Ф. М. Шустеф, А. М. Фельдман, В. Ю. Гуревич

Сборник олимпиадных задач по математике

МИНСК 1962

Ф. М. ШУСТЕФ, А. М. ФЕЛЬДМАН, В. Ю. ГУРЕВИЧ

СБОРНИК ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Под редакцией Ф. М. Шустеф

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ БССР
МИНСК 1962

51
Ш 97

В сборнике содержится 290 задач, предлагавшихся на Белорусских республиканских олимпиадах учащихся VII—X классов в 1950—1959 гг.

Помещенные в нем задачи охватывают теоретический материал VII—XI классов, ко многим из них даны ответы и решения или указания.

Данный сборник явится пособием для учителей в подготовке учащихся к математическим олимпиадам. Он может быть использован также учащимися VII—XI классов.

Использование сборника учителями математики в кружках, при подготовке учащихся к олимпиадам поможет повысить математическую культуру учащихся.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник содержит задачи, предлагавшиеся на Белорусских республиканских школьных математических олимпиадах учащихся VII—X классов. Эти олимпиады проводятся начиная с 1950/51 учебного года. Задачи подбирались членами Республиканской комиссии по проведению математических олимпиад, возглавлявшейся в течение ряда лет ныне покойным доцентом Минского педагогического института им. А. М. Горького М. И. Минкевичем. Членами этой комиссии были представители Министерства просвещения М. П. Дорофеенко, В. П. Солонович, преподаватели Минского педагогического института Л. А. Толстик, Ф. М. Шустеф, преподаватели Белорусского государственного университета Н. В. Ламбин, Л. К. Тутаев, А. Н. Нахимовская, И. Е. Дорский, преподаватели минских школ В. И. Зарецкий, М. Г. Годыцкий, А. И. Зенович, К. И. Арлюк, М. С. Эльперин, М. С. Фарберов, И. М. Коробов и др. При подборе задач использовались «Задачник по геометрии» Б. Делоне и О. Житомирского; «Избранные задачи и теоремы элементарной математики», ч. 1, 2, 3 Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома; «Задачник по алгебре» В. А. Кречмара; «Сборник задач по математике» П. С. Моденова и др.

Члены студенческого научного кружка методики математики Минского педагогического института собрали все предлагавшиеся на олимпиадах задачи с различными решениями. В результате этой работы и составлен данный сборник, который, по мысли составителей, может помочь учителю математики в подготовке и проведении олимпиад. В работе по составлению сборника приняли участие студенты

С. М. Сабина, Л. С. Букатая, С. З. Майзель, Е. Я. Рудерман, С. З. Эйдельман, Ф. К. Фердман, В. Ю. Гуревич, Е. С. Жуховицкая, Т. Н. Капитанчук, Д. Л. Мицкина, А. Л. Усик, А. М. Фельдман. Собранный материал был переработан и подготовлен к печати Ф. М. Шустеф, В. Ю. Гуревичем и А. М. Фельдманом. Задачи расположены по классам и учебным предметам и снабжены (за исключением более легких) решениями или указаниями и ответами. Составители будут признательны читателям за критические замечания, которые просят направлять по адресу:

Минск, Ленинский проспект, 83-а, Учпедгиз БССР, редакция физики и математики.

VII КЛАСС

АРИФМЕТИКА

1. Не производя указанных умножений, установить, правильной или неправильной дробью является число $\frac{244 \cdot 395 - 151}{244 + 395 \cdot 243}$. (57/58 — I — 7)[1]

2. Доказать, что если даны три каких-либо целых числа, из которых ни одно не делится на 3, то или сумма всех этих чисел, или сумма двух каких-либо из них должна делиться на 3. (51/52 — I — 7)

3. Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, дает полный квадрат. Найти все такие числа. (57/58 — II — 7)

4. Сколькими нулями оканчивается произведение всех целых чисел от единицы до ста включительно? (58/59 — II — 7)

5. Все натуральные числа выписаны подряд, начиная от единицы. Определить, какая цифра стоит на 34788-м месте. (57/58 — II — 7)

6. Для нумерации страниц энциклопедического словаря потребовалось 6869 цифр. Сколько страниц было в этом словаре? (51/52 — II — 7)

7. Найти наименьшее число, которое при делении на 2, 3, 4, 5, 6 дает в остатке 1, а на 7 делится без остатка. (50/51 — I — 8)

---

[1] В скобках указаны год проведения олимпиады, тур и класс, для которого данная задача предлагалась.

8. Число 7 возведено в седьмую степень. Полученное число снова возведено в седьмую степень и т. д. Возведение повторено 1000 раз. Определить, какой цифрой оканчивается полученное число. (52/53 — I — 8)

9. Допуская, что стрелки часов движутся с постоянной скоростью, узнать, через сколько минут после того, как часы показывали 3 часа, минутная стрелка догонит часовую. (55/56 — II — 7, 54/55 — II — 7)

10. В ящике лежат 70 шаров: 20 красных, 20 зеленых, 20 желтых, остальные черные и белые. Шары отличаются друг от друга только цветом. В темноте выбираем шары. Какое наименьшее число шаров необходимо взять, чтобы среди них было не меньше 10 шаров одного цвета?

(56/57 — I — 8)

11. Отец поручил сыну измерить длину двора шагами. Дело было зимой, и на снегу остались следы ног сына. Желая его проверить, отец измерил длину двора своими шагами, начав с того же места и идя в том же направлении. В некоторых местах его следы совпали со следами сына. Всего следов на снегу, считая совпадающие следы отца и сына за один, по линии обмера оказалось 61. Чему равна длина двора, если шаг отца равен 0,72 метра, а шаг сына 0,54 метра? (51/52 — I — 7)

12. Инженер, работающий за городом, ежедневно приезжает поездом на одну станцию в одно и то же время. В это же время за ним приезжает машина, и он попадает вовремя на завод. Однажды инженер приехал на станцию на 55 минут раньше и, не дожидаясь машины, пошел пешком на завод. Встретив на пути свою машину, он сел в нее и приехал на завод на 10 минут раньше обычного. Во сколько раз скорость пешехода меньше скорости машины? (55/56 — II — 8)

13. Цены снижены на 20%. На сколько процентов больше можно купить товаров на ту же заработную плату?

(53/54 — I — 7)

14. Морская вода содержит 5% соли (по весу). Сколько килограммов пресной воды нужно прибавить к 40 *кг* морской воды, чтобы содержание соли в смеси составляло 2%? (58/59 — II — 7)

15. Мать старше дочери в 2,5 раза, а 6 лет назад мать была в 4 раза старше дочери. Сколько лет матери и сколько лет дочери?

16. Нам обоим вместе 63 года. Сейчас мне вдвое больше лет, чем было вам тогда, когда мне было столько лет, сколько вам сейчас. Сколько лет мне и сколько лет вам? (54/55 — I — 7)

17. Сестре втрое больше лет, чем было тогда, когда брат был в ее возрасте. Когда сестре будет столько, сколько теперь брату, то им обоим вместе будет 96 лет. Сколько лет сестре и сколько лет брату? (58/59 — I — 7)

ГЕОМЕТРИЯ

1. Треугольники

18. По углам A и C при основании треугольника ABC определить угол между высотой и биссектрисой угла при вершине, противоположной основанию. (52/53 — I — 7, 56/57 — II — 7)

19. К биссектрисе CE треугольника ABC проведен перпендикуляр CD, который встречает продолжение стороны AB в точке D. Доказать, что угол EDC равен полуразности углов A и B и равен углу между биссектрисой CE и высотой CK. (58/59 — I — 7)

20. Доказать, что медиана, проведенная из вершины острого угла прямоугольного или тупоугольного треугольника, делит угол на неравные части. (51/52 — I — 7)

21. В треугольнике ABC высота h_a составляет половину отрезка биссектрисы внешнего угла треугольника при вершине A, проведенной до точки пересечения с продолжением противоположной стороны. Найти разность углов C и B. (53/54 — I — 8)

22. Доказать, что в треугольнике медиана большей стороны меньше медианы меньшей стороны. (56/57 — II — 7)

23. В прямоугольном или тупоугольном треугольнике один из острых углов разделен на несколько равных частей. Доказать, что прямые, делящие угол, разделяют противоположную сторону на части, возрастающие при удалении от вершины прямого или тупого угла. (51/52 — II — 7)

2. Задачи на построение

24. Дан угол и точка вне его. Провести через эту точку прямую, отсекающую от угла треугольник данного периметра. (51/52 — I — 9)

25. Можно ли проведением одной прямой разбить разносторонний треугольник на два равных треугольника?

(51/52 — I — 7)

26. Построить точку пересечения двух прямых, если она лежит по другую сторону планки, препятствующей продолжению данных прямых. (51/52 — II — 7)

27. Построить биссектрису угла, вершина которого находится вне чертежа. (51/52 — I — 8)

28. Построить прямую, равноудаленную от трех данных точек. (51/52 — I — 7)

29. Построить треугольник по основанию a, медиане m_a и высоте h_a. (58/59 — I — 7)

30. Построить прямоугольный треугольник по катету a и разности b между гипотенузой и другим катетом.

(52/53 — I — 7)

31. Построить треугольник по основанию b, высоте h_b и медиане m_a, проведенной к боковой стороне.

(57/58 — I — 7, 55/56 — II — 7)

32. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник, зная сумму гипотенузы и опущенной на нее высоты.

(56/57 — I — 7)

33. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе c и медиане m_b, проведенной из вершины острого угла. (53/54 — I — 7)

3. Параллелограмм

34. Дан параллелограмм и прямая, параллельная одной из его диагоналей. Доказать, что продолжения параллельных сторон отсекают на этой прямой равные отрезки.

(57/58 — I — 7)

35. В параллелограмме проведены биссектрисы внутренних углов до взаимного пересечения. Доказать, что четырехугольник, образованный этими биссектрисами, есть параллелограмм. (55/56 — II — 7)

36. Середины сторон прямоугольника последовательно соединены прямыми. Середины полученного четырехугольника также соединены прямыми. Во сколько раз периметр последнего четырехугольника меньше периметра внешнего прямоугольника? (55/56 — I — 7)

37. Доказать, что биссектрисы внутренних углов параллелограмма в пересечении образуют прямоугольник, диагонали которого равны разности смежных сторон параллелограмма. (53/54 — I — 7)

38. Если в параллелограмме биссектрисы углов между его диагоналями продолжить до пересечения со сторонами и точки пересечения последовательно соединить отрезками, то получится ромб. Доказать. (56/57 — I — 7)

39. Доказать, что если середины сторон прямоугольника последовательно соединить отрезками прямых, то получится ромб. (58/59 — I — 7)

40. Доказать, что во всяком четырехугольнике середины сторон являются вершинами некоторого параллелограмма. (52/53 — I — 7)

41. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Доказать, что, соединив отрезками прямых центры построенных квадратов, получим квадрат.
(54/55 — I — 8, 54/55 — II — 7, 56/57 — I — 10)

42. Построить ромб по высоте h и диагонали d. (55/56 — I — 7)

4. Трапеция

43. Основания трапеции a и b. Найти длину отрезка, соединяющего середины ее диагоналей. (55/56 — I — 7)

44. Доказать, что всякий отрезок, соединяющий какую-нибудь точку нижнего основания трапеции с произвольной точкой верхнего основания, делится средней линией трапеции пополам. (58/59 — II — 7)

45. Построить трапецию по одному основанию, двум диагоналям и средней линии. (58/59 — II — 7)

5. Окружность

46. Построить окружность данного радиуса R, проходящую через данную точку A и касающуюся данной прямой. (56/57 — II — 7)

47. Если при пересечении сторон четырехугольника с окружностью образуются четыре равные хорды, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны. Доказать. (56/57 — I — 8)

48. Сколько кругов одинакового радиуса можно расположить вокруг одного круга того же радиуса так, чтобы каждый из них касался этого круга и двух соседних? (51/52 — II — 7)

49. Доказать, что хорды двух касательных кругов, соединяющие концы двух секущих, проходящих через точку касания, параллельны между собой. (52/53 — I — 8)

50. На окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята точка M. Доказать, что наибольший из отрезков MA, MB, MC равен сумме двух остальных. (54/55 — II — 7, 55/56 — I — 9)

51. Доказать, что касательные к окружности, проведенные через вершины прямоугольника, вписанного в эту окружность, образуют ромб. (57/58 — II — 7)

АЛГЕБРА

1. Делимость чисел

52. Доказать, что квадрат нечетного числа при делении на 8 всегда дает в остатке 1. (58/59 — II — 7)

53. В шестизначном числе первая цифра совпадает с четвертой, вторая — с пятой, третья — с шестой. Доказать, что это число делится на 7, 11, 13. (53/54 — I — 7)

54. Доказать, что $n^3 + 3n^2 - n - 3$ делится на 48 при нечетных значениях n. (57/58 — II — 10)

2. Доказательство тождеств

55. Доказать, что выражение $2a^2 + 2b^2$ можно представить в виде суммы двух квадратов.

(56/57 — I — 7, 57/58 — I — 7)

56. Доказать, что произведение трех последовательных целых чисел, сложенное со вторым из них, равно кубу второго числа. (58/59 — I — 7)

57. Доказать тождество:

$$a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc = \\ = (b+c)\cdot(c+a)\cdot(a+b).$$

(58/59 — I — 7)

58. Пусть $x = \dfrac{a-b}{a+b}$, $y = \dfrac{b-c}{b+c}$, $z = \dfrac{c-a}{c+a}$.

Доказать, что $(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$.

(56/57 — II — 7)

59. Доказать, что если $\dfrac{x^2 - yz}{x(1-yz)} = \dfrac{y^2 - xz}{y(1-xz)}$, где $x \neq y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, то $x + y + z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$.

(58/59 — II — 7)

3. Решение уравнений и систем уравнений

60. Найти условия, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнения $ax = b - c$, для того чтобы: 1) уравнение имело положительный корень, 2) уравнение имело отрицательный корень, 3) уравнение имело корень, равный 0. (54/55 — I — 7)

61. Решить уравнение $(x + a)^2 = (x - b)^2$. Каково решение этого уравнения при $a = +2$, $b = -2$ и можно ли в этом случае пользоваться общей формулой, получаемой при решении данного уравнения? (51/52 — I — 7)

62. Решить уравнение $\frac{6b + 7a}{6b} - \frac{3ay}{2b^2} = 1 - \frac{ay}{b^2 - ab}$.
(54/55 — II — 7, 55/56 — I — 7)

63. При каких значениях m уравнение $m^2x = m(x + 2) - 2$ имеет единственное решение? (50/51 — I — 7/8)

64. Решить уравнение:

$$\frac{c + 3z}{4c^2 + 6cd} - \frac{c - 2z}{9d^2 - 6cd} = \frac{2c + z}{4c^2 - 9d^2}.$$ (55/56 — II — 7)

65. Решить неравенство $x - \frac{x-1}{2} > \frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3}$ и дать графическое истолкование решению. (56/57 — II — 7)

Решить системы уравнений:

66.
$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2. \end{cases} \quad (a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a)$$ (55/56 — II — 7)

67.
$$\begin{cases} a^3 + a^2x + ay + z = 0, \\ b^3 + b^2x + by + z = 0, \\ c^3 + c^2x + cy + z = 0. \end{cases} \quad (a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a)$$ (54/55 — II — 7)

4. Задачи на составление уравнений

68. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести через два знака влево, т. е. поместить в начале записи числа, то новое число будет на единицу больше утроенного первоначального числа. Найти это число. (51/52 — II — 7)

69. Найти четырехзначное число, являющееся точным квадратом, у которого цифра тысяч одинакова с цифрой десятков, а цифра сотен на 1 больше цифры единиц.
(52/53 — I — 7)

70. Шестизначное число начинается слева цифрой 1. Если эту цифру перенести с первого места слева на последнее место справа, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число. (56/57 — I — 7)

71. 37 *кг* олова теряют в воде 5 *кг* своего веса, 23 *кг* свинца теряют 2 *кг*. Слиток обоих металлов в 120 *кг* теряет в воде 14 *кг*. Сколько в слитке олова и сколько свинца? (53/54 — I — 7)

72. Турист, идущий из деревни на железнодорожную станцию, пройдя за первый час 3 *км*, рассчитал, что он опоздает на поезд на 40 минут, если будет двигаться с той же скоростью, поэтому остальной путь он проходил со скоростью 4 *км* в час и прибыл на станцию за 45 минут до отхода поезда. Каково расстояние от деревни до станции? (54/55 — II — 7)

73. Два курьера вышли одновременно из A в B и из B в A. Каждый шел с постоянной скоростью и, придя в конечный пункт, немедленно поворачивал обратно. Первый раз они встретились в 12 километрах от B, второй раз в 6 километрах от A через 6 часов после первой встречи. Найти расстояние между A и B и скорость обоих курьеров. (57/58 — I — 9)

VIII КЛАСС

ГЕОМЕТРИЯ

1. Линии в треугольнике

74. Доказать, что во всяком треугольнике сумма трех медиан меньше периметра и больше полупериметра этого треугольника. (58/59 — II — 8)

75. Доказать, что сумма расстояний всякой точки основания равнобедренного треугольника от его боковых сторон равна высоте, опущенной на боковую сторону. Как должна быть сформулирована теорема для точек на продолжениях основания? (58/59 — I — 8)

76. Из точки A, лежащей вне данной полуокружности, по одну с ней сторону от диаметра, опустить на этот диаметр перпендикуляр, пользуясь только линейкой (не используя ее как угольник). Положение центра полуокружности не указано. (58/59 — II — 8)

77. Доказать, что во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины. (56/57 — I — 8)

2. Геометрические места

78. Найти геометрическое место середин хорд, проведенных из одной точки A окружности O. (51/52 — I — 8)

79. Построить окружность, равноудаленную от четырех точек. Всегда ли построение возможно? (50/51 — I — 7/8)

80. Провести данным радиусом r окружность, касающуюся данной окружности радиуса R ($R < r$) и данной прямой, лежащей вне данной окружности. Сколько решений может иметь задача? (50/51 — I — 7/8)

81. Построить треугольник ABC по сторонам AB и AC зная, что $3 \angle B = \angle C$. (56/57 — I — 8)

82. Построить треугольник ABC, зная положение одной из его вершин B, середины противоположной стороны D и точки O пересечения высот. (53/54 — I — 8)

3. Деление отрезка в данном отношении

83. Вписать в равносторонний треугольник другой равносторонний треугольник, стороны которого были бы перпендикулярны к сторонам данного. (58/59 — I — 8)

84. Дана окружность и на ней две точки A и B. Найти на этой окружности такую точку C, чтобы расстояния ее от A и B находились в данном отношении $m:n$.

(51/52 — I — 8)

85. Вписать в данный круг треугольник, если даны основание a и отношение двух других сторон ($m:n = 5:3$).

(56/57 — I — 8)

86. Через точку A, лежащую внутри угла, проведена прямая, отсекающая от угла наименьший по площади треугольник. Доказать, что отрезок этой прямой, заключенный между сторонами угла, делится в точке A пополам.

(57/58 — I — 9)

87. Трапецию пересечь прямой, параллельной основаниям, так, чтобы отрезок, заключенный между боковыми сторонами, делился диагоналями на три равные части.

