(1+b)+ab+cd+1 = -1-a-b-c-d = 0.$$

($a+b+c+d = -1$ по теореме Виета.)

17.57. Используя теорему Виета ($x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = -1/(2p^2)$) и неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел, получаем

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)^4 - 2x_1x_2(2(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2)) =$$
$$= p^4 + (2p^2 + 1/(2p^2))/p^2 = p^4 + 2 + 1/(2p^4) \geqslant 2 + \sqrt{2}.$$

17.58. Так как все коэффициенты многочлена $P(x)$ неотрицательны, то ни один из его корней $a_1, \ldots, a_n$ не может быть положительным. Следовательно, этот многочлен имеет вид $P(x) = (x + b_1)\ldots(x + b_n)$, где $b_i = -a_i > 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Используя теорему о средних, получаем неравенства $2 + b_i = 1 + 1 + b_i \geqslant 3\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot b_i} = 3\sqrt[3]{b_i}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Учитывая, что по теореме Виета $b_1b_2\ldots b_n = 1$, получаем: $P(2) = (2 + b_1)\ldots(2 + b_n) \geqslant 3^n\sqrt[3]{b_1\ldots b_n} = 3^n$, что и требовалось доказать.

17.59. Так как исходный многочлен имеет n положительных корней $x_1, \ldots, x_n$, то его степень не меньше n. Поэтому $a \neq 0$. По теореме Виета $b \neq 0$ и

$$(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) =$$
$$= (a/a) \cdot \frac{x_2\ldots x_n + x_1x_3\ldots x_n + \ldots + x_1\ldots x_{n-1}}{x_1\ldots x_n} =$$
$$= \frac{-n^2b(-1)^{n-1}/a}{b(-1)^n/a} = n^2.$$

С другой стороны, по теореме о средних получаем

$$(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n\sqrt[n]{x_1\ldots x_n} \cdot n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\ldots\frac{1}{x_n}} = n^2,$$

причём равенство достигается лишь в случае $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

17.60. 3. Например, многочлен $x(x^2-1)(x^2-4) = x^5 - 5x^3 + 4x$ с корнями $0, \pm1, \pm2$. Покажем, что два коэффициента быть не может. У многочлена $x^5 + ax^n$ с $n > 1$ корень 0 — кратный, многочлен $x^5 + ax$ имеет только три действительных корня, $x^5 + a$ — только один корень.

17.61. Пусть $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Разность $P(62) - P(19) = a(62^3 - 19^3) + b(62^2 - 19^2) + c(62 - 19)$ делится на $62 - 19 = 43$ и не может равняться 1.

17.62. Частное равно $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz$. Чтобы проверить нужное тождество, удобно положить $x - y = u$, $y - z = v$, тогда $z - x = -(u + v)$, и доказать тождество

$$(u + v)^5 = u^5 + v^5 + 5uv(u + v)(u^2 + uv + v^2).$$

17.63. $a_{1,2} = \pm \sqrt[20]{2^{20}-1}$; $b_{1,2} = \mp\frac{1}{2}\sqrt[20]{2^{20}-1}$, $p=-1$, $q=1/4$ (всего два набора коэффициентов). Подставляя $x=1/2$, получим $(a/2+b)^{20}+(1/4+p/2+q)^{10}=0$, откуда $a=-2b$.

Теперь тождество принимает вид

$$(2x-1)^{20} = (-2bx+b)^{20}+(x^2+px+q)^{10}.$$

Приравнивая коэффициенты при x^{20} в обеих частях, получим $2^{20}=2^{20}b^{20}+1$, откуда найдём b. Теперь тождество принимает вид $(x-1/2)^{20}=(x+px+q)^{10}$, откуда $x^2+px+q=(x-1/2)^2$, т. е. $p=-1$, $q=1/4$.

17.64. Так как $k^n-b^n=(k-b)(k^{n-1}+k^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})$, то k^n-b^n делится на $k-b$. Итак, $(k^n-b^n)-(k^n-a)=a-b^n$ делится на $k-b$ при любом $k\neq b$, но это может быть только тогда, когда $a=b$.

17.65. $a=5$. Пусть $f(x)=ax^2-bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где $0<x_1<1$ и $0<x_2<1$, числа a, b, c целые, $a>0$. Тогда $f(0)$ и $f(1)$ — целые положительные числа, поэтому $f(0)\cdot f(1)\geqslant 1$, т. е. $a^2x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)\geqslant 1$.

Заметим теперь, что всегда $x(1-x)\leqslant 1/4$, причём равенство возможно только при $x=1/2$. Поскольку числа x_1 и x_2 различны, а $x_1(1-x_1)$ и $x_2(1-x_2)$ положительные, то $x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)\leqslant 1/16$. Следовательно, $a^2>16$, т. е. $a>4$. При $a=5$ получаем квадратное уравнение $5x^2-5x+1=0$, которое имеет два различных корня, принадлежащих отрезку $[0;1]$.

17.66. Сначала докажем следующие два утверждения:

1) если a^k+b^k делится на a^n+b^n, то и $a^{k-n}-b^{k-n}$ делится на a^n+b^n;
2) если a^l-b^l делится на a^n+b^n, то и $a^{l-n}+b^{l-n}$ делится на a^n+b^n.

Эти утверждения легко следуют из взаимной простоты a и b и тождеств

$$a^k+b^k=a^{k-n}(a^n+b^n)-b^n(a^{k-n}-b^{k-n}),$$
$$a^l-b^l=a^{l-n}(a^n+b^n)-b^n(a^{l-n}+b^{l-n}).$$

Разделим m на n остатком: $m=qn+r$, где $0\leqslant r<n$, вычитая q раз n из m, получим r.

Из условия задачи и утверждений 1) и 2) следует, что $a^r+(-1)^qb^r$ делится на a^n+b^n; но $0\leqslant |a^r+(-1)^qb^r|<a^n+b^n$. Отсюда следует, что $r=0$ (и при этом q нечётно).

17.67. Если уравнение $f(x)=x$ не имеет корней, то либо $f(x)>x$ при всех x (если $a>0$), либо $f(x)<x$ при всех x (если

$a < 0$), но тогда либо $f(f(x)) > f(x) > x$, либо $f(f(x)) < f(x) < x$, а это значит, что уравнение $f(f(x)) = x$ не имеет корней.

Замечание. Утверждение задачи верно не только для квадратного трёхчлена, но и для любой непрерывной функции.

17.68. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = cx^2 + bx + a$. Так как $f(1) = g(1)$ и $f(-1) = g(-1)$, то $|g(1)| \leqslant 1$ и $|g(-1)| \leqslant 1$, кроме того, $|c| = |f(0)| \leqslant 1$.

Пусть существует точка x, для которой $|g(x)| > 2$. Тогда вершина параболы $y = g(x)$ — точка с координатами $(x_0, g(x_0))$, причём $|x_0| \leqslant 1$ и $|g(x_0)| > 2$. Выделяя полный квадрат, получим $g(x) = c(x-x_0)^2 + g(x_0)$. Подставим в это равенство вместо x ближайшее к x_0 из чисел -1 и 1 (можно считать для определённости, что это 1). Тогда $|1-x_0| \leqslant 1$ и поэтому $|g(x_0)| = |g(1) - c(1-x_0)^2| \leqslant$ $\leqslant |g(1)| + |c| \leqslant 1 + |c| \leqslant 2$, что противоречит неравенству $g(x_0) > 2$. Пример трёхчлена $f(x) = 2x^2 - 1$ показывает, что оценку $|g(x)| \leqslant 2$ улучшить нельзя. (В этом случае $g(x) = -x^2 + 2$.)

17.69. Точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) = 0$. Если x_i и y_i $(i = 0, 1, 2)$ — линейные функции от времени t, то уравнение становится не более чем квадратным относительно t, поэтому оно имеет не более двух корней.

17.70. Пусть $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ — корни данного уравнения. Обратимся к графику функции $f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$. Ее производная $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + b$ обращается в нуль в трёх различных точках p_1, p_2, p_3, где $x_1 < p_1 < x_2 < p_2 < x_3 < p_3 < x_4$. При этом на интервале (p_1, p_2) функция $f'(x)$ положительна, а на интервале (p_2, p_3) — отрицательна.

Вторая производная $f''(x) = 12x^2 + 6ax$ обращается в нуль в двух различных точках q_1 и q_2, причём пара точек q_1, q_2 совпадает с 0, $-a/2$, и значения в этих точках первой производной имеют разные знаки. Это значит, что $a \neq 0$ и $f'(0) \cdot f'(-a/2) < 0$, т. е. $b(4b + a^3) < 0$. Отсюда следует, что $ab < -4b^2/a^2$, и поскольку $-4b^2/a^2 < 0$, то $ab < 0$.

17.71. Так как $f(1) = f(0) = 1$, то свободный член $P_n(0)$ многочлена $P_n(x) = f(f(\ldots(f(x))\ldots))$ равен 1. Значит, при любом целом m остаток от деления $P_n(m)$ на m равен 1. Заменив здесь m на $m' = P_k(m)$, получим, что $P_{n+k}(m)$ и $m' = P_k(m)$ взаимно просты.

17.72. Покажем, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, в котором $|a| \leqslant 1980$, $|b| \leqslant 1980$, $|c| \leqslant 1980$, не может иметь корень, больший 1981. Предположим противное: пусть $x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0$

и $x_1 > 1981$. Тогда $x_1^3 = -ax_1^2 - bx_1 - c \leqslant |a|x_1^2 + |b|x_1 + |c| \leqslant \leqslant 1980(x_1^2 + x_1 + 1) \leqslant 1980(x_1^3 - 1)/(x_1 - 1) < (x_1^3 - 1)$ и поэтому $x_1^3 < x_1^3 - 1$, что невозможно. Противоречие.

