

УЧЕБНОЕ
ПОСОБИЕ

ПИТЕР®

С. Н. Старков

Справочник по математике для школьников

формулы ■
примеры ■
графики ■

700 формул ■ **300** примеров ■ **300** графиков

ББК 22.1я22

УДК 51(03)

С77

- Старков С. Н.**
С77 Справочник по математике для школьников. — СПб.: Питер, 2012. — 144 с.: ил. — (Серия «Учебное пособие»).

ISBN 978-5-459-01102-9

Книга представляет собой справочник по математике, предназначенный для подготовки школьников и абитуриентов в объеме школьной программы.

Первая часть пособия содержит более 700 формул из всех разделов школьного курса математики и более 300 примеров, иллюстрирующих их применение. Вторая часть содержит 300 графиков функций, их преобразований и изображения неявно заданных зависимостей.

Издание предназначено для учащихся школ, лицеев, гимназий и других средних учебных заведений, а также учителей и преподавателей.

ББК 22.1я22

УДК 51(03)

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-5-459-01102-9

© ООО Издательство «Питер», 2012

Содержание

Некоторые обозначения	7
-----------------------------	---

Часть 1. Формулы и примеры	11
----------------------------------	----

§ 1.1. Формулы сокращенного умножения и другие тождества	13
--	----

Квадрат суммы • Квадрат разности • Разность квадратов • Куб суммы • Куб разности • Разность кубов • Сумма кубов • Квадрат суммы трех слагаемых • Преобразование выражений, содержащих четвертые степени • Выражение суммы квадратов, суммы кубов и суммы четвертых степеней через сумму и произведение • Применение формул сокращенного умножения

§ 1.2. Формулы разложения многочленов на множители	23
--	----

Выделение полного квадрата в квадратном трехчлене • Разложения на множители некоторых многочленов 2-й, 3-й и 4-й степени • Теорема о подборе корней многочлена с целочисленными коэффициентами • Выделение линейного множителя в многочлене • Разложение многочлена на простейшие множители

§ 1.3. Действия с дробями	31
---------------------------------	----

Основное свойство дроби • Сокращение дробей • Сложение и вычитание дробей • Умножение и деление дробей • Умножение дроби на число и числа на дробь • Деление дроби на число и числа на дробь

§ 1.4. Средние величины. Пропорции. Проценты 34

Среднее арифметическое • Среднее геометрическое • Среднее гармоническое • Неравенства для средних величин • Пропорции. Основное свойство пропорции. Нахождение неизвестных членов пропорции. Производные пропорции • Проценты

§ 1.5. Модуль (абсолютная величина)..... 38

Определение модуля числа • Раскрытие модуля функции • Свойства модуля

§ 1.6. Степени и корни. Логарифмы..... 41

Степени с натуральным, целым и рациональным показателем. Арифметический корень • Свойства корней • Освобождение от иррациональности в знаменателе • Свойства степени с действительным показателем • Свойства логарифмов

§ 1.7. Тригонометрические формулы 54

Основные тождества • Области определения и множества значений • Свойство периодичности • Свойства четности и нечетности • Формулы сложения • Формулы кратных углов • Формулы половинных углов и понижения степени • Формулы преобразования суммы в произведение и произведения в сумму • Выражение функций через тангенс половинного угла • Формулы приведения • Обратные тригонометрические функции • Дополнительные тождества • Связь радианной и градусной мер угла • Таблица знаков тригонометрических функций • Таблица некоторых значений тригонометрических функций • Таблица некоторых значений обратных тригонометрических функций

§ 1.8. Прогрессии 67

Арифметическая прогрессия • Геометрическая прогрессия

§ 1.9. Решение уравнений..... 69

Некоторые общие равносильные преобразования уравнений • Линейные уравнения • Квадратные уравнения. Формула корней. Теорема

Виета. Частные случаи • Уравнения, содержащие знак модуля • Иррациональные уравнения • Показательные уравнения • Логарифмические уравнения • Тригонометрические уравнения. Частные случаи • Некоторые уравнения, приводящиеся к квадратным методом замены переменной

§ 1.10. Решение неравенств..... 81

Основные свойства числовых неравенств • Некоторые общие равносильные преобразования неравенств • Строгие и нестрогие неравенства • Линейные неравенства • Квадратные неравенства • Кубические неравенства • Неравенства, содержащие знак модуля • Иррациональные неравенства • Показательные неравенства • Логарифмические неравенства • Тригонометрические неравенства

§ 1.11. Типовые способы замены переменной 99

§ 1.12. Производные основных элементарных функций. Правила дифференцирования 101

Таблица производных • Правила дифференцирования • Производная сложной функции • Уравнение касательной к графику функции

§ 1.13. Формулы геометрии 104

Треугольники. Площадь треугольника. Теорема Пифагора. Теорема синусов. Теорема косинусов • Четырехугольники. Площадь четырехугольника • Многоугольники • Окружность и круг. Длина окружности и дуги окружности. Площадь круга и кругового сектора • Вычисление объемов и площадей поверхности • Действия над векторами в координатной форме • Расстояние между двумя точками • Уравнение окружности • Координаты середины отрезка

Часть 2. Графики функций..... 111

§ 2.1. Графики основных элементарных функций 112

§ 2.2. Основные типы преобразований графиков 114

§ 2.3. Графики линейных функций	116
§ 2.4. Графики квадратичных функций.....	120
§ 2.5. Графики многочленов 3-й и 4-й степени.....	123
§ 2.6. Графики дробно-рациональных функций.....	126
§ 2.7. Графики функций, содержащих рациональные степени и корни	128
§ 2.8. Графики показательных и логарифмических функций.....	129
§ 2.9. Графики тригонометрических функций	131
§ 2.10. Графики различных комбинаций элементарных функций	133
§ 2.11. Изображения неявно заданных зависимостей, содержащих знак модуля.....	135
Литература	137
Алфавитный указатель основных формул.....	139

Некоторые обозначения

- $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел
- $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел
- $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел
- $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел
- $x \in \mathbb{R}$ — x принадлежит множеству $\mathbb{R}$
- $x \notin \mathbb{R}$ — x не принадлежит множеству $\mathbb{R}$
- $A \cup B$ — объединение множеств A и B
- $A \cap B$ — пересечение множеств A и B
- $(a; b)$ — интервал (открытый промежуток), $a < x < b$
- $[a; b); (a; b]$ — полуинтервалы, $a \leq x < b$; $a < x \leq b$
- $[a; b]$ — отрезок (замкнутый промежуток), $a \leq x \leq b$
- $(a; +\infty); [a; +\infty); (-\infty; b); (-\infty; b]$ — числовые лучи,
 $a < x < +\infty$; $a \leq x < +\infty$; $-\infty < x < b$; $-\infty < x \leq b$
- $(-\infty; +\infty)$ — числовая прямая, $-\infty < x < +\infty$

- $\{a\}$ — множество, состоящее из одного числа a
- $\emptyset$ — пустое множество
- $a = b$ — a равно b
- $a \neq b$ — a не равно b
- $a > b; a \geq b$ — a больше b ; a больше или равно b
- $a < b; a \leq b$ — a меньше b ; a меньше или равно b
- $a \equiv b$ — a тождественно равно b
- $a \approx b$ — a приближенно равно b
- $\forall x$ — любое значение x ; для любого значения x
- $A \Rightarrow B$ — из A следует B (если выполнено A , то выполнено B ; A — достаточное условие для B , B — необходимое условие для A)
- $A \Leftrightarrow B$ — из A следует B и одновременно из B следует A (A — необходимое и достаточное условие для B ; A и B равносильны)
- $f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$ — уравнения равносильны (эквивалентны)
- $f_1(x) > g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) > g_2(x)$ — неравенства равносильны (эквивалентны)
- $\begin{cases} f_1(x) = g_1(x) \\ f_2(x) = g_2(x) \end{cases}; \begin{cases} f_1(x) > g_1(x) \\ f_2(x) > g_2(x) \end{cases}$ — система уравнений; неравенств
- $\begin{bmatrix} f_1(x) = g_1(x) \\ f_2(x) = g_2(x) \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} f_1(x) > g_1(x) \\ f_2(x) > g_2(x) \end{bmatrix}$ — совокупность уравнений; неравенств

□ $\left\{ \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \right.$ — система, состоящая из уравнения (неравенства) (1) и совокупности (2), (3)

□ $\left[\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \right.$ — совокупность, состоящая из уравнения (неравенства) (1) и системы (2), (3)

□ $\pi; e$ — числовые константы: $\pi \approx 3,14159$; $e \approx 2,71828$

Часть 1. Формулы и примеры

§ 1.1. Формулы сокращенного умножения и другие тождества

Квадрат суммы

$$(1.1.1) \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{Пример 1.1.1а. } (a + 2)^2 = a^2 + 4a + 4$$

$$\text{Пример 1.1.1б. } \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = a^2 + a + \frac{1}{4}$$

Квадрат разности

$$(1.1.2) \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\text{Пример 1.1.2а. } (a - 0,1)^2 = a^2 - 0,2a + 0,01$$

$$\text{Пример 1.1.2б. } (a - \sqrt{2})^2 = a^2 - 2\sqrt{2}a + 2$$

Разность квадратов

$$(1.1.3) \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\text{Пример 1.1.3а. } a^2 - 4 = a^2 - 2^2 = (a - 2)(a + 2)$$

$$\text{Пример 1.1.3б. } a^2 - 2 = a^2 - (\sqrt{2})^2 = (a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})$$

Куб суммы

$$(1.1.4) \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\text{Пример 1.1.4а. } (a + 2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$$

$$\text{Пример 1.1.4б. } (a + 0,1)^3 = a^3 + 0,3a^2 + 0,03a + 0,001$$

Куб разности

$$(1.1.5) \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\text{Пример 1.1.5а. } \left(a - \frac{1}{2}\right)^3 = a^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{4}a - \frac{1}{8}$$

$$\text{Пример 1.1.5б. } (a - \sqrt{2})^3 = a^3 - 3\sqrt{2}a^2 + 6a - 2\sqrt{2}$$

Разность кубов

$$(1.1.6) \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{Пример 1.1.6а. } a^3 - 8 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$$

$$\text{Пример 1.1.6б. } a^3 - 2\sqrt{2} = (a - \sqrt{2})(a^2 + a\sqrt{2} + 2)$$

Сумма кубов

$$(1.1.7) \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\text{Пример 1.1.7а. } a^3 + \frac{1}{8} = \left(a + \frac{1}{2}\right)\left(a^2 - \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$\text{Пример 1.1.7б. } a^3 + 0,125 = (a + 0,5)(a^2 - 0,5a + 0,25)$$

Квадрат суммы трех слагаемых

$$(1.1.8) \quad (a + b + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$$

$$\text{Пример 1.1.8. } (a + 1 + \sqrt{2})^2 = (a + 1)^2 + 2\sqrt{2}(a + 1) + 2$$

$$(1.1.9) \quad (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\text{Пример 1.1.9. } (a + 1 + \sqrt{2})^2 = a^2 + 2(1 + \sqrt{2})a + 3 + 2\sqrt{2}$$

Преобразование выражений, содержащих четвертые степени

$$(1.1.10) \quad a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$\text{Пример 1.1.10а. } a^4 - 16 = (a - 2)(a^3 + 2a^2 + 4a + 8)$$

$$\text{Пример 1.1.10б. } a^4 - 4 = (a - \sqrt{2})(a^3 + \sqrt{2}a^2 + 2a + 2\sqrt{2})$$

$$(1.1.11) \quad a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

$$\text{Пример 1.1.11а. } a^4 - 16 = (a - 2)(a + 2)(a^2 + 4)$$

$$\text{Пример 1.1.11б. } a^4 - 4 = (a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})(a^2 + 2)$$

$$(1.1.12) \quad (a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

$$\text{Пример 1.1.12а. } (a + 2)^4 = a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 32a + 16$$

$$\text{Пример 1.1.12б. } (a - \sqrt{2})^4 = a^4 - 4\sqrt{2}a^3 + 12a^2 - 8\sqrt{2}a + 4$$

$$(1.1.13) \quad a^4 + b^4 = (a^2 - \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)$$

Пример 1.1.13а. $a^4 + 4 = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2)$

Пример 1.1.13б. $a^4 + 16 = (a^2 - 2\sqrt{2}a + 4)(a^2 + 2\sqrt{2}a + 4)$

(1.1.14) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$

Пример 1.1.14а. $a^4 + 2a^2 + 4 = (a^2 - \sqrt{2}a + 2)(a^2 + \sqrt{2}a + 2)$

Пример 1.1.14б. $a^4 + 4a^2 + 16 = (a^2 - 2a + 4)(a^2 + 2a + 4)$

Выражение суммы квадратов, суммы кубов и суммы четвертых степеней через сумму и произведение

(1.1.15) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

(1.1.16) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

(1.1.17) $a^4 + b^4 = (a + b)^4 - 4(a + b)^2 ab + 2(ab)^2$

Применение формул сокращенного умножения

- Замена переменных в формулах (1.1.1) – (1.1.7)

• $a = cx; b = b$

(1.1.18) $(cx + b)^2 = c^2x^2 + 2bcx + b^2$

Пример 1.1.18. $(2x + b)^2 = 4x^2 + 4bx + b^2$

(1.1.19) $(cx - b)^2 = c^2x^2 - 2bcx + b^2$

Пример 1.1.19. $(0,1x - b)^2 = 0,01x^2 - 0,2bx + b^2$

$$(1.1.20) \quad c^2x^2 - b^2 = (cx - b)(cx + b)$$

$$\text{Пример 1.1.20. } 2x^2 - b^2 = (\sqrt{2}x - b)(\sqrt{2}x + b)$$

$$(1.1.21) \quad (cx + b)^3 = c^3x^3 + 3bc^2x^2 + 3b^2cx + b^3$$

$$\text{Пример 1.1.21. } (cx - \sqrt{2})^3 = c^3x^3 - 3c^2\sqrt{2}x^2 + 6cx - 2\sqrt{2}$$

$$(1.1.22) \quad (cx - b)^3 = c^3x^3 - 3bc^2x^2 + 3b^2cx - b^3$$

$$\text{Пример 1.1.22. } (\sqrt{2}x - y)^3 = 2\sqrt{2}x^3 - 6x^2y + 3\sqrt{2}xy^2 - y^3$$

$$(1.1.23) \quad c^3x^3 - b^3 = (cx - b)(c^2x^2 + bcx + b^2)$$

$$\text{Пример 1.1.23. } 8x^3 - b^3 = (2x - b)(4x^2 + 2bx + b^2)$$

$$(1.1.24) \quad c^3x^3 + b^3 = (cx + b)(c^2x^2 - bcx + b^2)$$

$$\text{Пример 1.1.24. } c^3x^3 + 8 = (cx + 2)(c^2x^2 - 2cx + 4)$$

$$\bullet \quad a = x; b = \frac{1}{x}; x \neq 0$$

$$(1.1.25) \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$(1.1.26) \quad \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$$

$$(1.1.27) \quad x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$(1.1.28) \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$$

$$(1.1.29) \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$$

$$(1.1.30) x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right)$$

$$(1.1.31) x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right)$$

$$\bullet \underline{a = \sqrt{x}; b = \sqrt{y}; x, y \geq 0}$$

$$(1.1.32) (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y$$

$$\text{Пример 1.1.32. } (\sqrt{x} + \sqrt{2})^2 = x + 2\sqrt{2}\sqrt{x} + 2$$

$$(1.1.33) (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y$$

$$\text{Пример 1.1.33. } (\sqrt{x} - \sqrt{2})^2 = x - 2\sqrt{2}\sqrt{x} + 2$$

$$(1.1.34) x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$$\text{Пример 1.1.34. } x - 2 = (\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})$$

$$(1.1.35) (\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 = x\sqrt{x} + 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} + y\sqrt{y}$$

$$\text{Пример 1.1.35. } (\sqrt{x} + \sqrt{2})^3 = x\sqrt{x} + 3\sqrt{2}x + 6\sqrt{x} + 2\sqrt{2}$$

$$(1.1.36) (\sqrt{x} - \sqrt{y})^3 = x\sqrt{x} - 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} - y\sqrt{y}$$

Пример 1.1.36. $(\sqrt{x} - \sqrt{2})^3 = x\sqrt{x} - 3\sqrt{2}x + 6\sqrt{x} - 2\sqrt{2}$

$$(1.1.37) \quad x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{x}\sqrt{y} + y)$$

Пример 1.1.37. $x\sqrt{x} - 2\sqrt{2} = (\sqrt{x} - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}\sqrt{x} + 2)$

$$(1.1.38) \quad x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{x}\sqrt{y} + y)$$

Пример 1.1.38. $x\sqrt{x} + 2\sqrt{2} = (\sqrt{x} + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}\sqrt{x} + 2)$

• $a = x; b = \sqrt{x}; x \geq 0$

$$(1.1.39) \quad (x + \sqrt{x})^2 = x^2 + 2x\sqrt{x} + x$$

Пример 1.1.39. $(2 + \sqrt{2})^2 = 6 + 4\sqrt{2}$

$$(1.1.40) \quad (x - \sqrt{x})^2 = x^2 - 2x\sqrt{x} + x$$

Пример 1.1.40. $(3 - \sqrt{3})^2 = 12 - 6\sqrt{3}$

$$(1.1.41) \quad x^2 - x = (x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})$$