(51/52 — II — 9)

4. Подобие фигур и метод подобия

88. Два круга радиусов r и R внешне касаются. Расстояние от точки касания до их общей касательной равно d. Доказать, что $\frac{1}{r}+\frac{1}{R}=\frac{2}{d}$. (55/56 — I — 8)

89. Доказать, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и точку пересечения продолжений непараллельных сторон трапеции, делит основания трапеции на равные части. (55/56 — I — 8)

90. В данную окружность вписать треугольник, подобный данному. (52/53 — I — 8, 55/56 — II — 8, 57/58 — I — 8)

91. В данную окружность вписать трапецию, зная высоту h и разность a оснований трапеции. (51/52 — II — 8)

92. Данный треугольник пересечь прямой, параллельной основанию, так, чтобы отрезок MN этой прямой, заключенный между боковыми сторонами, был виден из данной точки P основания под прямым углом.
(57/58 — II — 8)

93. Доказать справедливость формулы $R=\frac{abc}{4S}$, где a, b, c — стороны любого треугольника, S — его площадь и R — радиус круга, описанного около этого треугольника. (53/54 — I — 8, 57/58 — II — 10)

94. В треугольнике ABC отрезком прямой соединены основания двух его высот AD и BE. Доказать, что образовавшийся при этом треугольник CDE подобен данному.
(57/58 — II — 8)

95. Дан угол и внутри него точка M. Найти на одной стороне угла точку, равноудаленную от данной точки M и другой стороны угла.
(55/56 — I — 8)

96. Вписать квадрат в данный круговой сектор так, чтобы одна из его сторон лежала на одном из радиусов, ограничивающих сектор.
(54/55 — I — 8)

97. Через данную вне круга точку провести такую секущую, которая разделилась бы окружностью в данном отношении $m:n$. (51/52 — II — 8)

98. Построить треугольник по двум углам и расстоянию между центрами описанной и вписанной окружностей.
(54/55 — II — 8)

99. Построить треугольник по двум углам и разности противолежащих им сторон. (54/55 — I — 8)

5. Теорема Пифагора

100. Внутри угла в 60° дана точка M, удалённая от сторон угла на 2 и 11 единиц. Найти расстояние точки M от вершины угла. (58/59 — I — 8)

101. Из середины одного катета прямоугольного треугольника опущен перпендикуляр на гипотенузу. Доказать, что разность квадратов полученных отрезков гипотенузы равна квадрату второго катета. (56/57 — II — 8)

102. Две стороны остроугольного треугольника равны соответственно 20 *см* и 23,2 *см*. Радиус описанного около треугольника круга 14,5 *см*. Найти третью сторону треугольника. (57/58 — II — 8)

103. Если в трапеции диагонали взаимно-перпендикулярны, то сумма квадратов диагоналей равна квадрату суммы оснований. Доказать. (54/55 — II — 8)

104. Доказать, что в прямоугольном треугольнике с острым углом в 15° произведение катетов равно квадрату половины гипотенузы. (52/53 — I — 9)

105. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и пересекает каждую из остальных сторон. Одна из точек пересечения делит каждую из этих двух сторон на отрезки длиной в 8 *см* и 17 *см*. Найти радиус этой окружности. (54/55 — II — 8)

АЛГЕБРА

1. Разложение на множители

Разложить на множители многочлены:

106. $(x + y + p)^3 - x^3 - y^3 - p^3$. (51/52 — I — 8, 52/53 — I — 7)

107. $[4abcd + (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)]^2 - 4[cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)]^2$. (57/58 — II — 7)

108. $(x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 - (y^2 + z^2)^3$. (56/57 — I — 8)

2. Решение задач с помощью уравнений первой степени

109. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля в 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов стали, чтобы получить 140 *т* стали с содержанием никеля в 30%? (57/58 — II — 8)

110. Турист отправляется в поход из A в B и обратно, проходя весь путь за 3 часа 41 минуту. Дорога из A в B идет сначала в гору, потом по ровному месту, потом под гору. На каком протяжении дорога тянется по ровному месту, если скорость ходьбы туриста в гору 4 *км* в час, по ровному месту — 5 *км* в час и под гору — 6 *км* в час, а расстояние AB равно 9 *км*? (54/55 — II — 8)

111. Найти два числа по следующим условиям: сумма их равна 1244; эти числа станут равными друг другу, если в конце первого числа приписать цифру 3, а в конце второго числа отбросить цифру 2. (56/57 — II — 8)

3. Действия над радикалами

112. Доказать, что если $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$, то $(a+b+c)^3=27abc$. (55/56 — II — 8)

113. Преобразовать выражение: $\frac{a-b}{\sqrt{b}}x^2-2ax+a\sqrt{b}$,

полагая $x=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. (56/57 — II — 8)

114. Доказать, что

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\times$$
$$\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1.$$
(55/56 — I — 8)

115. Вычислить:

$$\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$
(57/58 — I — 8)

116. Упростить выражение:

$$\sqrt{4{,}5+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}}.$$
(51/52 — I — 8)

4. Решение уравнений и задач второй степени

117. Найти целые решения уравнения $xy=x+y$. (50/51 — I — 7/8)

118. Для каких значений k разность корней уравнения $2x^2-(k+1)x+k+3=0$ равна единице? (52/53 — I — 8)

119. Решить уравнение: $-\frac{36}{x^2}+\frac{72}{x}-11=(x-6)^2$.
(51/52 — II — 8)

120. В уравнении $(k^2-5k+3)x^2+(3k-1)x+2=0$ определить число k так, чтобы один из корней был вдвое больше другого. (55/56 — II — 8, 57/58 — I — 9)

121. Даны два уравнения: $x^2-5x+k=0$ (1), $x^2-7x+2k=0$ (2). Найти значение k, при котором один из корней второго уравнения вдвое больше одного из корней первого уравнения. (57/58 — II — 8)

122. Не решая уравнения $x^2+px+q=0$, найти величину выражения $x_1(2x_1^2-3x_2^2)+x_2(2x_2^2-3x_1^2)$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения. (54/55 — II — 8)

123. Не решая уравнения $x^2-\frac{\sqrt{85}}{4}x+1\frac{5}{16}=0$, вычислить разность кубов его корней. (53/54 — I — 8)

124. Найти положительные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x(y-z)+y(y+z)=2, \\ y(z-x)+z(z+x)=7, \\ z(x-y)+x(x+y)=2. \end{cases}$$
(53/54 — I — 8)

125. Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу из A в B и из B в A. После встречи одному из них приходится быть в пути 2 часа, а другому $\frac{9}{8}$ часа. Определить скорость автомобилей, если AB равно 210 *км*. (51/52 — II — 8)

126. Из A в B и из B в A одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму осталось пройти 24 *км*, а когда второй прошел половину пути, первому осталось пройти 15 *км*. Сколько километров останется пройти второму пешеходу, когда первый закончит переход? (53/54 — I — 8, 53/54 — I — 9)

127. Из A в B выезжают одновременно автомашина «Победа» и велосипедист, а из B в A в то же время автомашина «Москвич». Автомашины встречаются через 2,4 часа, а велосипедист и «Москвич» встречаются на расстоянии 48 *км* от A. Найти скорость автомашин и велосипедиста, если велосипедист затрачивает на путь в 30 *км* на 2,5 часа больше, чем «Победа», и его скорость в 4 раза меньше, чем у «Москвича». (54/55 — I — 9)

5. Иррациональные уравнения

Решить уравнения:

128. $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} + x^2 + 2x = 7.$ (54/55 — I — 8)

129. $\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(1-x)^2} = 10$ при $x \geqslant 3$ (радикал означает арифметическое значение корня). (56/57 — I — 8)

130. а) $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}.$ (58/59 — I — 8)

б) $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}.$ (56/57 — II — 8)

Решить системы уравнений:

131. $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 61, \\ x + y - \sqrt{xy} = 7. \end{cases}$ (56/57 — II — 8)

132. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2} = y, \\ x^4 - y^4 = 144. \end{cases}$ (57/58 — I — 9)

133. Показать, что при возведении в куб обеих частей уравнения посторонние решения не вводятся, т. е. уравнения $A = B$ и $A^3 = B^3$ равносильны. (58/59 — II — 8)

6. Задачи на доказательство. Задачи на делимость

134. Доказать тождество: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, если $a + b + c = 0$. (58/59 — I — 8)

135. Доказать, что если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, то по крайней мере одна из сумм $(a+b)$, $(b+c)$, $(a+c)$ равна нулю. (58/59 — I — 8)

136. Доказать, что $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$ является целым числом при любом целом m. (50/51 — I — 7/8)

137. Показать, что выражение $5a^2 - 6ab + 5b^2$ положительно, если a и b не равны одновременно нулю. (55/56 — I — 8)

138. Доказать, что $1 + 3^x + 9^x$ делится на 13, если $x = 3k + 1$, где k — натуральное число. (52/53 — I — 8)

139. Доказать, что если сумма (разность) двух чисел есть квадрат, то удвоенная сумма (разность) кубов этих чисел есть сумма трех квадратов. (51/52 — I — 8)

140. Доказать, что дробь $\frac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$ несократима ни при каких целых значениях a. (54/55 — I — 8)

141. Доказать, что $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120 при любом целом n. (52/53 — I — 7, 54/55 — I — 9)

142. Доказать, что a и b делятся на 3, если число $a^2 + b^2$ делится на 3 (a и b — целые числа).

(52/53 — I — 9)

143. Доказать, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 9. (52/53 — I — 9)

144. Доказать, что при любом целом n $n^3 + 11n$ делится на 6 без остатка. (52/53 — II — 7, 58/59 — I — 9)

145. Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не является полным квадратом.

(55/56 — I — 8)

IX КЛАСС

ГЕОМЕТРИЯ

1. Правильные многоугольники

146. Вписать в данную окружность прямоугольник, площадь которого a^2, где a — данный отрезок. Исследовать решение. (57/58 — I — 9)

147. Найти площадь правильного десятиугольника со стороной a. (55/56 — II — 9)

148. Плоскость покрыта сеткой квадратов. Можно ли построить равносторонний треугольник с вершинами в вершинах квадратов сетки? (54/55 — I — 9)

149. Какое наибольшее число острых углов может встретиться в выпуклом четырехугольнике?

(54/55 — I — 9)

2. Площадь круга. Задачи на построение

150. Даны два концентрических круга. Меньший из них имеет площадь, равную половине площади другого круга. Доказать, что часть кольца между этими окружностями и параллельными касательными к меньшей окружности равновелика квадрату, вписанному в меньший круг.

(55/56 — II — 9)

151. Две окружности, каждая радиуса r, касаются одна другой. Точка касания этих окружностей является центром новой окружности, касающейся данных. Определить площадь сегмента, отсеченного от большего круга общей касательной меньших окружностей. (55/56 — I — 9)

152. В круг радиуса R вписаны три равных круга, касающихся друг друга в точках A, B и C. Вычислить площадь криволинейной фигуры, ограниченной дугами AB, BC и CA окружностей этих кругов. (53/54 — I — 9)

153. Полуокружность радиуса r повернута вокруг конца своего диаметра на $30°$. Найти площадь описанной ею фигуры. (54/55 — II — 9)

154. В круге проведена хорда AB, равная стороне правильного вписанного треугольника, и хорда BC, равная стороне правильного вписанного шестиугольника. На них построены полуокружности. Доказать, что сумма площадей луночек равна площади треугольника ABC.

(52/53 — I — 9)

155. B и D — две точки на дуге AC, представляющей собой четверть некоторой окружности, находящиеся на одинаковом расстоянии от ее концов. BE и DF — два перпендикуляра к радиусу OC (точки E и F лежат на OC). Доказать, что площадь, ограниченная отрезками BE, EF, FD и дугой BD, равновелика площади сектора OBD.

(57/58 — II — 9)

156. Даны две окружности с радиусами R и r. Их общие внутренние касательные взаимно-перпендикулярны. Найти площадь треугольника, образованного этими касательными и общей внешней касательной к данным окружностям. (53/54 — I — 9, 58/59 — I — 9)

157. Провести окружность, касающуюся двух данных окружностей так, чтобы прямая, соединяющая точки касания, прошла через данную точку P. (51/52 — II — 9)

158. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

(52/53 — I — 9)

159. Построить равносторонний треугольник, одна вершина которого лежала бы на данной окружности, другая — на данной прямой, а третья находилась бы в данной точке.

(51/52 — I — 9)

160. Окружность катится без скольжения по внутренней стороне окружности двойного радиуса. Доказать, что каждая ее точка движется по диаметру неподвижной окружности. (56/57 — II — 9, 54/55 — II — 10)

3. Прямые и плоскости в пространстве

161. Через данную точку провести прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые, не содержащие этой точки. (55/56 — II — 9)

162. Через точки A и B проведены две скрещивающиеся прямые, перпендикулярные к отрезку AB и друг к другу. На первой из этих прямых взята точка C (отличная от A), а на другой — точка D (отличная от B). Найти точку, равноудаленную от четырех точек A, B, C и D. (57/58 — II — 9)

163. По разные стороны от плоскости даны точки A и B. Найти на плоскости точку C; чтобы разность отрезков CB и CA была наибольшей. (51/52 — I — 9)

164. Доказать, что перпендикуляры, опущенные из любой точки пространства на ряд плоскостей, пересекающихся по параллельным прямым, лежат в одной плоскости. (53/54 — I — 9)

165. Два равнобедренных треугольника ABC и ABD с общим основанием AB расположены в различных плоскостях. Доказать, что прямая CD перпендикулярна к AB. Построить отрезок, перпендикулярный к AB и CD. (58/59 — II — 9/10)

166. Даны плоскость M и прямая a, параллельная ей. Через прямую a провести плоскость, пересекающую плоскость M под данным углом. (53/54 — I — 9)

167. Доказать, что любой четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм. (50/51 — I — 9, 56/57 — II — 9)

168. Радиус окружности, описанной вокруг основания правильной четырехугольной пирамиды, равен r, а плоский угол при вершине равен α. Определить двугранный угол между соседними боковыми гранями. (50/51 — I — 9/10)

АЛГЕБРА

1. Прогрессии и суммы

169. Доказать, что если три числа представляют арифметическую прогрессию с разностью d, причем одно из них кратно d, то их произведение делится на $6d^3$. (55/56 — I — 9)

170. Шары одинакового радиуса расположены один раз в форме квадрата, а другой — в форме правильного треугольника. Найти количество шаров, если известно, что вдоль стороны квадрата располагается на 2 шара меньше, чем вдоль стороны треугольника. (58/59 — I — 9)

171. Доказать, что во всякой арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, ... имеет место равенство: $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \ldots + a_{2k-1}^2 - a_{2k}^2 = \frac{k}{2k-1}(a_1^2 - a_{2k}^2)$. (53/54 — I — 9)

172. Доказать, что если в арифметической прогрессии $s_p = s_q$, то $s_{p+q} = 0$. (51/52 — II — 9)

173. Найти сумму всех несократимых дробей со знаменателем 3, заключенных между целыми положительными числами m и n $(m < n)$. (58/59 — II — 9)

174. Найти сумму n членов: $a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots + na^n$. (51/52 — I — 9)

175. Доказать, что если стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, то разность ее равна радиусу вписанного круга. (56/57 — I — 9)

176. Доказать, что для всякой арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, ..., a_n имеет место равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

(54/55 — I — 9)

177. Вычислить сумму:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$

(51/52 — II — 9)

178. Сумма нескольких последовательных натуральных чисел равна 1000. Найти все такие последовательности. (52/53 — II — 9)

179. Из сосуда со спиртом отлили один литр спирта и долили сосуд водой. Затем отлили один литр смеси и долили литр воды и т. д. После 20 переливаний в сосуде оказался спирт крепостью 40°. Найти вместимость сосуда. (52/53 — I — 9)

180. Из сосуда вместимостью a ведер, наполненного до краев жидкостью A_1, отлили ведро этой жидкости и долили ведро жидкости A_2. Затем из сосуда отлили ведро полученной смеси и долили ведро жидкости A_3 и так до тех пор, пока в сосуде не оказалось некоторое количество жидкостей A_1, A_2, A_3, ..., A_n. Какое количество каждой жидкости содержится в сосуде? (51/52 — I — 9)

181. Решить уравнение:

$$1+a+a^2+a^3+\ldots+a^x=(1+a)\,(1+a^2)\,(1+a^4)\times$$
$$\times(1+a^8).$$ (56/57 — I — 9)

182. Найти сумму n чисел: $1+11+111+1111+$ $+11111+\ldots$ (58/59 — I — 9)

183. Найти сумму: $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2+\ldots+$ $+\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)^2$. (52/53 — I — 9, 56/57 — I — 9)

184. Пусть числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ составляют геометрическую прогрессию. Зная суммы $T=a_1+a_2+a_3+$ $+\ldots+a_n$, $T_1=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}$, найти произведение $P=a_1a_2a_3\ldots a_n$. (51/52 — II — 9, 58/59 — I — 9).

185. В острый угол вписаны n кругов, касающихся один другого. Показать, что радиусы этих кругов образуют геометрическую прогрессию. Найти зависимость между знаменателем прогрессии и величиной острого угла. (58/59 — II — 9)

186. Могут ли числа 2; $\sqrt{6}$; 4,5 быть членами одной и той же арифметической прогрессии или одной и той же геометрической прогрессии? (54/55 — II — 9)

187. Доказать, что если числа a, b и c составляют арифметическую прогрессию, то $3(a^2+b^2+c^2)=$ $=6(a-b)^2+(a+b+c)^2$. (57/58 — II — 9)

188. Доказать тождество:

$$\log_{ab}x=\frac{1}{\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_b x}}.$$ (51/52 — II — 9)

189. Доказать, что если $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ образуют арифметическую прогрессию, то $n^2=(kn)^{\log_k m}$. (55/56 — II — 9)

190. Доказать, что если $a^2+b^2=7ab$, то

$$\log_k\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\log_k a+\log_k b)$$

$(a>0,\ b>0, k>0,\ k\neq 1)$. (57/58 — II — 9)

191. Доказать, не пользуясь логарифмическими таблицами, что $\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}>2$. (54/55 — II — 9)

2. Уравнения и системы уравнений

Решить уравнения:

192. $\dfrac{\sqrt[p]{b+x}}{b}+\dfrac{\sqrt[p]{b+x}}{x}=\dfrac{c\sqrt[p]{x}}{a}$. (56/57 — I — 9)

193. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4.$

(55/56 — I — 9)

194. $\sqrt{x^2-2x+1}=x^2-3$, где радикал обозначает арифметическое значение корня. (55/56 — I — 9)

195. Найти действительные решения системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=2, \\ xy+z^2=1, \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy-z^2=1, \\ x+y=2. \end{cases}$ (54/55 — I — 9)

Решить системы уравнений:

196. $\begin{cases} x\ (x+y+z)=a-yz, \\ y\ (x+y+z)=b-xz, \\ z\ (x+y+z)=c-xy, \end{cases}$ $(a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0)$.

(51/52 — I — 9)

197. $\begin{cases} xy\ (x+y)=30, \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$ (50/51 — I — 9/10)

198. $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y}=2\sqrt{3}, \\ (x+y)\cdot 2^{y-x}=3. \end{cases}$ (50/51 — I — 9/10)

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Доказать следующие тождества:

199. $\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha$. (54/55 — I — 9)

200. $2\ (\sin^6x+\cos^6x)-3\ (\sin^4x+\cos^4x)+1=0.$

(58/59 — II — 9)

201. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-4\operatorname{tg}4\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha.$

(55/56 — II — 9)

202. $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{8}$. (55/56 — I — 9)

203. $16\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ\sin 90^\circ=1.$

(57/58 — II — 9)

204. $\sin^3\alpha+\sin^3(120^\circ+\alpha)+\sin^3(240^\circ+\alpha)=$
$=-\frac{3}{4}\sin 3\alpha.$ (56/57 — II — 9)

205. $\sin 47° + \sin 61° - \sin 11° - \sin 25° = \cos 7°$.
(54/55 — II — 9)

206. Найти $\sin^3 x + \cos^3 x$, если $\sin x + \cos x = a$.
(56/57 — I — 9)

207. Найти $\sin 18°$, исходя из равенства $\sin 36° = \cos 54°$.
(53/54 — I — 9)

208. Доказать, что для углов треугольника имеет место следующее соотношение:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

(50/51 — I — 9/10)

209. Доказать, что $\sin^2\alpha + \sin^2\beta \geqslant \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha + \sin\beta - 1$.
(57/58 — II — 9)

210. Доказать, что если $x = r(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma)$, $y = r(\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta)$ и $z = r\sin\beta\sin\gamma$, то $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.
(56/57 — I — 9)

211. Упростить $\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}$ $(0° < \alpha < 90°)$, считая, что радикал обозначает арифметическое значение квадратного корня.
(55/56 — I — 9)

212. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

$$\frac{1 + \cos x + \cos 2x}{\sin x - \sin 2x - \sin 3x + \sin 4x}.$$

(56/57 — II — 9)

X КЛАСС

ГЕОМЕТРИЯ

Планиметрия

213. Во внутренней области данного острого угла MON даны две точки P и Q. Построить равнобедренный треугольник ABC с вершиной A на стороне OM и основанием BC на стороне ON, у которого боковая сторона AB содержит одну данную точку, а боковая сторона AC — другую.
(51/52 — I — 10)

214. Доказать, что площадь вписанного четырехугольника равна $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c и d — стороны четырехугольника, а $2p$ — его периметр.
(56/57 — II — 10)

215. Дана окружность и на ней три точки P, Q, R. Вписать в эту окружность треугольник, чтобы его биссектрисы при продолжении встречали окружность в точках P, Q, R. (51/52 — I — 8, 58/59 — I — 9)

216. Внутри острого угла дана точка O. Построить треугольник, один угол которого имеет вершину в точке O, а вершины двух других углов лежат на сторонах данного угла и притом так, чтобы периметр треугольника имел наименьшую возможную длину. (55/56 — II — 10)

217. Провести окружность, касательную к данной окружности и к данной прямой в данной точке.