Замечание. Аналогично предыдущему доказывается следующее утверждение: *уравнение $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, в котором все коэффициенты по модулю не превосходят числа b, не может иметь корень, модуль которого больше числа $b + 1$.*

17.73. Если раскрыть скобки, не приводя подобные члены, в выражении

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{100})(1+x+x^2+\ldots+x^{100})(1+x+x^2+\ldots+x^{100}),$$

получится сумма произведений вида $x^px^qx^r$, где p, q, r — целые числа, удовлетворяющие условиям $0 \leqslant p \leqslant 100$, $0 \leqslant q \leqslant 100$, $0 \leqslant r \leqslant 100$, причём коэффициенты при $x^px^qx^r$ равны 1. Выражение x^{100} получится только тогда, когда $p+q+r = 100$. Значит, искомый коэффициент равен числу целочисленных решений уравнения $p+q+r = 100$, где $0 \leqslant p \leqslant 100$, $0 \leqslant q \leqslant 100$, $0 \leqslant r \leqslant 100$. Это уравнение имеет 101 решение при $p = 0$, 100 решений при $p = 1$, 99 решений при $p = 2$ и т. д. Значит, число всех решений равно $101 + 100 + 99 + \ldots + 2 + 1 = 5151$.

17.74. а) 3 при $x = y = 1$. $1 + x^2y^4 + x^4y^2 \geqslant 3x^2y^2$ (неравенство о средних).

б) Пусть $P(x,y) = g_1^2(x,y) + g_2^2(x,y) + \ldots + g_n^2(x,y)$, где $g_i(x,y)$, $i = 1,2,\ldots,n$ — многочлены. Так как $P(x,0) = P(0,y) = 4$, многочлены g_i не могут содержать одночленов вида ax^n и by^m. Поэтому коэффициент при x^2y^2 должен быть положителен.

17.75. Последовательно проводим: две параллельные прямые, каждая из которых пересекает параболу в двух точках; прямую через середины получающихся отрезков; перпендикуляр к этой прямой, пересекающий параболу в двух точках A и B; серединный перпендикуляр к отрезку AB — это ось Oy. Ось Ox перпендикулярна Oy в точке пересечения с параболой. Единица масштаба — абсцисса пересечения прямой $y = x$ с параболой.

17.76. Верно. Так как $f(-1) = 11$, а $g(-1) = -9$, в какой-то момент корнем полученного трёхчлена будет -1.

17.77. В двух точках. Если есть три точки, удовлетворяющие условию, то какие-то две из них лежат по одну сторону от точки $x = -b/2a$. Осталось оценить $|y(x_1) - y(x_2)|$.

17.78. Заметим, что $\alpha^3 = 5 + 3\sqrt[3]{6}\alpha$. Тогда $(\alpha^3 - 5)^3 = 162\alpha^3$, т. е. $\alpha^9 - 15\alpha^6 - 87\alpha^3 - 125 = 0$. Значит, в качестве искомого многочлена можно взять многочлен $p(x) = x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125$. Если этот многочлен умножить на любой многочлен с целыми коэффициентами, то вновь получится многочлен, для которого число α является корнем.

17.79. $[n/2]+1$. Каждому значению $m = 0, 1, \ldots$ поставим в соответствие многочлен

$$P_m(x) = (a_0 + 2b_0) + (a_1 + 2b_1)x + \ldots + (a_n + 2b_n)x^n,$$

где a_i и b_i соответственно — цифры записи чисел $n-2m$ и m в двоичной системе. Любой из многочленов $P_m(x)$ допустим и, наоборот, каждый допустимый многочлен совпадает с некоторым из $P_m(x)$.

17.80. Справедливо следующее тождество:

$$P(x) = 6a\frac{(x-1)x(x+1)}{6} + 2b\frac{x(x-1)}{2} + (a+b+c)x + d.$$

По условию, числа $d = P(0)$ и $a+b+c+d = P(1)$ — целые. Поэтому и число $a+b+c$ целое. Кроме того, поскольку $P(-1) = 2b - (a+b+c) + d$ — целое, $2b$ также целое. Наконец, так как целым является $P(2) = 6a + 2b + 2(a+b+c) + d$, $6a$ — тоже целое число.

При любом целом x числа $(x-1)x(x+1)/6$ и $x(x-1)/2$ являются целыми, так как произведение трёх последовательных целых чисел всегда делится на 6, а произведение двух последовательных целых чисел всегда делится на 2. Отсюда и из того, что числа $6a$, $2b$, $a+b+c$ и d целые, следует утверждение задачи.

Замечание. Справедливо следующее утверждение, обобщающее утверждение задачи: многочлен степени $k \leqslant n$, имеющий целые значения при $n+1$ последовательных целых значениях независимой переменной, принимает целые значения при всех целых значениях независимой переменной.

17.81. Рассмотрим эскиз графика функции $y = f(x)$, где $f(x) = x(x^2-1)(x^2-10)$. При $c = 0$ уравнение $f(x) = c$ имеет только три целых корня: -1, 0 и 1. При $c \neq 0$ уравнение $f(x) = c$ вне отрезка $[-1; 1]$ имеет; очевидно, не более трёх корней, а на отрезке $[-1; 1]$ целых корней не имеет. Следовательно, суммарное число целочисленных корней уравнения $f(x) = c$ при любом c не превосходит трёх.

17.82. Используя формулы Виета для корней x_1, x_2 данного уравнения, можем записать: $198 = p + q = -(x_1 + x_2) + x_1x_2 = (x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1$. Следовательно, $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 199$. Так как число 199 является простым, то пара чисел $\{x_1 - 1; x_2 - 1\}$ совпадает либо с парой $\{1; 199\}$, либо с парой $\{-1; -199\}$. Всего получаем две возможные совокупности целых корней: $\{2; 200\}$ и $\{0; -198\}$.

17.83. Пусть $n-1, n, n+1$ — последовательные целые значения x, при которых данный многочлен равен целым значениям $m-1, m, m+1$ соответственно: $2(n-1)^3-60(n-1)^2+a(n-1) = m-1$, $2n^3-60n^2+an = m$, $2(n+1)^3-60(n+1)^2+a(n+1) = m+1$. Складывая первое и третье уравнения и вычитая удвоенное второе, после очевидных преобразований получаем, что $n = 10$.

Подставим $n = 10$ в первые два уравнения. Из полученной системы находим $a = 599$ и $m = 1990$. Таким образом, искомые значения равны $1989, 1990, 1991$.

17.84. Пусть ни одно из уравнений не имеет корней. Тогда $b^2 < ac$, $c^2 < ab$ и $a^2 < bc$. Левые части в этих неравенствах неотрицательны, поэтому неотрицательны и их правые части. Перемножив неравенства, получаем неравенство $a^2b^2c^2 < a^2b^2c^2$, что невозможно. Противоречие.

Замечание. К противоречию можно прийти и по-другому. Сложив неравенства $b^2 < ac$, $c^2 < ab$ и $a^2 < bc$, получим, что $a^2+b^2+c^2 < ab+bc+ca$. Но это неравенство равносильно неравенству $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 < 0$, что невозможно.

17.85. Пусть x_1, x_2 — корни данного уравнения. По теореме Виета $x_1+x_2 = -a$, $x_1x_2 = a$, следовательно, $(x_1+1)(x_2+1) = (x_1+x_2)+x_1x_2+1 = 1$. Числа x_1+1 и x_2+1 должны быть целыми, поэтому либо $x_1+1 = 1$ и $x_2+1 = 1$, либо $x_1+1 = -1$ и $x_2+1 = -1$. В первом случае $x_1 = x_2 = 0$ и $a = 0$, а во втором — $x_1 = x_2 = -2$ и $a = 4$.

17.86. Да. Рассмотрим квадратный трёхчлен $P(x) = x(9x+2)$. Если $n = 1\ldots1$ (k единиц), то $9n+2 = 10\ldots01$ ($k-1$ нулей). Значит, $P(n) = 1\ldots1$ ($2k$ единиц), и этот квадратный трёхчлен удовлетворяет условию.

17.87. Пусть a_0 — свободный член многочлена $P(x)$. Тогда $P(x) = xQ(x)+a_0$, где $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Поэтому $P(19) = 19n+a_0$, а $P(94) = 94m+a_0$, где m и n — целые числа. Из условия вытекает, что $19n = 94m$, следовательно, $m = 94k$, $m = 19k$. Итак, $19\cdot 94k+a_0 = 1994$, откуда $a_0 = 1994-1786k$. Из условия $|a_0| < 1000$ следует, что $k = 1$, и поэтому $a_0 = 208$.

Заметим, что многочлен, удовлетворяющий условию задачи, существует, например: $-x^2+113x+208 = -(x-19)(x-94)+1994$.

17.88. Нет. Предположим противное. Если трёхчлен kx^2+lx+m с целыми коэффициентами имеет два целых корня x_1 и x_2, то m и l

делятся на k, потому что $x_1x_2 = m/k$, а $x_1 + x_2 = -l/k$. Из чисел a и $a+1$ одно чётное, например, a. Тогда b и c тоже чётные, а $(b+1)$ и $(c+1)$ — нечётные. Если y_1 и y_2 — целые корни уравнения $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1) = 0$, то $y_1y_2 = (c+1)/(a+1)$ и $y_1 + y_2 = (b+1)/(a+1)$ — нечётные числа. Противоречие: сумма и произведение двух целых чисел не могут одновременно быть нечётными.

17.89. Пусть $n \leqslant m$ — целые корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$ Тогда из $m+n = -a$, $mn = b$ следует, что $m, n < 0$, $1 \leqslant |n| \leqslant |m| \leqslant 1997$, $0 < mn \leqslant 1997$. Рассмотрим уравнение $x^2 - nx + nm = 0$. Его коэффициенты — целые числа от 1 до 1997, и оно не имеет корней, так как $D < 0$. Итак, среди рассматриваемых уравнений любому уравнению с целыми корнями можно поставить в соответствие единственное уравнение, не имеющее корней. Кроме того, все трёхчлены $x^2 + cx + d$, где c чётно, а d нечётно, не представимы в виде $x^2 - nx + mn$. Значит, уравнений не имеющих корней, больше.