Пример 1.1.41. $2 = (2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})$

$$(1.1.42) \quad (x + \sqrt{x})^3 = x^3 + 3x^2\sqrt{x} + 3x^2 + x\sqrt{x}$$

Пример 1.1.42. $(2 + \sqrt{2})^3 = 20 + 14\sqrt{2}$

$$(1.1.43) \quad (x - \sqrt{x})^3 = x^3 - 3x^2\sqrt{x} + 3x^2 - x\sqrt{x}$$

Пример 1.1.43. $(3 - \sqrt{3})^3 = 54 - 30\sqrt{3}$

$$(1.1.44) \quad x^3 - x\sqrt{x} = (x - \sqrt{x})(x^2 + x\sqrt{x} + x)$$

Пример 1.1.44. $8 - 2\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})(6 + 2\sqrt{2})$

$$(1.1.45) \quad x^3 + x\sqrt{x} = (x + \sqrt{x})(x^2 - x\sqrt{x} + x)$$

Пример 1.1.45. $27 + 3\sqrt{3} = (3 + \sqrt{3})(12 - 3\sqrt{3})$

• $a = \sin x$; $b = \cos x$

$$(1.1.46) \quad (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$$

$$(1.1.47) \quad (\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$$

$$(1.1.48) \quad \sin^2 x - \cos^2 x = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)$$

$$(1.1.49) \quad (\sin x + \cos x)^3 = (\sin x + \cos x)(1 + \sin 2x)$$

$$(1.1.50) \quad (\sin x - \cos x)^3 = (\sin x - \cos x)(1 - \sin 2x)$$

$$(1.1.51) \quad \sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x)$$

$$(1.1.52) \quad \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$$

Дополнительные преобразования

$$(1.1.53) \quad (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(1.1.54) \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$(1.1.55) \quad (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 2(x + y)$$

$$(1.1.56) \quad (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$$

$$(1.1.57) \quad (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$(1.1.58) \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4$$

$$(1.1.59) \quad (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 4\sqrt{xy}$$

$$(1.1.60) \quad (\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = 2 \sin 2x$$

$$(1.1.61) \quad (a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$$

$$(1.1.62) \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = 2x\left(x^2 + \frac{3}{x^2}\right)$$

$$(1.1.63) \quad (\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^3 = 2\sqrt{x}(x + 3y)$$

$$(1.1.64) \quad (\sin x + \cos x)^3 + (\sin x - \cos x)^3 = 2 \sin x (1 + 2 \cos^2 x)$$

$$(1.1.65) \quad (a + b)^3 - (a - b)^3 = 2b(3a^2 + b^2)$$

$$(1.1.66) \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = \frac{2}{x}\left(3x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$(1.1.67) \quad (\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^3 = 2\sqrt{y}(3x + y)$$

$$(1.1.68) \quad (\sin x + \cos x)^3 - (\sin x - \cos x)^3 = 2 \cos x (1 + 2 \sin^2 x)$$

$$(1.1.69) \quad (a + b)^4 + (a - b)^4 = 2(a^4 + 6a^2b^2 + b^4)$$

$$(1.1.70) \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^4 = 2\left(x^4 + \frac{1}{x^4} + 6\right)$$

$$(1.1.71) \quad (\sqrt{x} + \sqrt{y})^4 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^4 = 2(x^2 + 6xy + y^2)$$

$$(1.1.72) \quad (\sin x + \cos x)^4 + (\sin x - \cos x)^4 = 2(1 + \sin^2 2x)$$

$$(1.1.73) \quad (a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$$

$$(1.1.74) \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^4 = 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$(1.1.75) \quad (\sqrt{x} + \sqrt{y})^4 - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^4 = 8\sqrt{xy}(x + y)$$

$$(1.1.76) \quad (\sin x + \cos x)^4 - (\sin x - \cos x)^4 = 4 \sin 2x$$

§ 1.2. Формулы разложения многочленов на множители

Выделение полного квадрата в квадратном трехчлене

$$(1.2.1) \quad ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}; \quad a \neq 0$$

$$\text{Пример 1.2.1а. } 2x^2 + 4x - 6 = 2(x + 1)^2 - 8$$

$$\text{Пример 1.2.1б. } 2x^2 + 4x + 5 = 2(x + 1)^2 + 3$$

$$(1.2.2) \quad x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$$

$$\text{Пример 1.2.2а. } x^2 + x - \frac{1}{2} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$$

$$\text{Пример 1.2.2б. } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$(1.2.3) \quad x^2 + 2px + q = (x + p)^2 - p^2 + q$$

$$\text{Пример 1.2.3а. } x^2 + 6x + 3 = (x + 3)^2 - 6$$

$$\text{Пример 1.2.3б. } x^2 + 6x + 15 = (x + 3)^2 + 6$$

$$(1.2.4) \quad x^2 + 2px + p^2 = (x + p)^2$$

Пример 1.2.4а. $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

Пример 1.2.4б. $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = (x + \sqrt{2})^2$

$$(1.2.5) \quad x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

Пример 1.2.5а. $x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

Пример 1.2.5б. $x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{2} = \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

Разложения на множители некоторых многочленов 2-й степени

$$(1.2.6) \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2); a \neq 0;$$

$$D = b^2 - 4ac \geq 0; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Пример 1.2.6. $2x^2 + 4x - 6 = 2(x - 1)(x + 3)$

$$(1.2.7) \quad ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2; a \neq 0; D = b^2 - 4ac = 0$$

Пример 1.2.7. $2x^2 + 4x + 2 = 2(x + 1)^2$

$$(1.2.8) \quad x^2 + 2px + q = (x + p - \sqrt{p^2 - q})(x + p + \sqrt{p^2 - q});$$

$$p^2 - q \geq 0$$

Пример 1.2.8. $x^2 + 6x + 3 = (x + 3 - \sqrt{6})(x + 3 + \sqrt{6})$

$$(1.2.9) \quad x^2 + 2px + p^2 = (x + p)^2$$

$$\text{Пример 1.2.9. } x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = (x - \sqrt{2})^2$$

$$(1.2.10) \quad x^2 + 2px + p^2 - q^2 = (x + p - q)(x + p + q)$$

$$\text{Пример 1.2.10. } x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 - \sqrt{3} = (x - \sqrt{2} - \sqrt[4]{3})(x - \sqrt{2} + \sqrt[4]{3})$$

$$(1.2.11) \quad x^2 + ax = x(x + a)$$

$$\text{Пример 1.2.11. } x^2 + 10x = x(x + 10)$$

$$(1.2.12) \quad x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

$$\text{Пример 1.2.12. } x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

$$(1.2.13) \quad x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

$$\text{Пример 1.2.13. } x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

Разложения на множители некоторых многочленов 3-й степени

$$(1.2.14) \quad x^3 + ax^2 = x^2(x + a)$$

$$\text{Пример 1.2.14. } x^3 + 5x^2 = x^2(x + 5)$$

$$(1.2.15) \quad x^3 + a^2x = x(x^2 + a^2)$$

$$\text{Пример 1.2.15. } x^3 + 5x = x(x^2 + 5)$$

$$(1.2.16) \quad x^3 + (a + b)x^2 + abx = x(x + a)(x + b)$$

Пример 1.2.16. $x^3 + 5x^2 + 6x = x(x+2)(x+3)$

(1.2.17) $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x+a)^3$

Пример 1.2.17. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$

(1.2.18) $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$

Пример 1.2.18. $x^3 + 27 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$

(1.2.19) $x^3 + (p-a)x^2 + (q-ap)x - aq =$
 $= (x-a)(x^2 + px + q); p^2 - 4q < 0$

Пример 1.2.19. $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x^2 + x + 1)$

(1.2.20) $x^3 - (a+2b)x^2 + (2ab + b^2)x - ab^2 = (x-a)(x-b)^2$

Пример 1.2.20. $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-2)(x-1)^2$

(1.2.21) $x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc =$
 $= (x-a)(x-b)(x-c)$

Пример 1.2.21. $x^3 - (1+2+3)x^2 + (2+6+3)x - 6 =$
 $= (x-1)(x-2)(x-3)$

(1.2.22) $x^3 + x - a^3 - a = (x-a)(x^2 + ax + a^2 + 1)$

Пример 1.2.22. $x^3 + x - 2^3 - 2 = (x-2)(x^2 + 2x + 5)$

$$(1.2.23) \quad x^3 + x^2 + x - a^3 - a^2 - a = \\ = (x - a)(x^2 + (a + 1)x + a^2 + a + 1)$$

$$\text{Пример 1.2.23. } x^3 + x^2 + x - 2^3 - 2^2 - 2 = (x - 2)(x^2 + 3x + 7)$$

Разложения на множители некоторых многочленов 4-й степени

$$(1.2.24) \quad x^4 + ax^3 = x^3(x + a)$$

$$\text{Пример 1.2.24. } x^4 + 5x^3 = x^3(x + 5)$$

$$(1.2.25) \quad x^4 + a^2x^2 = x^2(x^2 + a^2)$$

$$\text{Пример 1.2.25. } x^4 + 5x^2 = x^2(x^2 + 5)$$

$$(1.2.26) \quad x^4 + a^3x = x(x + a)(x^2 - ax + a^2)$$

$$\text{Пример 1.2.26. } x^4 + 125x = x(x + 5)(x^2 - 5x + 25)$$

$$(1.2.27) \quad x^4 - a^4 = (x - a)(x + a)(x^2 + a^2)$$

$$\text{Пример 1.2.27. } x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

$$(1.2.28) \quad x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = (x - a)(x + a)(x - b)(x + b)$$

$$\text{Пример 1.2.28. } x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$$

$$(1.2.29) \quad x^4 + (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = (x^2 + a^2)(x^2 + b^2)$$

Пример 1.2.29. $x^4 + 13x^2 + 36 = (x^2 + 4)(x^2 + 9)$

(1.2.30) $x^4 + a^2x^2 + a^4 = (x^2 + ax + a^2)(x^2 - ax + a^2)$

Пример 1.2.30. $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

(1.2.31) $x^4 + a^4 = (x^2 - \sqrt{2}ax + a^2)(x^2 + \sqrt{2}ax + a^2)$

Пример 1.2.31. $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$

(1.2.32) $x^4 - (a + b + c)x^3 + (ab + bc + ca)x^2 - abcx =$
 $= x(x - a)(x - b)(x - c)$

Пример 1.2.32. $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

(1.2.33) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$

(1.2.34) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x^2 - x + 1)^2$

Теорема о подборе корней многочлена с целочисленными коэффициентами

Если многочлен

(1.2.35) $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n;$
 $a_k \in \mathbb{Z} \forall k$

имеет целые корни, то они находятся среди делителей свободного члена a_n

Пример 1.2.35. $P_3(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2;$

$a_3 = -2$; делители: $\pm 1; \pm 2$;

$P_3(-1) \neq 0$; $P_3(1) = 0$; $P_3(-2) \neq 0$; $P_3(2) \neq 0$;

$x = 1$ – корень

Выделение линейного множителя в многочлене

$$(1.2.36) \quad P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n;$$

$$P_n(x_0) = 0 \Leftrightarrow P_n(x) = a_0(x - x_0)Q_{n-1}(x)$$

$$\text{Пример 1.2.36. } x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x - 1)(x^2 + 2)$$

Разложение многочлена на простейшие множители

- Случай n различных действительных корней

$$(1.2.37) \quad P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \\ = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

$$\text{Пример 1.2.37. } x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$$

- Случай n одинаковых действительных корней

$$(1.2.38) \quad P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \\ = a_0(x - x_1)^n$$

$$\text{Пример 1.2.38. } x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$$

- Случай r действительных кратных корней

$$(1.2.39) \quad P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \\ = a_0(x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_r)^{k_r} \times \\ \times (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}; \quad 1 \leq r < n; \\ p_i^2 - 4q_i < 0 \quad \forall i$$

Пример 1.2.39. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 8 = (x - 2)^2 (x^2 + 2)$

- Случай отсутствия действительных корней

$$(1.2.40) \quad P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \\ = a_0(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}; \quad n = 2m; \\ p_i^2 - 4q_i < 0 \quad \forall i$$

Пример 1.2.40. $x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$

§ 1.3. Действия с дробями

Основное свойство дроби

$$(1.3.1) \quad \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{c \cdot b}; b, c \neq 0$$

$$\text{Пример 1.3.1.} \quad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 32}{2 \cdot 32} = \frac{32}{64}; \quad \frac{5}{6} = \frac{125}{150}$$

Сокращение дробей

$$(1.3.2) \quad \frac{c \cdot a}{c \cdot b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}; b, c \neq 0$$

$$\text{Пример 1.3.2.} \quad \frac{32}{64} = \frac{1 \cdot 32}{2 \cdot 32} = \frac{1}{2}; \quad \frac{125}{150} = \frac{5}{6}$$

Сложение и вычитание дробей

$$(1.3.3) \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}; b, d \neq 0$$

$$\text{Пример 1.3.3.} \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{7}{6} = 1 \frac{1}{6}$$

$$(1.3.4) \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}; b, d \neq 0$$

Пример 1.3.4. $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3 - 2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{6}$

(1.3.5) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}; b \neq 0$

Пример 1.3.5. $\frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{1+2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

(1.3.6) $\frac{a}{be} \pm \frac{c}{de} = \frac{ad \pm cb}{bde}; b, d, e \neq 0$

Пример 1.3.6. $\frac{1}{20} + \frac{2}{30} = \frac{1}{2 \cdot 10} + \frac{2}{3 \cdot 10} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 10} = \frac{7}{60}$

(1.3.7) $\frac{a \pm c}{b} = \frac{a}{b} \pm \frac{c}{b}; b \neq 0$

Пример 1.3.7. $\frac{1-5}{12} = \frac{1}{12} - \frac{5}{12}$

Умножение дробей

(1.3.8) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}; b, d \neq 0$

Пример 1.3.8. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}; \frac{3}{10} \cdot \frac{11}{100} = \frac{33}{1000}$

Деление дробей

(1.3.9) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}; b, c, d \neq 0$

Пример 1.3.9. $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}; \frac{\frac{4}{5}}{\frac{5}{6}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} = \frac{24}{25}$

Умножение дроби на число и числа на дробь

$$(1.3.10) \quad \frac{a}{b} \cdot c = c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{b}; b \neq 0$$

$$\text{Пример 1.3.10. } \frac{1}{22} \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2}{22} = \frac{1}{11}; 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}; 0 \cdot \frac{4}{5} = 0$$

$$(1.3.11) \quad \frac{a}{b} \cdot (-1) = (-1) \cdot \frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}; b \neq 0$$

$$\text{Пример 1.3.11. } (-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Деление дроби на число и числа на дробь

$$(1.3.12) \quad \frac{a}{b} : c = \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}; b, c \neq 0$$

$$\text{Пример 1.3.12. } \frac{\frac{4}{5}}{-2} = \frac{4}{5 \cdot (-2)} = \frac{4}{-10} = -\frac{2}{5}; \frac{1}{11} : 1 = \frac{1}{11}$$

$$(1.3.13) \quad c : \frac{a}{b} = \frac{c}{\frac{a}{b}} = c \cdot \frac{b}{a} = \frac{cb}{a}; a, b \neq 0$$

$$\text{Пример 1.3.13. } 4 : \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 5}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}; \frac{2}{-\frac{17}{7}} = -\frac{14}{17}$$

$$(1.3.14) \quad 1 : \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}; a, b \neq 0$$

$$\text{Пример 1.3.14. } 1 : \frac{3}{5} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}; \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

§ 1.4. Средние величины. Пропорции. Проценты

Среднее арифметическое

$$(1.4.1) m_a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

$$\text{Пример 1.4.1а. } m_a = \frac{1+2}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{Пример 1.4.1б. } m_a = \frac{1+2+3}{3} = 2$$

Среднее геометрическое

$$(1.4.2) m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}; a_k \geq 0 \forall k$$

$$\text{Пример 1.4.2а. } m_g = \sqrt[2]{1 \cdot 2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Пример 1.4.2б. } m_g = \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[3]{6}$$

Среднее гармоническое

$$(1.4.3) m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}; a_k > 0 \forall k$$

$$\text{Пример 1.4.3а. } m_h = \frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Пример 1.4.3б. $m_h = \frac{3}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{18}{11} = 1\frac{7}{11}$

Неравенства для средних величин

(1.4.4) Если $a_k > 0 \forall k$, то $m_a \geq m_g \geq m_h$

Пример 1.4.4. $2 \geq \sqrt[3]{6} \geq 1\frac{7}{11}$

(1.4.5) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}; a, b > 0$

Пример 1.4.5. $1\frac{1}{2} \geq \sqrt{2} \geq 1\frac{1}{3}$

Пропорции

(1.4.6) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc; a, b, c, d \neq 0$ — основное свойство

пропорции

Пример 1.4.6. $\frac{1}{2} = \frac{10}{20} \Leftrightarrow 1 \cdot 20 = 2 \cdot 10$

(1.4.7) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

Пример 1.4.7. $\frac{1}{2} = \frac{10}{20} \Leftrightarrow \frac{1}{10} = \frac{2}{20} \Leftrightarrow \frac{2}{1} = \frac{20}{10} \Leftrightarrow \frac{10}{1} = \frac{20}{2}$

- Нахождение неизвестных членов пропорции

(1.4.8) $\frac{x}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow x = \frac{bc}{d}$

Пример 1.4.8. $\frac{x}{2} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow x = \frac{2 \cdot 3}{7} = \frac{6}{7}$

$$(1.4.9) \quad \frac{a}{x} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow x = \frac{ad}{c}$$

$$\text{Пример 1.4.9.} \quad \frac{2}{x} = \frac{4}{7} \Leftrightarrow x = \frac{2 \cdot 7}{4} = \frac{7}{2}$$

$$(1.4.10) \quad \frac{a}{b} = \frac{x}{d} \Leftrightarrow x = \frac{ad}{b}$$

$$\text{Пример 1.4.10.} \quad \frac{1}{2} = \frac{x}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2$$

$$(1.4.11) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Leftrightarrow x = \frac{bc}{a}$$

$$\text{Пример 1.4.11.} \quad \frac{-2}{3} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1 \cdot 3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

- Производные пропорции

$$(1.4.12) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

$$\text{Пример 1.4.12.} \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{1 \pm 2}{2} = \frac{3 \pm 6}{6}$$

$$(1.4.13) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$$

$$\text{Пример 1.4.13.} \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{1 \pm 2}{1} = \frac{3 \pm 6}{3}$$

$$(1.4.14) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

$$\text{Пример 1.4.14.} \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{1+2}{1-2} = \frac{3+6}{3-6}$$

$$(1.4.15) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

$$\text{Пример 1.4.15.} \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1+3}{2+6} = \frac{3}{6}$$

Проценты

$$(1.4.16) \quad \frac{a}{100} = 0,01a \text{ (1\% от числа } a\text{)}$$

$$\text{Пример 1.4.16.} \quad \frac{2}{100} = 0,02 \text{ (1\% от числа 2)}$$

$$(1.4.17) \quad \frac{a}{100} \cdot x = 0,01ax \text{ (} x\% \text{ от числа } a\text{)}$$

$$\text{Пример 1.4.17.} \quad \frac{2}{100} \cdot 5 = 0,1 \text{ (5\% от числа 2)}$$

$$(1.4.18) \quad \frac{a}{b} = \frac{x}{100} \Leftrightarrow x = \frac{100a}{b} \text{ (} a \text{ составляет } x\% \text{ от числа } b\text{)}$$

$$\text{Пример 1.4.18.} \quad \frac{3}{10} = \frac{x}{100} \Leftrightarrow x = \frac{100 \cdot 3}{10} = 30$$

(3 составляет 30% от числа 10)

§ 1.5. Модуль (абсолютная величина)

Определение модуля числа

$$(1.5.1) \quad |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{Пример 1.5.1а. } |4| = 4; \quad |0| = 0$$

$$\text{Пример 1.5.1б. } |1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$$