(57/58 — II — 7)

218. Определить углы треугольника, в котором медиана, биссектриса и высота делят угол на четыре равные части. (56/57 — I — 8, 56/57 — II — 10)

219. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ разделена на n равных частей. Первая точка деления P соединена с вершиной B. Доказать, что прямая BP отсекает от диагонали AC часть AQ, которая равна $\frac{1}{n+1}$ всей диагонали.

(56/57 — II — 10)

220. Внутри острого угла AOB, равного $\frac{\pi}{2n+1}$, где n — целое положительное число, находится движущаяся точка M. Движение точки M подчинено следующему закону. Точка M движется по прямой линии с постоянной скоростью, пока не придет на одну из сторон угла AOB. Затем она отражается от этой стороны, причем угол отражения равен углу падения, и движется дальше по прямой линии, пока вновь не придет на сторону угла AOB и т. д. Начальное положение точки M — внутри угла AOB, но не на его биссектрисе. Начальная скорость точки M направлена по прямой, параллельной биссектрисе угла AOB, в сторону его вершины. Будет ли точка M все время приближаться к вершине угла AOB или после некоторого числа отражений начнет удаляться от нее?

(55/56 — II — 10)

221. В квадрат со стороной, равной единице, вписан квадрат с наименьшей площадью. В полученный квадрат вписан квадрат с наименьшей площадью и т. д. Всего построено таким образом k квадратов. Найти сумму площадей всех построенных квадратов. (54/55 — I — 10)

222. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и радиусу вписанного круга. (55/56 — I — 10)

223. Дана окружность и на ней три точки P, Q, R, в которых продолжения высоты, биссектрисы и медианы, исходящих из одной вершины вписанного в эту окружность треугольника, пересекают окружность. Построить этот треугольник. (51/52 — I — 9)

224. Найти площадь прямоугольника, периметр которого равен 70 *см*, а отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины прямоугольника на диагональ, равен 12 *см*.

(58/59 — I — 10)

Стереометрия

225. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды и плоские углы при ее вершине.

(57/58 — I — 10)

226. Боковые грани пирамиды представляют собой прямоугольные треугольники. Каждое боковое ребро равно a *см*. Определить объем пирамиды. (53/54 — II — 10)

227. В правильной четырехугольной пирамиде плоскость, делящая двугранный угол при основании пополам, делит площадь противоположной грани в отношении 96 : 25 (считая от основания). Определить высоту пирамиды, если сторона основания равна 3 *см*. (56/57 — I — 10)

228. Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный p, и перпендикуляр на боковую грань, равный a. Найти объем пирамиды. (55/56 — I — 10)

229. Две правильные треугольные пирамиды имеют общую высоту, вершина каждой пирамиды лежит в центре основания другой; боковые ребра одной пересекают боковые ребра другой. Боковое ребро l в первой пирамиде образует с высотой угол α, боковое ребро второй пирамиды образует с высотой угол β. Определить объем общей части обеих пирамид. (58/59 — II — 10)

230. Боковые грани треугольной пирамиды взаимноперпендикулярны, площади их равны 6 *кв. м*, 4 *кв. м*, 3 *кв. м*. Найти объем пирамиды. (53/54 — II — 10)

231. В трехгранном угле даны три плоских угла α, β, γ. Найти углы, составленные каждыми двумя гранями.

(56/57 — II — 10)

232. Каждый из четырех шаров одного и того же радиуса касается всех остальных. Каждого из этих четырех шаров касается внешним образом пятый и внутренним образом — шестой шар. Найти отношение радиусов пятого и шестого шаров. (54/55 — II — 10)

233. Куб с ребром a срезан по углам так, что от каждой грани остался правильный многоугольник. Определить объем полученного тела. (52/53 — I — 10)

234. В правильном тетраэдре $ABCS$ точка P есть середина высоты, опущенной из вершины S на основание ABC. Доказать, что прямые AP, BP и CP перпендикулярны друг к другу. (51/52 — II — 10)

235. Доказать, что треугольную пирамиду можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм. Можно ли пересечь треугольную пирамиду плоскостью так, чтобы в сечении получился ромб? (54/55 — I — 10)

236. Доказать, что если в треугольной пирамиде все двугранные углы острые, то все ее плоские углы также острые. (52/53 — I — 10)

237. Доказать, что в правильном тетраэдре сумма расстояний от любой его внутренней точки до всех четырех граней имеет постоянную величину, а именно, равна его высоте. (57/58 — II — 10)

238. Найти геометрическое место середин всех отрезков прямых, соединяющих любые две точки скрещивающихся прямых a и b. (51/52 — II — 10)

239. Доказать, что две плоскости, проходящие через концы обеих троек ребер куба, сходящихся в концах диагонали куба, рассекают эту диагональ на три равные части. (51/52 — I — 10)

240. Основание параллелепипеда — ромб. Одно из боковых ребер составляет с пересекающимися с ним сторонами основания равные углы. Доказать, что одно из диагональных сечений — прямоугольник, а другое — перпендикулярно к основанию параллелепипеда. (58/59 — I — 10)

241. Через ребро AB основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды с вершиной O проведена плоскость, отсекающая от противоположной ребру AB грани ODC треугольник OMH. Доказать, что площадь треугольника OBH есть среднее геометрическое площадей треугольников OBA и OMH. (58/59 — I — 10)

АЛГЕБРА

1. Решение и исследование уравнений

242. Имеет ли уравнение $b^2 x^2 + (b^2 + c^2 - a^2) x + c^2 = 0$ действительные решения, где a, b, c — длины сторон некоторого треугольника? (51/52 — II — 10)

243. Доказать, что уравнение $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1$, где a и b — действительные числа, не равные нулю одновременно, имеет лишь действительные корни. (57/58 — II — 10)

Решить уравнения:

244. $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) = b^4$. (52/53 — I — 7)

245. $(\sqrt{x} - 2)^4 + (\sqrt{x} - 3)^4 = 1$ (найти действительные корни). (58/59 — II — 10)

246. Решить систему: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ (x - a)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Ответить на вопросы: существуют ли значения a, при которых система имеет два решения; три решения? Если они существуют, то найти эти значения a. (58/59 — II — 10)

2. Логарифмические и показательные уравнения

247. Доказать, что $a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}} = \log_b a$. (58/59 — I — 10)

248. Дано: $y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}$, $z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$. Доказать, что $x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}$. (56/57 — I — 10)

249. Решить уравнение: $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 0$. (51/52 — II — 10)

Решить системы уравнений:

250. $\begin{cases} \log_{xy}(x - y) = 1, \\ \log_{xy}(x + y) = 0. \end{cases}$ (57/58 — I — 10)

251. $\begin{cases} \lg|x + y| = 1, \\ \lg y - \lg|x| = \frac{1}{\log_4 100}. \end{cases}$ (55/56 — I — 10)

252. $\begin{cases} x^{\frac{z}{3}} = \sqrt[15]{y^8}, \\ y^{\frac{z}{3}} = \sqrt[15]{x^2}, \\ \frac{5}{9} z = \sqrt{x} + \sqrt{y} \end{cases}$ (55/56 — I — 10)

(радикал обозначает арифметическое значение корня).

253. $\begin{cases} (1+y)^x = 100, \\ (y^4 - 2y^2 + 1)^{x-1} = \frac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2}, \quad y > -1. \end{cases}$

(54/55 — I —10)

3. Соединения и бином Ньютона

254. В разложении $(x+y)^n$ по формуле бинома Ньютона второй член равен 240, третий — 720, а четвертый — 1080. Найти x, y, n. (55/56 — II — 10)

255. Если a_1, a_2, a_3 и a_4 являются последовательными биномиальными коэффициентами, то

$\frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_3}{a_3+a_4} = \frac{2a_2}{a_2+a_3}$. Доказать. (56/57—II—10)

256. Определить номер наибольшего члена разложения $(p+q)^n$ по убывающим степеням буквы p, предполагая, что $p>0$, $q>0$, $p+q=1$. При каких условиях: а) наибольший член будет первым; б) наибольший член будет последним; в) разложение будет содержать два одинаковых члена, превышающих все остальные члены разложения? (53/54 — II — 10)

257. Из чисел 1, 2, 3, . . ., 100 составлены всевозможные парные произведения. Сколько среди полученных чисел будет таких, которые кратны 3? (53/54 — I — 10)

258. Сколько рациональных членов содержится в разложении $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$? (52/53 — I — 10)

4. Комплексные числа

259. Дано комплексное число $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$. Показать, что его можно представить в виде $\frac{c-i}{c+i}$, где c — действительное число. (52/53 — I — 10)

260. Доказать, что комплексное число $a+bi$, модуль которого равен единице и $b \neq 0$, можно представить в форме $a+bi = \frac{c+i}{c-i}$, где c — действительное число.

(51/52— II — 10)

5. Неравенства

261. Доказать, что при любых $a > 0$, $b > 0$ имеет место неравенство: $(a-b)^4 < a^4 + b^4$. (52/53 — I — 10)

262. Решить неравенство: $\left|\frac{-x^2+5x+2}{-x^2-5x-24}\right| > 2$. (56/57 — II — 10)

263. Доказать, что при целом $n \geqslant 2$ и $|x| < 1$ выполняется неравенство $2^n > (1-x)^n + (1+x)^n$. (53/54 — II — 10)

6. Разные задачи

264. Доказать, что $n^5 - n$ делится без остатка на 30 при всех целых n. (54/55 — I — 10)

265. Доказать, что многочлен $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$, где n — натуральное число, делится без остатка на $(x-1)^2$. Найти частное. (54/55 — II — 10)

266. Сколько членов содержит целый многочлен n-й степени относительно x и y. (54/55 — II — 10)

267. При каких значениях x многочлен $(ax+b)^2 + (cx+d)^2$ имеет наименьшее значение? (54/55 — II — 10)

268. Доказать, что
$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$, где n — любое натуральное число. (57/58 — I — 10)

269. Доказать, что произведение $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)\,[a_0 - a_1x + a_2x^2 - \ldots + (-1)^n a_n x^n]$ после приведения подобных членов содержит только члены с четными степенями x. (55/56 — II — 10)

ТРИГОНОМЕТРИЯ

1. Уравнения и системы уравнений

Решить уравнения:

270. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x$. (53/54 — II — 10)

271. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16}\cos^4 2x$. (51/52 — I — 10)

272. $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$. (58/59 — II — 10)

Решить системы уравнений:

273. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2$, $2\cos x \cos y = 1$. (54/55 — II — 10)

274. $\sin^3 x = \frac{1}{2}\sin y, \quad \cos^3 x = \frac{1}{2}\cos y.$

(57/58 — II — 10)

275. $\sin x \sin y = a, \ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b$. Исследовать, при каких a и b система имеет решения и найти все решения.

(50/51 — I — 10/9, 58/59 — I — 10).

2. Преобразование тригонометрических выражений

276. Привести к виду, удобному для логарифмирования: $\sin 5x \sin 4x + \sin 4x \sin 3x - \sin 2x \sin x$. (52/53 — I — 10)

277. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то имеет место равенство: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$.

(55/56 — I — 10)

278. Доказать, что $\cos x + \sqrt{3}\sin x \leqslant 2$.

(55/56 — I — 10)

279. Привести к виду, удобному для логарифмирования: $\operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 50° + \operatorname{tg} 60°$. (58/59 — I — 10)

280. Вычислить, не прибегая к таблицам, произведение $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2}{5}\pi$. (57/58 — I — 10)

281. Доказать, что если $5\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta)$, то $\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3}{2}$. (56/57 — I — 10)

282. Показать, что из равенства $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ и $A + B + C = \pi$ следует $a = b\cos C + c\cos B$, $b = c\cos A + a\cos C$, $c = a\cos B + b\cos A$. (57/58 — II — 10)

283. Доказать, что наибольшие значения величин $(\log_5 6)^{\sin x}$ и $(\log_6 5)^{\cos x}$ равны.

(51/52 — I — 10, 55/56 — II — 10)

284. Вычислить, не пользуясь таблицами, $\operatorname{tg} 5° \cdot \operatorname{tg} 55° \cdot \operatorname{tg} 65° \cdot \operatorname{tg} 75°$. (51/52 — I — 10)

285. Доказать, что если $A = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}, B = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$, то $\cos 2A = \sin 4B$. (56/57 — I — 10)

286. Доказать, что если $\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+\varphi)}{b} = \frac{\cos(x+2\varphi)}{c} = \frac{\cos(x+3\varphi)}{d}$, то $\frac{a+c}{b} = \frac{d+b}{c}$.

(54/55 — I — 10)

287. Доказать, что для тупоугольного треугольника имеет место неравенство: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C > 1$.

(51/52 — II — 10)

3. Исследование функций

288. Найти наименьший положительный период и наибольшее значение функции: $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x$.

(58/59 — II — 10)

289. При каких значениях x имеет действительные значения $y = \sqrt{4 - x^2} + \arccos\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$?

(55/56 — II — 10)

290. При каких значениях x справедливо равенство $\lg\sin(x + |x|) = 0$?

(57/58 — I — 10)

VII КЛАСС

АРИФМЕТИКА

1. $\frac{244 \cdot 395 - 151}{244 + 395 \cdot 243} = \frac{395 \cdot 243 + 395 - 151}{395 \cdot 243 + 244} = 1.$

2. Так как ни одно из данных трех чисел не делится на 3, то каждое из них при делении на 3 дает остаток 1 или 2. Рассмотрев возможные 4 комбинации данных чисел, получим доказываемое.

3. Для того чтобы число $(10a + b) + (10b + a) = 11(a + b)$ было полным квадратом, необходимо и достаточно, чтобы $a + b = 11$.

Ответ. 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

4. Нуль в конце записи произведения целых чисел получается в результате перемножения простых множителей 2 и 5, входящих в эти числа. Так как в разложении на простые множители чисел от 1 до 100 двойка появляется чаще, чем пятерка, то подсчитаем число пятерок, входящих в разложение произведения чисел от 1 до 100. Чисел, содержащих по крайней мере одну пятерку, будет $100:5=20$, а чисел, кратных 25, будет $100:25 = 4$. Всего пятерок, а следовательно, и нулей в конце произведения, будет $20 + 4 = 24$.

5. Всех однозначных чисел имеется 9, двузначных $99 - 9 = 90$, трехзначных $999 - 99 = 900$, четырехзначных 9000 и т. д. Число цифр, которыми записаны все однозначные, двузначные и трехзначные числа, равно $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 = 2889$, а число цифр, которыми записаны все однозначные, двузначные, трехзначные и четырехзначные числа, равно 38889. Следовательно, на 34788-м месте стоит цифра четырехзначного числа. Всего цифр, принадлежащих четырехзначным числам и занимающих места до номера 34788 включительно, будет $34788 - 2889 = 31899$. Разделив число этих цифр на 4, узнаем, какому четырехзначному числу принадлежит цифра, стоящая на 34788-м месте: $31899 = 4 \cdot 7974 + 3$. Итак, на 34788-м месте стоит третья цифра числа, занимающего 7975-е место среди четырехзначных чисел. Этим числом будет $999 + 7975 = 8974$. Искомая цифра 7.

6. 1994.

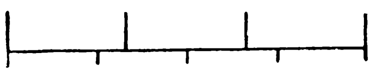
7. Искомое число без единицы должно быть кратно 2, 3, 4, 5, 6. НОК этих чисел — 60. Число 61 при делении на 7 дает остаток 5, поэтому число 60 нужно увеличить во столько раз, чтобы остаток от деления полученного числа на 7 после прибавления 1 давал число, кратное 7. Достаточно 60 умножить на 5. Искомое число 301.

8. Определим, какой цифрой оканчивается 7^7. Возводя 7 последовательно в степень и определяя только последнюю цифру степени, найдем, что последние цифры степеней семерки от первой до седьмой будут: 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3. Итак, 7^7 оканчивается цифрой 3. Аналогично найдем, что $/7^7/^7$ оканчивается цифрой 7, $(/7^7/^7)^7$ оканчивается цифрой 3. Вообще нечетное число возведений в степень дает последнюю цифру 3, а четное 7. Искомое число оканчивается цифрой 7.

9. $16\frac{4}{11}$ мин.

10. Выбирая шары наугад, в самом неблагоприятном случае возьмем 9 красных, 9 зеленых, 9 желтых и 10 черных и белых шаров. Если мы возьмем теперь еще один шар, то у нас получится 10 шаров какого-то одного цвета. Итого нужно взять 38 шаров.

11. На том расстоянии, на котором сын сделает 4 шага, отец сделает 3 шага, и их следы совпадут. Из чертежа 1 (меньший штрих отмечает след сына, больший — отца) видно, что на расстоянии, равном 3 шагам отца (4 шагам сына), всего осталось 6 следсв, не считая первого. 10 отрезков, каждый из которых равен трем шагам отца, составляют длину двора. Ответ. 21,6 *м*.



Черт. 1.

12. Машина пришла на завод на 10 минут раньше, вследствие того что она не прошла путь от места встречи с инженером до станции и обратно. Следовательно, на путь, пройденный инженером, она затрачивает 5 минут. Инженер этот путь прошел за 50 минут (машина была бы на станции через 5 минут после момента встречи). Скорость машины в 10 раз больше скорости пешехода.

13. После покупки по новым ценам того количества товаров, какое можно было бы купить по старым ценам на всю зарплату, останется еще 20 процентов зарплаты. Количество товаров, которое можно будет купить за этот остаток зарплаты, составляет $\frac{20 \cdot 100\%}{80} = 25\%$ от уже купленных.

14. 60 *кг.*

15. 30 лет, 12 лет.

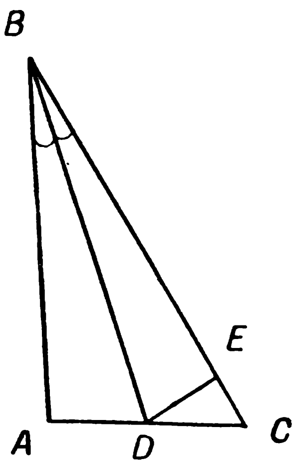
16. Мне было столько лет, сколько вам сейчас, столько лет назад, на сколько лет я старше вас. Сейчас я старше того вашего возраста на две разницы в наших годах и вдвое тогдашнего вашего возраста. Значит, мой возраст равен 4 разностям наших лет, а ваш — трем. 63 года составляют 7 разностей наших возрастов. Мне 36 лет, вам 27 лет.

17. 24 года, 40 лет.

ГЕОМЕТРИЯ

18. $\frac{1}{2}(\angle A - \angle C)$. [31][1].

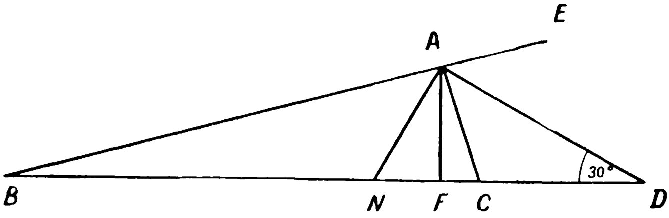
20. 1. Пусть в треугольнике ABC угол A — тупой или прямой (черт. 2), $BC > BA$. Предположим, что медиана BD этого треугольника делит угол пополам: $\angle ABD = \angle DBC$. Отложим на BC отрезок $BE = BA$ и соединим точки E и D, тогда $\triangle ABD = \triangle BDE$ и потому $DE = DA$. Но $AD = DC$. Следовательно, $DE = DC$ и потому $\angle DCE = \angle DEC$. Но $\angle DEC + \angle DEB = 2d$, а $\angle ECD + \angle DEB = \angle ECD + \angle BAC < 2d$ как сумма двух углов треугольника. Таким образом, $\angle DEC > \angle DCE$. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи. Как видно, для данной теоремы существенно не то, что угол A — тупой или прямой, а то, что $BC \neq BA$. 2. [8].



Черт. 2.