17.90. Если сделать замену $x = 2\cos a$, то получим $P_1(x) = 2\cos 2a$, $P_2(x) = 2\cos 2^2a$, ..., $P_n(x) = 2\cos 2^na$. Поэтому данное уравнение сводится к уравнению $2\cos 2^na = 2\cos a$, которое преобразуется к виду $\sin((2^n-1)a/2)\sin((2^n+1)a/2) = 0$.

Корни этого уравнения $a_1 = 2k\pi/(2^n-1)$, $a_2 = 2l\pi/(2^n+1)$. Теперь нетрудно найти 2^n различных значений переменной x, удовлетворяющих данному уравнению; их также удобно записать в виде следующих двух серий:

$$x'_k = 2\cos(2k\pi/(2^n-1)), \qquad k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}-1,$$
$$x''_l = 2\cos(2l\pi/(2^n+1)), \qquad l = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}.$$

При указанных значениях k и l аргументы косинусов заключены между 0 и π. На этом промежутке функция $x = \cos a$ монотонно убывает, поэтому все значения x, принадлежащие одной серии, различны. Покажем, что значения x из разных серий также различны. Действительно, пусть $2\cos(2k\pi/(2^n-1)) = 2\cos(2l\pi/(2^n+1))$. Тогда $2k\pi/(2^n-1) = 2l\pi/(2^n+1)$ (углы лежат на отрезке $[0, \pi]$, поэтому из равенства косинусов следует равенство аргументов) или $k(2^n+1) = l(2^n-1)$.

Но числа $2^n - 1$ и $2^n + 1$ взаимно просты, поскольку они нечётны, а их общий делитель должен быть и делителем их разности, которая равна 2. Значит, k делится на $2^n - 1$, а l — на $2^n + 1$, что противоречит выбору чисел k и l.

Итак, мы нашли 2^n различных вещественных корней для уравнения $P_n(x) = x$, но легко установить, что многочлен $P_n(x) - x$ при $n \geqslant 1$ имеет степень 2^n, поэтому указанный набор исчерпывает всю совокупность корней рассматриваемого многочлена, а отсюда следует утверждение задачи.

Гораздо интереснее другой способ решения, раскрывающий существо задачи. Заметим, что, когда x пробегает отрезок $[-2, 2]$, функция $P_1(x)$ пробегает тот же отрезок дважды, сначала монотонно убывая, а затем монотонно возрастая. Значит, $P_2(x)$ будет уже четырежды пробегать отрезок $[-2, 2]$, когда x изменяется от -2 до 2. Продолжая эти рассуждения дальше, получаем, что $P_n(x)$ 2^n раз пробегает отрезок $[-2, 2]$ (притом каждый раз монотонно) при изменении x от -2 до 2. Отсюда нетрудно найти, что графики функций $y = P_n(x)$ и $y = x$ будут иметь ровно 2^n точек пересечения. Далее достаточно к этим рассуждениям добавить утверждение о том, что многочлен $P_n(x) - x$ имеет ровно 2^n корней.

17.91. Два многочлена $F(x)$ и $G(x)$ с целыми коэффициентами будем называть эквивалентными, если все коэффициенты их разности $F(x) - G(x)$ чётны, и записывать эту эквивалентность так: $F(x) \equiv G(x)$. Ясно, что если $F_1 \equiv G_1$, $F_2 \equiv G_2$, то $F_1 + G_1 \equiv F_2 + G_2$, $F_1G_1 \equiv F_2G_2$ (поскольку $F_1F_2 - G_1G_2 = F_1(F_2 - G_2) + G_2(F_1 - G_1)$) и $F_1^m \equiv G_1^m$ для любого натурального m. Число нечётных коэффициентов многочлена $F(x)$ будем обозначать через $W(F(x))$ или $W(F)$ и называть весом многочлена $F(x)$; положим $w(i) = W((1 + x)^i)$. Многочлен $(1 + x)^{i_1} + (1 + x)^{i_2} + \ldots + (1 + x)^{i_n}$ в условии задачи обозначим кратко через $P(x)$. Требуемое неравенство $w(i_1) \leqslant W(P)$ можно доказать методом математической индукции — по i_n.

Из соотношения $(1 + x)^{2^k} \equiv 1 + x^{2^k}$ следует, что для любого многочлена с целыми коэффициентами степени меньше $q = 2^k$ справедливо равенство

$$W(F(x)(1 + x)^q) = 2W(F(x)). \qquad (*)$$

При $i_n = 0$ и $i_n = 1$ нужное нам неравенство очевидно, так как $W(P) = w(i_1)$. Предположим, что оно верно для $i_n < 2^k$ $(k \geqslant 1)$, и докажем его для $2^k \leqslant i_n < 2^{k+1}$. Положим $q = 2^k$ и рассмотрим два случая.

Если $i_1 \geqslant q$, то, полагая $F(x) = (1 + x)^{i_1 - q} + \ldots + (1 + x)^{i_n - q}$, в силу формулы $(*)$ и предположения индукции получим $W(P) = 2W(F) \geqslant 2w(i_1 - q) = w(i_1)$.

Если же $i_1 < q$, то запишем $P(x)$ в виде $P_1(x) + (1+x)^q P_2(x) \equiv \equiv P_1(x) + P_2(x) + x^q P_2(x)$, где $P_1(x)$ — сумма многочленов $(1+x)^{i_s}$ с показателями $i_s < q$. Тогда каждый нечётный коэффициент многочлена P_1, который «аннулируется» нечётным коэффициентом P_2 при той же степени x, появляется снова в члене, степени на q большей, из многочлена $x^q P_2(x)$. Поэтому $w(i_1) \leqslant \leqslant W(P_1) \leqslant W(P)$.

17.92. По условию $p = f(0)$ — простое число, значит, $p \geqslant 2$. Ясно, что среди значений многочлена f имеются составные числа, например $f(p)$. Выберем наименьшее натуральное число y, для которого $f(y)$ — составное, и обозначим через q наименьший простой делитель числа $f(y)$. Предположим, что $y \leqslant p - 2$. Тогда

$$q \leqslant \sqrt{f(y)} \leqslant \sqrt{(p-2)^2 + (p-2) + p} < p.$$

Рассмотрим разность $f(y) - f(x) = (y - x)(x + y + 1)$. Если x пробегает значения $0, 1, \ldots, y-1$, то $y - x$ пробегает значения $1, 2, \ldots, y$, а $x + y + 1$ — значения $y + 1, \ldots, 2y$. Таким образом, в случае $q \leqslant 2y$ найдется число x, $0 \leqslant x < y$, для которого $f(y) - f(x)$ делится на q, и, значит, $f(x)$ делится на q. Но в силу выбора y число $f(x)$ простое, поэтому $f(x) = q$, что невозможно, поскольку $q < p \leqslant x^2 + x + p = f(x)$. Значит, $q > 2y$ или $q > 2y + 1$.

Так как q — наименьший простой делитель $f(y)$, то $f(y) \geqslant \geqslant q^2$, поэтому $y^2 + y + p \geqslant 4y^2 + 4y + 1$, т. е. $3y^2 \leqslant p - 3y - 1 < p$ и $y < \sqrt{p/3}$. Но тогда согласно условию $f(y)$ — простое число. Получили противоречие, которое показывает, что при $y \leqslant p - 2$ число $f(y)$ не может быть составным. Это завершает решение.

Используя результат этой задачи, убедимся, что значения $f(0), f(1), \ldots, f(39)$ многочлена $f(x) = x^2 + x + 41$ являются простыми числами. Действительно, числа $f(0) = 41$, $f(1) = 43$, $f(2) = 47$ и $f(3) = 53$ — простые и, в силу полученного результата, дальше проверять не нужно, так как $4 > \sqrt{41/3}$. Более того, $f(-x) = x^2 - x + 41 = (x-1)^2 + (x-1) + 41 = f(x-1)$, поэтому многочлен $x^2 + x + 41$ принимает простые значения и при $x = -1, -2, \ldots, -40$. Из многочлена $x^2 + x + 41$ с помощью линейной замены переменной (сдвига) получается многочлен $g(x) = x^2 - 79x + 1601$, у которого значения $g(0), g(1), \ldots, g(79)$ — простые числа. Эти замечательные свойства многочлена x^2+x+41 были открыты в начале XVIII в. Леонардом Эйлером.

Кроме случая $p = 41$, условию рассмотренной задачи удовлетворяют многочлены $x^2 + x + p$ при $p = 2, 3, 5, 11, 17$. Неизвестно, существуют ли ещё такие многочлены. Известно только, что при

$p < 10^9$ кроме указанных шести многочленов ни один не удовлетворяет условию задачи.

17.93. Пусть $x^n + 5x^{n-1} + 3 = (a_0 + a_1x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k) \times$ $\times (b_0 + b_1x + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + x^m)$, где все коэффициенты a_i, b_j — целые числа, $k + m = n$. Поскольку $a_0b_0 = 3$, один из сомножителей по абсолютной величине равен 3, а другой равен 1. Пусть $|a_0| = 3$ и $|b_0| = 1$. Заметим, что рациональные корни многочлена $x^n + 5x^{n-1} + 3$ являются целыми числами и делителями числа 3. Поэтому легко проверить, что этот многочлен не имеет рациональных корней и, следовательно, $1 < k < n - 1$. Сравнивая коэффициенты, имеем:

$$a_0b_0 = 3, \quad a_1b_0 + a_0b_1 = 0, \quad a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = 0, \ldots,$$
$$a_{k-1}b_0 + a_{k-2}b_1 + \ldots + a_0b_{k-1} = 0, \quad b_0 + a_{k-1}b_1 + \ldots + a_0 = 0.$$

Первые k равенств показывают, что все числа $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ делятся на 3. Из последнего равенства получаем, что b_0 также делится на 3, тогда как $|b_0| = 1$. Из этого противоречия вытекает требуемое утверждение.