Раскрытие модуля функции

$$(1.5.2) \quad |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$\text{Пример 1.5.2а. } |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x \geq 1 \\ -(x - 1), & \text{если } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Пример 1.5.2б. } |x^2 + 1| = x^2 + 1$$

Свойства модуля

$$(1.5.3) \quad |a| \geq 0$$

$$\text{Пример 1.5.3. } |1| \geq 0; \quad |-1| \geq 0; \quad |0| \geq 0$$

$$(1.5.4) \quad |a| \geq a$$

$$\text{Пример 1.5.4. } |2| \geq 2; \quad |-2| \geq -2$$

$$(1.5.5) \quad |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$(1.5.6) \quad |a| \geq -a$$

$$\text{Пример 1.5.6. } |3| \geq -3; \quad |-3| \geq 3$$

$$(1.5.7) \quad |-a| = |a|$$

$$\text{Пример 1.5.7. } |-3| = |3|; \quad -(-3) = |3|$$

$$(1.5.8) \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$\text{Пример 1.5.8. } |2 + 3| \leq |2| + |3|; \quad |2 + (-3)| \leq |2| + |-3|$$

$$(1.5.9) \quad |a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a \cdot b \geq 0$$

$$\text{Пример 1.5.9. } |3 + 5| = |3| + |5|; \quad |(-3) + (-5)| = |-3| + |-5|$$

$$(1.5.10) \quad |a - b| \geq |a| - |b|$$

$$\text{Пример 1.5.10. } |3 - 5| \geq |3| - |5|; \quad |-3 - 5| \geq |-3| - |5|$$

$$(1.5.11) \quad |a^2| = |a|^2 = a^2$$

$$\text{Пример 1.5.11. } |5^2| = |5|^2 = 5^2; \quad |(-5)^2| = |-5|^2 = (-5)^2$$

$$(1.5.12) \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\text{Пример 1.5.12. } |2 \cdot 6| = |2| \cdot |6|; \quad |(-2) \cdot 6| = |-2| \cdot |6|$$

$$(1.5.13) \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}; b \neq 0$$

$$\text{Пример 1.5.13.} \quad \left| \frac{3}{-2} \right| = \frac{|3|}{|-2|}; \quad \left| \frac{0}{-2} \right| = \frac{|0|}{|-2|} = 0$$

$$(1.5.14) \quad \left| \frac{1}{b} \right| = \frac{1}{|b|}; b \neq 0$$

$$\text{Пример 1.5.14.} \quad \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{|2|}; \quad \left| \frac{1}{-2} \right| = \frac{1}{|-2|}$$

$$(1.5.15) \quad |a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$$

$$\text{Пример 1.5.15.} \quad |a| = |4| \Leftrightarrow a = \pm 4; \quad |a| = |-4| \Leftrightarrow a = \pm 4$$

$$(1.5.16) \quad |a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

§ 1.6. Степени и корни. Логарифмы

Степени с натуральным, целым и рациональным показателем. Арифметический корень

$$\bullet \underline{n, k \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{R}}$$

(1.6.1) $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$; n множителей, $n \geq 2$ — степень числа с натуральным показателем

$$\text{Пример 1.6.1. } 0^2 = 0; 1^2 = 1; 2^2 = 4; (-2)^3 = -8$$

$$(1.6.2) a^1 = a$$

$$\text{Пример 1.6.2. } 0^1 = 0; 1^1 = 1; (-2)^1 = -2$$

(1.6.3) $a^0 = 1$; $a \neq 0$ — «нулевая» степень числа

$$\text{Пример 1.6.3а. } 3^0 = 1; (-4)^0 = 1$$

Пример 1.6.3б. 0^0 — не существует

(1.6.4) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a \neq 0$ — отрицательная целая степень числа

$$\text{Пример 1.6.4а. } 1^{-2} = \frac{1}{1^2} = 1; 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

Пример 1.6.4б. 0^{-3} — не существует

$$(1.6.5) \quad a^{-1} = \frac{1}{a}; a \neq 0$$

$$\text{Пример 1.6.5. } 1^{-1} = 1; 2^{-1} = \frac{1}{2}; \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

$$(1.6.6) \quad \sqrt[n]{a} = b; a \geq 0; n \geq 2 \Leftrightarrow b^n = a; b \geq 0 \text{ — арифметический корень}$$

$$\text{Пример 1.6.6а. } \sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8; \sqrt[4]{0} = 0; \sqrt[5]{1} = 1$$

Пример 1.6.6б. $\sqrt[4]{-8}$ — не существует

$$(1.6.7) \quad \sqrt[2]{a} \equiv \sqrt{a} \text{ — квадратный корень}$$

$$\text{Пример 1.6.7а. } \sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4; \sqrt{0} = 0; \sqrt{1} = 1$$

Пример 1.6.7б. $\sqrt{-16}$ — не существует

$$(1.6.8) \quad a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}; a \geq 0; n \geq 2 \text{ — положительная дробная степень неотрицательного числа}$$

$$\text{Пример 1.6.8. } 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4; 0^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{0^2} = 0$$

$$(1.6.9) \quad a^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}}; a > 0; n \geq 2 \text{ — отрицательная дробная степень положительного числа}$$

$$\text{Пример 1.6.9. } 8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$$

$$(1.6.10) \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}; a \geq 0; n \geq 2$$

$$\text{Пример 1.6.10. } 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3; 0,001^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0,001} = 0,1$$

$$(1.6.11) \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; a > 0; n \geq 2; m \in \mathbb{Z} \text{ — рациональная степень положительного числа}$$

$$\text{Пример 1.6.11a. } 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$$

$$\text{Пример 1.6.11б. } 3^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3^3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{27}}$$

$$(1.6.12) \quad a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot k}{n \cdot k}}; a > 0; n \geq 2; m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Пример 1.6.12. } 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{12}{16}} = 3^{\frac{6}{8}}$$

Свойства корней

- Корни n -й степени

$$\bullet \quad \underline{a, b, c \in \mathbb{R}; a \geq 0, b \geq 0, c > 0; n, k, m \in \mathbb{N}; n \geq 2}$$

$$(1.6.13) \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$\text{Пример 1.6.13. } \left(\sqrt[3]{4}\right)^3 = 4$$

$$(1.6.14) \quad \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\text{Пример 1.6.14. } \sqrt[3]{4^3} = 4$$

$$(1.6.15) \quad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\text{Пример 1.6.15. } \sqrt{25 \cdot 81} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{81} = 5 \cdot 9 = 45$$

$$(1.6.16) \quad \sqrt[n]{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}$$

$$\text{Пример 1.6.16. } \sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}$$

$$(1.6.17) \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$\text{Пример 1.6.17. } \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}; \left(\sqrt[4]{2}\right)^2 = \sqrt[4]{4}$$

$$(1.6.18) \quad \sqrt[kn]{a^k} = \sqrt[n]{a}$$

$$\text{Пример 1.6.18. } \sqrt[9]{2^3} = \sqrt[3]{2}; \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}; \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2}$$

$$(1.6.19) \quad \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}; k \geq 2$$

$$\text{Пример 1.6.19. } \sqrt[3]{\sqrt[2]{2}} = \sqrt[6]{2}; \sqrt[2]{\sqrt[2]{2}} = \sqrt[4]{2}$$

$$(1.6.20) \quad \sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}$$

$$\text{Пример 1.6.20. } \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}; \sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[3]{4}$$

$$(1.6.21) \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[k]{a} = \sqrt[nk]{a^{n+k}}; k \geq 2$$

$$\text{Пример 1.6.21. } \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^5}$$

$$(1.6.22) \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a^{k-n}}; k \geq 2$$

Пример 1.6.22. $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2^{-1}} = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{3}$

(1.6.23) $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$ — вынесение множителя из-под знака корня (см. также (1.6.35), (1.6.43))

Пример 1.6.23. $\sqrt{250} = \sqrt{5^2 \cdot 10} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{10} = 5\sqrt{10}$

(1.6.24) $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$ — внесение множителя под знак корня (см. также (1.6.36), (1.6.44))

Пример 1.6.24а. $5\sqrt{10} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{5^2 \cdot 10} = \sqrt{250}$

Пример 1.6.24б. $-5\sqrt{10} = -\left(5\sqrt{10}\right) = -\sqrt{250}$

- Корни нечетной степени

• $a, b, c \in \mathbb{R}; c \neq 0; n, k, m \in \mathbb{N}$

(1.6.25) $\left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^{2n+1} = a$

Пример 1.6.25. $\left(\sqrt[5]{3}\right)^5 = 3; \left(\sqrt[3]{-4}\right)^3 = -4$

(1.6.26) $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$

Пример 1.6.26. $\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3; \sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$

(1.6.27) $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$

Пример 1.6.27. $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$

$$(1.6.28) \quad \sqrt[n+1]{a \cdot b} = \sqrt[n+1]{a} \cdot \sqrt[n+1]{b}$$

$$\text{Пример 1.6.28. } \sqrt[3]{(-8) \cdot 125} = \sqrt[3]{(-8)} \cdot \sqrt[3]{125} = -2 \cdot 5 = -10$$

$$(1.6.29) \quad \sqrt[n+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{b}}$$

$$\text{Пример 1.6.29. } \sqrt[3]{\frac{-8}{125}} = \frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{125}} = -\frac{2}{5}$$

$$(1.6.30) \quad \left(\sqrt[n+1]{a}\right)^k = \sqrt[n+1]{a^k}$$

$$\text{Пример 1.6.30. } \left(\sqrt[3]{-3}\right)^2 = \sqrt[3]{9}$$

$$(1.6.31) \quad \sqrt[(2k-1)(2n+1)]{a^{2k-1}} = \sqrt[n+1]{a}$$

$$\text{Пример 1.6.31. } \sqrt[9]{(-3)^3} = \sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3}$$

$$(1.6.32) \quad \sqrt[2k+1]{\sqrt[2n+1]{a}} = \sqrt[(2k+1)(2n+1)]{a}$$

$$\text{Пример 1.6.32. } \sqrt[3]{\sqrt[5]{(-2)}} = \sqrt[15]{(-2)} = -\sqrt[15]{2}$$

$$(1.6.33) \quad \sqrt[(2k-1)(2n+1)]{a^{(2k-1)(2m-1)}} = \sqrt[n+1]{a^{2m-1}}$$

$$\text{Пример 1.6.33. } \sqrt[9]{(-2)^3} = \sqrt[3 \cdot 3]{(-2)^{3 \cdot 1}} = \sqrt[3]{(-2)} = -\sqrt[3]{2}$$

$$(1.6.34) \quad \sqrt[(2k-1)(2n+1)]{a^{(2k-1)2m}} = \sqrt[n+1]{a^{2m}}$$

$$\text{Пример 1.6.34. } \sqrt[9]{(-2)^6} = \sqrt[3 \cdot 3]{(-2)^{3 \cdot 2}} = \sqrt[3]{(-2)^2} = \sqrt[3]{4}$$

(1.6.35) ${}^{2n+1}\sqrt{a^{2n+1} \cdot b} = a \cdot {}^{2n+1}\sqrt{b}$ — вынесение множителя из-под знака корня

Пример 1.6.35. $\sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 25} = \sqrt[3]{(-2)^3} \cdot \sqrt[3]{25} = -2 \cdot \sqrt[3]{25}$

(1.6.36) $a \cdot {}^{2n+1}\sqrt{b} = {}^{2n+1}\sqrt{a^{2n+1} \cdot b}$ — внесение множителя под знак корня

Пример 1.6.36. $-2 \cdot \sqrt[3]{25} = -\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{25} = -\sqrt[3]{2^3 \cdot 25}$

- Корни четной степени

• $a, b, c \in \mathbb{R}; n, k, m \in \mathbb{N}$

(1.6.37) ${}^{2n}\sqrt{a^{2n}} = |a|$

Пример 1.6.37. $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2; \sqrt[4]{(-2)^4} = 2$

(1.6.38) $\sqrt{a^2} = |a|$

Пример 1.6.38. $\sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11; \sqrt{(-11)^2} = 11$

(1.6.39) ${}^{2n}\sqrt{a \cdot b} = {}^{2n}\sqrt{|a|} \cdot {}^{2n}\sqrt{|b|} = {}^{2n}\sqrt{-a} \cdot {}^{2n}\sqrt{-b}; a \leq 0, b \leq 0$

Пример 1.6.39. $\sqrt{(-4) \cdot (-25)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$

(1.6.40) ${}^{2n}\sqrt{\frac{a}{c}} = \frac{{}^{2n}\sqrt{|a|}}{{}^{2n}\sqrt{|c|}} = \frac{{}^{2n}\sqrt{-a}}{{}^{2n}\sqrt{-c}}; a \leq 0, c < 0$

Пример 1.6.40. $\sqrt{\frac{-4}{-25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

$$(1.6.41) \quad \sqrt[n]{a^{2k(2m-1)}} = \sqrt[n]{|a|^{2m-1}}$$

$$\text{Пример 1.6.41. } \sqrt[4]{(-2)^2} = \sqrt{|-2|} = \sqrt{2}; \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[3]{|-2|} = \sqrt[3]{2}$$

$$(1.6.42) \quad \sqrt[n]{a^{2k \cdot 2m}} = \sqrt[n]{a^{2m}}$$

$$\text{Пример 1.6.42. } \sqrt[6]{(-2)^4} = \sqrt[3]{(-2)^2} = \sqrt[3]{4}$$

$$(1.6.43) \quad \sqrt[n]{a^{2n} \cdot b} = |a| \cdot \sqrt[n]{b}; b \geq 0 \text{ — вынесение множителя из-под знака корня}$$

$$\text{Пример 1.6.43. } \sqrt{250} = \sqrt{5^2 \cdot 10} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{10} = 5\sqrt{10}$$

$$(1.6.44) \quad \pm |a| \cdot \sqrt[n]{b} = \pm \sqrt[n]{a^{2n} \cdot b}; b \geq 0 \text{ — внесение множителя под знак корня}$$

$$\text{Пример 1.6.44. } 5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}; -5\sqrt{3} = -\sqrt{5^2 \cdot 3} = -\sqrt{75}$$

Освобождение от иррациональности в знаменателе

$$(1.6.45) \quad \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}; a > 0$$

$$\text{Пример 1.6.45. } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(1.6.46) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}; a > 0$$

$$\text{Пример 1.6.46. } \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$(1.6.47) \quad \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}; \quad a \geq 0; b \geq 0; a \neq b$$

$$\text{Пример 1.6.47.} \quad \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{1 \cdot (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2} - 1$$

$$(1.6.48) \quad \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}; \quad a \geq 0; b \geq 0; a \neq b$$

$$\text{Пример 1.6.48.} \quad \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1 \cdot (\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$(1.6.49) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a + b}; \quad a + b \neq 0$$

$$\text{Пример 1.6.49.} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1} = \frac{1 \cdot (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)}{(\sqrt[3]{2} + 1) \cdot (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{3}$$

$$(1.6.50) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}{a - b}; \quad a \neq b$$

$$\text{Пример 1.6.50.} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{1 \cdot (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)}{(\sqrt[3]{2} - 1) \cdot (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$$

$$(1.6.51) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{a - b}; \quad a \neq b$$

$$\begin{aligned} \text{Пример 1.6.51.} \quad & \frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} = \\ & = \frac{1 \cdot (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2}) (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})} = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

$$(1.6.52) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{a + b}; a + b \neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Пример 1.6.52. } & \frac{1}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} = \\ & = \frac{1 \cdot (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})} = \frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}{5} \end{aligned}$$

Свойства степени с действительным показателем

$$\bullet a, b, x, y \in \mathbb{R}; \underline{\underline{a > 0, b > 0}}$$

$$(1.6.53) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\text{Пример 1.6.53. } 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5; 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{2+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}}$$

$$(1.6.54) \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\text{Пример 1.6.54. } \frac{3^4}{3^5} = 3^{4-5} = 3^{-1} = \frac{1}{3}; \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{2}{3}}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{1}{6}}$$

$$(1.6.55) \quad (ab)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\text{Пример 1.6.55. } (4 \cdot 8)^2 = 4^2 \cdot 8^2; (4 \cdot 8)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$$

$$(1.6.56) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$\text{Пример 1.6.56. } \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}; \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}}$$

$$(1.6.57) \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$\text{Пример 1.6.57a. } (2^2)^{-3} = 2^{2 \cdot (-3)} = 2^{-6} = \frac{1}{64}$$

$$\text{Пример 1.6.57б. } \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{8}}$$

Свойства логарифмов

$$\bullet \quad \underline{a, b, x, y \in \mathbb{R}; a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1; x > 0, y > 0}$$

$$(1.6.58) \quad a^{\log_a x} = x \quad \text{— основное логарифмическое тождество}$$

$$\text{Пример 1.6.58. } 2^{\log_2 3} = 3$$

$$(1.6.59) \quad \log_a a = 1$$

$$\text{Пример 1.6.59. } \log_4 4 = 1$$

$$(1.6.60) \quad \log_a 1 = 0$$

$$\text{Пример 1.6.60. } \log_5 1 = 0$$

$$(1.6.61) \quad \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\text{Пример 1.6.61. } \log_2 15 = \log_2 (3 \cdot 5) = \log_2 3 + \log_2 5$$

$$(1.6.62) \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\text{Пример 1.6.62. } \log_2 \frac{3}{5} = \log_2 3 - \log_2 5$$

$$(1.6.63) \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \text{ — переход к новому основанию}$$

$$\text{Пример 1.6.63. } \log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}$$

$$(1.6.64) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\text{Пример 1.6.64. } \log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$$

$$(1.6.65) \log_{a^\beta} x^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \log_a x; \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$$

$$\text{Пример 1.6.65. } \log_{2^5} 3^3 = \frac{3}{5} \cdot \log_2 3$$

$$(1.6.66) \log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{Пример 1.6.66. } \log_2 3^3 = 3 \log_2 3$$

$$(1.6.67) \log_{a^\beta} x = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a x; \beta \neq 0$$

$$\text{Пример 1.6.67. } \log_{\sqrt{2}} 3 = 2 \log_2 3$$

$$(1.6.68) \log_{a^\alpha} x^\alpha = \log_a x; \alpha \neq 0$$

$$\text{Пример 1.6.68. } \log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} = \log_2 3$$

$$(1.6.69) a^{\log_b c} = c^{\log_b a}; \quad a, b, c > 0; \quad b \neq 1$$

$$\text{Пример 1.6.69. } 2^{\log_3 4} = 4^{\log_3 2}$$

$$(1.6.70) \log_{10} x \equiv \lg x; \log_e x \equiv \ln x$$

$$\bullet \underline{\underline{a, x, y \in \mathbb{R}; a > 0, a \neq 1}}$$

$$(1.6.71) \log_a x^{2m} = 2m \cdot \log_a |x|; x \neq 0; m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Пример 1.6.71. } \log_2 (-3)^2 = 2 \log_2 3$$

$$(1.6.72) \log_a (x \cdot y) = \log_a |x| + \log_a |y|; x < 0, y < 0$$

$$\text{Пример 1.6.72. } \log_2 ((-3) \cdot (-5)) = \log_2 3 + \log_2 5$$

$$(1.6.73) \log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|; x < 0, y < 0$$

$$\text{Пример 1.6.73. } \log_2 \left(\frac{-3}{-5} \right) = \log_2 3 - \log_2 5$$