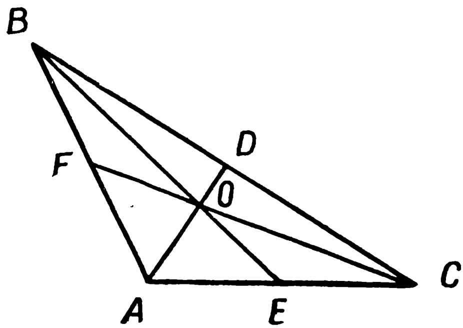
[1] Число в квадратных скобках указывает номер задачи в книге Б. Делоне и О. Житомирского, Задачник по геометрии, М. — Л., ГИТТЛ, 1952, в котором имеются решения.

21. Пусть AD — биссектриса угла EAC (черт. 3), тогда $\angle ADF = 30°$. Проведем биссектрису AN угла BAC. $AN \perp AD$, тогда (смотри задачу № 18) $\angle C - \angle B = 2\angle ADF = 60°$.



Черт. 3.

22. 1. Пусть в треугольнике ABC $BC > AC$ (черт. 4) и AD, BE и CF — медианы. Так как в треугольниках CFA и CFB CF — общая сторона, $FB = FA$ и $CA < BC$, то

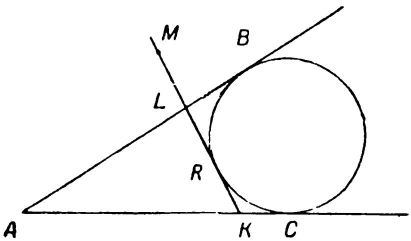


Черт. 4.

$\angle CFA < \angle CFB$. Поэтому из треугольников OFA и OFB найдем, что $OA < OB$. Следовательно, $AD < BE$. 2. [83].

23. 1. Смотри решение задачи № 20. 2. [21].

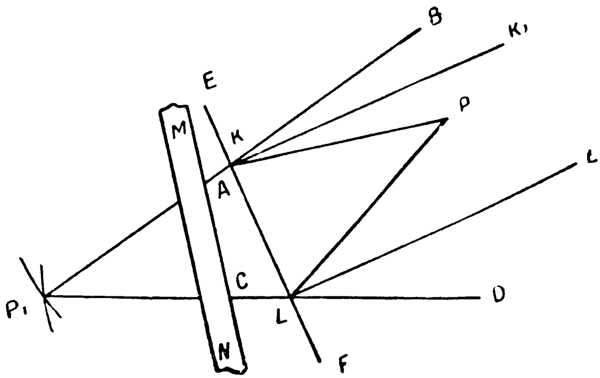
24. Пусть периметр искомого треугольника $2p$. Отложим от вершины на сторонах угла отрезки $AB = AC = p$ (черт. 5). Впишем в угол окружность так, чтобы точки B и C служили точками касания. Из данной точки M проведем касательную к этой окружности, пересекающую стороны угла в точках L и K по одну сторону с A от центра окружности. Треугольник ALK — искомый, что следует из свойства равенства двух касательных, проведенных из одной внешней точки к окружности.



Черт. 5.

25. Нет. [5].

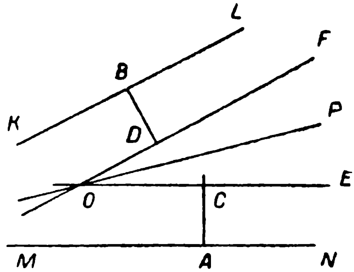
26. Пусть на прямых AB и CD лежит планка MN, на которую нельзя накладывать линейку (черт. 6). Проведем произвольную прямую EF, пересекающую данные прямые AB и CD соответственно в точках K и L. Проведем



Черт 6.

$KK_1 \perp EF$ и $LL_1 \perp EF$. В части плоскости, лежащей между этими перпендикулярами и прямой EF, проведем лучи KP и LP так, чтобы $\angle PKK_1 = \angle K_1KB$ и $\angle DLL_1 = \angle L_1LP$. Пусть P — точка пересечения этих лучей. Проведем две дуги радиусами KP и LP с центрами в точках K и L соответственно. Точка P_1 пересечения этих дуг является искомой точкой.

27. На сторонах угла из произвольных точек A и B восставим перпендикуляры к сторонам угла и отложим на них равные отрезки $AC = BD = l$ (черт. 7). Через точки C и D проводим $CE \parallel MN$ и $DF \parallel KL$. Отрезок l всегда можно выбрать таким, что точка O пересечения прямых CE и DF будет помещаться на чертеже. Биссектриса OP угла FOE будет также биссектрисой данного угла.

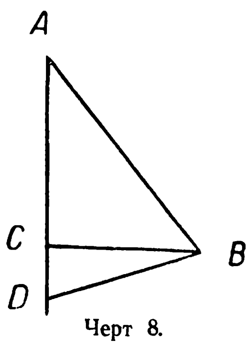


Черт. 7.

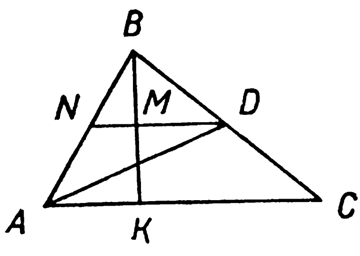
28. Если три точки не лежат на одной прямой, то задача имеет три решения (средние линии треугольника, определяемого данными точками), если точки лежат на одной прямой — бесконечное множество прямых. [100].

29. [124].

30. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC $BC = a$, $AB - AC = b$ (черт. 8). Продолжим AC и отложим на продолжении отрезок $CD = b$. В треугольнике ABD $AD = AC + b = AB$. Треугольник ABD, а следовательно, и искомый треугольник ABC можно построить после построения треугольника DBC. Прямоугольный треугольник DBC можно построить по катетам a и b.



Черт 8.

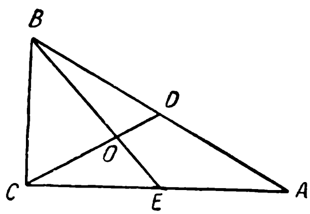


Черт. 9.

31. Пусть ABC — искомый треугольник: $AC = b$, $BK = h_b$, $AD = m_a$ (черт. 9). Проведем $DN \parallel AC$, тогда DN, как средняя линия треугольника, разделит BK пополам: $BM = MK = \frac{1}{2} h_b$. Треугольник ADC можно построить по двум сторонам $AD = m_a$, $AC = b$ и высоте, равной $MK = \frac{1}{2} h_b$, после чего легко построить искомый треугольник. При $m_a > \frac{1}{2} h_b$ задача имеет 2 решения, при $m_a = \frac{1}{2} h_b$ — одно решение, при $m_a < \frac{1}{2} h_b$ задача не имеет решений.

32. Использовать свойство, что высота равнобедренного прямоугольного треугольника равна половине гипотенузы.

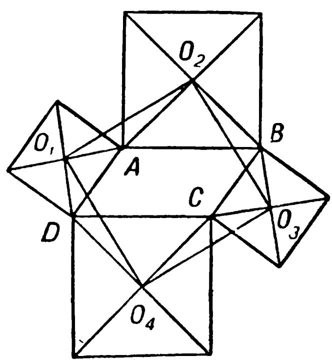
33. Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $\angle BCA = 90°$, $BE = m_b$ и пусть $BD = DA$ (черт. 10). Тогда $CD = \frac{1}{2} c$, $OD = \frac{1}{3} CD = \frac{1}{6} c$, $BO = \frac{2}{3} BE = \frac{2}{3} m_b$. Треугольник BOD можно построить по трем сторонам. Затем строится искомый треугольник ABC.



Черт. 10.

40. Провести диагональ четырехугольника. [36].

41. O_1, O_2, O_3, O_4 — точки пересечения диагоналей квадратов, построенных на сторонах параллелограмма $ABCD$ (черт. 11).
$\triangle O_1O_2A = \triangle O_2O_3B = \triangle O_3O_4C = \triangle O_4O_1D$. Следовательно, $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_1$ и $O_1O_2O_3O_4$ — ромб. Из равенства $\triangle O_1O_2A = \triangle O_2O_3B$ следует: $\angle O_1O_2A = \angle O_3O_2B$. $\angle O_1O_2O_3 = \angle O_1O_2A + \angle AO_2O_3 = \angle O_3O_2B + \angle AO_2O_3 = \angle AO_2B = 90°$. Следовательно, $O_1O_2O_3O_4$ — квадрат.



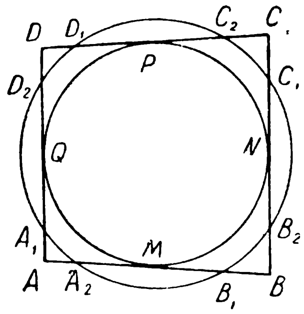
Черт. 11.

43. [40].

45. Для анализа через одну из вершин трапеции провести прямую, параллельную диагонали.

46. [89].

47. $A_1D_2 = D_1C_2 = C_1B_2 = B_1A_2$ (черт. 12). Равные хорды одинаково удалены от центра, поэтому в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. M, N, P, Q — точки касания этой окружности со сторонами четырехугольника $ABCD$, тогда $DP = DQ$, $CP = CN$, $BM = BN$, $AM = AQ$. Почленное сложение данных равенств дает требуемое соотношение.



Черт 12.

48. 6. [54].

49. Провести общую внутреннюю касательную. [60].

50. 1. [66]. 2. Воспользоваться теоремой Птоломея о вписанном четырехугольнике.

АЛГЕБРА

52. $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1$. Так как первое слагаемое делится на 8, то доказываемое очевидно.

53. Обозначим первую цифру числа через x, вторую — через y, третью — через z. Тогда указанное число будет: $100000x + 10000y + 1000z + 100x + 10y + z =$
$= 7 \cdot 11 \cdot 13(100x + 10y + z)$.

54. $n = 2k+1$. $n^3 + 3n^2 - n - 3 = (n+3)(n+1)(n-1) =$
$= (2k+4)(2k+2)2k = 8k(k+1)(k+2)$.

55. $2a^2 + 2b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2$.

56. $(n-1)n(n+1) + n = n^3$.

57. $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc = ab^2 +$
$+ ac^2 + bc^2 + ba^2 + c(a+b)^2 = (a+b)(ab + c^2 + ac + bc) =$
$= (a+b)(b+c)(a+c)$.

59. Из условия следует:

$$(x^2 - yz)(y - xyz) - (y^2 - xz)(x - xyz) = 0;$$

$$xy(x-y)-xyz(x^2-y^2)-xyz^2(x-y)+z(x^2-y^2)=0;$$

$$(x-y)(xy+xz+yz)=xyz(x-y)(x+y+z).$$

Так как $x \neq y$, то $xy+zx+zy=xyz(x+y+z)$. А так как $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, то, разделив на xyz, получим доказываемое равенство.

61. Полагая $a \neq -b$, получаем $x=\frac{b-a}{2}$. При $a=2$, $b=-2$ условие $a \neq -b$ нарушено и пользоваться общей формулой нельзя. Непосредственно из уравнения видим, что оно удовлетворяется тождественно при $a=-b$.

62. а) $y=\frac{7b(a-b)}{3(3a-b)}$ при $b \neq 3a$; б) при $b=3a$ решений нет; в) при $a=0$ уравнение удовлетворяется тождественно.

63. $m \neq 0$ и $m \neq 1$.

64. $\frac{c(4c^2-9d^2)}{27d^2+8c^2}$.

65. $x>-1$.

66. Умножив обе части первого уравнения системы на c и вычтя его почленно из второго, получим $x(a-c)+$ $+y(b-c)=d-c$ (1).
Умножив обе части первого уравнения на c^2 и вычтя его почленно из третьего уравнения, получим $x(a^2-c^2)+$ $+y(b^2-c^2)=d^2-c^2$ (2).
Умножим обе части уравнения (1) на $(b+c)$, вычтем его почленно из уравнения (2) и решим полученное уравнение относительно x. Аналогично находим y и z.

$$x=\frac{(d-c)(d-b)}{(a-c)(a-b)}, \quad y=\frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)}, \quad z=\frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

67. Вычитаем третье уравнение почленно из первого, а затем из второго уравнения; получаем выводную систему для определения x. Затем легко найти y и z.

$$x=-(a+b+c),\ y=ab+bc+ca,\ z=-abc.$$

Из системы видно, что a, b, c — корни кубического уравнения $M^3 + M^2x + My + z = 0$ и значения для x, y, z получаются по теореме Виета.

68. Пусть x — число сотен, а y — число десятков искомого числа. Получаем уравнение $(100x + 10y + 3)\,3 = 300 + 10x + y - 1$. Так как число сотен в измененном числе равно 3, то в утроенном числе тоже 3 сотни, т. е. $x = 1$. Тогда $y = 0$. Искомое число — 103.

69[1]. Искомое число может быть записано следующим образом: $1000a + 100\ (b + 1) + 10a + b = A^2$, где a и b — соответствующие цифры искомого числа. $1010a + 101b + 100 = A^2$, или $101\ (10a + b) = (A - 10)\ (A + 10)$. Левая часть полученного равенства делится на 101, поэтому и правая должна делиться на 101, но A — двузначное число, значит на 101 делится множитель $A + 10$ (так как 101 простое число, то на него должен целиком делиться один из сомножителей). $A + 10$ не только делится, но и равно 101, так как A — двузначное число. Отсюда $A = 91$, искомое число — 8281.

70. Пусть x — первоначальное число. Отбросив первую слева цифру, получим число $x - 100000$. Дописав эту единицу справа, получим $(x - 100000) \cdot 10 + 1$. Составив уравнение, найдем $x = 142857$.

71. Олова 74 *кг*, свинца 46 *кг*.

72. 20 *км*.

73. Пусть s — расстояние от A до B, x — скорость курьера, отправившегося из A, y — скорость второго курьера. Первое уравнение получим, если приравняем время движения курьеров до первой встречи: $\frac{s - 12}{x} = \frac{12}{y}$. Второе уравнение получим, выражая путь, пройденный обоими курьерами вместе за время от первой до второй встречи: $(x + y) \cdot 6 = 2s$. Для составления третьего уравнения сравним два выражения для пути, пройденного вторым курьером от первой до второй встречи:

$$6y = (s - 12) + 6. \qquad s = 30 \text{ км},\ x = 6\,\frac{\text{км}}{\text{час}},\ y = 4\,\frac{\text{км}}{\text{час}}.$$

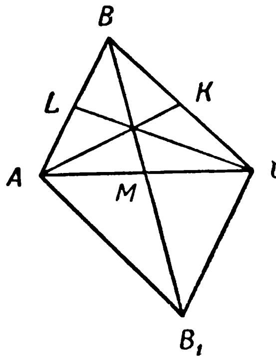
---

[1] Решение сообщено преподавательницей средней школы № 41 г. Минска М. П. Зубковой

VIII КЛАСС

ГЕОМЕТРИЯ

74. 1. Обозначим стороны треугольника ABC, противолежащие углам A, B, C, через $2a$, $2b$ и $2c$, а медианы, выходящие из вершин этих углов, через m_a, m_b и m_c соответственно. Тогда из треугольников ABK, ACL, MBC будем иметь: $m_a > 2c - a$, $m_c > 2b - c$, $m_b > 2a - b$ (черт. 13). Складывая почленно эти неравенства, получим $m_a + m_b + m_c > a + b + c = \frac{1}{2}P$. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCB_1$. В треугольнике ABB_1 $2m_b < 2c + 2a$. Аналогично найдем: $2m_c < 2a + 2b$ и $2m_a < 2c + 2b$. Сложив почленно эти неравенства, получим $m_a + m_b + m_c < 2a + 2b + 2c = P$. 2. [16].

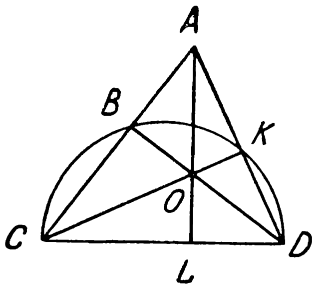


Черт. 13.

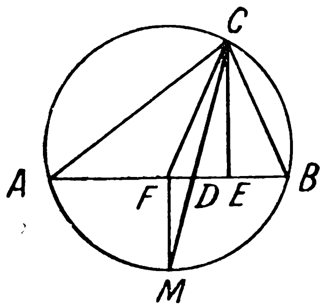
75. 1. [43]. 2. Соединив произвольную точку основания равнобедренного треугольника с противоположной вершиной, получим два треугольника, в которых расстояния выбранной точки от боковых сторон равнобедренного треугольника являются высотами. Приравняв площадь равнобедренного треугольника, у которого за основание взята боковая сторона, и сумму площадей полученных треугольников, докажем теорему. Для точек на продолжениях основания будем иметь: «Разность расстояний всякой точки, взятой на продолжении основания равнобедренного треугольника, до боковых сторон этого треугольника равна высоте, опущенной на его боковую сторону». Для доказательства этого пригоден первый способ.

76. Соединим прямыми точки A и C, A и D (черт. 14). Точки B и K пересечения прямых AC и AD с данной полуокружностью соединим соответственно с точками D и C. Точку A соединим с точкой пересечения O высот CK и DB треугольника CAD. Прямая AO — искомый перпендикуляр к диаметру данной полуокружности.

77. 1. Опишем вокруг треугольника ABC окружность и из вершины C проведем медиану CF, биссектрису CD и высоту CE (черт. 15). Точка M — точка пересечения биссектрисы с окружностью. $\smile AM = \smile MB$. Так как



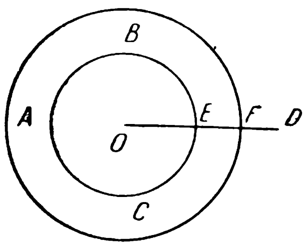
Черт. 14.



Чсрт 15

$AF = FB$, то $FM \perp AB$. Проекции F и E концов отрезка MC на прямую AB будут находиться по разные стороны от точки D пересечения MC с AB. Совпадение всех трех точек F, D и E будет только в случае, если C будет вершиной равнобедренного треугольника. 2. [11].

78. Множество всех точек окружности, кроме точки A, построенной на AO, как на диаметре.



Черт. 16.

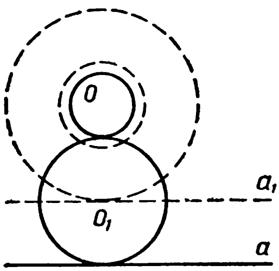
79. 1-й случай. Все точки лежат на одной окружности. Искомым геометрическим местом будет бесконечное множество окружностей, концентрических с этой окружностью.

2-й случай. Никакие три из четырех точек не лежат на одной прямой. Тогда через любые три из них, например A, B и C, проводим окружность O, радиус которой обозначим через r (черт. 16). Соединим O с D. Пусть E — точка пересечения окружности O с OD, тогда радиус искомой окружности будет $r - \frac{1}{2}ED$, если точка лежит внутри окружности O, и $r+\frac{1}{2}ED$, если точка лежит вне этой окружности, а центр искомой окружности есть точка O. Искомых окружностей будет четыре (число сочетаний из четырех элементов по три).

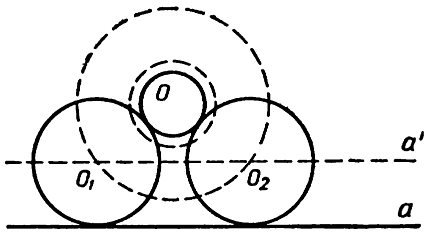
3-й случай. Три из данных точек лежат на одной прямой, а четвертая точка не лежит на этой прямой. Три решения.

4-й случай. Все четыре точки лежат на одной прямой. Решений нет.

80. [90]. Могут иметь место 4 случая: 1) $b=2r+R$ (b — расстояние от центра данного круга до данной прямой, R — радиус данного круга, r — радиус искомого круга). Одно решение (черт. 17 а). 2) $2r-R<b<2r+R$. Два решения (черт. 17 б).

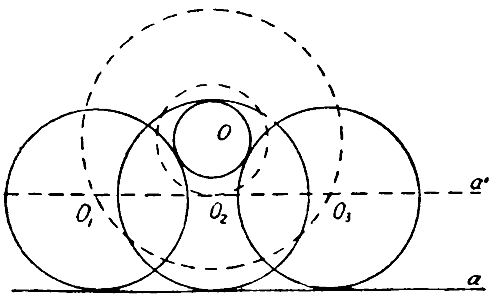


Черт. 17 а.