17.94. а) Многочлены $Q_1(x) = x$ и $Q_2(x) = P(x)$ коммутируют с многочленом $P(x) = x^2 - \alpha$ при любом α; многочлен Q степени 3, коммутирующий с $x^2 - \alpha$, существует только при $\alpha = 0$ ($Q(x) = x^3$) и при $\alpha = 2$ ($Q(x) = x^3 - 3x$).

Доказательство, что других многочленов нет, и проверка получаются прямым сравнением коэффициентов. Например, для многочлена степени 3: тождество

$$(x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3)^2 - \alpha = (x^2 - \alpha)^3 + b_1(x^2 - \alpha)^2 + b_2(x^2 - \alpha) + b_3$$

выполнено, если $b_1 = b_3 = 0$ (сравнение коэффициентов при x^5, x^3 и x), $2b_2 = -3\alpha$ (сравнение коэффициентов при x^4), $b_2^2 = 3\alpha^2 + b_2$ (при x^2), $\alpha = \alpha^3 + b_2\alpha$ (свободный член), откуда либо $\alpha = 0$ и $b_2 = 0$, либо $b_2 = -3\alpha/2 = 1 - \alpha = b_2^2 - 3\alpha^2$; как ни удивительно, три уравнения с двумя неизвестными имеют решение $\alpha = 2$, $b_2 = -3$.

б) Легко проверить, что при одновременном преобразовании двух коммутирующих многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ $P(x) \to P^*(x) =$ $= P(x - y) + y$, $Q(x) \to Q^*(x) = Q(x - y) + y$ (y — число) многочлены $P^*(x)$ и $Q^*(x)$ также коммутируют друг с другом. (Если рассматривать многочлен как функцию, отображающую числовую прямую в себя, то данное преобразование соответствует сдвигу на y начала отсчёта на прямой.) Любой многочлен второй степени со старшим коэффициентом 1 можно (выделив полный квадрат) указанным преобразованием привести к виду $P^*(x) = x^2 - \alpha$.

Поэтому можно сразу считать, что $P(x) = x^2 - \alpha$, и действовать как в пункте а).

Выписывая систему уравнений на коэффициенты $b_1, b_2, \ldots, b_k$ из тождества $(Q(x))^2 - \alpha = Q(x^2 - \alpha)$, где $Q(x) = x^k + b_1 x^{k-1} + \ldots + b_k$, получим прежде всего равенства $b_1 = b_3 = \ldots = 0$, а далее — уравнения вида $b_2 = F_2$, $b_4 = F_4$, …, где функция F_i зависит от α и от b_{2j}, $2j < i$, так что коэффициенты b_2, b_4, … находятся однозначно (лишь $[k/2]$ из k уравнений, полученных приравниванием коэффициентов при $x^{2k-2}, x^{2k-4}, \ldots, x^2$ и свободного члена, используются для отыскания b_{2j}; остальные — дополнительные условия, которые могут и не выполняться).

в) Это $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$.

г) Будем вместо $P(Q)$, $P(Q(R))$ писать $P * Q$, $P * Q * R$. По условию, $Q * P = P * Q$ и $R * P = P * R$, откуда $(Q * R) * P = Q * R * P = Q * P * R = P * Q * R = P * (Q * R)$ и, аналогично, $(R * Q) * P = P * (R * Q)$.

Итак, многочлены $Q * R$ и $R * Q$ коммутируют с P и имеют одинаковую степень, поэтому согласно б) они совпадают.

д) По индукции можно доказать, что для любого $k \geqslant 2$ существует многочлен P_k степени k такой, что $t^k + 1/t^k = P_k(t + 1/t)$. Например, так как $t^2 + 1/t^2 = (t + 1/t)^2 - 2$, $t^3 + 1/t^3 = (t + 1/t)^3 - 3(t + 1/t)$, то $P_2(x) = x^2 - 2$, $P_3(x) = x^3 - 3x$. Легко видеть, что $P_m(P_n(t + 1/t)) = P_m(t^n + 1/t^n) = t^{mn} + 1/t^{mn} = P_n(t^m + 1/t^m) = P_n(P_m(t + 1/t))$, поэтому $P_m * P_n = P_m * P_n = P_{mn}$.

Эти многочлены получаются простой заменой переменных из многочленов Чебышева T_k, определяемых тождествами $\cos kp = T_k(\cos p)$, $k = 2, 3, \ldots$: $P_k(x) = 2T_k(x/2)$.

18. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И СУММЫ

18.1. Ни одной. Любая конфета забирается на следующем шаге.

18.2. 19 684. Легко видеть, что на n-м шаге для суммы s_n верно $s_n = 3s_{n-1} - 2$.

18.3. 29 минут. Через 30 минут объём грибов был бы равен удвоенному объёму колбы, следовательно, объём колбы был достигнут за минуту до этого, т. е. через 29 минут.

18.4. Назовем «молодыми» бактерии, возраст которых не превосходит получаса, а «старыми» — бактерии, прожившие свыше получаса. Примем за единицу времени полчаса. Обозначим число бактерий к моменту n через a_n. В момент $n - 1$ рождается a_{n-1}

бактерий, значит, к моменту n имеется a_{n-1} молодых бактерий, каждая из которых порождает одну новую бактерию, и $a_n - a_{n-1}$ старых бактерий, каждая из которых порождает одну новую бактерию, а сама умирает. Значит, к моменту $n+1$ число бактерий составляет $a_{n-1} + a_{n-1} + a_n - a_{n-1}$, т. е. $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

При этом $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Искомое число бактерий равно a_{13}. Непосредственный подсчёт по рекуррентной формуле показывает, что $a_{13} = 377$.

Последовательность, возникающая в этой задаче, называется последовательностью Фибоначчи и обозначается F_n. Она часто используется при решении задач.

18.5. Докажем, что через $2^n - 1$ секунд будет 2^n частиц, расположенных в ряд на расстоянии 2 друг от друга, причём крайние частицы будут находиться на расстоянии $2^n - 1$ от начального положения, а через 2^n секунд останутся две частицы на расстоянии 2^n от начального положения. Это ясно при $n = 1$ и $n = 2$. Пусть утверждение доказано при $n = k$. Докажем его для $n = k + 1$.

Согласно предположению индукции, в момент $t_0 = 2^k$ секунд останутся две частицы на расстоянии 2^k от начального положения. Потом в течение $(2^k - 1)$ секунд «потомство» первой частицы никак не будет взаимодействовать с «потомством» второй и поэтому, как следует из предположения индукции, в момент $t = 2^k + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$ секунд образуется $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ частиц, расположенных в ряд на расстоянии 2 друг от друга. Ясно, что в момент $t + 1 = 2^{k+1}$ секунд останутся 2 частицы на расстоянии 2^{k+1} от начального положения. При $k = 7$ получаем, что через 128 секунд будут две частицы на расстоянии 128 от начального положения, а число частиц через 129 секунд равно 4.

18.6. $a_{1986} = 2/3$. Последовательность будет повторяться с периодом 6.

18.7. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Заметим, что все члены a_k последовательности положительны и что число $m = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ является корнем уравнения $m = 1 + \frac{1}{m}$. Покажем, что если $a_k < m$, то $a_{k+1} > m$ и $a_{k+2} < m$. Из $a_k < m$ вытекают следующие соотношения: $1/a_k > 1/m$, $a_{k+1} = 1 + 1/a_k > 1 + 1/m = m$, $1/a_{k+1} < 1/m$, $a_{k+2} = 1 + 1/a_{k+1} > 1 + 1/m = m$.

18.8. При $n > 3$, $10^n - 1000 = 10^3(10^{n-3} - 1)$. Число в скобках делится на 9, поэтому данная разность делится на 360. Отсюда все члены, начиная с 4-го, совпадают с $\sin 1000^\circ = \sin(3 \cdot 360 - 80)^\circ < 0$. В последовательности 3 положительных члена.

18.9. Преобразуем данное выражение:

$$1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{200}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{200}\right)=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{200}-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\ldots+\frac{1}{200}.$$

18.10. Покажем, что искомая сумма равна 1989/1990, тогда, поскольку левая часть неравенства, очевидно, меньше суммы (т. к. $1/k^2 < 1/k(k-1)$), будет доказано и неравенство:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{1990^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1989\cdot 1990}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1989}-\frac{1}{1990}\right)=\frac{1989}{1990}.$$

18.11. $1-1/n!$. Представить k-е слагаемое в виде $k/(k+1)! = 1/k! - 1/(k+1)!$.

18.12. Сумма выбранных чисел равна половине суммы всех чисел от 1 до 100. Если $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$ — выбранные числа, а $b_1, b_2, \ldots, b_{50}$ — остальные числа, не превосходящие 100, то

$$b_1^2+\ldots+b_{50}^2=(101-a_1)^2+\ldots+(101-a_{50})^2=$$
$$=50\cdot 101^2-2\cdot 101(a_1+\ldots+a_{50})+a_1^2+\ldots+a_{50}^2=a_1^2+\ldots+a_{50}^2.$$

Значит, сумма квадратов наших чисел равна половине суммы квадратов чисел от 1 до 100, т. е. 169 075.

18.13. Да. Полные квадраты $1^2, 2^2, \ldots, n^2, \ldots$ разбивают все натуральные числа на группы. Отнесем к 1-му множеству все числа, принадлежащие нечётным группам, а ко 2-му — все числа из чётных групп (сами квадраты относим к 1-му множеству). Если d — разность арифметической прогрессии, то в группу подряд стоящих чисел «длины», большей d, обязательно попадает хотя бы один член арифметической прогрессии. Но при любом d такие группы имеются в 1-м и во 2-м множествах, так как расстояния между соседними квадратами n^2 и $(n+1)^2$ неограниченно возрастают с увеличением n.