§ 1.7. Тригонометрические формулы

При использовании формул, содержащих тангенсы и котангенсы, необходимо учитывать вид областей определения левой и правой частей формулы

Основные тождества

(1.7.1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ — основное тригонометрическое тождество

$$(1.7.2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.7.3) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.7.4) \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1; x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.7.5) 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.7.6) 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Области определения и множества значений

$$(1.7.7) y = \sin x : x \in (-\infty; \infty); y \in [-1; 1]$$

$$(1.7.8) \quad y = \cos x : x \in (-\infty; \infty); y \in [-1; 1]$$

$$(1.7.9) \quad y = \operatorname{tg} x : x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; y \in (-\infty; \infty)$$

$$(1.7.10) \quad y = \operatorname{ctg} x : x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; y \in (-\infty; \infty)$$

Свойство периодичности (T — наименьший положительный период)

$$(1.7.11) \quad \sin(\alpha + 2\pi k) = \sin \alpha; k \in \mathbb{Z}; T = 2\pi$$

$$(1.7.12) \quad \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha; k \in \mathbb{Z}; T = 2\pi$$

$$(1.7.13) \quad \operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg} \alpha; k \in \mathbb{Z}; T = \pi$$

$$(1.7.14) \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg} \alpha; k \in \mathbb{Z}; T = \pi$$

Свойства четности и нечетности

$$(1.7.15) \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$(1.7.16) \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$(1.7.17) \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$(1.7.18) \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Формулы сложения

$$(1.7.19) \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

Пример 1.7.19. $\sin 75^\circ = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$

$$(1.7.20) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\text{Пример 1.7.20. } \cos 75^\circ = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ$$

$$(1.7.21) \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\text{Пример 1.7.21. } \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 45^\circ}$$

Формулы кратных углов

$$(1.7.22) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\text{Пример 1.7.22. } \sin \frac{\pi}{4} = 2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(1.7.23) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{Пример 1.7.23. } \cos \frac{\pi}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(1.7.24) \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\text{Пример 1.7.24. } \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}} = 1$$

$$(1.7.25) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\text{Пример 1.7.25. } \sin 30^\circ = 3 \sin 10^\circ - 4 \sin^3 10^\circ$$

$$(1.7.26) \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\text{Пример 1.7.26. } \cos 30^\circ = 4 \cos^3 10^\circ - 3 \cos 10^\circ$$

$$(1.7.27) \quad \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\text{Пример 1.7.27. } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{3 \operatorname{tg} 10^\circ - \operatorname{tg}^3 10^\circ}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 10^\circ}$$

Формулы половинных углов и понижения степени

$$(1.7.28) \quad \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad \text{— формула понижения степени}$$

$$\text{Пример 1.7.28. } 2 \sin^2 15^\circ = 1 - \cos 30^\circ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(1.7.29) \quad \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad \text{— формула понижения степени}$$

$$\text{Пример 1.7.29. } 2 \cos^2 15^\circ = 1 + \cos 30^\circ = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(1.7.30) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\text{Пример 1.7.30. } \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{1 - \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 2 - \sqrt{3}$$

Формулы преобразования суммы в произведение

$$(1.7.31) \quad \sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$(1.7.32) \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(1.7.33) \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(1.7.34) \quad \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$(1.7.35) \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$(1.7.36) \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$(1.7.37) \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

Выражение функций через тангенс половинного угла

$$(1.7.38) \quad \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$(1.7.39) \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$(1.7.40) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Формулы приведения

$$(1.7.41) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$(1.7.42) \quad \sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin \alpha$$

$$(1.7.43) \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$(1.7.44) \sin(2\pi \pm \alpha) = \pm \sin \alpha$$

$$(1.7.45) \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \sin \alpha$$

$$(1.7.46) \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha$$

$$(1.7.47) \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \sin \alpha$$

$$(1.7.48) \cos(2\pi \pm \alpha) = \cos \alpha$$

$$(1.7.49) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg} \alpha$$

$$(1.7.50) \operatorname{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg} \alpha$$

$$(1.7.51) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg} \alpha$$

$$(1.7.52) \operatorname{tg}(2\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg} \alpha$$

Обратные тригонометрические функции

- Арксинус

$$(1.7.53) -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}, \sin(\arcsin a) = a, |a| \leq 1$$

$$(1.7.54) \arcsin(\sin x) = x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(1.7.55) \arcsin x = a; |a| \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \sin a$$

$$(1.7.56) \arcsin x = a; |a| > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.7.57) \arcsin x < a; -\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -1 \leq x < \sin a$$

$$(1.7.58) \arcsin x > a; -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin a < x \leq 1$$

• Арккосинус

$$(1.7.59) 0 \leq \arccos a \leq \pi, \cos(\arccos a) = a, |a| \leq 1$$

$$(1.7.60) \arccos(\cos x) = x, 0 \leq x \leq \pi$$

$$(1.7.61) \arccos x = a; 0 \leq a \leq \pi \Leftrightarrow x = \cos a$$

$$(1.7.62) \arccos x = a; a \notin [0; \pi] \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.7.63) \arccos x < a; 0 < a \leq \pi \Leftrightarrow \cos a < x \leq 1$$

$$(1.7.64) \arccos x > a; 0 < a < \pi \Leftrightarrow -1 \leq x < \cos a$$

• Арктангенс

$$(1.7.65) -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a; a \in \mathbb{R}$$

$$(1.7.66) \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$(1.7.67) \operatorname{arctg} x = a, |a| < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} a$$

$$(1.7.68) \operatorname{arctg} x = a, |a| \geq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.7.69) \operatorname{arctg} x < a, -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\infty < x < \operatorname{tg} a$$

$$(1.7.70) \operatorname{arctg} x > a, -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} a < x < +\infty$$

- Арккотангенс

$$(1.7.71) \quad 0 < \operatorname{arccctg} a < \pi, \operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} a) = a; a \in \mathbb{R}$$

$$(1.7.72) \quad \operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} x) = x, 0 < x < \pi$$

$$(1.7.73) \quad \operatorname{arccctg} x = a, 0 < a < \pi \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} a$$

$$(1.7.74) \quad \operatorname{arccctg} x = a, a \notin (0; \pi) \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.7.75) \quad \operatorname{arccctg} x < a, 0 < a < \pi \Leftrightarrow \operatorname{ctg} a < x < +\infty$$

$$(1.7.76) \quad \operatorname{arccctg} x > a, 0 < a < \pi \Leftrightarrow -\infty < x < \operatorname{ctg} a$$

- Свойства обратных тригонометрических функций

$$(1.7.77) \quad \arcsin(-a) = -\arcsin a, |a| \leq 1$$

$$(1.7.78) \quad \arccos(-a) = \pi - \arccos a, |a| \leq 1$$

$$(1.7.79) \quad \operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a, a \in \mathbb{R}$$

$$(1.7.80) \quad \operatorname{arccctg}(-a) = \pi - \operatorname{arccctg} a, a \in \mathbb{R}$$

$$(1.7.81) \quad \arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, |a| \leq 1$$

$$(1.7.82) \quad \operatorname{arctg} a + \operatorname{arccctg} a = \frac{\pi}{2}, a \in \mathbb{R}$$

Дополнительные тригонометрические тождества

$$(1.7.83) \quad \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$$

$$(1.7.84) \quad \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)$$

$$(1.7.85) \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$$

$$(1.7.86) \quad \sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha \pm \frac{\pi}{4} \right)$$

$$(1.7.87) \quad \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$(1.7.88) \quad \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$(1.7.89) \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad |x| \leq 1$$

$$(1.7.90) \quad \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$(1.7.91) \quad \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$(1.7.92) \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad |x| \leq 1$$

$$(1.7.93) \quad \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$(1.7.94) \quad \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$(1.7.95) \quad \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad |x| < 1$$

$$(1.7.96) \quad \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}; \quad |x| \leq 1, x \neq 0$$

$$(1.7.97) \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}; \quad x \neq 0$$

$$(1.7.98) \quad \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}; \quad |x| \leq 1, x \neq 0$$

$$(1.7.99) \quad \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad |x| < 1$$

$$(1.7.100) \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}; x \neq 0$$

Связь радианной и градусной мер угла

$$(1.7.101) 360^\circ = 2\pi \text{ радиана} \approx 6,2832 \text{ радиана}$$

$$(1.7.102) 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радиана} \approx 0,0175 \text{ радиана}$$

$$(1.7.103) x^\circ = x \cdot \frac{\pi}{180} \text{ радиана} \approx x \cdot 0,0175 \text{ радиана}$$

Пример 1.7.103. $10^\circ = \frac{10 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{18} \text{ радиана} \approx 0,175 \text{ радиана}$

$$(1.7.104) 1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,2958^\circ$$

$$(1.7.105) x \text{ радиан} = x \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx x \cdot 57,2958^\circ$$

Пример 1.7.105. $\frac{5\pi}{4} \text{ радиан} = \frac{5\pi \cdot 180^\circ}{4 \cdot \pi} = 225^\circ$

Таблица знаков тригонометрических функций

Функция	Четверть			
	I	II	III	IV
(1.7.106) $\sin \alpha$	+	+	−	−
(1.7.107) $\cos \alpha$	+	−	−	+
(1.7.108) $\operatorname{tg} \alpha$	+	−	+	−
(1.7.109) $\operatorname{ctg} \alpha$	+	−	+	−

Таблица некоторых значений тригонометрических функций

	α	α°	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
(1.7.110)	0	0°	0	1	0	—
(1.7.111)	$\frac{\pi}{12}$	15°	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
(1.7.112)	$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
(1.7.113)	$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
(1.7.114)	$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
(1.7.115)	$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	—	0
(1.7.116)	π	180°	0	-1	0	—
(1.7.117)	$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	—	0
(1.7.118)	2π	360°	0	1	0	—
	α	α°	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

Таблица некоторых значений обратных тригонометрических функций

	a	$\arcsin a$	$\arccos a$
(1.7.119)	0	0	$\frac{\pi}{2}$
(1.7.120)	1	$\frac{\pi}{2}$	0
(1.7.121)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
(1.7.122)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
(1.7.123)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
(1.7.124)	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
(1.7.125)	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
(1.7.126)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
	a	$\arcsin a$	$\arccos a$

**Таблица некоторых значений обратных
тригонометрических функций (продолжение)**

	a	$\operatorname{arctg} a$	$\operatorname{arcctg} a$
(1.7.127)	0	0	$\frac{\pi}{2}$
(1.7.128)	1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
(1.7.129)	$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
(1.7.130)	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
(1.7.131)	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
(1.7.132)	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
	a	$\operatorname{arctg} a$	$\operatorname{arcctg} a$

§ 1.8. Прогрессии

Арифметическая прогрессия ($n \in \mathbb{N}$)

$$(1.8.1) \quad a_{n+1} = a_n + d$$

$$(1.8.2) \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$(1.8.3) \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}; n \geq 2$$

$$(1.8.4) \quad S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$(1.8.5) \quad S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}$$

$$(1.8.6) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(1.8.7) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$(1.8.8) \quad 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

Геометрическая прогрессия ($n \in \mathbb{N}; b_1 \neq 0; q \neq 0$)

$$(1.8.9) \quad b_{n+1} = b_n \cdot q$$

$$(1.8.10) \quad b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$(1.8.11) \quad b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}; n \geq 2$$

$$(1.8.12) \quad S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}; q \neq 1$$

$$(1.8.13) \quad S_n = nb_1; q = 1$$

$$(1.8.14) \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1 - q}; |q| < 1$$

§ 1.9. Решение уравнений

Некоторые общие равносильные преобразования уравнений

$$(1.9.1) \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$

$$(1.9.2) \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + c = g(x) + c; c \in \mathbb{R}$$

$$(1.9.3) \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow cf(x) = cg(x); c \neq 0$$

Линейные уравнения

$$(1.9.4) \quad ax + b = 0, a \neq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$\text{Пример 1.9.4. } 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

$$(1.9.5) \quad ax + b = 0, a = 0, b \neq 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\text{Пример 1.9.5. } 0x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6 = 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.9.6) \quad ax + b = 0, a = 0, b = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Пример 1.9.6. } 0x + 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Квадратные уравнения

- Формула корней квадратного уравнения

$$(1.9.7) \quad ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, D = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$\text{Пример 1.9.7. } x^2 + 2x - 3 = 0; D = 16 > 0 \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = -3$$

$$(1.9.8) \quad ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, D = b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

$$\text{Пример 1.9.8. } x^2 + 2x + 1 = 0; D = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$(1.9.9) \quad ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, D = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\text{Пример 1.9.9. } x^2 + 2x + 2 = 0; D = -4 < 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

- Теорема Виета

$$(1.9.10) \quad a) \quad x^2 + px + q = 0;$$

$$x_{1,2} - \text{корни уравнения} \Leftrightarrow x_1 x_2 = q; x_1 + x_2 = -p$$

$$б) \quad ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$$

$$x_{1,2} - \text{корни уравнения} \Leftrightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a}; x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\text{Пример 1.9.10а. } x^2 + 5x + 6 = 0;$$

$$x_1 x_2 = 6 = 2 \cdot 3; x_1 + x_2 = -5 = -(2 + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\text{Пример 1.9.10б. } 2x^2 + 10x + 12 = 0;$$

$$x_1 x_2 = \frac{12}{2} = 6; x_1 + x_2 = -\frac{10}{2} = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

- Частные случаи квадратных уравнений

$$(1.9.11) \quad ax^2 + c = 0, a \neq 0, -\frac{c}{a} > 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$\text{Пример 1.9.11. } x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$(1.9.12) \quad ax^2 + c = 0, a \neq 0, -\frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Пример 1.9.12. } 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(1.9.13) \quad ax^2 + c = 0, a \neq 0, -\frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\text{Пример 1.9.13. } x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.9.14) \quad a(x - x_0)^2 + c = 0, a \neq 0, -\frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\text{Пример 1.9.14. } (x - 1)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = -4 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.9.15) \quad ax^2 + bx = 0, a \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

$$\text{Пример 1.9.15. } x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Уравнения, содержащие знак модуля

$$(1.9.16) \quad |x| = a, a > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = -a \end{cases}$$

$$\text{Пример 1.9.16. } |x| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

$$(1.9.17) \quad |x| = a, a = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Пример 1.9.17. } |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(1.9.18) \quad |x| = a, a < 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\text{Пример 1.9.18. } |x| = -4 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.9.19) \quad |f(x)| = a, a \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{cases}$$

$$\text{Пример 1.9.19. } |x - 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2 \\ x - 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$(1.9.20) \quad |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Пример 1.9.20. } |x - 2| = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x - 2 = x \\ x - 2 = -x \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

$$(1.9.21) \quad |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Пример 1.9.21. } |x| = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ x = x + 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ -x = x + 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

$$(1.9.22) \quad |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Пример 1.9.22. $|x-2| = |x| \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = x \\ x-2 = -x \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

$$(1.9.23) \quad |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0$$

Пример 1.9.23. $|x-2| = |x| \Leftrightarrow (x-2)^2 = x^2 \Leftrightarrow x = 1$

$$(1.9.24) \quad |f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

Пример 1.9.24. $|x-2| = x-2 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Иррациональные уравнения

$$(1.9.25) \quad \sqrt{x} = a, a \geq 0 \Leftrightarrow x = a^2$$

Пример 1.9.25. $\sqrt{x} = 5 \Leftrightarrow x = 25$

$$(1.9.26) \quad \sqrt{x} = a, a < 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

Пример 1.9.26. $\sqrt{x} = -5 \Leftrightarrow \emptyset$

$$(1.9.27) \quad \sqrt[3]{x} = a \Leftrightarrow x = a^3$$

Пример 1.9.27. $\sqrt[3]{x} = -2 \Leftrightarrow x = -8$

$$(1.9.28) \quad \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Пример 1.9.28. $\sqrt{x} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ x = (-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

$$(1.9.29) \quad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Пример 1.9.29. $\sqrt{x} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 1-x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$$(1.9.30) \quad \sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^3(x)$$

Пример 1.9.30. $\sqrt[3]{x} = -x \Leftrightarrow x + x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$(1.9.31) \quad \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Пример 1.9.31. $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$

Показательные уравнения

$$(1.9.32) \quad a^x = a^b, a > 0, a \neq 1 \Leftrightarrow x = b$$

Пример 1.9.32. $2^x = 2^{-5} \Leftrightarrow x = -5$

$$(1.9.33) \quad a^x = b, a > 0, a \neq 1, b > 0 \Leftrightarrow x = \log_a b$$

Пример 1.9.33. $2^x = 32 \Leftrightarrow x = \log_2 32 = 5$

$$(1.9.34) \quad a^x = b, a > 0, a \neq 1, b \leq 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