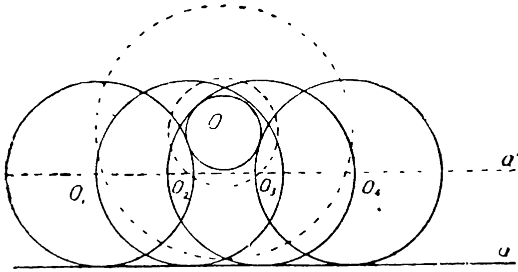
Черт. 17 б.

3) $b=2r-R$. Три решения (черт. 17 в).



Черт. 17 в.

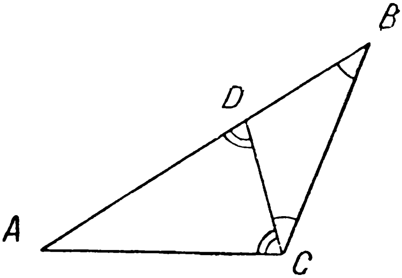
4) $R < b < 2r - R$. Четыре решения (черт. 17 г).



Черт. 17 г.

Если $b > 2r + R$ — решений нет.

81. Пусть в треугольнике ABC $AC = b$, $AB = c$ и $\angle C = 3\angle B$ (черт. 18). Построим $\angle BCD = \angle B$, тогда $\angle DCA = 2\angle B$. $\angle ADC = 2\angle B$, как внешний угол треугольника DCB. Следовательно, $AD = AC = b$, $DB = c - b$. Равнобедренный треугольник ADC может быть построен, а значит, может быть построен и искомый треугольник ABC.

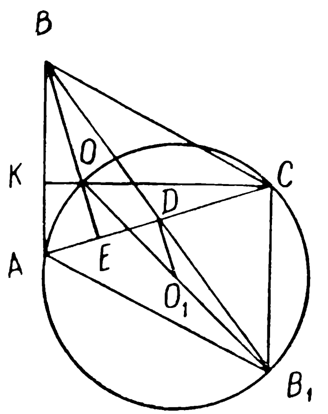


Черт. 18.

82. 1. Пусть в треугольнике ABC B — данная вершина, O — точка пересечения высот CK и BE, $AD = DC$ (черт. 19). Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCB_1$. Так как $CK \perp AB$, то $CK \perp CB_1$ ($AB \parallel B_1C$). Угол OCB_1 — прямой, и точка C лежит на окружности, построенной на OB_1, как на диаметре. Вершина C, кроме того, лежит на перпендикуляре DE к прямой BO. Отсюда вытекает построение.

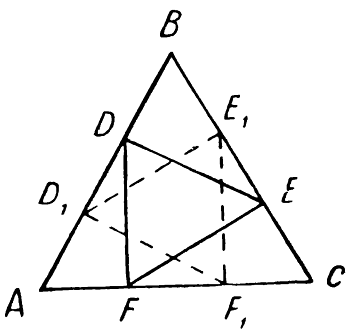
2. Построить окружность, описанную вокруг искомого треугольника. Центр ее находится на пересечении перпендикуляра к AC (черт. 19), восставленного в точке D, и срединного перпендикуляра к отрезку $BF = BE + EF$, где $EF = OE$.

3. Сначала построить треугольник, стороны которого проходят через вершины искомого треугольника параллельно противоположным сторонам искомого треугольника. Точка пересечения высот искомого треугольника есть центр описанного круга для вспомогательного треугольника. Одна из вершин вспомогательного треугольника есть конец удвоенной медианы искомого треугольника.

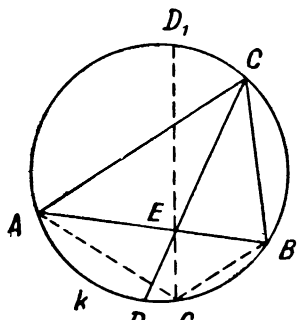


Черт 19.

83. Пусть треугольник DEF — искомый (черт. 20), тогда $\triangle BED = \triangle ECF = \triangle FAD$. В этих прямоугольных треугольниках катеты DB, EC и AF лежат против углов в $30°$ и равны соответственно половинам гипотенуз BE, FC и AD, поэтому точки D, E и F делят стороны равностороннего треугольника в отношении $2:1$. Задача имеет два решения.



Черт. 20.

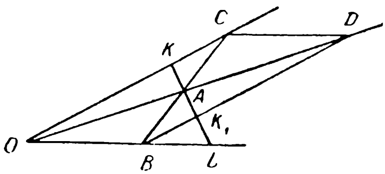


Черт. 21.

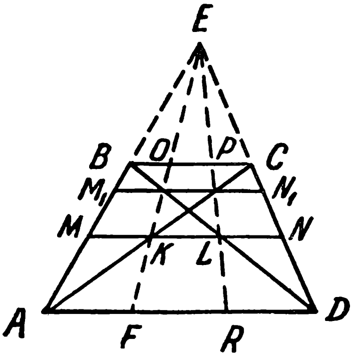
84. Делим хорду AB в отношении $m : n$ (черт. 21), $AE : EB = m : n$. Дугу AkB делим пополам точкой D и проводим прямую DE до пересечения с окружностью в точке C. Точка C — искомая, так как CE — биссектриса угла C треугольника ABC. Разделив пополам дугу AD_1B, получим еще одно решение — точку C_1.

85. Смотри решение задачи № 84.

86. Пусть $AB = AC$ (черт. 22). Покажем, что любой треугольник, отсекаемый от угла прямой, проходящей через точку A, отрезок которой не делится пополам, имеет площадь большую, чем треугольник OBC. Для этого на OA отложим $AD = AO$. $OCDB$ — параллелограмм. $S_{\triangle OKL} > S_{\triangle OBC}$, так как у этих треугольников $OKAB$ — общая часть, а $S_{\triangle KAC} < S_{\triangle ABL}$, $AB = AC$, $\angle KAC = \angle BAL$, а $AK < AL$ ($AL > AK_1$, $AK_1 = AK$, так как точка A — центр симметрии параллелограмма). Доказанное эквивалентно теореме, сформулированной в задаче, так как представляет собой предложение, противоположное обратному.



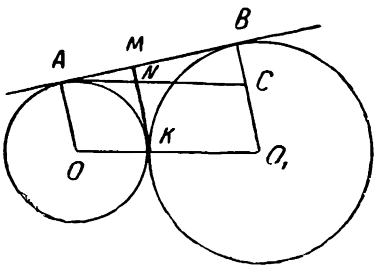
Черт. 22.



Черт. 23.

87. Пусть $MN \parallel AD$, $MK = KL = LN$ (черт. 23). Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке E и проведем лучи EK и EL. По теореме о пересечении параллельных прямых пучком прямых получим, что основания трапеции тоже разделились на три равные части. Отсюда вытекает построение. Можно построить две искомые прямые MN и M_1N_1.

88. AB — общая касательная (черт. 24). Проведем $AC \parallel OO_1$. $KM \perp AB$, $KM = d$. Из подобия прямоугольных треугольников ABC и AMN $AC : AN = BC : MN$. $AC = OO_1 = R + r$, $AN = r$, $BC = R - r$, $MN = MK -$

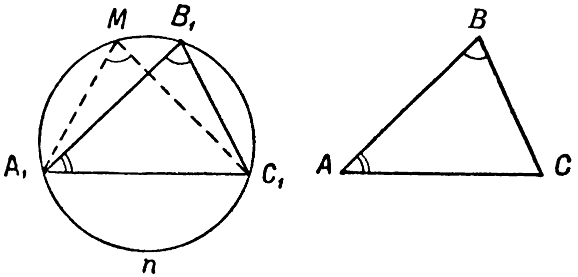


Черт. 24.

— $NK = d - r$. Подставив значения отрезков в пропорцию, получим нужную формулу.

89. [158].

90. 1. [169]. 2. Построить окружность, концентрическую с данной и равную окружности, описанной вокруг данного треугольника. Вписать в эту окружность треугольник, равный данному, и преобразовать его в гомотетичный треугольник с центром гомотетии в центре данной окружности и коэффициентом гомотетии, равным отношению радиусов обеих окружностей. 3. Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ — искомый (черт. 25). Существует бесконечное множество углов, вписанных в данную окружность и опирающихся на дугу A_1nC_1 и, следовательно, равных $\angle B_1 = \angle B$. Легко построить один из таких углов, например угол A_1MC_1.



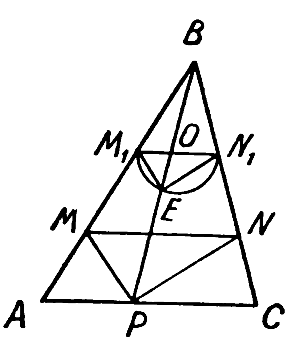
Черт. 25.

Затем на хорде A_1C_1 строим $\angle C_1A_1B_1 = \angle A$. Треугольник $A_1B_1C_1$ — искомый.

91. Для анализа через конец меньшего основания трапеции провести прямую, параллельную боковой стороне.

92. Проведем произвольную прямую $M_1N_1 \parallel AC$ и на M_1N_1, как на диаметре, построим полуокружность (черт. 26). E — точка пересечения этой полуокружности с прямой PB. Проведем $PM \parallel EM_1$ и $PN = EN_1$. Отрезок MN — искомый.

93. Проведем диаметр AD описанной окружности и $BF \perp AC$ (черт. 27). Из подобия треугольников ABD и FBC найдем: $R = \frac{a \cdot c}{2h_b}$.

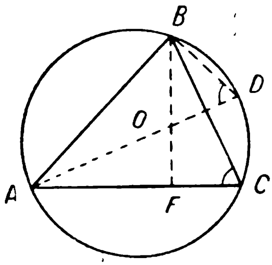


Черт. 26.

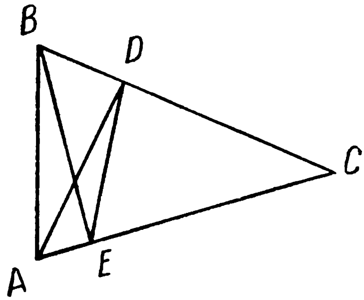
Умножив числитель и знаменатель этой дроби на b, получим искомую формулу.

Примечание. Учащиеся IX—X классов могут применить теорему синусов и формулу, выражающую площадь треугольника через синус угла.

94. Из подобия треугольников ADC и BEC (черт. 28) находим: $EC:DC = BC:AC$, после чего подобие треугольников CDE и ABC очевидно.



Черт 27.

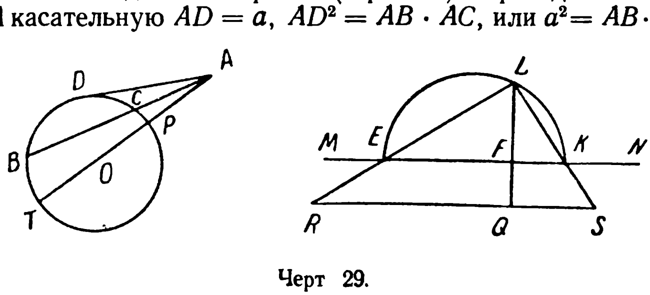


Черт. 28

95. Точка, лежащая на одной стороне угла и равноудаленная от точки M и второй стороны угла, является центром окружности, касающейся второй стороны угла; радиус ее равен расстоянию этой точки до данной точки M. Остается применить метод подобия. За центр подобия целесообразно взять вершину угла. Задача имеет два решения.

96. [163].

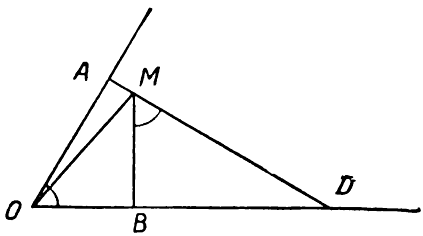
97. Пусть AB — искомая секущая и $BC:CA = m:n$, где m и n — данные отрезки (черт. 29). Проведем из точки A касательную $AD = a$, $AD^2 = AB \cdot AC$, или $a^2 = AB \cdot AC$.



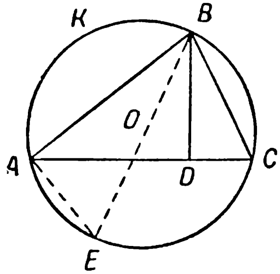
Черт 29.

На произвольной прямой MN построим отрезки EF и FK, равные $m+n$ и n соответственно.

На отрезке EK, как на диаметре, построим полуокружность, из точки F восставим перпендикуляр до пересечения с полуокружностью в точке L. $LF^2 = EF \cdot FK = (m+n) \cdot n$. На высоте LF треугольника ELK откладываем отрезок $LQ = a$ и через полученную точку Q проводим прямую RS, параллельную EK до пересечения со сторонами (или их продолжениями) угла ELK. RQ — длина искомой секущей.



Черт. 30.



Черт. 31.

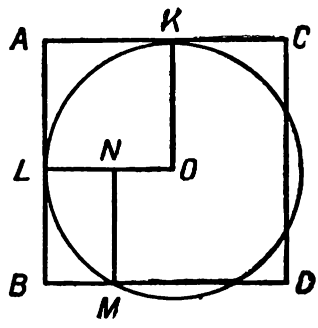
Задача имеет два решения, если $m:n < PT:PA$ (PT и PA — отрезки секущей, проходящей через центр окружности); одно решение, если $m:n = PT:PA$; ни одного решения, если $m:n > PT:PA$, так как отношение $PT:PA$ наибольшее из всех возможных.

98. [170].

99. Решение аналогично решению № 98.

100. Пусть $AM = 2$, $MB = 11$ (черт. 30). Продлим AM до пересечения в точке D со стороной DO данного угла. Прямоугольные треугольники OAD и MBD имеют угол ADO в 30°. OM найдем из треугольника OAM, OA — из треугольника OAD, $MD = 2MB = 22$, $AD = AM + MD = 24$, $OD = 2\,OA$. $OM = 14$ (ед.).

102. Пусть $BC = 20$ *см*, $AB = 23{,}2$ *см* (черт. 31). Опустим высоту BD и проведем



Черт. 32.

диаметр BE, точку A соединим с точкой E. Находим из подобия треугольников ABE и BCD $BD = 16$ *см*, $AC = 28{,}8$ *см*.

103. Смотри указание к задаче № 45.

104. Провести из второго конца гипотенузы прямую внутри треугольника под углом в $15°$ к гипотенузе.

105. $BM = 8$ *см*, $BD = 8 + 17 = 25$ (*см*), $OL \perp AB$, $OK \perp AC$, $MN \perp OL$, $OL = R$, $ON = R - 8$, $OM = R$, $MN = 25 - R$ (черт. 32). Из прямоугольного треугольника OMN находим R. $R_1 = 13$ *см*, $R_2 = 53$ *см*. При $R = 53$ *см* окружность касается не сторон квадрата, а их продолжений.

АЛГЕБРА

106. $[(x + y + p)^3 - x^3] - (y^3 + p^3) = (y + p)[(x + y + p)^2 + x(x + y + p) + x^2] - (y + p)(y^2 - yp + p^2) = (y + p)(3x^2 + 3xy + 3py + 3px) = 3(y + p)(x + y)(x + p)$.

107. $[4abcd + (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) + 2cd(a^2 + b^2) + 2ab(c^2 + d^2)] \cdot [4abcd + (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - 2cd(a^2 + b^2) - 2ab(c^2 + d^2)] = [(a^2 + b^2)(c^2 + d^2 + 2cd) + 2ab(c^2 + d^2 + 2cd)] \times [(a^2 + b^2)(c^2 + d^2 - 2cd) - 2ab(c^2 + d^2 - 2cd)] = (c + d)^2(a + b)^2(a - b)^2(c - d)^2$.

108. Раскладываем первые два слагаемых как сумму кубов и выносим за скобки $(y^2 + z^2)$:
$[(x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3] - (y^2 + z^2)^3 = (y^2 + z^2)\{[(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)(z^2 - x^2)] + (z^2 - x^2)^2 - (y^2 + z^2)^2\} = (y^2 + z^2)[(x^2 + y^2)(2x^2 + y^2 - z^2) + (2z^2 - x^2 + y^2)(-x^2 - y^2)] = 3(y^2 + z^2)(x^2 + y^2)(x^2 - z^2)$.

109. 40 *т* и 100 *т*.

110. 4 *км*.

111. 12 и 1232.

112. $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = -\sqrt[3]{c}$. Возведем обе части этого равенства в куб: $a + b + 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) = -c$, $a + b + c = -3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) = 3\sqrt[3]{abc}$, $(a + b + c)^3 = 27abc$.

113. 0.

115. -2. Указание. $9 + 4\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^2$.

116. Выделяем полный квадрат:

$$\sqrt{(3 + 2\sqrt{3} + 1) + \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{6}} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{3} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

117. Очевидное решение: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Выражение $x = \frac{y}{y-1}$ должно быть целым. При y нечетном уравнение не может иметь целых решений, а при y четном $y - 1$ может равняться только 1. $x_2 = 2$, $y_2 = 2$.

118. $x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{(k+1)^2 - 8(k+3)}}{2}$. Приравняв эту разность единице, найдем $k_1 = -3$, $k_2 = 9$.

119. Применить подстановку $y = x + \frac{6}{x}$. Ответ. 1, 2, 3, 6.

120. По теореме Виета имеем: $x_1 + x_2 = \frac{1 - 3k}{k^2 - 5k + 3}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{k^2 - 5k + 3}$. Кроме того, $x_1 = 2x_2$. Отсюда $k = \frac{2}{3}$.

121. По теореме Виета из первого уравнения имеем: $x_1 \cdot x_2 = k$, $x_1 + x_2 = 5$. Пусть $x_4 = 2x_1$ (x_3, x_4 — корни второго уравнения). По теореме Виета из второго уравнения получим: $2x_1 + x_3 = 7$, $2x_1x_3 = 2k$. Отсюда $k = 6$.

122. $2x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 2x_2^3 - 3x_1^2x_2 = 2(x_1^3 + x_2^3) - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 9pq - 2p^3$.

123. Пользуясь теоремой Виета, найдем: $(x_1 + x_2)^2 = \frac{85}{16}$, $x_1x_2 = \frac{21}{16}$. $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 4$ и $x_1 - x_2 = \frac{1}{4}$ (считаем $x_1 > x_2$). Следовательно, $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 1$.

124. Сложить почленно 1-е и 2-е, 2-е и 3-е, 1-е и 3-е уравнения. При извлечении корня берем только арифметическое значение, так как ищем положительные решения. $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$.

125. $60\frac{\text{км}}{\text{час}}$, $80\frac{\text{км}}{\text{час}}$.

126. 8 *км*.

127. $60\frac{\text{км}}{\text{час}}$, $40\frac{\text{км}}{\text{час}}$, $10\frac{\text{км}}{\text{час}}$.

128. Обозначить $x^2 + 2x = y$. $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

129. Данное уравнение равносильно уравнению: $|x - 3| + |1 - x| = 10$. Поскольку $x \geqslant 3$, то последнее уравнение равносильно такому: $x - 3 + x - 1 = 10$. Откуда $x = 7$.

130. а) Применить подстановку: $\sqrt{x-1}=y$.
Ответ. 1, 2, 10.

б) $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

131. $x_1=9,\ y_1=4;\ x_2=4,\ y_2=9;\ x_3=4+\sqrt{15},\ y_3=$ $=4-\sqrt{15};\ x_4=y_3,\ y_4=x_3$.

132. Возвести почленно в квадрат первое уравнение и воспользоваться вторым уравнением.
$x_1=\sqrt{20},\quad y_1=4;\quad x_2=-\sqrt{20},\ y_2=4;\ x_3=\sqrt{12},\ y_3=$ $=0;\quad x_4=-\sqrt{12},\quad y_4=0$.

133. Уравнение $A=B$ (1) равносильно уравнению $A-B=0$ (2). После возведения в куб получим уравнение $A^3=B^3$, равносильное уравнению $(A-B)(A^2+AB+$ $+B^2)=0$. Последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $A-B=0$ (2) и $A^2+AB+B^2=0$ (3). Уравнение (3) в области действительных чисел корней не имеет, откуда следует утверждение задачи. Доказательство того, что уравнение (3) не имеет действительных решений, может быть таким: выражения A и B разных знаков, иначе произведение AB в сумме с неотрицательным выражением A^2+B^2 не может дать нуль, но уравнение (3) равносильно уравнению $(A+B)^2=AB$, что для действительных чисел разных знаков невозможно.