18.14. Пусть 1-й член прогрессии $a_1 = a$, а разность d. Подберём такое натуральное n, чтобы $a+10d < 10^n$. Пусть a_k и a_{k+1} — два соседних члена арифметической прогрессии, для которых выполняются неравенства $a_k < 10^n$, $a_{k+1} \geqslant 10^n$. Очевидно, что

$10^n \leqslant a_{k+1} = a_k + d \leqslant 10^n - 1 + 10^{n-1}$, откуда видно, что число начинается цифрами 10.

Аналогично доказывается, что в этой прогрессии найдется член, начинающийся любым наперёд заданным набором цифр.

18.15. Положим $5^n \sin nx = p_n$, $5^n \cos nx = q_n$. По условию $p_1 = 3$ и, значит, $q_1 = \pm 4$ Из формул $\sin(n+1)x = \sin x \cos nx + \cos x \sin nx$, $\cos(n+1)x = \cos x \cos nx - \sin x \sin nx$ вытекает, что $p_{n+1} = \pm 4p_n + 3q_n$; $q_{n+1} = -3p_n \pm 4q_n$ или

$$p_{n+1} \pm p_n - 3q_n = \pm 5p_n; \quad q_{n+1} \pm q_n + 3p_n = \pm 5q_n. \qquad (*)$$

Отсюда ясно, что при любом n числа p_n и q_n — целые. Обозначим остаток от деления p_n на 5 через r_n, остаток от деления q_n на 5 через s_n и заметим, что в силу формул $(*)$ числа $r_{n+1} \pm r_n - 3s_n$, $s_{n+1} \pm s_n + 3r_n$ делятся на 5. Учитывая, что $r_1 = p_1 = 3$, а $s_1 = q_1 = \pm 4$; из этих формул найдем сначала r_2 и s_2, затем r_3 и s_3 и т. д. Получается, что $r_5 = r_1$, $s_5 = s_1$ и далее $r_5 = r_9 = r_{13} = r_{17} = r_{21} = r_{25} = 3$.

Итак, p_{25} дает при делении на 5 остаток 3, и, значит не делится на 5, что и требовалось доказать.

18.16. При $n = 1$ число заборов $x_1 = 1$, при $n = 2$ можно окружить забором каждый из домов, а затем построить забор, огораживающий оба дома, т. е. $x_2 = 3$. Предполагая в общем случае $x_n = 2n - 1$, докажем эту формулу по индукции. Пусть она верна для $n \leqslant k$, положим $n = k + 1$. Рассмотрим некоторую максимальную систему заборов. Тогда найдётся забор A, который окружается только забором, огораживающим все дома. Если внутри этого забора стоит l домов, то число заборов внутри него не более $2l - 2$ по предположению индукции ($2l - 1$, если учесть сам забор A). Остальные $(n - l)$ домов можно окружить не более $2(n - l) - 1$ заборами. Таким образом, общее число заборов — не более $2n - 1$. Шаг доказан.

18.17. Положим $z_n = up^{n-1} + vq^{n-1}$. Тогда $z_{n+1} = z_n(p + q) - z_{n-1}pq$. Итак, зная z_0, z_1, z_2, z_3, можем найти $x = p + q$ и $y = pq$ из системы линейных уравнений: $z_1 x - z_0 y = z_2$, $z_2 x - z_1 y = z_3$. Из теоремы Виета находим p и q, а затем u и v из линейных уравнений $z_0 = u + v$, $z_1 = up + vq$. Итак,

а) $z_n = (2^n + (-1)^{n-1})/3$,

б) $z_n = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \left((\sqrt{5} + 3) \left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + (\sqrt{5} - 3) \left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$,

в) нет решений.

18.18. 11. Рассмотрим прогрессию, у которой $b_1 = 2^{20}$, а $q = 5/4$. Поскольку $b_1 > 10^6$, $b_{11} = 56^{10} < 10^7$ и все её члены от 1-го до 11-го — целые числа, то 11 первых членов этой прогрессии являются семизначными числами.

Докажем от противного, что прогрессии, содержащей 12 требуемых членов не существует. Пусть $q = m/k$ — знаменатель прогрессии (m/k — несократимая дробь), b_1 — её 1-й член. (Можно считать, что $q > 1$. Иначе рассмотрим 12 этих членов в обратном порядке.) Так как m/k несократима, а $b_{12} = b_1 m^{11}/k^{11}$ — целое число, то b_1 делится на k^{11} и $b_{12} \geqslant m^{11}$. Если предположить, что $m > 4$, то получим $b_{12} \geqslant 5^{11} > 10^7$, что противоречит условию. Значит, $m \leqslant 4$ и наименьшее возможное значение q равно $4/3$. Теперь получаем $b_{12} = q^{11}b_1 > 10b_1 > 10^7$, что противоречит условию.

18.19. $a = 0, b = -4$ или $a = -4, b = 0$. По теореме Виета сумма корней одного из заданных уравнений равна произведению корней другого, взятому с обратным знаком. Пусть корни данных уравнений образуют прогрессию: $c-d$, c, $c+d$, $c+2d$. Возможны три случая: первые два члена прогрессии — корни одного уравнения, два оставшихся — другого; два средних члена прогрессии — корни одного уравнения, два крайних — другого; первый и третий член прогрессии — корни одного уравнения, второй и четвёртый — другого. В первом и во втором случае система уравнений не имеет решения, а в третьем случае получаем из системы

$$\begin{cases} (c-d)+(c+d) = -c(c+2d), \\ c+(c+2d) = -(c-d)(c+d) \end{cases}$$

приведённый выше ответ.

18.20. Пусть N — натуральное число, большее 1. Покажем, что первые N членов арифметической прогрессии $a_n = N!n+1$ взаимно просты. Действительно, пусть d — общий делитель чисел a_k и a_l $(1 \leqslant k < l \leqslant N)$, тогда d является делителем числа $la_k - ka_l = l(N!\,k+1) - k(N!\,l+1) = l-k < N$. Значит, $1 \leqslant d < N$, поэтому d — делитель $N!$, а так как, по предположению, d — делитель $a_k = N!\,k+1$, то d — делитель 1, значит, $d = 1$.

18.21. Числа k образуют арифметическую прогрессию $20p+29$, для каждого $p = 1, 2, \ldots$. Рассмотрите отдельно периоды повторения остатков от деления числа k^k+1 на 2, 3 и на 5 (длины периодов равны соответственно 2, 6 и 20).

18.22. Число бактерий через k минут равно $(n-k)2^k$. Поэтому через n минут бактерий не останется.

18.23. Существует. Числа будем выписывать парами. Первая пара $a_1 = 1, a_2 = 2$. Пусть мы смогли построить k пар; построим $(k+1)$-ю пару. Рассмотрим всевозможные разности, реализуемые среди имеющихся k пар чисел, и обозначим через d наименьшую разность, которая ещё не реализована. Положив $a_{2k+1} = 2a_{2k} + 1$, $a_{2k+2} = a_{2k+1} + d$, получаем требуемую последовательность.

18.24. Заметим, что если x_n чётно и равно произведению некоторой степени двойки на нечётное число, $x_n = 2^k m$, то x_{n+k} нечётно. Если же $x_n = 2^k(2m+1) + 1$, то таким же рассуждением получаем, что x_{n+k} чётно. Значит, нечётных чисел, так же как и чётных, в данной последовательности бесконечно много.

18.25. Пусть последовательность y_n периодична с периодом T, начиная с некоторого n_0. Тогда $x_{n+T} - x_n$ чётно при всех $n > n_0$, с другой стороны оно равно $(3/2)^{n-n_0}(x_{n_0+T} - x_{n_0})$. При большом n последнее число нечётно. Противоречие.

18.26. При гипотезе $x_n = x_{n-1} + n + 1$ $(n > 3)$ получим $x_n = n(n+3)/2$. Докажем эту формулу по индукции. База $(n = 4)$ верна. Пусть при некотором n утверждение верно. Тогда $x_{n+1} > 2x_n - x_{n-1} = (n+1)(n+4)/2 - 1$ следующее за этим число составное (так как один из сомножителей чётный и каждый из них больше 2). Значит, $x_{1000} = 501\,500$.

18.27. Решение 1. а) Если $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, то $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant 1$. Если x_1 — рациональное число, то все x_n рациональны, причём со знаменателем не больше, чем у x_1. Но таких дробей конечное число. Поэтому какие-то члены последовательности повторяются, и с этого момента начнётся период.

б) Допустим, что $x_{n+k} = x_n$. Раскрывая знак модуля, получим либо $x_{n+1} = 2x_n$, либо $x_{n+1} = 2 - 2x_n$. Поэтому $x_{n+k} = a + b2^k x_n$, где a и b — целые ($b = \pm 1$). Получаем линейное уравнение с целыми коэффициентами $x_n = a + b2^k x_n$, откуда x_n — рациональное число, и x_1 — тоже.

Решение 2. Запишем число x_0 в двоичной системе счисления. Обозначим $f(x_n) = x_{n+1}$. Легко видеть, что двоичная запись числа $f(x_0)$ получается из двоичной записи числа x_0 сдвигом.

18.28. Достаточно доказать, что любой начальный кусок последовательности первых цифр степеней пятёрки встречается (перевёрнутым) в последовательности первых цифр степеней двойки. Рассмотрим числа: $1/2, 1/4, \ldots, 1/2^n$. Последовательность первых ненулевых цифр их десятичных записей есть в точности последовательность первых цифр десятичных записей чисел $5, 25, \ldots, 5^n$. Итак, если добавить отрицательные степени, то задача будет решена. Достаточно показать существование такой степени двойки $x = 2^n$, десятичная запись которой имеет вид $10\ldots0*$ (здесь $*$ обозначает оставшуюся часть десятичной записи). В этом случае $2^{n-1} = 2^n/2 = 50\ldots0*$, $2^{n-2} = 250\ldots0*$, $2^{n-3} = 1250\ldots0*$.