Пример 1.9.34. $2^x = 0 \Leftrightarrow \emptyset$

$$(1.9.35) \quad a^{f(x)} = b; a, b > 0, a \neq 1 \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$$

$$\text{Пример 1.9.35. } 2^{x-1} = 3 \Leftrightarrow x-1 = \log_2 3 \Leftrightarrow x = 1 + \log_2 3$$

$$(1.9.36) \quad a^{f(x)} = a^{g(x)}; a > 0, a \neq 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$\text{Пример 1.9.36. } 2^{2x-1} = 2^{x-1} \Leftrightarrow 2x-1 = x-1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(1.9.37) \quad a^{f(x)} = b^{g(x)}; a, b > 0, a, b \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) \log_c a = g(x) \log_c b, c > 0, c \neq 1$$

$$\text{Пример 1.9.37. } 2^{x-1} = 3^x \Leftrightarrow x-1 = x \log_2 3$$

Логарифмические уравнения

$$(1.9.38) \quad \log_a x = \log_a b, a > 0, a \neq 1, b > 0 \Leftrightarrow x = b$$

$$\text{Пример 1.9.38. } \log_2 x = \log_2 32 \Leftrightarrow x = 32$$

$$(1.9.39) \quad \log_a x = b, a > 0, a \neq 1 \Leftrightarrow x = a^b$$

$$\text{Пример 1.9.39. } \log_2 x = -5 \Leftrightarrow x = 2^{-5} = \frac{1}{32}$$

$$(1.9.40) \quad \log_a f(x) = b, a > 0, a \neq 1 \Leftrightarrow f(x) = a^b$$

$$\text{Пример 1.9.40. } \log_3 (x+1) = 2 \Leftrightarrow x+1 = 3^2 \Leftrightarrow x = 8$$

$$(1.9.41) \quad \log_a f(x) = \log_a g(x), a > 0, a \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

$$\text{Пример 1.9.41. } \log_3 (x+1) = \log_3 (2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Тригонометрические уравнения

$$(1.9.42) \sin x = a, |a| \leq 1 \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Пример 1.9.42. } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.9.43) \sin x = a, |a| > 1 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\text{Пример 1.9.43. } \sin x = 2 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.9.44) \cos x = a, |a| \leq 1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Пример 1.9.44. } \cos x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.9.45) \cos x = a, |a| > 1 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\text{Пример 1.9.45. } \cos x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.9.46) \operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Пример 1.9.46. } \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.9.47) \operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Пример 1.9.47. } \operatorname{ctg} x = 3 \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

- Частные случаи тригонометрических уравнений

$$(1.9.48) \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.9.49) \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.9.50) \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.9.51) \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.9.52) \quad \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.9.53) \quad \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.9.54) \quad \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.9.55) \quad \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.9.56) \quad \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.9.57) \quad \operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.9.58) \quad \operatorname{ctg} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.9.59) \quad \operatorname{ctg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Некоторые уравнения, приводящиеся к квадратным методом замены переменной

$$\bullet a)y = f(x); б)y = \frac{1}{f(x)}, f(x) \neq 0$$

$$(1.9.60) \quad Af^2(x) + Bf(x) + C = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; y = f(x)$$

$$(1.9.61) \quad Af(x) + \frac{B}{f(x)} + C = 0; A \cdot B \neq 0; f(x) \neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Ay^2 + Cy + B = 0; y = f(x)$$

$$(1.9.62) \quad A(ax+b)^2 + B(ax+b) + C = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; y = ax + b$$

$$(1.9.63) \quad A(ax^2 + bx + c)^2 + B(ax^2 + bx + c) + C = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; \quad y = ax^2 + bx + c$$

$$(1.9.64) \quad Ax^4 + Bx^2 + C = 0 \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; \quad y = x^2 \geq 0$$

$$(1.9.65) \quad Ax^6 + Bx^3 + C = 0 \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; \quad y = x^3$$

$$(1.9.66) \quad (ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + d) + C = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 + (c + d)y + cd + C = 0; \quad y = ax^2 + bx$$

$$(1.9.67) \quad (x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + C = 0; \quad a + b = c + d \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 + (ab + cd)y + abcd + C = 0; \quad y = x^2 + (a + b)x$$

$$(1.9.68) \quad A\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^2 + B\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right) + C = 0; \quad cx + d \neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; \quad y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$(1.9.69) \quad \frac{A}{(ax + b)^2} + \frac{B}{ax + b} + C = 0; \quad ax + b \neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; \quad y = \frac{1}{ax + b}$$

$$(1.9.70) \quad \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + C = 0; \quad x \neq 0 \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; \quad y = \frac{1}{x}$$

$$(1.9.71) \quad \frac{A}{x^4} + \frac{B}{x^2} + C = 0; \quad x \neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; \quad y = \frac{1}{x^2} \geq 0$$

$$(1.9.72) \frac{A}{x^6} + \frac{B}{x^3} + C = 0; x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; y = \frac{1}{x^3} \geq 0$$

$$(1.9.73) A\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + B\left(x + \frac{1}{x}\right) + C = 0; A \neq 0; x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ay^2 + By + C - 2A = 0; x + \frac{1}{x} = y; x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$(1.9.74) A\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + B\left(x - \frac{1}{x}\right) + C = 0; A \neq 0; x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ay^2 + By + C + 2A = 0; x - \frac{1}{x} = y; x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$$

$$\bullet y = |f(x)|$$

$$(1.9.75) Ax^2 + B|x| + C = 0 \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; y = |x| \geq 0$$

$$\bullet a)y = \sqrt[n]{f(x)} \geq 0; \delta)y = \sqrt[n+1]{f(x)}$$

$$(1.9.76) Af(x) + B\sqrt{f(x)} + C = 0; f(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; y = \sqrt{f(x)} \geq 0$$

$$(1.9.77) Ax + B\sqrt{x} + C = 0 \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; y = \sqrt{x} \geq 0$$

$$(1.9.78) A\sqrt{x} + B\sqrt[4]{x} + C = 0 \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; y = \sqrt[4]{x} \geq 0$$

$$(1.9.79) A\sqrt[3]{x^2} + B\sqrt[3]{x} + C = 0 \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; y = \sqrt[3]{x}$$

$$(1.9.80) A\sqrt[3]{x} + B\sqrt[6]{x} + C = 0 \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; y = \sqrt[6]{x} \geq 0$$

$$\bullet a)y = a^x > 0; \delta)y = \log_a x; x > 0; a > 0; a \neq 1$$

$$(1.9.81) \quad Aa^{2x} + Ba^x + C = 0 \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; y = a^x > 0$$

$$(1.9.82) \quad Aa^x + \frac{B}{a^x} + C = 0 \Leftrightarrow Ay^2 + Cy + B = 0; y = a^x > 0$$

$$(1.9.83) \quad Aa^{2x} + Ba^xb^x + Cb^{2x} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; y = \left(\frac{a}{b}\right)^x > 0$$

$$(1.9.84) \quad A\log_a^2 x + B\log_a x + C = 0; x, a > 0; a \neq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; y = \log_a x$$

$$(1.9.85) \quad A\log_a x + \frac{B}{\log_a x} + C = 0; x, a > 0; x, a \neq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Ay^2 + Cy + B = 0; y = \log_a x$$

$$\bullet \underline{a)y = \sin x; \delta)y = \cos x; \theta)y = \operatorname{tg} x}$$

$$(1.9.86) \quad A\cos^2 x + B\sin^2 x + C\cos 2x + D\cos x + E = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (A - B + 2C)y^2 + Dy + B - C + E = 0; y = \cos x$$

$$(1.9.87) \quad A\cos^2 x + B\sin^2 x + C\cos 2x + D\sin x + E = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (B - A - 2C)y^2 + Dy + A + C + E = 0; y = \sin x$$

$$(1.9.88) \quad A\operatorname{tg}^2 x + B\operatorname{tg} x + C = 0; \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; y = \operatorname{tg} x$$

$$(1.9.89) \quad A\operatorname{tg} x + \frac{B}{\operatorname{tg} x} + C = 0; \sin x \neq 0; \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Ay^2 + Cy + B = 0; y = \operatorname{tg} x$$

$$(1.9.90) \quad A\sin^2 x + B\sin x \cos x + C\cos^2 x = 0; \\ A \neq 0; \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Ay^2 + By + C = 0; y = \operatorname{tg} x$$

§ 1.10. Решение неравенств

Основные свойства числовых неравенств

$$(1.10.1) \quad a > b \Rightarrow b < a$$

$$(1.10.2) \quad a > b, b > c \Rightarrow a > c$$

$$(1.10.3) \quad a > b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c > b + c; a - c > b - c$$

$$(1.10.4) \quad a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$$

$$(1.10.5) \quad a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$$

$$(1.10.6) \quad a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$$

$$(1.10.7) \quad a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$$

$$(1.10.8) \quad a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n; n \in \mathbb{N}$$

$$(1.10.9) \quad a > 0, b > 0, a^n > b^n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a > b$$

$$(1.10.10) \quad a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

Некоторые общие равносильные преобразования неравенств

$$(1.10.11) \quad f(x) > g(x) \Leftrightarrow g(x) < f(x)$$

$$(1.10.12) \quad f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0$$

$$(1.10.13) \quad f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) + c > g(x) + c; c \in \mathbb{R}$$

$$(1.10.14) \quad f(x) > g(x) \Leftrightarrow cf(x) > cg(x); c > 0$$

$$(1.10.15) \quad f(x) > g(x) \Leftrightarrow cf(x) < cg(x); c < 0$$

$$(1.10.16) \quad -f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x)$$

$$(1.10.17) \quad -f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$$

$$(1.10.18) \quad f(x)g(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

$$(1.10.19) \quad f(x)g(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$(1.10.20) \quad f(x)\varphi(x) > g(x)\varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x)[f(x) - g(x)] > 0$$

Строгие и нестрогие неравенства

$$(1.10.21) \quad f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Пример 1.10.21. } x \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$(1.10.22) \quad f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Пример 1.10.22. } x \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Линейные неравенства

$$(1.10.23) \quad ax + b \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax + b > 0 \\ ax + b = 0 \end{cases}$$

$$(1.10.24) \quad ax + b \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax + b < 0 \\ ax + b = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \underline{ax + b > 0, ax + b < 0; a \neq 0}$$

$$(1.10.25) \quad ax + b > 0, a > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

$$\text{Пример 1.10.25. } 2x + 6 > 0 \Leftrightarrow 2x > -6 \Leftrightarrow x > -3$$

$$(1.10.26) \quad ax + b > 0, a < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

$$\text{Пример 1.10.26. } -2x + 6 > 0 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3$$

$$(1.10.27) \quad ax + b < 0, a > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

$$\text{Пример 1.10.27. } 2x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2x < -6 \Leftrightarrow x < -3$$

$$(1.10.28) \quad ax + b < 0, a < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

$$\text{Пример 1.10.28. } -2x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$$

$$\bullet \underline{ax + b > 0, ax + b < 0, a = 0; b \neq 0}$$

$$(1.10.29) \quad 0 \cdot x + b > 0, b > 0 \Leftrightarrow 0 + b > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Пример 1.10.29. } 0 \cdot x + 6 > 0 \Leftrightarrow 0 + 6 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$(1.10.30) \quad 0 \cdot x + b > 0, b < 0 \Leftrightarrow 0 + b > 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\text{Пример 1.10.30. } 0 \cdot x - 6 > 0 \Leftrightarrow 0 - 6 > 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.10.31) \quad 0 \cdot x + b < 0, b > 0 \Leftrightarrow 0 + b < 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\text{Пример 1.10.31. } 0 \cdot x + 6 < 0 \Leftrightarrow 0 + 6 < 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.10.32) \quad 0 \cdot x + b < 0, b < 0 \Leftrightarrow 0 + b < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Пример 1.10.32. } 0 \cdot x - 6 < 0 \Leftrightarrow 0 - 6 < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \underline{ax + b > 0, ax + b \geq 0, ax + b < 0, ax + b \leq 0} \underline{a = b = 0}$$

$$(1.10.33) \quad 0 \cdot x + 0 > 0 \Leftrightarrow 0 > 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.10.34) \quad 0 \cdot x + 0 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$(1.10.35) \quad 0 \cdot x + 0 < 0 \Leftrightarrow 0 < 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.10.36) \quad 0 \cdot x + 0 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Квадратные неравенства

$$\bullet \underline{P_2(x) > 0; P_2(x) \geq 0; \underline{a \neq 0}}$$

$$(1.10.37) \quad (x - x_0)^2 + c^2 > 0; c \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Пример 1.10.37. } (x - 1)^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$(1.10.38) \quad (x - x_0)^2 + c^2 \geq 0; c \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Пример 1.10.38. $(x-1)^2 + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

$$(1.10.39) \quad ax^2 + bx + c > 0; a > 0; D = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Пример 1.10.39. $x^2 + x + 1 > 0; D = -3 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

$$(1.10.40) \quad ax^2 + bx + c \geq 0; a > 0; D = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Пример 1.10.40. $x^2 - x + 1 \geq 0; D = -3 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

$$(1.10.41) \quad a(x-x_1)^2 > 0; a > 0 \Leftrightarrow x \neq x_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1 \\ x > x_1 \end{cases}$$

Пример 1.10.41. $(x-4)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 4 \end{cases}$

$$(1.10.42) \quad a(x-x_1)^2 \geq 0; a > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Пример 1.10.42. $(x-4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

$$(1.10.43) \quad a(x-x_1)(x-x_2) > 0, a > 0, x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1 \\ x > x_2 \end{cases}$$

Пример 1.10.43. $(x-2)(x-3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 3 \end{cases}$

$$(1.10.44) \quad a(x-x_1)(x-x_2) \geq 0; a > 0; x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x_1 \\ x \geq x_2 \end{cases}$$

Пример 1.10.44. $(x-2)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases}$

$$(1.10.45) \quad x^2 > c; c > 0 \Leftrightarrow (x+\sqrt{c})(x-\sqrt{c}) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{c} \\ x > \sqrt{c} \end{cases}$$

Пример 1.10.45. $x^2 > 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 2 \end{cases}$

$$(1.10.46) \quad x^2 \geq c; c > 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{c})(x - \sqrt{c}) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{c} \\ x \geq \sqrt{c} \end{cases}$$

Пример 1.10.46. $x^2 \geq 2 \Leftrightarrow (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{2} \\ x \geq \sqrt{2} \end{cases}$

$\bullet P_2(x) < 0; P_2(x) \leq 0; a \neq 0$

$$(1.10.47) \quad (x - x_1)^2 + c^2 < 0; c \neq 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

Пример 1.10.47. $(x - 1)^2 + 2 < 0 \Leftrightarrow \emptyset$

$$(1.10.48) \quad (x - x_1)^2 + c^2 \leq 0; c \neq 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

Пример 1.10.48. $(x - 1)^2 + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \emptyset$

$$(1.10.49) \quad ax^2 + bx + c < 0; a > 0; D = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

Пример 1.10.49. $x^2 + x + 1 < 0; D = -3 \Leftrightarrow \emptyset$

$$(1.10.50) \quad ax^2 + bx + c \leq 0; a > 0; b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

Пример 1.10.50. $x^2 - x + 1 \leq 0; D = -3 \Leftrightarrow \emptyset$

$$(1.10.51) \quad a(x - x_1)^2 < 0; a > 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

Пример 1.10.51. $(x - 4)^2 < 0 \Leftrightarrow \emptyset$

$$(1.10.52) \quad a(x - x_1)^2 \leq 0; a > 0 \Leftrightarrow x = x_1$$

Пример 1.10.52. $(x-4)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 4$

$$(1.10.53) \quad a(x-x_1)(x-x_2) < 0; a > 0; x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$$

Пример 1.10.53. $(x-2)(x-3) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$

$$(1.10.54) \quad a(x-x_1)(x-x_2) \leq 0; a > 0; x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 \leq x \leq x_2$$

Пример 1.10.54. $(x-2)(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$

$$(1.10.55) \quad x^2 < c; c > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{c} < x < \sqrt{c}$$

Пример 1.10.55. $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

$$(1.10.56) \quad x^2 \leq c; c > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{c} \leq x \leq \sqrt{c}$$

Пример 1.10.56. $x^2 \leq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$

Кубические неравенства

$$\bullet \underline{P_3(x) > 0; P_3(x) \geq 0}$$

$$(1.10.57) \quad a(x-x_1)^3 > 0; a > 0 \Leftrightarrow x > x_1$$

$$(1.10.58) \quad a(x-x_1)^3 \geq 0; a > 0 \Leftrightarrow x \geq x_1$$

$$(1.10.59) \quad a(x-x_1)(x^2+px+q) > 0; a > 0; p^2-4q < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x > x_1$$

$$(1.10.60) \quad a(x-x_1)(x^2+px+q) \geq 0; a > 0; p^2-4q < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \geq x_1$$

$$(1.10.61) \quad x^3 > c \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{c}$$

$$(1.10.62) \quad x^3 \geq c \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{c}$$

$$(1.10.63) \quad a(x-x_1)(x-x_2)^2 > 0; a > 0; x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x < x_2 \\ x > x_2 \end{cases}$$

$$\text{Пример 1.10.63. } (x-1)(x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$(1.10.64) \quad a(x-x_1)(x-x_2)^2 \geq 0; a > 0; x_1 < x_2 \Leftrightarrow x \geq x_1$$

$$\text{Пример 1.10.64. } (x-1)(x-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$(1.10.65) \quad a(x-x_1)^2(x-x_2) > 0; a > 0; x_1 < x_2 \Leftrightarrow x > x_2$$

$$\text{Пример 1.10.65. } (x-1)^2(x-2) > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$(1.10.66) \quad a(x-x_1)^2(x-x_2) \geq 0; a > 0; x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x \geq x_2 \end{cases}$$

$$\text{Пример 1.10.66. } (x-1)^2(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$(1.10.67) \quad a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) > 0; a > 0; x_1 < x_2 < x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < x < x_2 \\ x > x_3 \end{cases}$$

$$\text{Пример 1.10.67. } (x-1)(x-2)(x-3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x > 3 \end{cases}$$

$$(1.10.68) \quad a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \geq 0; a > 0; x_1 < x_2 < x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq x \leq x_2 \\ x \geq x_3 \end{cases}$$

Пример 1.10.68. $(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases}$

$\bullet P_3(x) < 0; P_3(x) \leq 0$

$$(1.10.69) \quad a(x-x_1)^3 < 0; a > 0 \Leftrightarrow x < x_1$$

$$(1.10.70) \quad a(x-x_1)^3 \leq 0; a > 0 \Leftrightarrow x \leq x_1$$

$$(1.10.71) \quad a(x-x_1)(x^2+px+q) < 0; a > 0; p^2-4q < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x < x_1$$

$$(1.10.72) \quad a(x-x_1)(x^2+px+q) \leq 0; a > 0; p^2-4q < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \leq x_1$$

$$(1.10.73) \quad x^3 < c \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{c}$$

$$(1.10.74) \quad x^3 \leq c \Leftrightarrow x \leq \sqrt[3]{c}$$

$$(1.10.75) \quad a(x-x_1)(x-x_2)^2 < 0; a > 0; x_1 < x_2 \Leftrightarrow x < x_1$$

Пример 1.10.75. $(x-1)(x-2)^2 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

$$(1.10.76) \quad a(x-x_1)(x-x_2)^2 \leq 0; a > 0; x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$$

Пример 1.10.76. $(x-1)(x-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = 2 \end{cases}$

$$(1.10.77) \quad a(x-x_1)^2(x-x_2) < 0; a > 0; x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1 \\ x_1 < x < x_2 \end{cases}$$

Пример 1.10.77. $(x-1)^2(x-2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$

(1.10.78) $a(x-x_1)^2(x-x_2) \leq 0; a > 0; x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow x \leq x_2$