134. Из $a+b+c=0$ следует $a+b=-c$ (1). Возведем (1) почленно в куб: $a^3+3ab\,(a+b)+b^3=-c^3$. Применив равенство (1), получим требуемое.

135. $\frac{bc+ac+ab}{abc}-\frac{1}{a+b+c}=0$,
$[ab+c\,(a+b)]\,[(a+b)+c]-abc=0$,
$(a+b)\,(b+c)\,(a+c)=0$, отсюда вытекает доказываемое утверждение.

136. Заданное выражение представляется в виде: $\frac{m(m+1)\,(m+2)}{6}$.

137. 1. Если a и b разных знаков, то доказываемое очевидно. Если a и b одинаковых знаков, то доказываемое следует из того, что $5a^2-6ab+5b^2=5\,(a-b)^2+4ab$.
2. $5a^2-6ab+5b^2=(2a-2b)^2+(a+b)^2>0$.

138. $3^{3k+1}=3\cdot 27^k$, $9^{3k+1}=9\cdot 27^{2k}$. $27^\bullet$ при делении на 13 дает остаток 1. Точно так же любая степень 27 дает при делении на 13 остаток 1. Поэтому $1+3^{3k+1}+$ $+9^{3k+1}$ дает при делении остаток $1+3+9=13$, т. е. делится на 13.

139. Пусть $a \pm b = c^2$, тогда $2(a^3 \pm b^3) = 2(a \pm b)(a^2 \mp$ $\mp ab + b^2) = (a \pm b)[(a \mp b)^2 + a^2 + b^2] = c^2(a \mp b)^2 +$ $+ (ac)^2 + (bc)^2$.

140. Если сократима данная дробь, то должна быть сократима и обратная дробь $\frac{a^4 + 3a^2 + 1}{a^3 + 2a} = a + \frac{a^2 + 1}{a^3 + 2a}$. Сократимой должна быть и дробь $\frac{a^3 + 2a}{a^2 + 1} = a + \frac{a}{a^2 + 1}$. Но $\frac{a^2 + 1}{a} = \frac{1}{a} + a$ не может быть сократимой дробью ни при каком целом a.

141. $n^5 - 5n^3 + 4n = n[(n^2 - 1)^2 - 3(n^2 - 1)] =$ $= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$. Это выражение при любом целом n разделится на 120.

142. Допустим, что a и b не делятся на 3 или хотя бы одно из них, например b, не делится на 3. Тогда a и b могут быть представлены так: $a = 3k + c$, $b = 3m + d$, где c может принимать значения 1, 2, 3, а d значения 1 или 2. Тогда $a^2 + b^2 = (9k^2 + 9m^2) + (6kc + 6md) + c^2 +$ $+ d^2$. Два первых слагаемых делятся на 3. Исследуя для пяти возможных комбинаций значений c и d выражение $c^2 + d^2$, заметим, что оно не делится на 3, а следовательно, и $a^2 + b^2$ не может делиться на 3. Полученное противоречие показывает, что как a, так и b должны делиться на 3.

143. $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = 3[(n - 1)n(n + 1) + 3n]$. Поскольку выражение в квадратных скобках делится на 3, все выражение делится на 9.

144. $n^3 + 11n = (n - 1)n(n + 1) + 12n$.

145. $(n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 =$ $= 5(n^2 + 2)$. Для того чтобы это выражение было полным квадратом, необходимо, чтобы $n^2 + 2$ делилось на 5, что невозможно, так как оно может оканчиваться лишь цифрами 2, 3, 6, 7, 8, 1.

IX КЛАСС

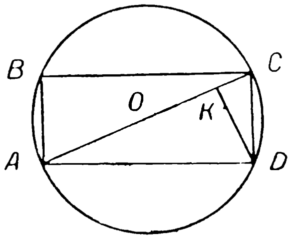
ГЕОМЕТРИЯ

146. Допустим, что в данную окружность вписан прямоугольник $ABCD$, площадь которого a^2 (черт. 33). Проведем $DK \perp AC$. Тогда $KD \cdot AC = a^2$. AC — известный отрезок: диаметр данной окружности. Отрезок $KD = \frac{a^2}{AC}$

можно построить, после чего легко построить искомый прямоугольник. Решение возможно, если $KD \leqslant \frac{AC}{2}$, т. е. если $a \leqslant \frac{AC\sqrt{2}}{2}$. Если $a = R\sqrt{2}$, то искомый прямоугольник будет квадратом.

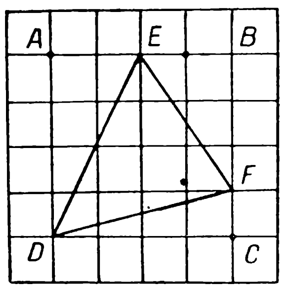
147. $2{,}5a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. [263].

148. Такой треугольник построить нельзя. Если бы его можно было построить, то он оказался бы вписанным в прямоугольник с целочисленными сторонами. Его площадь равнялась бы площади этого прямоугольника $ABCD$ без площадей трех прямоугольных треугольников ADE, EBF, FCD с целочисленными катетами (черт. 34), т. е. выражалась бы рациональным числом. С другой стороны, площадь правильного треугольника равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a^2 — рациональное число, как квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника с целочисленными катетами. Поэтому $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — иррациональное число. Полученное противоречие показывает невозможность построения искомого треугольника.



Черт. 33

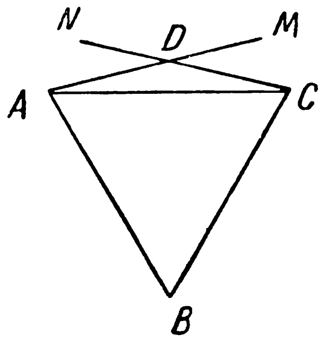
149. 3. Поскольку сумма внешних углов любого выпуклого многоугольника равна $4d$, то в выпуклом многоугольнике число острых углов меньше четырех. Покажем, что четырехугольник с тремя острыми углами существует. В равностороннем треугольнике ABC (черт. 35) из точек A и C проведем лучи AM и CN так, чтобы $\angle MAC = \angle NCA < 30°$. Полученный четырехугольник $ABCD$ имеет три острых угла.



Черт. 34

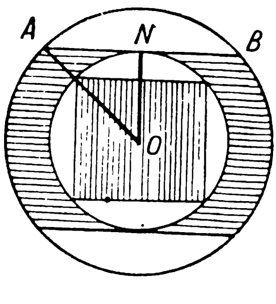
150. Отрезок касательной AB к меньшей окружности, заключенный внутри большей окружности, есть сторона квадрата, вписанного в большую окружность: $\pi AO^2 = 2\pi ON^2$;

$ON^2 = \frac{1}{2} AO^2$; $AB = 2AN = 2\sqrt{OA^2 - ON^2} = OA\sqrt{2}$. $(ON \perp AB)$ (черт. 36). Поэтому площадь сегмента большого круга вдвое больше площади сегмента малого круга (оба отсекаются сторонами вписанных квадратов). Поскольку площадь большего круга вдвое больше площади меньшего круга, то площадь кольца равна площади меньшего круга. Искомая площадь получается из площади кольца вычитанием площадей двух сегментов большого круга. То же получится, если вместо этого вычесть площади четырех малых сегментов. Таким образом, искомая площадь равна площади меньшего круга (или кольца) без площади четырех малых сегментов, т. е. равна площади квадрата, вписанного в малый круг.

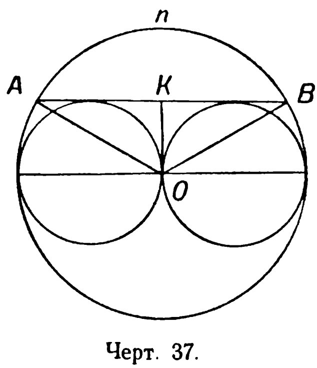


Черт 35

151. $OK \perp AB$; $OK = r$; $OB = 2r$. Значит, $\angle KBO = 30°$;



Черт. 36.

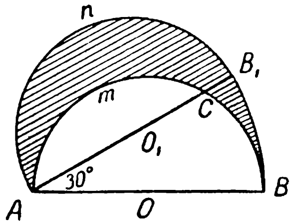


Черт. 37.

$\angle AOB = 120°$ (черт. 37). AB есть сторона правильного вписанного в большую окружность треугольника. Площадь сегмента равна $\frac{r^2}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})$ (кв. ед.).

152. $\frac{3}{2}R^2(14\sqrt{3} + 4\pi\sqrt{3} - 24 - 7\pi)$. [271].

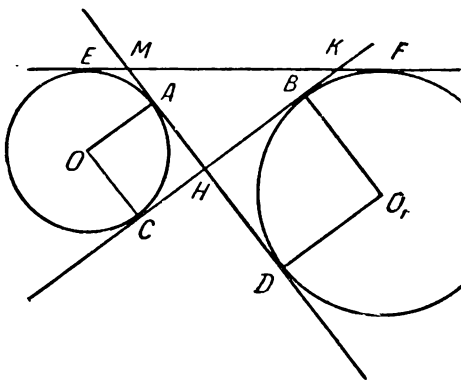
153. Фигура AnB_1BCmA, площадь которой надо найти (черт. 38), состоит из фигур AnB_1CmA и B_1CBB_1. Но фигура AnB_1CmA равновелика фигуре $ACBA$, так как при добавлении к каждой из них фигуры $AmCA$ получим данную полуокружность, поэтому фигура AnB_1BCmA равновелика сектору B_1AB, радиус которого $2r$, а центральный угол равен $30°$. Искомая площадь $\frac{\pi r^2}{3}$.



Черт. 38.

154. Доказать, что треугольник ABC — прямоугольный.

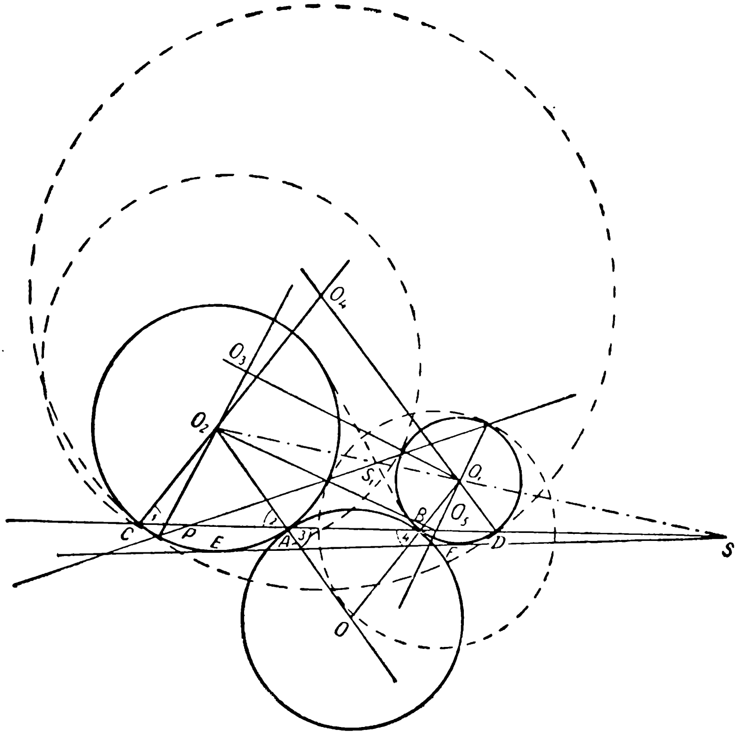
156. Пусть MD и CK — общие внутренние касательные окружностей O и O_1, $MD \perp CK$, EF — их внешняя касательная. Проведем радиусы в точки касания (черт. 39). $OAHC$ и O_1BHD — квадраты со сторонами r и R соответственно. По свойству касательных, проведенных из одной



Черт. 39.

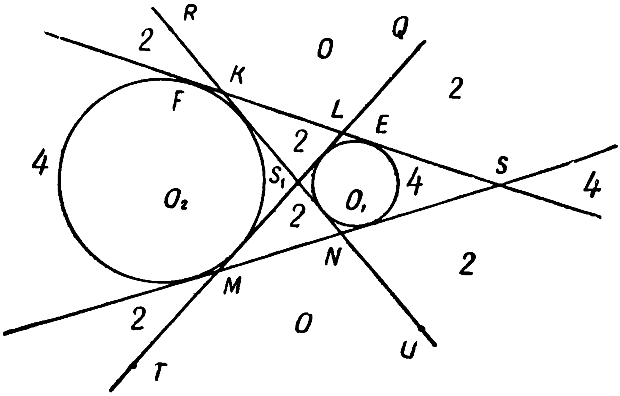
внешней точки к окружности, $MD = MF$ и $KC = KE$, или $MA + r + R = MK + FK$ и $KB + r + R = KM + ME$. Складывая, а затем вычитая эти равенства и учитывая, что $ME = MA$ и $KB = KF$, получим $MK = R + r$ и $MA = KB$. Обозначим $MA = KB = x$. $S_{\triangle MHK} = \frac{1}{2} MH \cdot HK =$ $= \frac{1}{2}(R + x)(r + x) = \frac{1}{2} Rr + \frac{1}{2}[x(R + r) + x^2]$. По теореме Пифагора $(R+x)^2+(r+x)^2=(R+r)^2$, или $x(R+r)+$ $+x^2=Rr$. $S_{\triangle MHK}=Rr$.

157. Допустим, что окружность O касается двух данных окружностей O_1 и O_2, причем точка P лежит на прямой AB, соединяющей точки касания. Проведем O_2C, O_2A, O_1B, O_1D (черт. 40). Пусть линия центров O_1O_2 и общая касательная EF пересекаются в точке S — центре гомотетии данных окружностей. Так как треугольники CO_2A и AOB равнобедренные, то $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$ и $O_2C \parallel O_1O$ (и $O_2A \parallel O_1D$). Но так как эти параллельные



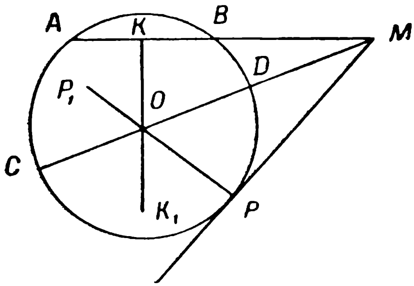
Черт. 40.

прямые проходят через соответственные в данной гомотетии точки O_1 и O_2, то они являются соответственными, и точки пересечения их с окружностями (C и B) также будут соответственными, поэтому прямая BC, содержащая две гомотетичные точки, пройдет через центр гомотетии S. Отсюда вытекает построение. Используя внешний центр гомотетии, найдем два решения; применение внутреннего центра гомотетии двух окружностей (предполагается, что окружности расположены одна вне другой) дает еще два решения. Вообще задача может иметь четыре, два или ни одного решения в зависимости от расположения точки P



Черт. 40а

по отношению к общим касательным данных кругов. На чертеже 40а показано разбиение плоскости общими внутренними и внешними касательными, цифры указывают число решений, если точка P расположена внутри соответствующей фигуры; если точка P расположена на касательной, то может быть два решения или ни одного (если на ломаных $RKLQ$ и $TMNU$).

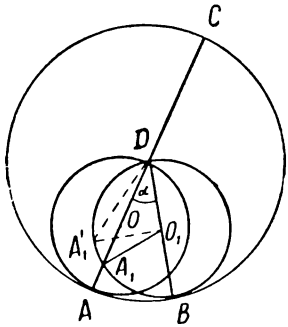


Черт. 41.

158. 1. [185]. 2. O — центр искомой окружности. A, B — данные точки, MP — данная прямая, касающаяся искомой окружности (черт. 41). Продолжим отрезок AB до пересечения с прямой MP, тогда $MP^2 = MA \cdot MB$. Следовательно, MP можно построить по данным отрезкам AM и MB, после чего строится искомая окружность. Задача может иметь одно или два решения или не иметь решения в зависимости от расположения точек A, B и прямой MP. 3. Применить метод гомотетии, взяв за центр гомотетии точку пересечения срединного перпендикуляра к AB и прямой MP.

159. [111].

160. Так как диаметр меньшей окружности равен радиусу большей, то в каждый момент качения какая-либо точка меньшей окружности будет находиться в центре большей окружности (черт. 42). Пусть в некоторый момент точка A меньшей окружности лежит на большей. Когда меньшая окружность пройдет по большей дугу AB, ее центр O займет положение O_1, а точка A — положение A_1'. Так как качение проходит без скольжения, то дуги AB и $A_1'B$ равны по длине. Пусть $\angle ADB = \alpha$ (в радианах). Тогда $\angle A_1'O_1B = \frac{\smile A_1'B}{O_1D} = 2\frac{\smile AB}{BD} =$



Черт. 42.

$= 2\alpha$. Так как $\angle O_1DA_1' = \angle O_1A_1'D$ и $\angle O_1DA_1' + \angle O_1A_1'D = \angle A_1'O_1B = 2\alpha$, то $\angle O_1DA_1' = \angle O_1A_1'D = \alpha$. Получаем, что $\angle O_1DA_1' = \angle O_1DA = \alpha$, а это означает, что лучи DA_1' и DA совпадают, т. е. точка A_1' лежит на диаметре AC, т. е. $A_1' = A_1$.

161. [306].

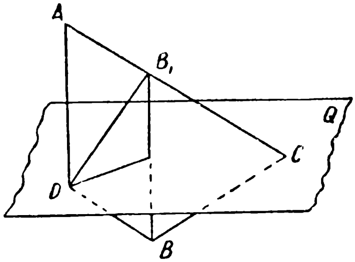
162. Точка пересечения перпендикуляра к плоскости ADB, проведенного через середину AD, и плоскости, перпендикулярной к отрезку AC, проходящей через середину AC.

163. Построим точку B_1, симметричную точке B относительно плоскости Q (черт. 43). Докажем, что точка C пересечения прямой AB_1 с плоскостью Q является искомой. Возьмем в плоскости Q любую другую точку D, тогда $AD - BD = AD - B_1D < AB_1 = AC - B_1C = AC - BC$, т. е. разность отрезков AC и BC больше разности любых других двух отрезков AD и BD

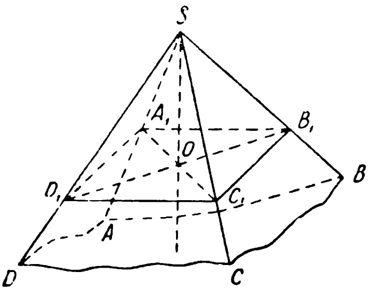
164. [310].

165. Провести медианы общей стороны равнобедренных треугольников.

167. 1. [323]. 2. Если в сечении плоскостью выпуклого четырехгранного угла $SABCD$ (черт. 44) получается параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$, то точка O пересечения диагоналей

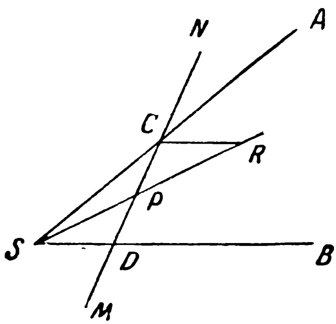


Черт 43



Черт 44

этого параллелограмма лежит на линии SO пересечения плоскостей ASC и BSD. Учитывая, что диагонали A_1C_1 и B_1D_1 в точке пересечения делятся пополам, находим следующее решение. На линии пересечения плоскостей ASC и BSD берем произвольную точку O. Через точку O проводим две прямые: одну в плоскости угла ASC, другую в плоскости угла BSD так, чтобы отрезки A_1C_1 и B_1D_1 этих прямых, заключенные между сторонами соответствующего угла, делились в точке O пополам. Соединив точки A_1, B_1, C_1, D_1, получим параллелограмм.



Черт. 45.

П р и м е ч а н и е. Через точку P, лежащую внутри угла ASB, всегда можно провести прямую MN так, чтобы отрезок CD этой прямой, заключенный между сторонами угла, делился в точке P пополам (черт. 45). Для этого откладываем на SP отрезок $PR = SP$, проводим $RC \parallel SB$. CP — искомая прямая.

168. $2\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$.

169. Данные числа можно представить в виде kd, $kd+d$, $kd+2d$. Произведение их будет $d^3k(k+1)(k+2)$.

170. Обозначив число шаров, расположенных вдоль стороны квадрата, через x, получим уравнение: $\frac{(x+2)(x+3)}{2}=$ $=x^2$. Число шаров равно 36.