Заметим, что существует бесконечно много степеней двойки, у которой первые k цифр совпадают, причём k можно выбрать сколь угодно большим. Разделив одну такую степень на другую (меньшую), получим либо степень двойки, начинающую с 1 и нулей (задача решена), либо степень двойки, начинающуюся с девяток. В этом случае удвоим k и повторим операцию. Если опять получится степень, начинающаяся с девяток, то разделим её на полученную в предыдущем делении. Полученная степень двойки начинается с 1 и большого числа нулей.

18.29. Докажем утверждение индукцией по n. При $n = 1$ имеем $a_1^2 \leqslant a_1 - a_2 < a_1$, откуда $a_1 < 1$. Кроме того, $a_2 \leqslant a_1 - a_1^2 = 1/4 - (a_1 - 1/2)^2 < 1/4 < 1/2$, т. е. $a_n < 1/n$ при $n = 2$. Пусть утверждение уже доказано для некоторого числа $n \geqslant 2$. Докажем его для числа $n+1$. Так как функция $f(x) = x - x^2$ возрастает на отрезке $[0; 1/2]$ и $a_n < 1/n$, то $a_{n+1} \leqslant f(a) < f(1/n) = 1/n - 1/n^2 = 1/(n+1) - 1/(n^2(n+1)) < 1/(n+1)$.

18.30. Если h — среднее гармоническое a и b, то $1/h$ — среднее арифметическое чисел $1/a$ и $1/b$. Отсюда переформулировка задачи: доказать, что не существует такой бесконечной последовательности чисел вида $1/n$ ($n \in \mathbb{N}$), в которой не все члены равны и каждый член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего, или: из чисел, обратных натуральным, нельзя составить бесконечную арифметическую прогрессию (не все числа равны друг другу). Последнее утверждение следует из того, что числа, обратные натуральным, заключены в $[0, 1]$ и не могут быть членами бесконечной арифметической прогрессии.

18.31. $k \cdot k! = (k+1)! - k!$, поэтому

$$1\cdot1!+2\cdot2!+\ldots+n\cdot n! = (2!-1!)+(3!-2!)+\ldots+((n+1)!-n!) = (n+1)!-1.$$

18.32. Так как

$$a_n^2 = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2} = \\ = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} \cdot \frac{1}{(2n+1)} < \frac{1}{2n+1}$$

при любом натуральном n, то $0 < a_n < 1/(2n+1)$ и $\lim a_n = 0$.

18.33. Замечая, что при каждом $n = 1, 2, \ldots, 99$ верны равенства $a_n = 1/\sqrt{n} - 1/\sqrt{n+1}$ для искомой суммы получаем $a_1 + \ldots + a_{99} = 9/10$.

18.34. Пусть задано натуральное число n, тогда из условия следует, что каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ не превосходит $2n$. Множество чисел $1, \ldots, 2n$ разобьём на n пар: $(1; n+1)$, $(2; n+2), \ldots$, $(n; 2n)$. Поскольку среди чисел $1, 2, \ldots, 2n$ содержится не менее $(n+1)$ членов последовательности, то найдутся два разных числа a_p и a_q, принадлежащие одной паре. Для завершения доказательства остается заметить, что разность между числами в каждой из пар равна n.

18.35. Равенство $a_k = a_{k-1} + a_{k-1}^2/n$ эквивалентно равенству $1/a_{k-1} - 1/a_k = 1/(n + a_{k-1})$.

Поскольку $1/2 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n$, то справедливы неравенства $1/a_{k-1} - 1/a_k < 1/n$ при $k = 1, \ldots, n$, складывая которые, получаем оценку $1/a_0 - 1/a_n < 1$.

Следовательно, $1/a_n > 2 - 1 = 1$, а значит, $a_n < 1$. Поэтому справедливы неравенства $1/a_{k-1} - 1/a_k > 1/(n+1)$ при $k = 1, \ldots, n$, складывая которые, получаем оценку $1/a_0 - 1/a_n > n/(n+1)$. Значит, $1/a_n < 2 - n/(n+1) = (n+2)/(n+1)$, а значит, $a_n > (n+2)/(n+1) > (n-1)/n$.

18.36. Обозначим $a_n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n}$, $m = a_{990}$. Тогда $a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$. Так как числа $a_0 = 2$, $a_1 = 10$ целые, то a_n — целое и, кроме того, каждое из чисел $a_{n+2} + a_n = 10a_{n+1}$ делится на 10. Поэтому каждое из чисел $a_{n+4} - a_n = (a_{n+4} + a_{n+2}) - (a_{n+2} + a_n)$ также делится на 10, а значит, числа $a_2, a_6, a_{10}, \ldots$, a_{990} дают одинаковые остатки при делении на 10. Поскольку $a_2 = 98$, десятичная запись числа m оканчивается цифрой 8. Наконец, из $m > (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980} > m - (0{,}5)^{1980} > m - 0{,}1$ получим, что в десятичной записи числа $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1980}$ в разряде единиц стоит цифра 7, а в разряде десятых — 9.

18.37. Рассмотрим число a_i из набора $a_1 < \ldots < a_n$. Количество трёхчленных арифметических прогрессий, в которых это число является средним членом, не превосходит как $i - 1$, так и $n - i$, поскольку на месте первого члена может стоять только одно из чисел $a_1, \ldots, a_{i-1}$, а на месте последнего — одно из чисел $a_{i+1}, \ldots, a_n$. Поэтому общее число прогрессий не превосходит суммы

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{i - 1, n - i\} = S.$$

Если $n = 2l$ ($l \in N \setminus \{1\}$), то

$$S = \sum_{i=1}^{l}(i-1) + \sum_{i=l+1}^{n}(n-i) = l(l-1).$$

Если же $n = 2l - 1$ ($l \in N$), то $S = l^2$.

Заметим, наконец, что полученные оценки для количества прогрессий достигаются в случае последовательности $a_i = i$ ($i = 1, \ldots, n$).

18.38. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — указанная в задаче последовательность. Чётность каждого члена последовательности зависит лишь от чётностей предыдущих четырёх членов. Тогда остатки от деления членов a_n на 2 таковы:

$$1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, \ldots.$$

Легко видеть, что эта последовательность периодична с периодом 5 и имеет период $1, 1, 0, 1, 1$. Если бы в исходной последовательности встречались подряд стоящие числа $1, 2, 3, 4$, то в этой — $1, 0, 1, 0$. Противоречие.

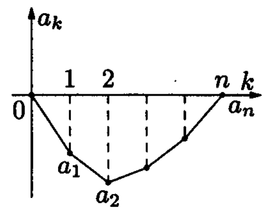
18.39. Построим возрастающую последовательность номеров i_n следующим образом. Пусть a_{i_1} — наименьшее из всех чисел a_i (оно существует, ибо все члены последовательности $\{a_n\}$ — натуральные числа); a_{i_2} — наименьшее из чисел $a_{i_1+1}, a_{i_1+2}, \ldots$. Тогда бесконечная последовательность $\{a_{i_n}\}$ не убывает. Если теперь b_{i_k} — наименьшее из чисел $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots$, то $i_k < i_{k+1}$, $a_{i_k} \leqslant a_{i_k+1}$, $b_{i_k} \leqslant b_{i_k+1}$, т. е. в качестве искомых номеров p и q можно взять числа i_k и i_{k+1} соответственно.

18.40. Так как все a_i — натуральные, то существует такая возрастающая последовательность номеров $i_1, i_2, \ldots$, что $a_{i_1} \leqslant \leqslant a_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant a_{i_n} \leqslant \ldots$ (a_{i_1} — наименьшее число последовательности a_n, a_{i_2} — наименьшее из следующих и т. д.). Аналогично, из последовательности номеров $i_1, \ldots, i_n, \ldots$ можно выбрать последовательность $j_1, \ldots, j_n, \ldots$, для которой $b_{j_1} \leqslant b_{j_2} \leqslant \ldots \leqslant b_{j_n} \leqslant \ldots$.

Ясно при этом, что последовательность $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n}, \ldots$ остаётся неубывающей. Теперь осталось из последовательности $\{j_n\}$ выбрать подпоследовательность $\{k_n\}$, для которых последовательность $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_n}, \ldots$ — неубывающая. Тогда все три последовательности $\{a_{k_n}\}$, $\{b_{k_n}\}$, $\{c_{k_n}\}$ будут неубывающими. Взяв за p и q, например, k_1 и k_2, получим утверждение задачи.

18.41. По условию $a_1 - a_0 > 1$. Далее, $a_2 - a_1 = 2(a_1 - a_0)$, $a_3 - a_2 = 2(a_2 - a_1)$,..., $a_{100} - a_{99} = 2(a_{99} - a_{98})$. Перемножив эти 99 равенств, обе части которых положительны, и сократив общие множители $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2, \ldots, a_{99} - a_{98}$ в обеих частях, получим $a_{100} = a_{99} + 2^{99}(a_1 - a + 0) \geqslant 2^{99}$. Более точная оценка по индукции $a_k \geqslant 2^k$, $a_{k+1} - a_k \geqslant 2^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ показывает, что $a_{100} \geqslant 2^{100}$.

18.42. Решить эту задачу помогает рисунок: ломаная с вершинами в точках (k, a_k) «выпукла», поскольку $a_{k+1} - a_k \geqslant a_k - a_{k-1}$, (т. е. угловой коэффициент каждого следующего звена больше, чем предыдущего), так что вся она, кроме концов, лежит ниже оси $0k$.