Пример 1.10.78. $(x-1)^2(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

(1.10.79) $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) < 0; a > 0; x_1 < x_2 < x_3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x < x_1 \\ x_2 < x < x_3 \end{cases}$

Пример 1.10.79. $(x-1)(x-2)(x-3) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 2 < x < 3 \end{cases}$

(1.10.80) $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \leq 0; a > 0; x_1 < x_2 < x_3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x_1 \\ x_2 \leq x \leq x_3 \end{cases}$

Пример 1.10.80. $(x-1)(x-2)(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

Неравенства, содержащие знак модуля

(1.10.81) $|x| < a, a > 0 \Leftrightarrow -a < x < a$

Пример 1.10.81. $|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$

(1.10.82) $|x| < a, a \leq 0 \Leftrightarrow \emptyset$

Пример 1.10.82. $|x| < -4 \Leftrightarrow \emptyset$

(1.10.83) $|x| > a, a \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -a \\ x > a \end{cases}$

Пример 1.10.83а. $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 0 \end{cases}$

Пример 1.10.83б. $|x| > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x > 4 \end{cases}$

(1.10.84) $|x| > a, a < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Пример 1.10.84. $|x| > -4 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

(1.10.85) $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$

Пример 1.10.85. $|x-1| < x \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < x \\ x-1 > -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

(1.10.86) $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$

Пример 1.10.86. $|x-1| > x \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > x \\ x-1 < -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 > 0 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

(1.10.87) $|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) < 0$

Пример 1.10.87. $|x-1| < |x| \Leftrightarrow -(2x-1) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Иррациональные неравенства

(1.10.88) $\sqrt{x} < a, a > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < a^2$

Пример 1.10.88. $\sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq x < 4$

$$(1.10.89) \sqrt{x} < a, a \leq 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\text{Пример 1.10.89. } \sqrt{x} < -2 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.10.90) \sqrt{x} > a, a \geq 0 \Leftrightarrow x > a^2$$

$$\text{Пример 1.10.90a. } \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Пример 1.10.90б. } \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4$$

$$(1.10.91) \sqrt{x} > a, a < 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\text{Пример 1.10.91. } \sqrt{x} > -1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$(1.10.92) \sqrt[3]{x} < a \Leftrightarrow x < a^3$$

$$\text{Пример 1.10.92a. } \sqrt[3]{x} < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$\text{Пример 1.10.92б. } \sqrt[3]{x} < -1 \Leftrightarrow x < -1$$

$$(1.10.93) \sqrt[3]{x} > a \Leftrightarrow x > a^3$$

$$\text{Пример 1.10.93a. } \sqrt[3]{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Пример 1.10.93б. } \sqrt[3]{x} > 2 \Leftrightarrow x > 8$$

$$(1.10.94) \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

$$(1.10.95) \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \\ g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$(1.10.96) \quad \sqrt[3]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < g^3(x)$$

$$(1.10.97) \quad \sqrt[3]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^3(x)$$

$$(1.10.98) \quad \sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

$$(1.10.99) \quad \sqrt[3]{f(x)} < \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

Показательные неравенства

$$\bullet \underline{0 < a < 1}$$

$$(1.10.100) \quad a^x > a^b, 0 < a < 1 \Leftrightarrow x < b$$

$$\text{Пример 1.10.100.} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Leftrightarrow x < 5$$

$$(1.10.101) \quad a^x > b, 0 < a < 1, b > 0 \Leftrightarrow x < \log_a b$$

$$\text{Пример 1.10.101.} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x > 32 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \Leftrightarrow x < -5$$

$$(1.10.102) \quad a^x > b, 0 < a < 1, b \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Пример 1.10.102.} \quad (0,5)^x > -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}; (0,5)^x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$(1.10.103) \quad a^x < a^b, 0 < a < 1 \Leftrightarrow x > b$$

$$\text{Пример 1.10.103.} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Leftrightarrow x > 5$$

$$(1.10.104) \quad a^x < b, 0 < a < 1, b > 0 \Leftrightarrow x > \log_a b$$

$$\text{Пример 1.10.104. } \left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{16} \Leftrightarrow x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} \Leftrightarrow x > 4$$

$$(1.10.105) \ a^x < b, \ 0 < a < 1, \ b \leq 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\text{Пример 1.10.105. } (0, 3)^x < -1 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.10.106) \ a^{f(x)} < a^{g(x)}, \ 0 < a < 1 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

$$\text{Пример 1.10.106. } \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} \Leftrightarrow x^2 + 2x > x^2 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\bullet \underline{a > 1}$$

$$(1.10.107) \ a^x > a^b, \ a > 1 \Leftrightarrow x > b$$

$$\text{Пример 1.10.107. } 3^x > 3^5 \Leftrightarrow x > 5$$

$$(1.10.108) \ a^x > b, \ a > 1, \ b > 0 \Leftrightarrow x > \log_a b$$

$$\text{Пример 1.10.108. } 3^x > 4 \Leftrightarrow x > \log_3 4$$

$$(1.10.109) \ a^x > b, \ a > 1, \ b \leq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Пример 1.10.109. } 3^x > -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}; \ 3^x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$(1.10.110) \ a^x < a^b, \ a > 1 \Leftrightarrow x < b$$

$$\text{Пример 1.10.110. } 3^x < 3^5 \Leftrightarrow x < 5$$

$$(1.10.111) \ a^x < b, \ a > 1, \ b > 0 \Leftrightarrow x < \log_a b$$

$$\text{Пример 1.10.111. } 3^x < 4 \Leftrightarrow x < \log_3 4$$

$$(1.10.112) \ a^x < b, \ a > 1, \ b \leq 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\text{Пример 1.10.112. } 3^x < -1 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.10.113) \ a^{f(x)} < a^{g(x)}, \ a > 1 \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

$$\text{Пример 1.10.113. } 3^{2x} < 3^x \Leftrightarrow 2x < x \Leftrightarrow x < 0$$

Логарифмические неравенства

$$\bullet \underline{0 < a < 1}$$

$$(1.10.114) \ \log_a x > \log_a b, \ 0 < a < 1, \ b > 0 \Leftrightarrow 0 < x < b$$

$$\text{Пример 1.10.114. } \log_{\frac{1}{4}} x > \log_{\frac{1}{4}} 3 \Leftrightarrow 0 < x < 3$$

$$(1.10.115) \ \log_a x > b, \ 0 < a < 1 \Leftrightarrow 0 < x < a^b$$

$$\text{Пример 1.10.115. } \log_{\frac{1}{4}} x > 3 \Leftrightarrow 0 < x < \left(\frac{1}{4}\right)^3 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{64}$$

$$(1.10.116) \ \log_a f(x) > \log_a g(x), \ 0 < a < 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$$

$$\text{Пример 1.10.116. } \log_{\frac{1}{3}} (4x - 3) > \log_{\frac{1}{3}} (x + 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < 4x - 3 < x + 3 \Leftrightarrow \frac{3}{4} < x < 2$$

$$(1.10.117) \ \log_a x < \log_a b, \ 0 < a < 1, \ b > 0 \Leftrightarrow x > b$$

$$\text{Пример 1.10.117. } \log_{\frac{1}{4}} x < \log_{\frac{1}{4}} 3 \Leftrightarrow x > 3$$

$$(1.10.118) \log_a x < b, \quad 0 < a < 1 \Leftrightarrow x > a^b$$

$$\text{Пример 1.10.118. } \log_{\frac{1}{4}} x < 3 \Leftrightarrow x > \left(\frac{1}{4}\right)^3 \Leftrightarrow x > \frac{1}{64}$$

$$\bullet \underline{a > 1}$$

$$(1.10.119) \log_a x > \log_a b, \quad a > 1, b > 0 \Leftrightarrow x > b$$

$$\text{Пример 1.10.119. } \log_5 x > \log_5 3 \Leftrightarrow x > 3$$

$$(1.10.120) \log_a x > b, \quad a > 1 \Leftrightarrow x > a^b$$

$$\text{Пример 1.10.120. } \log_5 x > 3 \Leftrightarrow x > 5^3 \Leftrightarrow x > 125$$

$$(1.10.121) \log_a f(x) > \log_a g(x), \quad a > 1 \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$$

$$\text{Пример 1.10.121. } \log_2 (x-2) > \log_2 3x \Leftrightarrow x-2 > 3x > 0 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.10.122) \log_a x < \log_a b, \quad a > 1, b > 0 \Leftrightarrow 0 < x < b$$

$$\text{Пример 1.10.122. } \log_5 x < \log_5 3 \Leftrightarrow 0 < x < 3$$

$$(1.10.123) \log_a x < b, \quad a > 1 \Leftrightarrow 0 < x < a^b$$

$$\text{Пример 1.10.123. } \log_5 x < 3 \Leftrightarrow x < 5^3 \Leftrightarrow 0 < x < 125$$

Тригонометрические неравенства

$$\bullet \underline{\sin x < a; \sin x > a; n \in \mathbb{Z}}$$

$$(1.10.124) \sin x < a, |a| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < \arcsin a + 2\pi n$$

$$(1.10.125) \sin x < a, a \leq -1 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.10.126) \sin x < 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$(1.10.127) \sin x < a, \quad a > 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$(1.10.128) \sin x > a, \quad |a| < 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n$$

$$(1.10.129) \sin x > a, \quad a < -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$(1.10.130) \sin x > -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$(1.10.131) \sin x > 0 \Leftrightarrow 2\pi n < x < \pi + 2\pi n$$

$$(1.10.132) \sin x > a, \quad a \geq 1 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\bullet \cos x < a; \cos x > a; n \in \mathbb{Z}$$

$$(1.10.133) \cos x < a, \quad |a| < 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n$$

$$(1.10.134) \cos x < a, \quad a \leq -1 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$(1.10.135) \cos x < 1 \Leftrightarrow x \neq 2\pi n$$

$$(1.10.136) \cos x < a, \quad a > 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$(1.10.137) \cos x > a, \quad |a| < 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n$$

$$(1.10.138) \cos x > a, \quad a < -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$(1.10.139) \cos x > -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + 2\pi n$$

$$(1.10.140) \cos x > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$(1.10.141) \quad \cos x > a, a \geq 1 \Leftrightarrow \emptyset$$

$$\bullet \underline{\operatorname{tg} x < a; \operatorname{tg} x > a; n \in \mathbb{Z}}$$

$$(1.10.142) \quad \operatorname{tg} x < a \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n$$

$$(1.10.143) \quad \operatorname{tg} x > a \Leftrightarrow \operatorname{arctg} a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$(1.10.144) \quad \operatorname{tg} x > 0 \Leftrightarrow \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\bullet \underline{\operatorname{ctg} x < a; \operatorname{ctg} x > a; n \in \mathbb{Z}}$$

$$(1.10.145) \quad \operatorname{ctg} x < a \Leftrightarrow \operatorname{arcctg} a + \pi n < x < \pi + \pi n$$

$$(1.10.146) \quad \operatorname{ctg} x > a \Leftrightarrow \pi n < x < \operatorname{arcctg} a + \pi n$$

$$(1.10.147) \quad \operatorname{ctg} x > 0 \Leftrightarrow \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$$

§ 1.11. Типовые способы замены переменной

$$(1.11.1) \quad x + p = y \Rightarrow x^2 + 2px + p^2 = (x + p)^2 = y^2$$

$$(1.11.2) \quad x + p = y \Rightarrow x^2 + 2px + p^2 - q^2 = y^2 - q^2$$

$$(1.11.3) \quad x + \frac{b}{2a} = y; a \neq 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = \\ = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] = a \left(y^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

$$(1.11.4) \quad x + \frac{1}{x} = y; x \neq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2; x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$$

$$(1.11.5) \quad \sqrt{x} = y; x \geq 0 \Rightarrow x = y^2$$

$$(1.11.6) \quad \sqrt[3]{x} = y \Rightarrow x = y^3$$

$$(1.11.7) \quad \sqrt[4]{x} = y; x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} = y^2, x = y^4$$

$$(1.11.8) \quad \sqrt[6]{x} = y; x \geq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = y^2; \sqrt{x} = y^3; x = y^6$$

$$(1.11.9) \quad a^x = y, a^x > 0 \quad \forall x \Rightarrow a^{-x} = \frac{1}{y}; a^{kx} = y^k; a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{y}$$

$$(1.11.10) \quad x + y = u, xy = v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = u^2 - 2v; x^3 + y^3 = u^3 - 3uv$$

$$(1.11.11) \quad x + y + z = u, xy + yz + zx = v, xyz = w \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = u^2 - 2v, x^3 + y^3 + z^3 = u^3 - 3uv + 3w$$

$$(1.11.12) \quad \sin x = t \Rightarrow \sin^2 x = t^2, \cos^2 x = 1 - t^2$$

$$(1.11.13) \quad \operatorname{tg} x = t; \cos x \neq 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$(1.11.14) \quad \cos 2x = t \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1-t}{2}, \cos^2 x = \frac{1+t}{2}$$

$$(1.11.15) \quad \sin x \pm \cos x = t \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \pm \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$(1.11.16) \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \cos \frac{x}{2} \neq 0 \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

§ 1.12. Производные основных элементарных функций.

Правила дифференцирования

Таблица производных

$$(1.12.1) \quad c' = 0, \quad c - \text{постоянная}$$

$$(1.12.2) \quad x' = 1$$

$$(1.12.3) \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(1.12.4) \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(1.12.5) \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(1.12.6) \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(1.12.7) \quad (e^x)' = e^x$$

$$(1.12.8) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(1.12.9) \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(1.12.10) \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$(1.12.11) \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(1.12.12) \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(1.12.13) \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(1.12.14) \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(1.12.15) \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(1.12.16) \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(1.12.17) \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Правила дифференцирования ($u = u(x)$, $v = v(x)$)

$$(1.12.18) \quad (cu)' = cu', \quad c - \text{постоянная}$$

$$\text{Пример 1.12.18. } (4x)' = 4; \quad (2 \sin x)' = 2 \cos x$$

$$(1.12.19) \quad (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$\text{Пример 1.12.19. } (x^2 + \sqrt{x})' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(1.12.20) \quad (uv)' = u'v + uv'$$

$$\text{Пример 1.12.20. } (x \sin x)' = \sin x + x \cos x$$

$$(1.12.21) \quad (f^2(x))' = 2f(x)f'(x)$$

Пример 1.12.21. $\left((x^2 + 1)^2\right)' = 4x(x^2 + 1)$

$$(1.12.22) \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Пример 1.12.22. $\left(\frac{x}{ax + b}\right)' = \frac{b}{(ax + b)^2}$

$$(1.12.23) \quad \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Пример 1.12.23. $\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}$

$$(1.12.24) \quad (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

Пример 1.12.24. $[x(x + 2)(x + 3)]' =$

$$= (x + 2)(x + 3) + x(x + 3) + x(x + 2)$$

Производная сложной функции

$$(1.12.25) \quad \begin{aligned} h(x) &= f(g(x)); \\ h'(x) &= (f(g(x)))' = f'_g(g) \cdot g'_x(x); h'_x = f'_g \cdot g'_x \end{aligned}$$

Пример 1.12.25. $\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Уравнение касательной к графику функции

$$(1.12.26) \quad y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

§ 1.13. Формулы геометрии

Треугольники (a, b, c — стороны; α, β, γ — углы, противолежащие сторонам a, b, c ; h — высота, проведенная к основанию a ; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности)

- Сумма внутренних углов треугольника

$$(1.13.1) \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

- Соотношение между сторонами (неравенство треугольника)

$$(1.13.2) \quad a + b > c; b + c > a; c + a > b$$

- Периметр и полупериметр

$$(1.13.3) \quad P = a + b + c; p = \frac{a + b + c}{2}$$

- Вычисление площади треугольника

$$(1.13.4) \quad S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$

$$(1.13.5) \quad S = \frac{abc}{4R} = p \cdot r$$

$$(1.13.6) \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{— формула Герона}$$

(1.13.7) $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ — площадь равностороннего треугольника

(1.13.8) $S = \frac{1}{2}ab$ — площадь прямоугольного треугольника с катетами a, b

- Теорема Пифагора

(1.13.9) $c^2 = a^2 + b^2$ — в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов

- Теорема синусов

(1.13.10) $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ — стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов

- Теорема косинусов

(1.13.11) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ — квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними

Четырехугольники (d_1 и d_2 — диагонали; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — углы; φ — угол между диагоналями; h — высота, проведенная к основанию a ; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности)

- Сумма внутренних углов выпуклого четырехугольника

(1.13.12) $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

- Вычисление площади четырехугольника

(1.13.13) $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin \varphi$ — площадь выпуклого четырехугольника

(1.13.14) $S = ah = ab \sin \alpha$ — площадь параллелограмма (a и b — стороны; α — угол между ними)

(1.13.15) $S = ah = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2$ — площадь ромба (a — сторона; α — угол между сторонами)

(1.13.16) $S = ab$ — площадь прямоугольника со сторонами a и b

(1.13.17) $S = a^2$ — площадь квадрата со стороной a

(1.13.18) $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ — площадь трапеции с основаниями a и b

Многоугольники (n — число сторон; P_n — периметр; S_n — площадь; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности)

- Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника

(1.13.19) $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 180^\circ (n - 2)$

- Длина стороны правильного многоугольника

(1.13.20) $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n} = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$

- Площадь правильного многоугольника

(1.13.21) $S_n = \frac{1}{2} P_n r = \frac{1}{2} R^2 n \sin \frac{360^\circ}{n}$

Окружность и круг (R — радиус окружности, круга)

- Длина окружности

(1.13.22) $L = 2\pi R$

- Длина дуги окружности с центральным углом α° (в градусах) или β (в радианах)

$$(1.13.23) \quad L = \pi R \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = R \cdot \beta$$

- Площадь круга

$$(1.13.24) \quad S = \pi R^2$$

- Площадь кругового сектора с центральным углом α° (в градусах) или β (в радианах)

$$(1.13.25) \quad S = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} R^2 \beta$$

Вычисление объемов и площадей поверхностей

($S_{\text{осн}}$ — площадь основания, H — высота)

- Объем призмы

$$(1.13.26) \quad V = S_{\text{осн}} H$$

- Объем кругового цилиндра (R — радиус основания)

$$(1.13.27) \quad V = S_{\text{осн}} H = \pi R^2 H$$

- Площадь боковой поверхности кругового цилиндра (R — радиус основания)

$$(1.13.28) \quad S_{\text{бок}} = 2\pi R H$$

- Объем кругового конуса (R — радиус основания)

$$(1.13.29) \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

- Площадь боковой поверхности кругового конуса (L — образующая конуса)

$$(1.13.30) \quad S_{\text{бок}} = \pi RL$$

- Объем пирамиды

$$(1.13.31) \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H$$

- Объем шара радиуса R

$$(1.13.32) \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

- Площадь поверхности сферы радиуса R

$$(1.13.33) \quad S = 4\pi R^2$$

Действия над векторами в координатной форме

- Длина вектора

$$(1.13.34) \quad |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; |\vec{a}| \geq 0; \vec{a} = \{x; y; z\}$$