171. Обозначим вычисляемую сумму через s, а разность прогрессии через d. $s=(a_1+a_2)(a_1-a_2)+(a_3+a_4)(a_3-a_4)+$ $+\ldots+(a_{2k-1}+a_{2k})(a_{2k-1}-a_{2k})=-d(a_1+a_2+a_3+$ $+\ldots+a_{2k})=-d\frac{(a_1+a_{2k})\,2k}{2}$. Так как $a_{2k}=a_1+d(2k-1)$, то $-d=\frac{a_1-a_{2k}}{2k-1}$. Подставив значение $-d$ в выражение для s, получим нужную формулу.

172. $s_{p+q}=\frac{2a_1+d(p+q-1)}{2}(p+q)$.

Но так как $s_p=s_q$, то $(2a_1+dp-d)\,p=(2a_1+$ $+dq-d)\,q$, или $2a_1(p-q)+d(p^2-q^2)-d(p-q)=0$. $p\neq q$, поэтому $2a_1+d(p+q-1)=0$. Отсюда видно, что $s_{p+q}=0$.

173. Сумма всех дробей (в том числе и сократимых) со знаменателем 3, заключенных между натуральными числами m и n, равна: $s_1=\frac{3m}{3}+\frac{3m+1}{3}+\frac{3m+2}{3}+\ldots+$ $+\frac{3n}{3}=\frac{(m+n)(3n-3m+1)}{2}$. Сумма всех целых чисел, заключенных между числами m и n (включая, как и выше, m и n), равна $\frac{(m+n)(n-m+1)}{2}=s_2$. Сумма всех несократимых дробей со знаменателем 3 равна $s_1-s_2=n^2-m^2$.

174. $s_n=a+2a^2+3a^3+\ldots+na^n$. $as_n=a^2+2a^3+$ $+3a^4+\ldots+na^{n+1}=(a-a)+(2a^2-a^2)+(3a^3-a^3)+$ $+\ldots+(na^n-a^n)+na^{n+1}=(a+2a^2+3a^3+\ldots+na^n)-$ $-(a+a^2+a^3+\ldots+a^n)+na^{n+1}=s_n-\frac{a(a^n-1)}{a-1}+$ $+na^{n+1}$. Откуда $s_n=\frac{a}{(a-1)^2}[na^{n+1}-a^n(n+1)+1]$.

175. Пусть стороны прямоугольного треугольника a, $a+d$, $a+2d$, тогда $a^2+(a+d)^2=(a+2d)^2$. Отсюда

$$a=3d,\ r=\frac{S}{P}=\frac{\frac{1}{2}a(a+d)}{\frac{1}{2}(3a+3d)}=\frac{a}{3}=d.$$

176. Умножить и разделить каждую дробь на выражение, сопряженное знаменателю.

177. Воспользоваться тождеством: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Ответ. 0, 99.

178. Пусть a — первый член последовательности, n — число ее членов. Каждая такая последовательность есть арифметическая прогрессия с разностью 1 и суммой 1000. Можно записать: $\frac{2a+n-1}{2} n = 1000$. Или $a = \frac{1000}{n} - \frac{n-1}{2}$, где a и n — натуральные числа. Если n — нечетное число, то для того чтобы 1000 делилась на n, необходимо, чтобы n было одним из чисел 5, 25, 125. Положительные значения a дают первые два значения n. Находим две последовательности: 1) 198, 199, 200, 201, 202; 2) 28, 29, 30, 31, 32, ..., 52. Если n — четное число, то первое слагаемое должно, как и второе, иметь дробную часть 0,5. Для n нужно испытать значения 16, $16 \cdot 5 = 80$ и $16 \cdot 25 = 400$. Целое положительное значение для a получается только при $n = 16$. Находим еще одну последовательность: 3) 55, 56, 57, ..., 70.

179. Обозначим вместимость сосуда через x литров. Нетрудно последовательно получить, что после 20-го переливания содержание спирта в смеси в процентах составит: $\frac{(x-1)^{20}}{x^{20}} \cdot 100\%$. Приравняв это выражение 40%, найдем, что $x = \frac{1}{1 - \sqrt[20]{0,4}} \approx 22,32$ (*л*).

180. В сосуде содержалось жидкости A_1

после добавления жидкости A_2: $(a-1)$ ведер,

после добавления жидкости A_3: $(a-1) - \frac{a-1}{a} = \frac{(a-1)^2}{a}$ (в.),

после добавления жидкости A_4: $\frac{(a-1)^3}{a^2}$ (в.),

. . . .

после добавления жидкости A_n: $\frac{(a-1)^{n-1}}{a^{n-2}}$ (в.).

В сосуде содержалось жидкости A_2

после добавления жидкости A_2: 1 ведро,

после добавления жидкости A_3: $1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a}$ (в.),

после добавления жидкости A_4: $\frac{a-1}{a} - \frac{a-1}{a^2} = \frac{(a-1)^2}{a^2}$ (в.),

. . . .

после добавления жидкости A_n: $\left(\frac{a-1}{a}\right)^{n-2}$ (в.).

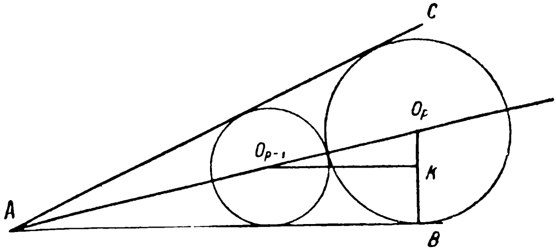
Вообще: в сосуде содержится $\frac{(a-1)^{n-1}}{a^{n-2}}$ ведер жидкости A_1 и $\left(\frac{a-1}{a}\right)^{n-k}$ жидкости A_k ($k = 2,3,4, \ldots, n$).

181. $x = 15$.

182. $\frac{10^{n+1}-10-9n}{81}$. Указание. $\underbrace{111\ldots1}_{k \text{ единиц}} = \frac{10^k-1}{9}$.

183. $\frac{(a^{2n+2}+1)(a^{2n}-1)}{a^{2n}(a^2-1)} + 2n$.

184. $T = \frac{a_nq-a_1}{q-1}$, $T_1 = \frac{a_nq-a_1}{a_1a_n(q-1)}$ (T_1 — сумма геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{q}$). Поэтому $\frac{T}{T_1} = a_1a_n$. $P = a_1a_2a_3\ldots a_n = (a_1a_n)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{n}{2}}$.



Черт 46

185. Пусть O_p и O_{p-1} — центры двух касающихся кругов, вписанных в острый угол $BAC = \alpha$ (черт. 46), радиусы которых R_p и R_{p-1}. Проведем $O_{p-1}K \parallel AB$, $O_pB \perp AB$. Тогда $\frac{O_pK}{O_pO_{p-1}} = \sin\frac{\alpha}{2}$, $\frac{R_p-R_{p-1}}{R_p+R_{p-1}} = \sin\frac{\alpha}{2}$, $\frac{R_p}{R_{p-1}} =$

$$= \frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg}^2\frac{\pi-\alpha}{4} = q.$$

186. 1. Предположим, что числа 2, $\sqrt{6}$ и 4,5 являются членами некоторой арифметической прогрессии с разностью d. Не нарушая общности рассуждений, можно считать 2 первым членом этой прогрессии, $a_p=\sqrt{6}$, $a_k=4{,}5$, тогда $\sqrt{6}=2+d(p-1)$; $4{,}5=2+d(k-1)$. Из первого равенства следует, что d — иррациональное число, а из второго,— что d — рациональное число. Числа 2, $\sqrt{6}$, 4,5 не являются членами арифметической прогрессии. 2. Числа 2, $\sqrt{6}$, 4,5 могут быть членами геометрической прогрессии: $\sqrt{6}=2q^{p-1}$, $4{,}5=2q^{k-1}$. Можно найти целые p и k, при которых удовлетворяются эти равенства. $\frac{\sqrt{6}}{2}=q^{p-1}$, $\frac{4{,}5}{2}=q^{k-1}$. Возведем первое равенство почленно в степень $(k-1)$, а второе — в степень $(p-1)$ и приравняем левые части полученных равенств. Получим: $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{k-1}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^{4(p-1)}$, отсюда $k-1=$ $=4(p-1)$. Последнее равенство удовлетворяется, например, при $k=5$, $p=2$. Таким образом, числа 2, $\sqrt{6}$ и 4,5 могут являться первым, вторым и пятым членами геометрической прогрессии со знаменателем $q=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

187 Так как $2b=a+c$, то, подставив $b=\frac{a+c}{2}$ в доказываемое равенство, получим тождество.

188. Применить тождество: $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$.

189. Использовать свойство, что средний член есть среднее арифметическое крайних членов прогрессии.

190. Дополнить левую часть равенства до полного квадрата.

191. $\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}=\log_\pi 2+\log_\pi 5=\log_\pi 10>2$.

192. $\frac{\sqrt[p]{b+x}\,(b+x)}{bx}=\frac{c\sqrt[p]{x}}{a}$, $(b+x)^{\frac{p+1}{p}}=\frac{bc}{a}x^{\frac{p+1}{p}}$,

$$x=\frac{b}{\left(\frac{bc}{a}\right)^{\frac{p}{p+1}}-1}.$$

193. $x=\pm 2$. Указание. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=y$, $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=\frac{1}{y}$.

194. $|x-1|=x^2-3$; а) при $x<1$ $1-x=x^2-3$, $x=\frac{-(1+\sqrt{17})}{2}$; б) при $x>1$ $x-1=x^2-3$, $x=2$.

195. а) $x_1 = 1 - z,\ y_1 = 1 + z,\ x_2 = 1 + z,\ y_2 = 1 - z$;
б) система действительных решений не имеет.

196. Перенеся неизвестные в левую часть, после перегруппировки получим: $(x+z)(x+y) = a,$
$$(y+z)(x+y) = b,$$
$$(z+x)(z+y) = c,$$
откуда $(x+y)(x+z)(y+z) = \pm\sqrt{abc}$. Дальше находим $x+y,\ y+z,\ z+x$ и $x+y+z$.
$$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right),\ y_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right),\ z_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right).$$

197. $x_1 = 2,\ y_1 = 3;\ x_2 = 3,\ y_2 = 2$. Указание. Умножить первое уравнение на 3 и сложить почленно со вторым.

198. $x = 7,\ y = 5$. Указание. Из второго уравнения найти $(x+y)$ и подставить в первое.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

199.
$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} =$$
$$= \operatorname{tg}\alpha\frac{(\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha)(\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha)}{(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha)(1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

200.
$$2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 =$$
$$= 2(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cdot\cos^2 x + \cos^4 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = -\sin^4 x - 2\sin^2 x\cdot\cos^2 x - \cos^4 x + 1 = -(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 + 1 = 0.$$

201. Предварительно доказать, что $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$.

202. Умножить и разделить данное выражение на $2\sin 20^\circ$.

203. $16\sin 10^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ\cdot\sin 90^\circ = 8\sin 10^\circ\times\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ = 8\cos 80^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 20^\circ$. Далее смотри указание к № 202.

205. Применить формулу суммы синусов и указание к № 202.

206. Так как $(\sin x + \cos x)^2 = a^2$, $\sin x\cdot\cos x = \frac{a^2-1}{2}$,
$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x\cdot\cos x + \cos^2 x) = \frac{a(3-a^2)}{2}.$$

207.
$$\cos 54^\circ = \cos(36^\circ + 18^\circ) = \cos 36^\circ\cos 18^\circ - \sin 36^\circ\sin 18^\circ = \cos 18^\circ(\cos 36^\circ - 2\sin^2 18^\circ) =$$
$$= \cos 18^\circ(1 - 4\sin^2 18^\circ).$$

$\sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ$. Пользуясь условием задачи, получаем: $2\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ = \cos 18^\circ (1 - 4\sin^2 18^\circ)$. Сокращая на $\cos 18^\circ \neq 0$, получим квадратное уравнение относительно $\sin 18^\circ$. $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0{,}309$.

208. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A+B)\cdot\cos(A-B) + \sin 2C = 2\sin C[\cos(A-B) + \cos C] = 2\sin C \cdot 2\cos\frac{A-B+C}{2}\cos\frac{A-B-C}{2} = 4\sin C \times \cos\frac{180^\circ - 2B}{2}\cdot\cos\frac{-180^\circ + 2A}{2} = 4\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$.

209. 1. Из очевидного неравенства $(\sin\alpha - 1)^2 + (\sin\beta - 1)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 \geqslant 0$ следует:

$$2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta \geqslant 2\sin\alpha\cdot\sin\beta + 2\sin\alpha + 2\sin\beta - 2;$$
$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta \geqslant \sin\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha + \sin\beta - 1.$$

2. Доказываемое неравенство равносильно такому: $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 \geqslant \sin\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\beta + \sin\beta - 1$ (вычли из обеих частей по $2\sin\alpha\cdot\sin\beta$) или следующему очевидному неравенству: $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 \geqslant (1 - \sin\alpha)(\sin\beta - 1)$.

211. $\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha} = \sqrt{(\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha})^2} = \sqrt{2 - 2\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \sqrt{2(1-\cos\alpha)} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$ (так как $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ и, следовательно, $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$).

212. $-\dfrac{\operatorname{ctg} x \cos\left(\frac{x}{2} - 30^\circ\right)\cos\left(\frac{x}{2} + 30^\circ\right)}{\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}}$.

X КЛАСС

ГЕОМЕТРИЯ

213. [118].

214. [250].

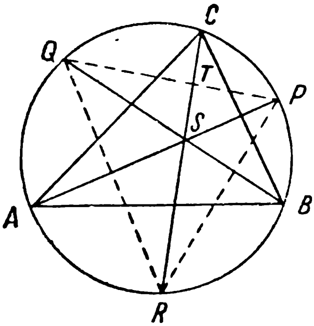
215. Пусть ABC — искомый треугольник; P, R, Q — точки пересечения его биссектрис с описанной окружностью, S — точка пересечения биссектрис (черт. 47). В треугольнике PQR прямые AP, BQ и CR служат высотами. Действительно, если T — точка пересечения прямых PQ и CR, то $\angle QTC$ измеряется дугой $\frac{1}{2}(\smile QC + \smile PB + \smile BR)$, $\angle CTP$ — дугой $\frac{1}{2}(\smile CP + \smile RA + \smile AQ)$. Но $\smile CP =$

$= \smile BP$, $\smile BR = \smile RA$, $\smile AQ = \smile QC$. Следовательно, $\angle QTC = \angle CTP = 90°$. Точки пересечения высот треугольника PQR с окружностью дадут вершины искомого треугольника.

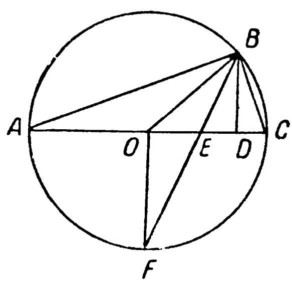
216. [117].

217. [97].

218. Пусть в треугольнике ABC BO — медиана, BE — биссектриса, BD — высота (смотри задачу № 77). Опишем вокруг треугольника окружность и продолжим биссектрису BE до пересечения с окружностью в точке F (черт. 48). Можно доказать, что основание медианы O есть центр



Черт 47.



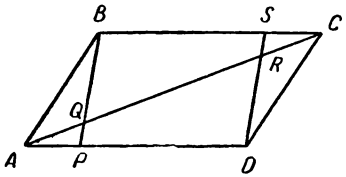
Черт 48

описанной окружности (для этого точку F соединяем с точкой O и доказываем, что треугольник FOB является равнобедренным и, следовательно, точка O — пересечение срединных перпендикуляров двух хорд AC и BF этой окружности). Таким образом, $\angle ABC = 90°$, $\angle C = 67{,}5°$, $\angle A = 22{,}5°$.

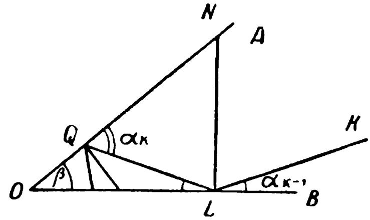
219. Через точку D проведем $DS \parallel BP$, R — точка пересечения DS с диагональю AC (черт. 49). Так как AD разделена на n равных частей, то, проведя через точки деления прямые, параллельные BP, мы разделим AR также на n равных частей, каждая из которых равна AQ. Остается доказать, что $AQ = RC$ (из равенства треугольников AQB и DRC).

220. Рассмотрим последовательность углов между направлениями движения точки и сторонами угла. Пусть после некоторого числа отражений точка, двигаясь по прямой KL, упадет на сторону угла OB под некоторым углом α_{k-1} и, отразившись, упадет на другую сторону OA

в точке Q под углом α_k (черт. 50). Пусть $NL \perp OB$, тогда $\angle ONL = \frac{\pi}{2} - \beta$, $\beta = \frac{\pi}{2n+1}$, $\angle NQL = \alpha_k$, $\angle QLO = \alpha_{k-1}$. Из треугольника OQL имеем, что $\alpha_k = \alpha_{k-1} + \beta$ (как внешний угол треугольника). Из этой рекурентной формулы получим $\alpha_k = \alpha_1 + \beta (k - 1)$. Если после некоторого числа

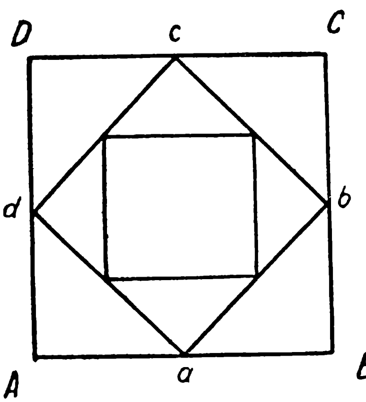


Черт. 49.



Черт. 50.

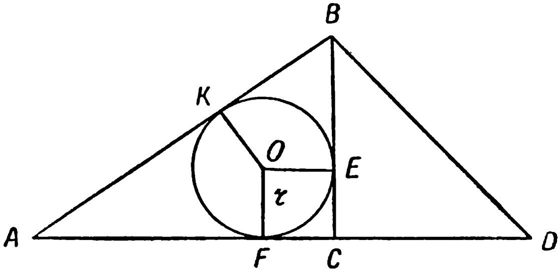
отражений угол падения α_k станет больше или равен $\frac{\pi}{2} - \beta$, то точка начнет удаляться от вершины угла. Можно доказать, что при некотором k $\alpha_k = \alpha_1 + \beta \cdot (k - 1) \geqslant \geqslant \frac{\pi}{2} - \beta$ (1). По условию $\alpha_1 = \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$. Подставим эти значения в неравенство (1); $\frac{\pi}{2(2n+1)} + \frac{\pi}{2n+1} \cdot (k - 1) \geqslant \geqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n+1}$. Отсюда $k \geqslant n$. Значит, уже после n отражений точка M под прямым углом возвратится к противоположной стороне угла, а затем начнет удаляться от вершины O.



Черт. 51.

221. Обозначим $Aa = x$, $aB = 1 - x$ (черт. 51). Отсекаемые треугольники равны. По теореме Пифагора $(ab)^2 = x^2 + (1 - x)^2$. $(ab)^2 = = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$. Это выражение будет иметь наименьшее значение при $x = \frac{1}{2}$. Таким образом, наименьшую площадь будет иметь тот вписанный квадрат, вершины которого являются серединами сторон данного квадрата. Эта площадь равна $\frac{1}{2}$ (кв. ед.). Аналогично найдем, что площадь следующего квадрата равна $\frac{1}{4}$ (кв. ед.) и т. д. Площади квадратов образуют убывающую геометрическую прогрессию. Ее сумма равна $\frac{2^k-1}{2^k}$.

222. На основании свойства касательных, проведенных из одной точки к окружности, видим, что $AC - r + BC - r = AB$, где r — радиус вписанной окружности искомого треугольника (черт. 52). Иначе: $AC + BC = 2r + AB$. Построим вспомогательный треугольник ABD по двум сторонам (AB и $AD = 2r + AB$) и углу ($\angle D = 45°$). Искомый



Черт. 52.

треугольник получим, опустив перпендикуляр BC на AD. Построение возможно при $AB \geqslant 2r(\sqrt{2}+1)$. Это необходимо для существования точки B пересечения прямой BD окружностью радиуса AB.