К 18.42

Допустим, что при некотором $m \geqslant 1$ будет $a_{m-1} \leqslant 0$, $a_m > 0$. Тогда $a_n - a_{n-1} \geqslant a_{n-1} - a_{n-2} \geqslant \ldots \geqslant a_m - a_{m-1} > 0$ и поэтому $a_n > a_{n-1} > \ldots > a_m > 0$, что противоречит условию $a_n = 0$.

18.43. Пусть разность прогрессии равна d и один из её членов $a = m^2$, где m — натуральное число. Тогда число $(m + kd)^2 = m^2 + 2mkd + k^2d^2 = a + d(2km + k^2d)$ также является членом прогрессии при любом натуральном k. Итак, указано бесконечное количество членов прогрессии, являющихся квадратами натуральных чисел.

18.44. $2 \cdot 3^n$. После первого шага сумма всех чисел будет равна $6 = 2 \cdot 3$. Пусть S_n — сумма всех чисел после n-го шага. Нетрудно доказать, что после $(n+1)$-го шага сумма станет равна $2S_n + S_n = 3S_n$. Итак, сумма всех чисел каждый раз увеличивается втрое, так что на n-м шаге она будет равна $2 \cdot 3^n$.

18.45. 2952. Докажем, что длина (число членов) последовательности, удовлетворяющей условию задачи, у которой наибольший член — второй и равен n, не превосходит $d_n = [3(n+1)/2]$, причём для последовательности $n-1, n, 1, \ldots, 1, 1$ длина в точности равна d_n.

Будем рассуждать по индукции. Для $n < 4$ утверждение легко проверить перебором ($d_1 = 2$, $d_2 = 3$, $d_3 = 6$, $d_4 = 7$). Оценим максимальную длину последовательности с началом $a, n, n-a, \ldots$, $(a < n)$, считая, что для меньших n утверждение доказано. При $1 \leqslant a < n/2$ её длина не больше $d_{n-a} + 1$, поскольку, убрав первый член a, можно заменить её начало таким: $n - 2a, n - a, \ldots$; при $n/2 \leqslant a < n - 1$ она не больше $d_a + 2$ достаточно убрать первые 2 члена. Итак, остается лишь проверить, что для таких a выполнены неравенства соответственно $d_{n-a} + 1 \leqslant d_n$ и $d_a + 2 \leqslant d_n$. При $a = n-1$ для последовательности $n-1, n, 1, n-1, n-2, 1, n-3, \ldots, 1, 1$

достаточно убрать первые 3 члена и переставить 2 следующих, чтобы осталось лишь проверить равенство $d_{n-3}+3=d_n$.

Из общего утверждения при $n = 1967$ получаем ответ $d_n = [3 \cdot 1968/2] = 2952$.

18.46. Докажем сразу двустороннюю оценку $14 < a_{100} < 18$. При $k > 1$ имеем $a_k^2 = a_{k-1}^2 + 2 + 1/a_k^2$, причём $a_k > 1$. Поэтому $a_k^2 + 2 < a_k^2 < a_k^2 + 3$. Сложив эти неравенства для всех $1 \leqslant k \leqslant n$, получим (с учётом того, что $a_1 = 1$) $2n-1 < a_n^2 < 3n-2$, откуда $\sqrt{2n-1} < a_n < \sqrt{3n-2}$. При $n = 100$ получим приведённую выше оценку.

Можно доказать, что последовательность a_n/n стремится к пределу.

18.47. Если переставить три первых числа в порядке убывания, то для всех членов последовательности будет выполняться условие $x_k \leqslant x_{k-r} - x_{k-1}$, а последовательность станет убывающей $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{21}$. Если предположить, что $x_{21} \geqslant 1$, то из $x_{k-2} \geqslant x_k + x_{k-1}$ следовало бы $x_{20} \geqslant 1$, $x_{19} \geqslant 2$, $x_{18} \geqslant 3$, $x_{17} \geqslant 5, \ldots$. Остаётся только написать 21 член «последовательности Фибоначчи»: $1, 1, 2, \ldots, 6745, 10916$, чтобы получить противоречие $x_1 > 10000$.

18.48. Рассмотрим отрезки последовательности x_m/m, $k^2 \leqslant m \leqslant (k+1)^2 - 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, k-й отрезок состоит из $2k+1$ числа от x_{k^2}/k^2 до $x_{(k+1)^2-1}/((k+1)^2-1)^2$.

Заменив каждый член x_m/m в k-м отрезке наибольшим первым членом x_{k^2}/k^2, получим, что сумма чисел этого отрезка не больше $(2k+1)x_{k^2}/k^2 \leqslant 3kx_{k^2}/k^2 = 3x_{k^2}/k$.

Теперь для любого натурального n получаем

$$\frac{x_1}{1} + \ldots + \frac{x_n}{n} \leqslant 3\left(\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \ldots + \frac{x_{q^2}}{q}\right),$$

где q — наименьшее число, для которого $q^2 > n$.

18.49. $x_n = 1$, $(n \in \mathbb{N})$ или $x_n = n$ при $n \in \mathbb{Z}$.

18.50. Три числа. По индукции доказывается, что $a_{n-1} < b_n < a_n$ при $n \geqslant 4$.

18.51. Для 1-го числа — нет. Последняя цифра числа α_{2k+1} равна k-й цифре после запятой в десятичном разложении числа. Для 2-го числа — нет. Пусть $y_n = 0$, если β_n чётно и $y_n = l$, если β_n — нечётно. Так как y_{2n+1} совпадает с n-м знаком после запятой двоичного разложения числа $\sqrt{2}$, то y_{2n+1} непериодична.

18.52. Если $T = 2^r \cdot q$ (q нечётно) — период данной последовательности, то при $q = 4m+3$ и $k \geqslant p+2$: $1 = a_{2^k+T} = a_{2^k} = 0$.

Противоречие. При $q = 4m + 1$: $1 = a_{2^k} = a_{2^k+3T} = 0$, что также приводит к противоречию.

18.53. По условию цифра b_1 отлична от 0 и 5, поэтому b_2 есть одно из чисел 2, 4, 6 или 8, но тогда последовательность $b_2, b_3, \ldots$ является периодической с периодом 4. Поэтому для любого $n > 1$ имеем $a_{n+4} = a_n + (2+4+8+6)$ и для любого $s > 1$ — равенство $a_{n+4s} = a_n + 20s$. Из двух членов последовательности $a_n = 10m+2$ и $a_{n+1} = 10m + 4$ хотя бы одно число делится на 4, например, $a_n = 4l$. Тогда $a_{n+4s} = 4(l + 5s)$ и среди чисел вида $l + 5s$ бесконечно много степеней двойки, так как остатки от деления на 5 степеней двойки образуют периодическую последовательность: $1, 2, 4, 3, 1, \ldots$ и, значит, бесконечно много степеней двойки дают при делении на 5 такой же остаток, как и число l.

18.54. Покажем, что 3 разных простых числа не могут входить в одну геометрическую прогрессию. Предположим противное: $p_1 < p_2 < p_3$ — простые числа, $p_1 = aq^{k-1}$, $p_2 = aq^{r-1}$, $p_3 = aq^{m-1}$. Тогда $p_2/p_1 = q^{r-k} = q^s$, $p_3/p_2 = q^{m-r} = q^n$. Отсюда $p_2^{s+n} = p_1^n p_3^s$, что невозможно, так как n и s — ненулевые целые числа. Утверждение задачи следует из того, что среди чисел от 1 до 100 содержится 25 простых чисел, а в одну прогрессию могут входить не более двух из них.

18.55. Заметим, что a_i делится на i при любом i: $\text{НОД}(a_i, a_{2i}) = \text{НОД}(i, 2i) = i$. Покажем, что a_p делится только на p для простого p. Пусть $a_p = qn$, где q — простое, $q \neq p$, и $q, n \neq 1$. С одной стороны, $\text{НОД}(a_p, a_q) = \text{НОД}(p, q) = 1$, с другой, так как $a_q = ql$, то $\text{НОД}(a_p, a_q) = \text{НОД}(qn, ql) \geqslant q$. Итак, $a_p = p^k$. Докажем, что $k = 1$: $p^k = \text{НОД}(p^k, a_{p^k}) = \text{НОД}(a_p, a_{p^k}) = \text{НОД}(p, p^k) = p$. Отсюда $k = 1$. Значит, $a_p = p$ для всех простых p.

Осталось доказать, что если для некоторого m $a_m = m$, то $a_{mp} = mp$ при простом p. Пусть это не так, т. е. $a_{mp} = mpx$. Если x делится на простое $q \neq p$, то $\text{НОД}(a_{mp}, mq) \leqslant \text{НОД}(a_{mp}, a_{mq}) = \text{НОД}(mp, mq) = m$, откуда a_{mp} не делится на mq. Значит, $a_{mp} = mp^t$. Тогда $mp^t \leqslant \text{НОД}(mp^t, a_{mp^t}) = \text{НОД}(a_{mp}, a_{mp^t}) = \text{НОД}(mp, mp^t) = mp$, откуда $t = 1$.

18.56. Пусть сумма чисел в наборе равна M, тогда число a из набора заменяется на число $b = a - M$. Просуммируем эти равенства для всех a: $b_1 + \ldots + b_{1997} = 1997M - (a_1 + \ldots + a_{1997})$, откуда $M = 0$, так как $b_1 + \ldots + b_{1997} = a_1 + \ldots + a_{1997} = M$. Значит, для любого a число $b = -a$ также входит в набор и числа разбиваются на пары $a, -a$. Из нечётности их количества следует, что в набор входит число $a = -a$, т. е. $a = 0$.