- Равенство векторов

$$(1.13.35) \quad \vec{a} = \vec{b}; \vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}; \vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$$

- Сложение, вычитание и умножение на число

$$(1.13.36) \quad \vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$$

$$(1.13.37) \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$$

$$(1.13.38) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(1.13.39) \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$(1.13.40) \quad \alpha \vec{a} = \vec{a} \alpha = \{\alpha x; \alpha y; \alpha z\}$$

$$(1.13.41) \quad |\alpha \vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$$

$$(1.13.42) \quad \alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a}$$

$$(1.13.43) \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$$

$$(1.13.44) \quad (\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$$

$$(1.13.45) \quad \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

- Скалярное произведение двух векторов

$$(1.13.46) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi; \varphi - \text{угол между векторами}$$

$$(1.13.47) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$(1.13.48) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(1.13.49) \quad (\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$(1.13.50) \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$(1.13.51) \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2 \geq 0$$

$$(1.13.52) \quad \vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{b} = 0$$

$$(1.13.53) \quad \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$(1.13.54) \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

Расстояние между двумя точками

$$(1.13.55) \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Уравнение окружности

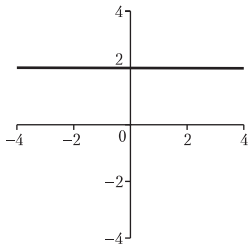
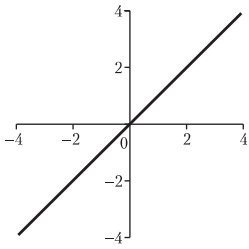
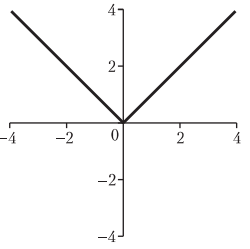
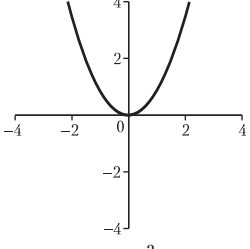
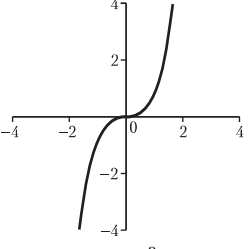
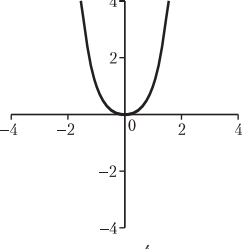
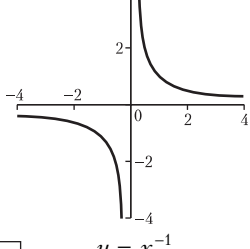
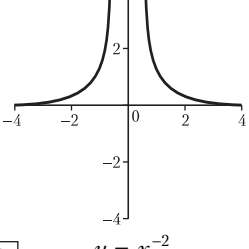
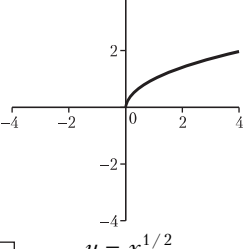
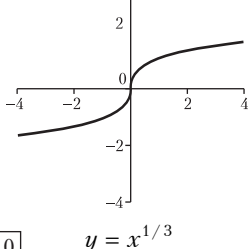
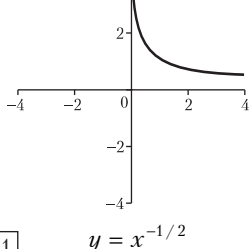
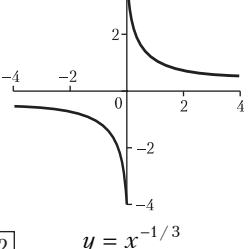
$$(1.13.56) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

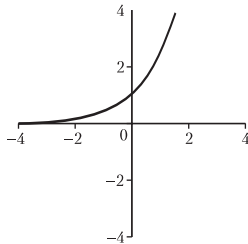
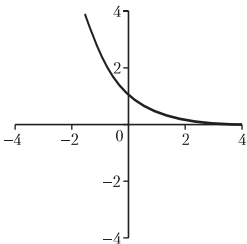
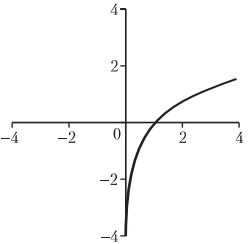
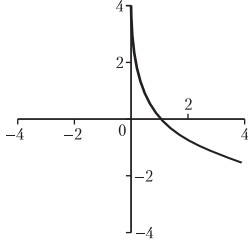
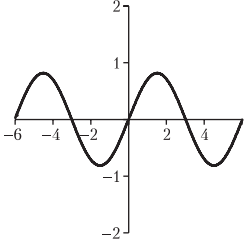
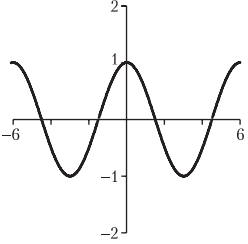
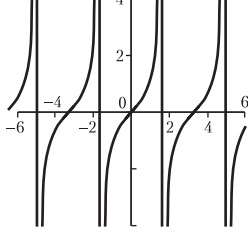
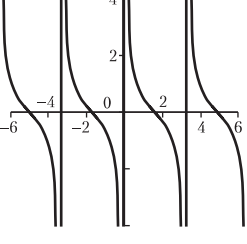
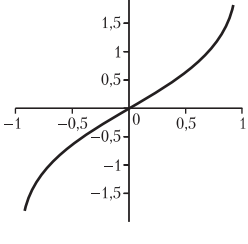
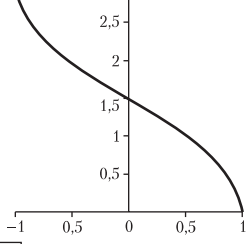
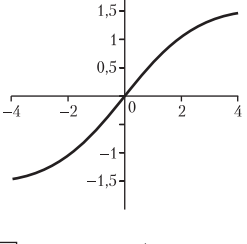
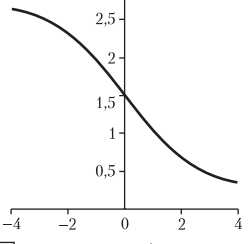
$$(1.13.57) \quad x^2 + y^2 = R^2$$

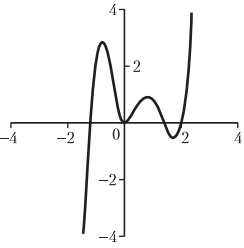
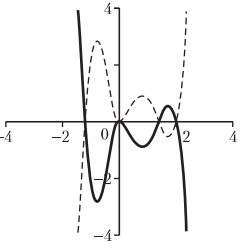
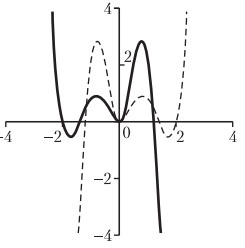
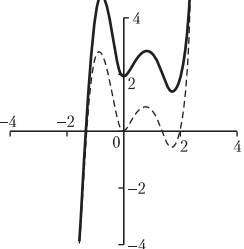
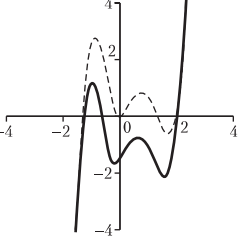
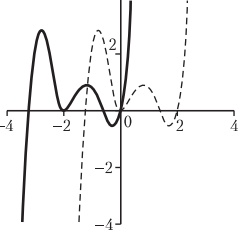
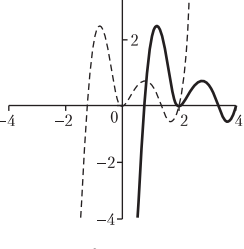
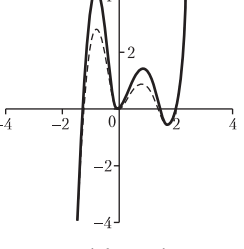
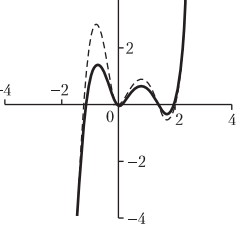
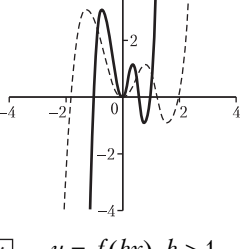
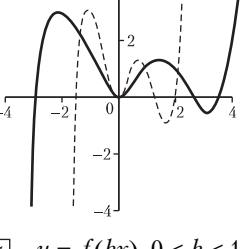
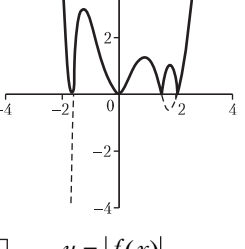
Координаты середины отрезка

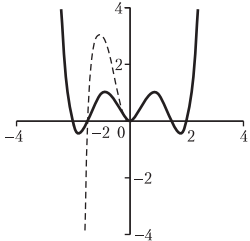
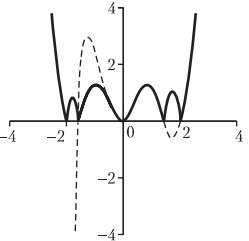
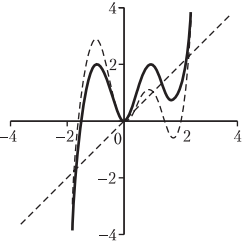
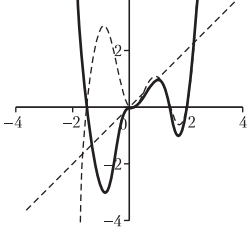
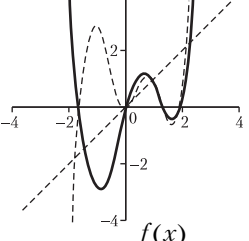
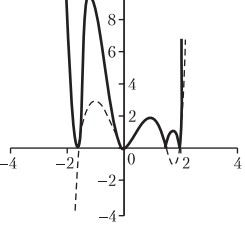
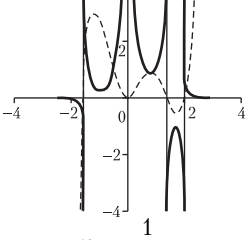
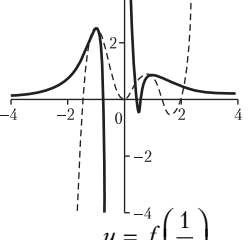
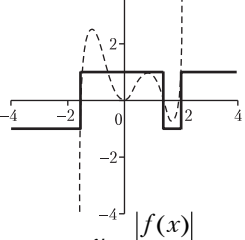
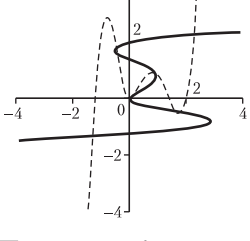
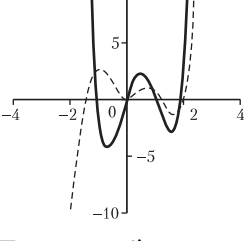
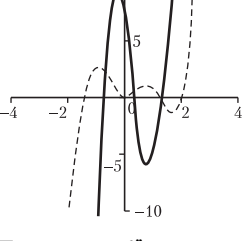
$$(1.13.58) \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}; z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

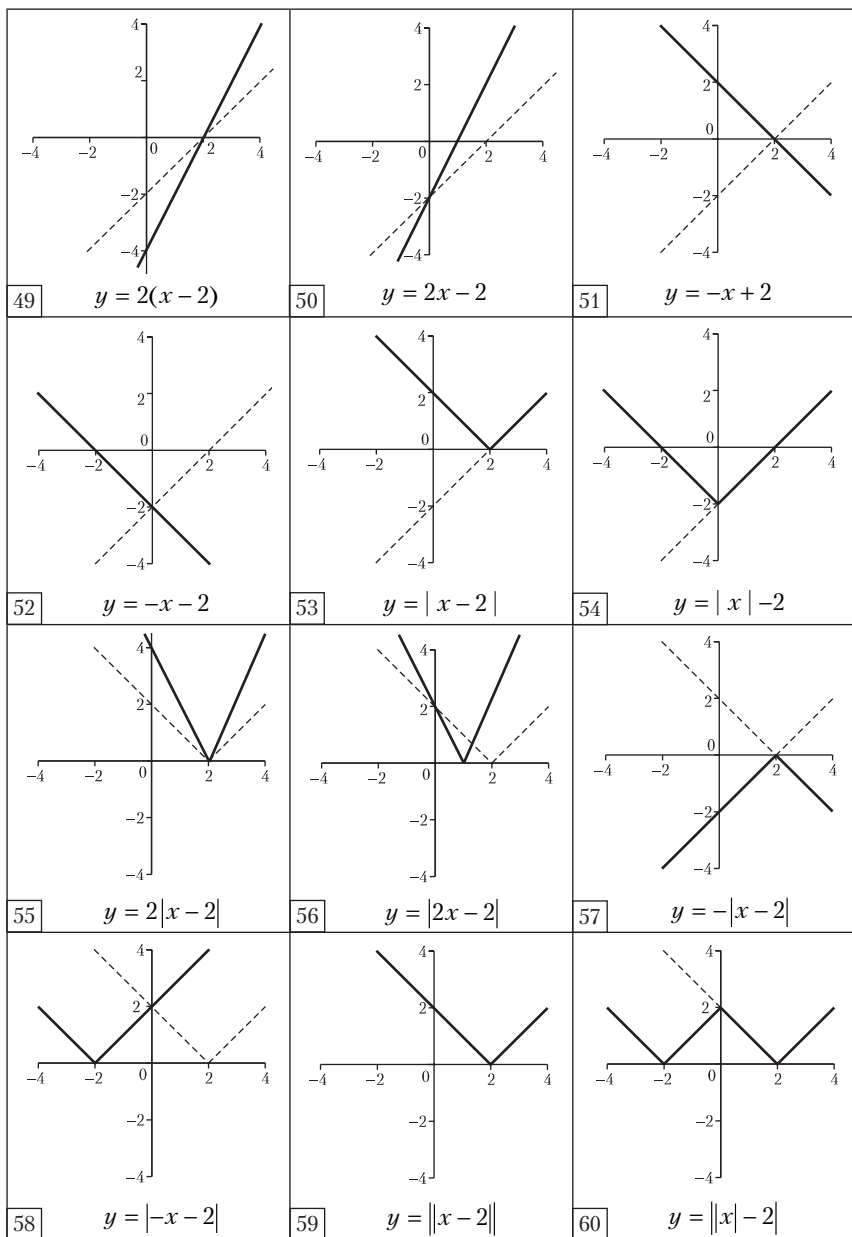
Часть 2. Графики функций

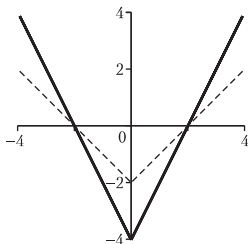
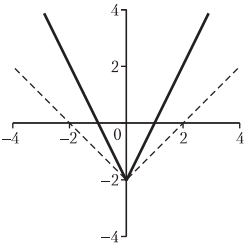
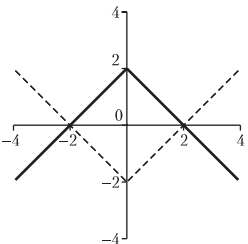
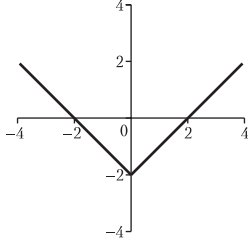
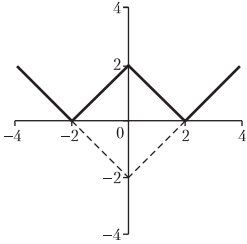
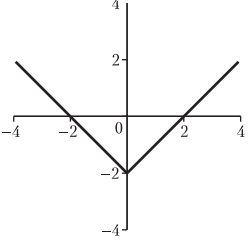
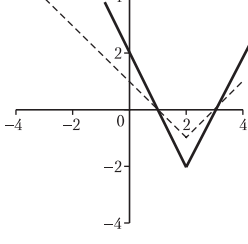
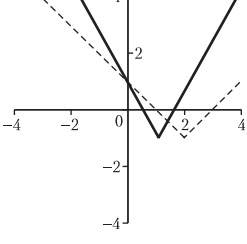
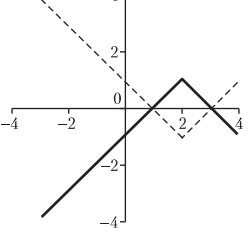
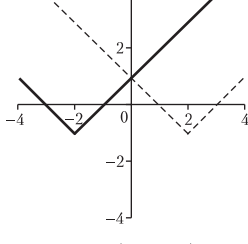
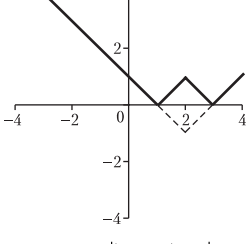
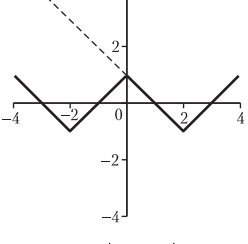
 1 $y = \text{const}$	 2 $y = x$	 3 $y = x$
 4 $y = x^2$	 5 $y = x^3$	 6 $y = x^4$
 7 $y = x^{-1}$	 8 $y = x^{-2}$	 9 $y = x^{1/2}$
 10 $y = x^{1/3}$	 11 $y = x^{-1/2}$	 12 $y = x^{-1/3}$

 13 $y = a^x; a > 1$	 14 $y = a^x; 0 < a < 1$	 15 $y = \log_a x; a > 1$
 16 $y = \log_a x; 0 < a < 1$	 17 $y = \sin x$	 18 $y = \cos x$
 19 $y = \operatorname{tg} x$	 20 $y = \operatorname{ctg} x$	 21 $y = \arcsin x$
 22 $y = \arccos x$	 23 $y = \operatorname{arctg} x$	 24 $y = \operatorname{arcctg} x$

 25 $y = f(x)$	 26 $y = -f(x)$	 27 $y = f(-x)$
 28 $y = f(x) + a, a > 0$	 29 $y = f(x) - a, a > 0$	 30 $y = f(x + a), a > 0$
 31 $y = f(x - a), a > 0$	 32 $y = kf(x), k > 1$	 33 $y = kf(x), 0 < k < 1$
 34 $y = f(kx), k > 1$	 35 $y = f(kx), 0 < k < 1$	 36 $y = f(x)$