223. Пусть ABC — искомый треугольник; P, Q и R — точки пересечения с описанной окружностью высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из вершины A, и O — центр окружности (черт. 53). Так как точка Q — середина дуги BC, то прямая OQ проходит через середину M стороны BC и параллельна AP. Построив $AP \parallel OQ$, найдем точку M как пересечение AR с OQ. Затем построим BC как перпендикуляр через точку M к AP.

224. Обозначим стороны прямоугольника через a и b (лин. ед.), а площадь через S, тогда $a + b = 35$,

$S = 12\sqrt{a^2 + b^2} = 12\sqrt{(a+b)^2 - 2ab} = 12\sqrt{35^2 - 2S}$. Получаем квадратное уравнение относительно S. Из двух корней подходит один: $S = 300$ (кв. ед.).

225. $V = \frac{c^3 \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{24}$; $180° - 2\beta$; $2\arcsin(\cos\alpha \cdot \cos\beta)$; $2\arcsin(\sin\alpha \cdot \cos\beta)$.

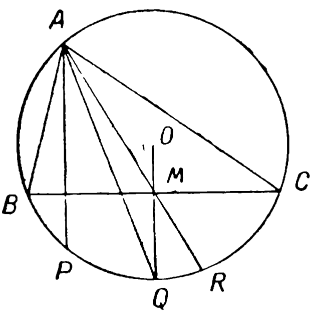
Указание. Вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной вокруг основания пирамиды.

226. $\frac{a^3}{6}$.

227. 2 *см*. Секущая плоскость отсекает от противоположной грани пирамиды подобный треугольник. Кроме того, следует применить свойство биссектрисы внутреннего угла в треугольнике, получающемся от пересечения пирамиды плоскостью, проходящей через высоту перпендикулярно ребру двугранного угла, разделенного пополам.

228. $V = \frac{16a^3p^3}{3(p^2 - a^2)\sqrt{2a^2 - p^2}}$ (куб. ед.).

Доказать, что перпендикуляр, опущенный на боковую грань, имеет основание на апофеме пирамиды. Использовать то, что перпендикуляр, опущенный на боковое ребро, отсекает подобный треугольник от треугольника, образованного высотой, боковым ребром и его проекцией на основание, а перпендикуляр, опущенный на боковую грань, отсекает подобный треугольник от треугольника, образованного высотой, апофемой и ее проекцией на основание.



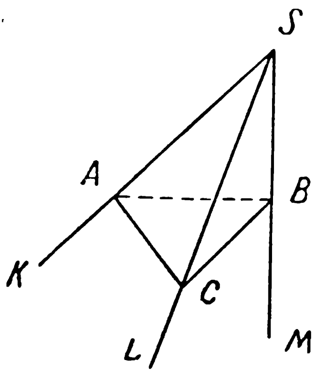
Черт. 53.

229. $V = \frac{\sqrt{3}\, l^3 \sin^2\alpha \cdot \cos^3\alpha \cdot \sin^2\beta}{4\sin^2(\alpha + \beta)}$ (куб. ед.).

Доказать, что треугольник, образованный точками пересечения боковых ребер данных пирамид, правильный, и его плоскость параллельна основаниям пирамид. Объем общей части данных пирамид равен одной трети произведения площади этого треугольника на высоту пирамид. Площадь треугольника можно выразить через радиус описанной вокруг него окружности.

230. 4 $м^3$.

231. Обозначим двугранные углы SK, SM и SL соответственно через x_A, x_B и x_C (черт. 54). Пусть $\angle MSL = \alpha$, $\angle LSK = \beta$ и $\angle MSK = \gamma$. Проведем $CB \perp SM$ и $BA \perp SM$ соответственно в плоскостях MSL и MSK, $\angle ABC = x_B$ — линейный угол двугранного угла SM. Определим AC^2 по теореме косинусов из треугольников SAC и ABC и приравняем полученные выражения: $BC^2 + AB^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos x_B = SC^2 + SA^2 - 2SC \cdot SA \cdot \cos\beta$.
$2AB \cdot BC \cdot \cos x_B = 2SC \cdot SA \cdot \cos\beta - (SC^2 - BC^2) - (SA^2 - AB^2)$, или $2AB \cdot BC \cdot \cos x_B = 2SC \cdot SA \cos\beta - 2SB^2$. Разделим обе части равенства на $2SB^2$ и выразим отношения сторон как функции углов. Получим выражение для $\cos x_B$. Аналогично найдем остальные двугранные углы.



Черт. 54

$$x_A = \arccos\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$
$$x_B = \arccos\frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma},$$
$$x_C = \arccos\frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

232. $5 - 2\sqrt{6}$. Прямые, соединяющие центры первых четырех шаров радиуса r, образуют правильный тетраэдр с ребром $2r$. Пусть ρ — радиус пятого шара, R — радиус шестого шара, R^* — радиус шара, описанного вокруг правильного тетраэдра, вершинами которого служат центры первых четырех шаров. $\rho = R^* - r$, $R = R^* + r$. Задача сводится к нахождению R^*.

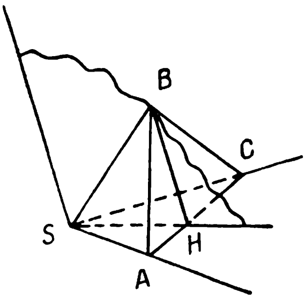
233. Возможны два случая: от грани остался правильный восьмиугольник и от грани остался квадрат. В обоих случаях от куба срезано по 8 треугольных пирамид.

$$V_1 = \frac{a^3 7(\sqrt{2} - 1)}{3} \text{ (куб. ед.)}, \quad V_2 = \frac{5}{6}a^3 \text{ (куб. ед.)}.$$

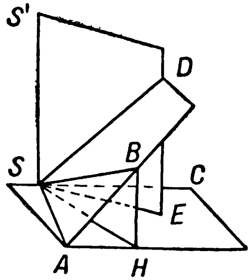
234. Вычислить AP, BP и CP, приняв за известную величину ребро тетраэдра, и убедиться, что эти отрезки попарно являются катетами прямоугольных треугольников, или рассмотреть углы в них.

235. [342].

236.[1] Доказываемое следует из утверждения: если все двугранные углы выпуклого трехгранного угла — острые, то и все плоские углы острые. Пусть $SABC$ — данный выпуклый трехгранный угол, все его плоские углы меньше $180°$. Двугранные углы $B\,(SA)C$ и $B\,(SC)A$ — острые, поэтому проекция SH ребра SB лежит между лучами SA и SC, т. е. внутри грани SAC (черт. 55). Пусть из двух углов, на которые SH разбивает угол ASC, меньшим $90°$



Черт. 55.



Черт. 56.

будет угол ASH. Через точку S проведем плоскость $SS'E$ перпендикулярно к прямой AS (черт. 56). Трехгранный угол $SABH$ лежит внутри прямого двугранного угла $ASES'$. Продолжим грань SBA до пересечения с плоскостью $SS'E$ по прямой SD. Так как $AS \perp SS'E$, то $AS \perp SD$, но $\angle ASB$ лежит внутри прямого угла ASD. Следовательно, $\angle ASB$ — острый. Если теперь аналогичные рассуждения провести, исходя из того, что $\angle ASB < 90°$, то получится, что и $\angle ASC$ и $\angle BSC$ — острые (черт. 55).

237. [335].

238. Плоскость симметрии двух параллельных плоскостей, из которых одна содержит прямую a, а вторая — прямую b.

239. [326].

240. Вершина ребра, одинаково наклоненного к пересекающимся с ним сторонам основания, проектируется на диагональ основания параллелепипеда, поэтому диагональное сечение, проходящее через это ребро, перпендикулярно к основанию. По этой же причине боковые ребра па-

[1] Решение заимствовано из книги Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома. Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. III, М., ГИТТЛ, 1954.

раллелепипеда перпендикулярны ко второй диагонали (теорема о трех перпендикулярах) и второе диагональное сечение есть прямоугольник.

241. Секущая плоскость отсекает равнобедренный треугольник от противоположной грани пирамиды. Удобно выразить площади интересующих нас треугольников через синус угла (в качестве известного угла взять плоский угол при вершине пирамиды).

АЛГЕБРА

242. Нет. Дискриминант данного квадратного трехчлена можно представить в виде: $(b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+a+c)<0$, так как a, b, c — стороны треугольника.

243. $D=[(1-a)^2+b^2]\cdot[(1+a)^2+b^2]>0$.

244. $x=\dfrac{-5a\pm\sqrt{5a^2\pm 4\sqrt{a^4+b^4}}}{2}$.

Сгруппировать первый сомножитель с четвертым и второй с третьим, затем ввести подстановку $x^2+5ax+5a^2=y$.

245. $x_1=4$, $x_2=9$. Ввести подстановку $y=\sqrt{x}-2{,}5$.

246. $x_1=\dfrac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}$, $y_1=\dfrac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}$;

$x_2=\dfrac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}$, $y_2=-\dfrac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}$; $x_3=\dfrac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}$,

$y_3=\dfrac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}$; $x_4=\dfrac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}$, $y_4=-\dfrac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}$.

Данная система имеет три решения при $a=\pm 1$, два решения при $a=\pm\sqrt{2}$. Решение системы хорошо иллюстрируется с помощью графиков (две биссектрисы координатных углов и окружность радиуса 1 с центром в точке с координатами $(a, 0)$).

249. $x_1=\dfrac{1}{a\sqrt[3]{a}}$, $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

250. $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

251. $\dfrac{1}{\log_4 100}=\lg 2$. При $x>0$ после потенцирования системы мы получим: $\begin{cases} x+y=10, \\ y=2x. \end{cases}$

При $x<0$, т. е. $|x|=-x$, $|x+y|=|y-|x||=y-|x|=y+x$ (так как из второго уравнения видим, что

$y > |x|$). Получаем систему: $\begin{cases} x + y = 10, \\ y = -2x. \end{cases}$

$x_1 = \frac{10}{3}$, $y_1 = \frac{20}{3}$; $x_2 = -10$, $y_2 = 20$.

252. $\left(\frac{1}{81}, \frac{1}{9}, \frac{4}{5}\right)$; $\left(1, 1, \frac{18}{5}\right)$.

253. $x_1 = \frac{2}{\lg 2}$, $y_1 = 1$; $x_2 = \frac{2}{\lg 102}$, $y_2 = 101$.

254. $x = 2$, $y = 3$, $n = 5$.

256. Если T_{k+1} — наибольший член разложения, то

$$T_{k+1} \geqslant T_k \quad \text{и} \quad T_{k+1} \geqslant T_{k+2}.$$

Учтя условие $q + p = 1$ и выразив T_k, T_{k+1}, T_{k+2} через p, q, k и n, получим неравенства: $q(n+1) - 1 \leqslant k \leqslant q(n+1)$.

Отсюда видно, что наибольший член разложения существует. Номер его $k+1$ есть целая часть числа $q(n+1)+1$. Если $q(n+1)$ — целое число, то таких членов будет два с номерами $q(n+1)$ и $q(n+1)+1$.

Для того чтобы этот член был первым, необходимо, чтобы $q(n+1) - 1 \leqslant 0$, $n \leqslant \frac{1-q}{q} = \frac{p}{q}$.

Для того чтобы этот член был последним, необходимо, чтобы $n \leqslant q(n+1)$, или $n \leqslant \frac{q}{p}$.

257. Число всевозможных парных произведений чисел, не кратных трем, надо вычесть из числа всех парных произведений. Среди чисел 1, 2, ..., 100 будет 67, не кратных 3. Искомое число равно $C_{100}^2 - C_{67}^2 = 2739$.

258. $T_{k+1} = C_{100}^k \, 3^{\frac{k}{4}} \cdot 2^{\frac{100-k}{2}}$. Рациональными будут те члены, для которых k кратно четырем, так как тогда $100 - k$ наверняка будет кратно двум. От 0 до 100 чисел, кратных четырем, будет 26.

259. $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i = \frac{c-i}{c+i}$, или $\frac{3}{5}c - \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}c + \frac{3}{5}\right)i = c - i$.

Приравнивая мнимые и действительные части этого уравнения, получаем два уравнения для определения c, которые оказываются совместными ($c = -2$). Это доказывает возможность требуемого.

260. Решая данную задачу тем же способом, как и предыдущую, получим, что c должно одновременно равняться $\frac{b}{1-a}$ и $\frac{1+a}{b}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $a^2 + b^2 = 1$, что дано условием задачи.

262. $-10 < x < -5$.

263. 1. Так как $|x| < 1$, то $1 - x > 0$ и $1 + x > 0$. Из формулы бинома Ньютона для $a > 0$ и $b > 0$ следует: $(a + b)^n > a^n + b^n$. Отсюда: $2^n = [(1 - x) + (1 + x)]^n > > (1 - x)^n + (1 + x)^n$. 2. Раскрыть правую часть по формуле бинома Ньютона и учесть, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна $\frac{2^n}{2}$.

264. 1. Выражение $n^5 - n = (n - 1)\,n\,(n + 1)\,(n^2 + 1)$ содержит произведение трех последовательных натуральных чисел, а поэтому делится на 6. Сравним наше выражение с произведением пяти последовательных натуральных чисел $(n - 2)(n - 1)\,n\,(n + 1)(n + 2) = n^5 - 5n^3 + 4n$. Так как последнее выражение делится на 5 и его слагаемое $-5n^3$ делится на 5, то выражение $n^5 + 4n$ тоже делится на 5, а тогда и выражение $n^5 - n = (n^5 + 4n) - 5n$ разделится на 5. Следовательно, оно делится на 30. 2. Рассмотреть разность между произведением пяти последовательных натуральных чисел и разложением на множители данного выражения. Получится, что уменьшаемое и разность делятся на 30, а следовательно, и вычитаемое делится на 30.

265. $nx^{n-1} + (n - 1)\,x^{n-2} + \ldots + 2x + 1$. Дважды применить теорему Безу.

266. $\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$. 1. Можно заметить закономерность и доказать ее методом математической индукции, используя свойство, что полный многочлен n-й степени относительно x и y можно получить, если многочлен $(n - 1)$-й степени от x и y умножить на x (или y) и прибавить многочлен n-й степени относительно y (или x). 2. Можно последнюю зависимость использовать, как рекурентную формулу. 3. Подсчитать число членов, содержащих определенную степень x (или y), и найти сумму этих чисел.

267. $x = -\frac{ab + cd}{a^2 + c^2}$. Указание. Привести многочлен к нормальному виду квадратного трёхчлена и воспользоваться формулой абсциссы вершины параболы $\left(x = \frac{b}{2a}\right)$.

268. Применить метод математической индукции.

269. 1. Применить метод математической индукции.

2. Перепишем данное выражение в виде:
$[(a_0+a_2x^2+\dots)+(a_1x+a_3x^3+\dots)]\cdot[(a_0+a_2x^2+\dots)-$
$-(a_1x+a_3x^3+\dots)]\doteq(a_0+a_2x^2+\dots)^2-(a_1x+a_3x^3+\dots)^2$.
Теперь доказываемое очевидно.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

270. $x_1=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x_2=\frac{1}{2}[(-1)^n\arcsin 2(\sqrt{2}-1)+$
$+n\pi)]$.

271. $x_1=\pm\frac{\pi}{8}+k\pi$, $\quad x_2=\pm\frac{3\pi}{8}+k\pi$.

Применить формулы: $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ и $\sin^2 x=$
$=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.

272. $\sin(\pi\cos x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi\sin x\right)$. Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений:
1) $\pi\cos x=\frac{\pi}{2}-\pi\sin x+2k\pi$ и 2) $\pi\cos x=\pi-\frac{\pi}{2}+$
$+\pi\sin x+2k\pi$. Решая первое уравнение $\cos x+\sin x=$
$=2k+\frac{1}{2}$, найдем $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4k+1}{2\sqrt{2}}$. Так как косинус по абсолютной величине не может превосходить единицу, то для k допустимо лишь значение 0. Получаем первую серию решений: $x_1=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2m\pi$. Аналогично из второго уравнения находим вторую серию решений. Окончательно получаем: $x_{1,2}=2m\pi\pm\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

273. Имеем:
$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}=2,$$
$$2\cos x\cdot\cos y=1.$$

Умножая почленно эти уравнения, находим: $\sin(x+y)=1$.

Из этого уравнения находим $(x+y)$ и замечаем, что $\cos(x+y)=0$. Учитывая последнее и применяя формулу замены произведения косинусов суммой, из второго уравнения системы получаем: $\cos(x-y)=1$. Отсюда находим $(x-y)$. Дальнейшее решение ясно. $x=\frac{\pi}{4}+(k+n)\pi$, $y=$
$=\frac{\pi}{4}+(k-n)\pi$.

274. $x = \pm\frac{\pi}{4} + n\pi, \quad y = \pm\frac{\pi}{4} + n\pi + 2k\pi.$

Возведя почленно оба уравнения в квадрат и сложив, после несложных преобразований найдем: $\cos 2x = 0$. Заменяя в первом уравнении $\sin^2 x$ через $\frac{1 - \cos 2x}{2}$ и подставляя значение $\cos 2x$, найдем, что $\sin x = \sin y$. Аналогично из второго уравнения найдем, что $\cos x = \cos y$. Следовательно, $x = y + 2k\pi$.

275. $$x = \frac{\pm \arccos\frac{a - ab}{b} \pm \arccos\frac{a + ab}{b} + (k + n)\pi}{2},$$

$$y = \frac{\pm \arccos\frac{a - ab}{b} \mp \arccos\frac{a + ab}{b} + (k - n)\pi}{2};$$

$|a| < 1, \quad |a| < |b|.$

276. $2\sin 3x \sin 5x \cos x.$

277. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$
$= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} + \cos^2\gamma + [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \times$
$\times \cos\gamma = 1 + \cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) - \cos\gamma] + \cos\gamma[\cos(\alpha - \beta) -$
$- \cos\gamma] = 1 + [\cos(\alpha - \beta) - \cos\gamma][\cos(\alpha + \beta) + \cos\gamma] = 1.$

278. Данное неравенство равносильно неравенству: $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \leqslant 1.$

279. $\frac{8\sin 70^\circ}{\sqrt{3}}.$

280. $\frac{1}{4}$. Умножить и разделить данное выражение на $2\sin\frac{2\pi}{5}$.

281. Представить данное равенство в виде:
$5\sin[(\alpha + \beta) - \alpha] = \sin[(\alpha + \beta) + \alpha].$

282. В равенство $\sin A = \sin B \cdot \cos C + \cos B \cdot \sin C$ подставить значения $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{a}{2R}$, $\sin C = \frac{a}{2R}$.

284. Ответ. 1. Представить данное выражение в виде: $\operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg}(60^\circ - 5^\circ)\operatorname{tg}(60^\circ + 5^\circ)\frac{1}{\operatorname{tg}(10^\circ + 5^\circ)}$. Применить формулу $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ или использовать результат задачи № 199.

285. Выразить $\cos 2A$ и $\sin 4B$ через $\operatorname{tg} A$ и $\operatorname{tg} B$.

287. В неравенство, выражающее, что квадрат стороны, лежащей против тупого угла, больше суммы квадратов двух других сторон, подставить выражения сторон через синус противолежащего угла и радиус описанного круга. Затем от синусов перейти к косинусам и к полученному неравенству прибавить почленно удвоенный квадрат косинуса тупого угла.

288. π, 5. Указание. $y = 5 \sin(2x + \alpha)$.

289. $1 \leqslant x < 2$ и $-2 \leqslant x \leqslant -1$.

290. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. ($k > 0$). Учесть, что $x > 0$, так как в противном случае $x + |x| = 0$.

СОДЕРЖАНИЕ

Фрида Максовна Шустеф,
Александр Маркович Фельдман,
Владимир Юделевич Гуревич

Сборник олимпиадных задач по математике

Государственное
учебно-педагогическое издательство
Министерства просвещения БССР
Минск, Ленинский проспект, 83-а.

Редактор *Л. Т. Малявко*
Технический редактор *В. Н. Жук*
Корректор *З. А. Заянчковская*

АТ 15750. Сдано в набор 11/IV-1962 г. Подп. к печати 21/XI-1962 г. Формат $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 2,625. Усл. печ. л. 4,305. Уч.-изд. л. 3,9. Тираж 39 000 экз. Зак. 998.
Цена 11 коп.

Полиграфкомбинат им. Я. Коласа
Главиздата Министерства культуры БССР,
Минск, Красная, 23.