18.57. Преобразуем данную сумму:

$$1-\frac{1}{2}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{1319}-2\left(\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{1318}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{1319}-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{659}\right)=\frac{1}{660}+\ldots+\frac{1}{1319}.$$

Число слагаемых в сумме чётно, а сумма дробей, равноотстоящих от концов, равна

$$\frac{1}{659+k}+\frac{1}{1320-k}=\frac{1979}{(659+k)(1320-k)},$$

где $k=1,\ldots,330$. Итак, после сложения дробей имеем: $p/q = 1979A/(660\cdot 661\cdot\ldots\cdot 1319)$, где A — некоторое натуральное число. Число 1979 — простое, а каждый из множителей в знаменателе меньше, чем 1979. Поэтому после сокращения дроби на НОД числителя и знаменателя, 1979 останется множителем в числителе.

Отметим, что для более общей постановки задачи: «Пусть $p/q = 1-1/2+1/3-\ldots+1/(4k-1)$ — несократимая дробь и число $(6k-1)$ — простое, тогда p делится на $(6k-1)$», метод решения остается тем же (первоначальное утверждение получается при $k=330$).

18.58. Покажем, что условию задачи удовлетворяет последовательность $4\{n\sqrt{2}\}$, где $\{x\}=x-[x]$ — дробная часть числа x ($n=1,2,\ldots$). Действительно, если p и q — натуральные числа, $p<(4-\sqrt{2})q$, то

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|=\frac{|2q^2-p^2|}{q(q\sqrt{2}+p)}>\frac{1}{4q^2},$$

поэтому при $m>k\geqslant 1$

$$\left|\{m\sqrt{2}\}-\{k\sqrt{2}\}\right|=\left|(m-k)\sqrt{2}-l\right|>\frac{1}{4(m-k)},$$

где $l=[m\sqrt{2}]-[k\sqrt{2}]<m\sqrt{2}-k\sqrt{2}-1\leqslant(m-k)(\sqrt{2}+1)<(4-\sqrt{2})(m-k)$.

Здесь использован тот факт, что иррациональное число $\sqrt{2}$ плохо приближается дробями с небольшими знаменателями. Другое решение — например, конструкция последовательности с помощью десятичных дробей длиннее.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Агаханов Н.Х., Купцов Л.П., Нестеренко Ю.В. и др. *Математические олимпиады школьников, 9. Книга для учащихся.* — М., Просвещение,1997.

[2] Бабинская И.Л. *Задачи математических олимпиад.* — М., Наука, 1975.

[3] Берлов С.Л., Иванов С.В., Кохась К.П. *Петербургские математические олимпиады.* — СПб, Лань, 1998.

[4] Бугаенко В.О. *Турниры им. Ломоносова (конкурсы по математике).* — М., МЦНМО, 1998.

[5] Васильев Н.Б. *Избранные задачи математических олимпиад.* — М., МЦНМО, 1999.

[6] Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббо Ж.М., Тоом А.Л. *Заочные математические олимпиады.* — М., Наука, 1986.

[7] Васильев Н.Б., Егоров А.А. *Задачи Всесоюзных математических олимпиад.* — М., Наука, 1988.

[8] Васильев Н.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л., Савин А.П. *Математические соревнования. Геометрия.* — М., Наука, 1974.

[9] *Венгерские математические олимпиады.* (Кюршак Й. и др.) — М., Мир 1976.

[10] Виленкин Н.Я. *Комбинаторика.* — М., Наука, 1969.

[11] Галкин Е.В. *Нестандартные задачи по математике. Задачи логического характера.* — М., Просвещение, 1996.

[12] Гальперин Г.А., Толпыго А.К. *Московские математические олимпиады.* — М., Просвещение, 1986.

[13] Гарднер М. *Математические головоломки и развлечения.* — М., Оникс, 1994.

[14] Гарднер М. *Математические досуги.* — М., Оникс, 1995.

[15] Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. *Ленинградские математические кружки.* — Киров, АСА, 1994.

[16] *Двенадцать турниров. Математические турниры городов с 1 по 12-й.* Под ред. Н.Н. Константинова. — М., ИЦТГ, 1991.

[17] Дориченко С.А., Ященко И.В. *LVII Московская математическая олимпиада. Сборник подготовительных задач.* — М., ТЕИС, 1994.

[18] Дынкин Е.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л. *Математические соревнования. Арифметика и алгебра.* — М., Наука, 1970.

[19] Дынкин Е.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л., Толпыго А.К. *Математические задачи.* — М., Наука, 1971.

[20] *Задачник „Кванта". Математика. Ч. 1-3.* Под ред. Васильева Н.Б. — М., Бюро «Квантум», 1997.

[21] *Зарубежные математические олимпиады.* Конягин С.В., Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др. — М., Наука, 1987.

[22] Игнатьев Е.И. *Математическая смекалка. Занимательные задачи, игры, фокусы, парадоксы.* — М., Омега, 1994.

[23] Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. *Как решают нестандартные задачи. 60-я Московская математическая олимпиада. Подготовительный сборник.* — М., МЦНМО, 1998.

[24] Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К., Васильев Н.Б. *Подготовительные задачи к LVII Московской математической олимпиаде 1994 года, 8–11 класс.* — М., 1994.

[25] Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. *Сборник задач по алгебре и теории чисел.* — М., Просвещение, 1993.

[26] Купцов Л.П., Нестеренко Ю.В., Резниченко С.В., Слинько А.М. *Математические олимпиады школьников, 10. Книга для учащихся.* — М., Просвещение, 1998.

[27] Купцов Л.П., Нестеренко Ю.В., Резниченко С.В., Слинько А.М. *Математические олимпиады школьников, 11. Книга для учащихся.* — М., Просвещение, 1999.

[28] Купцов Л.П., Резниченко С.В., Терёшин Д.А. *Российские математические олимпиады школьников. Книга для учащихся. (под ред. Г.Н. Яковлева)* — Ростов-на-Дону, Феникс, 1996.

[29] *Математический кружок* (сост. Егоров А.А.). Вып 4. — М., Бюро «Квантум», 1999.

[30] Медников Л.Э., Мерзляков А.С. *Математические олимпиады.* — Ижевск, Свиток, 1997.

[31] *Международные математические олимпиады* (сост. А.А. Фомин, Г.М. Кузнецова). — М., Дрофа, 1998.

[32] Морозова Е.А., Петраков И.С., Скворцов В.А. *Международные математические олимпиады.* — М., Просвещение, 1976.

[33] *Московские математические олимпиады 60 лет спустя* (под ред. Ю.С. Ильяшенко, В.М. Тихомирова). — М., ИНП РАН, 1997.

[34] Прасолов В.В. *Задачи по планиметрии* (в двух частях). — М., Наука, 1986.

[35] Произволов В.В. *Задачи на вырост.* — М., МИРОС, 1995.

[36] *Пятая Соросовская олимпиада школьников 1998–1999.* — М., МЦНМО, 1999.

[37] Сергеев И.Н., Олехник С.Н., Гашков С.Б. *Примени математику.* — М., Наука, 1990.

[38] Спивак А.В. *Математический праздник.* — М., МЦНМО, 1995.

[39] Страшевич С., Бровкин Е. *Польские математические олимпиады.* — М., Мир, 1978.

[40] *Третья Соросовская олимпиада школьников 1996–1997.* — М., МЦНМО, 1997.

[41] *Физико-математические олимпиады.* (Брук Ю.К., Савин А.П.) — М., Знание, 1977.

[42] Хорнсберг Р. *Математические изюминки.* — М., Наука, 1992.

[43] Цыпкин А.Г., Пинский А.И. *Справочник по методам решения задач по математике.* — М., Наука, 1989.

[44] *Четвёртая Соросовская олимпиада школьников 1997–1998.* — М., МЦНМО, 1998.

[45] Шарыгин И.Ф., Шеврин А.В. *Математика. Задачи на смекалку.* — М., Просвещение, 1996.

[46] Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. *Иэбранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра.* — М., Наука, 1976.

[47] *Школа в „Кванте“. Арифметика и алгебра* (под ред. Егорова А.А.). — М., Бюро «Квантум», 1994.

[48] *Школьные математические олимпиады* (Сост. Н.Х. Агаханов, Д.А. Терёшин, Г.М. Кузнецова). — М., Дрофа, 1999.

[49] Ященко И.В. *Приглашение на математический праздник.* — М., МЦНМО, 1998.

Издательство МЦНМО представляет книги по математике для школьников и учителей

Алексеев В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях. 2001

Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач. 2002

Блинков А. Д. Московские математические регаты. 2001

Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. Симметрия в алгебре. 2002

Болтянский В. Г., Савин А. П. Беседы о математике. Книга 1. Дискретные объекты. 2002

Васильев Н. Б, Гутенмахер В. Л. Прямые и кривые. 2004

Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. 2004

Гейдман Б. П. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства. 2003

Гейдман Б. П., Мишарина И. Э, Зверева Е. А. Вычисления в пределах тысячи (рабочая тетрадь). 2003

Гейдман Б. П., Мишарина И. Э, Зверева Е. А. Таблица умножения (рабочая тетрадь). 2003

Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э. Функции и графики (основные приемы). 2004

Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. 2001

Гордин Р. К. Это должен знать каждый матшкольник. 2004

Гусев Е. Б., Сурдин В. Г. Расширяя границы Вселенной: история астрономии в задачах. 2003

Евдокимов М. А. От задачек к задачам. 2004

Екимова М. А., Кукин Г. П. Задачи на разрезание. 2005

Еременко С. В., Сохет А. М., Ушаков В. Г. Элементы геометрии в задачах. 2003

Заславский А. А. Геометрические преобразования. 2004

Иванов О. А. Практикум по элементарной математике. 2001

Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. 2004

Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка). 2004

Кулыгин А. К. (сост.). XXIV Турнир им. Ломоносова. 2002

Кулыгин А. К. (сост.). XXV Турнир им. Ломоносова. 2003

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? 2004

Понарин Я. П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. 2004

Шень А. Программирование: теоремы и задачи. 2004

Ященко И. В. Приглашение на математический праздник. 2005