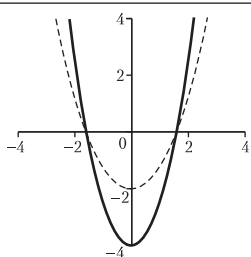
 37 $y = f(x)$	 38 $y = f(x)$	 39 $y = f(x) + g(x)$
 40 $y = f(x)g(x)$	 41 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$	 42 $y = f^2(x)$
 43 $y = \frac{1}{f(x)}$	 44 $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$	 45 $y = \frac{ f(x) }{f(x)}$
 46 $x = f(y)$	 47 $y = f'(x)$	 48 $y = f''(x)$



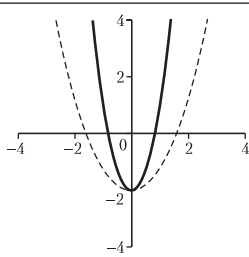
 61 $y = 2(x - 2)$	 62 $y = 2x - 2$	 63 $y = - x + 2$
 64 $y = -x - 2$	 65 $y = x - 2$	 66 $y = x - 2$
 67 $y = 2 x - 2 - 2$	 68 $y = 2x - 2 - 1$	 69 $y = - x - 2 + 1$
 70 $y = -x - 2 - 1$	 71 $y = x - 2 - 1$	 72 $y = x - 2 - 1$

73 $y = 2(x - 2 + 1)$	74 $y = 2x - 2 + 1$	75 $y = - x - 2 - 1$
76 $y = -x - 2 + 1$	77 $y = x - 2 + 1 $	78 $y = x - 2 + 1$
79 $y = 2 x + 2x - 2$	80 $y = 2 x + 2x - 1$	81 $y = - x - x + 1$
82 $y = x - x - 1$	83 $y = x + x - 1 $	84 $y = x + 2x - 1$

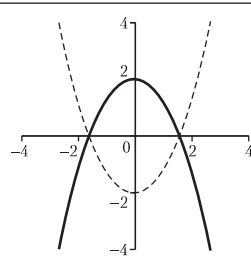
85 $y = 2(x + x-1)$	86 $y = - x - x-1 $	87 $y = x + x -1 $
88 $y = 2 x - 2 x-1 $	89 $y = - x + x-1 $	90 $y = x - x -1 $
91 $y = 2 x-2 -1 $	92 $y = - x-2 -1 $	93 $y = x-2 -1 $
94 $y = x + x-1 + x$	95 $y = x - x-1 + x$	96 $y = x-2 -1 + x$



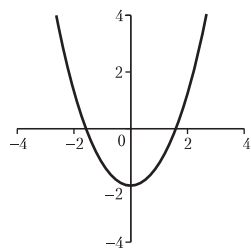
97 $y = 2(x^2 - 2)$



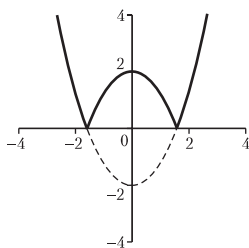
98 $y = 4x^2 - 2$



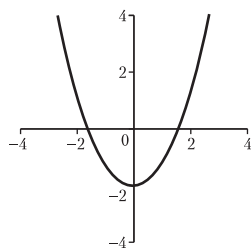
99 $y = -(x^2 - 2)$



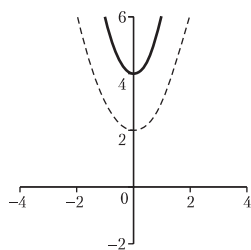
100 $y = (-x)^2 - 2$



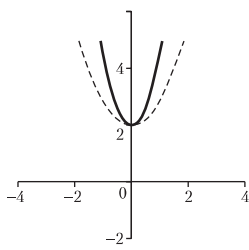
101 $y = |x^2 - 2|$



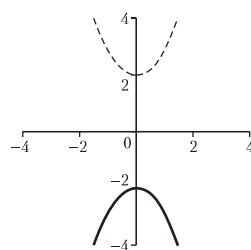
102 $y = |x|^2 - 2$



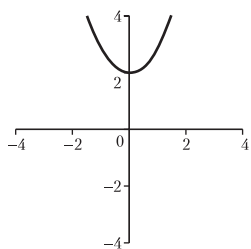
103 $y = 2(x^2 + 2)$



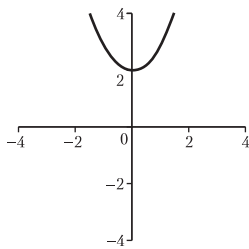
104 $y = 4x^2 + 2$



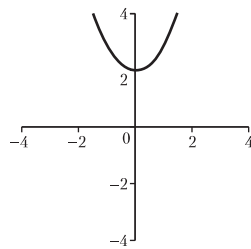
105 $y = -(x^2 + 2)$



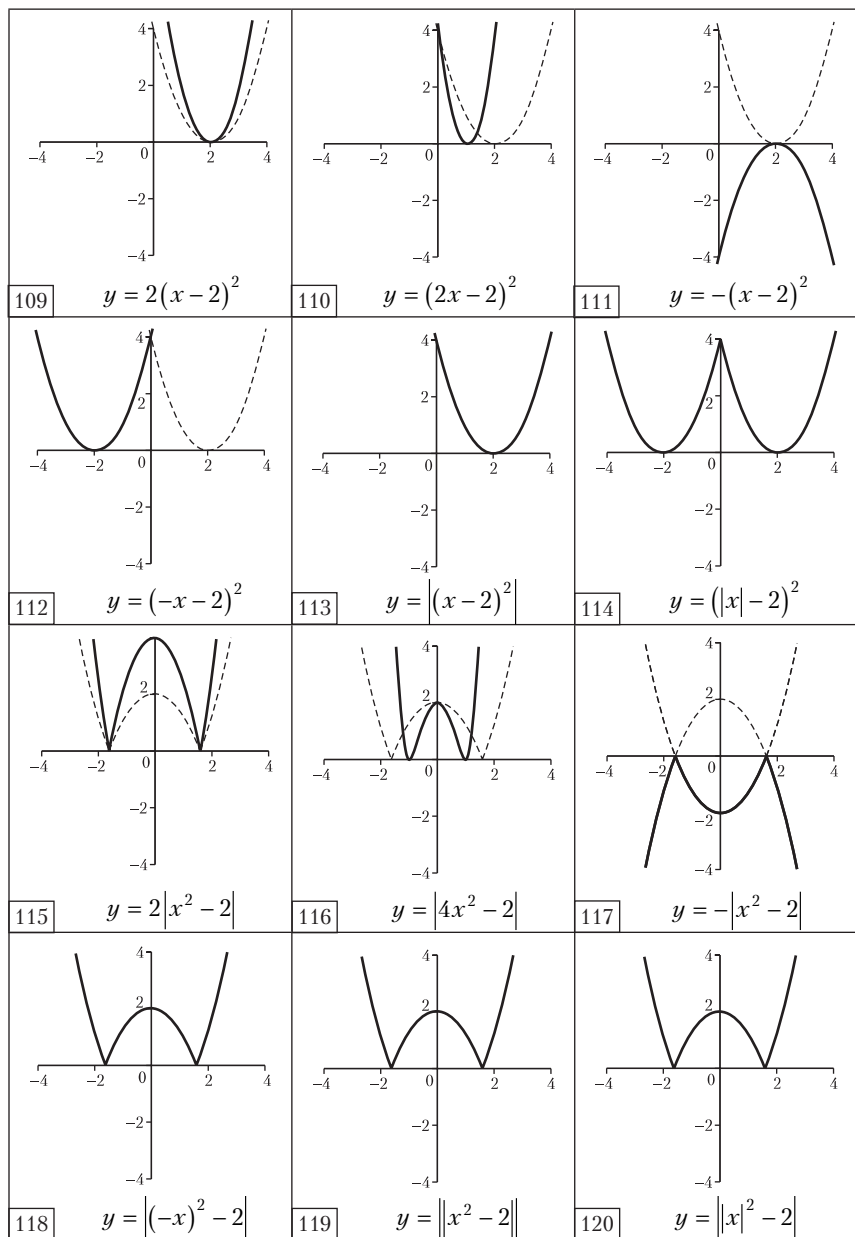
106 $y = (-x)^2 + 2$

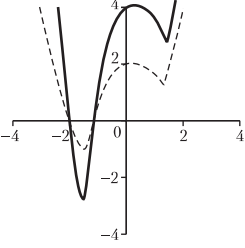
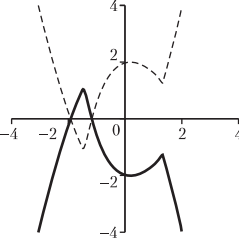
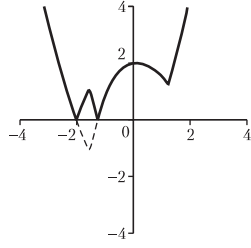
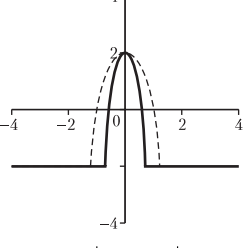
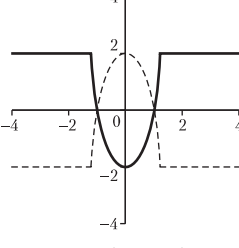
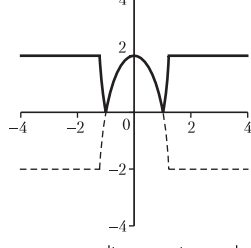
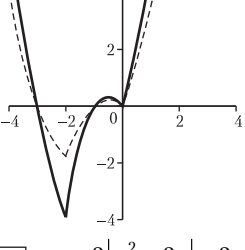
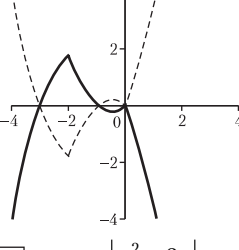
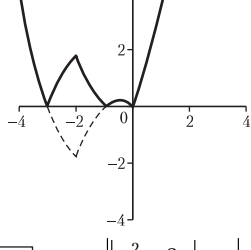
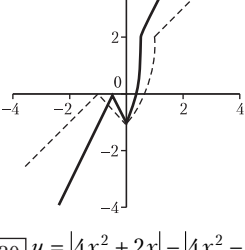
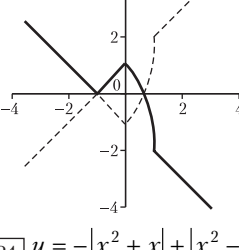
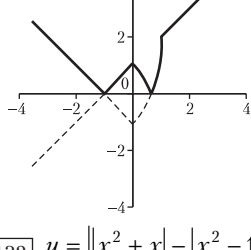


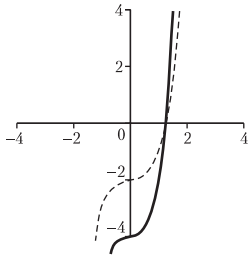
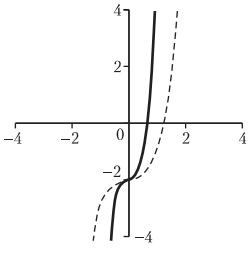
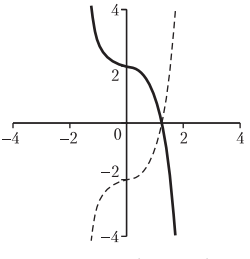
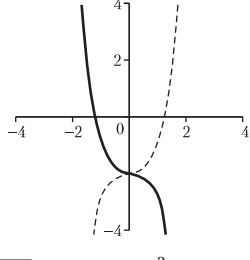
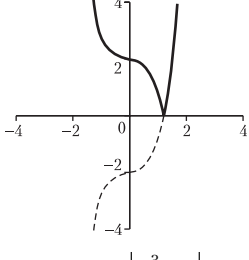
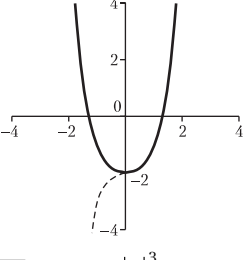
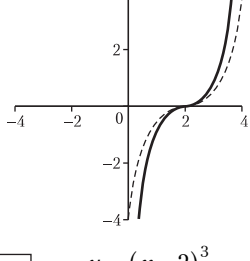
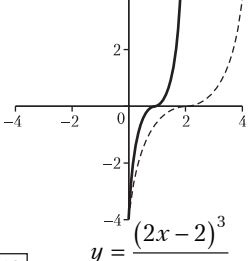
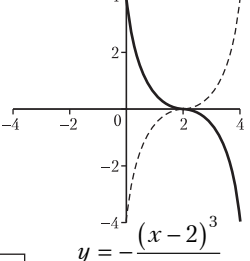
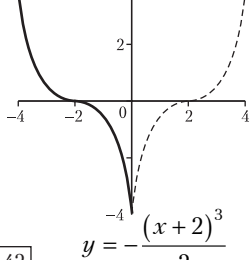
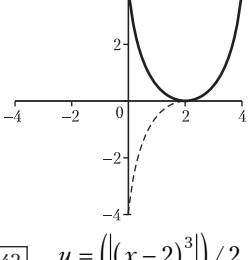
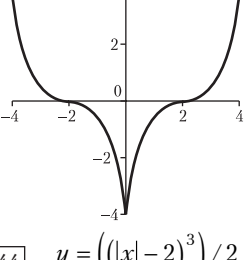
107 $y = |x^2 + 2|$

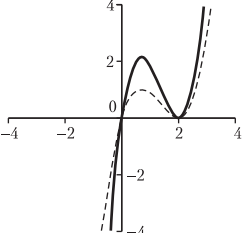
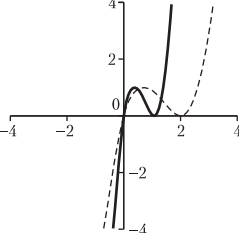
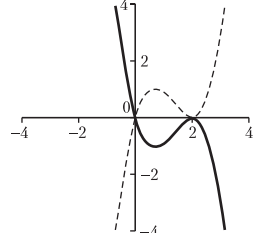
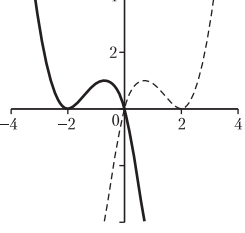
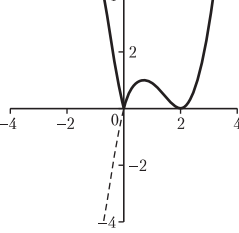
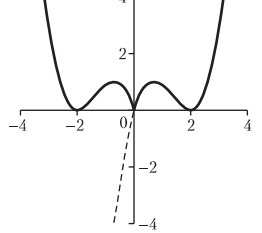
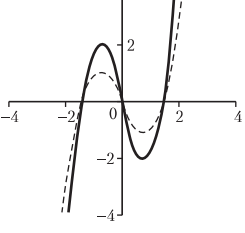
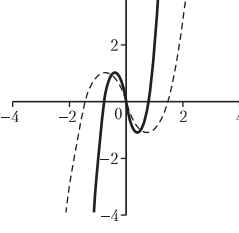
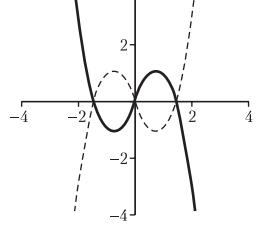
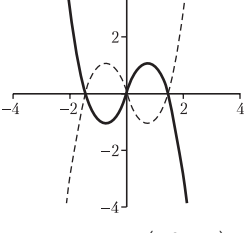
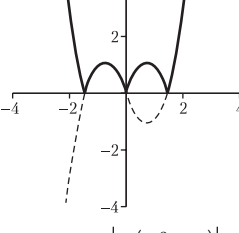
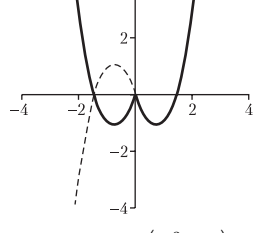


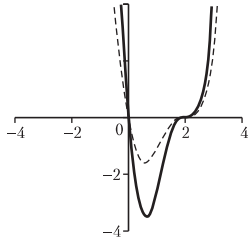
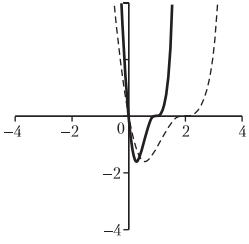
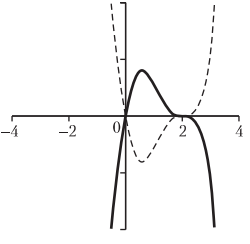
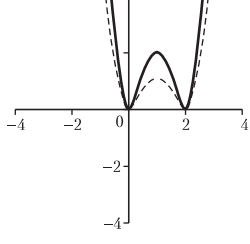
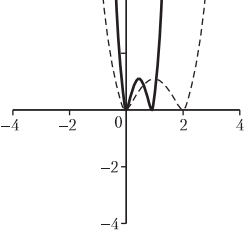
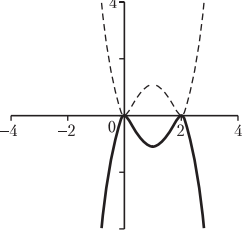
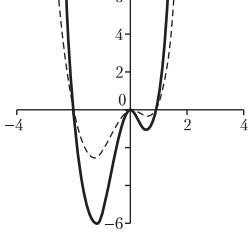
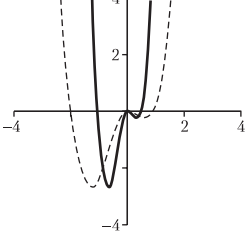
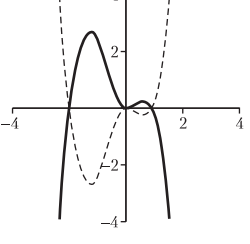
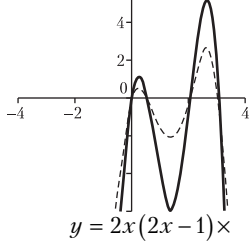
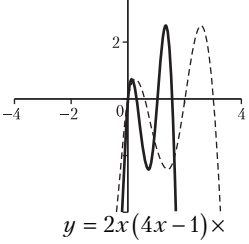
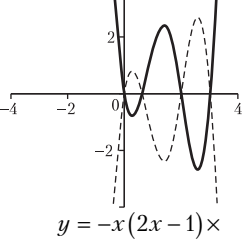
108 $y = |x|^2 + 2$

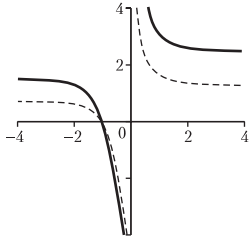
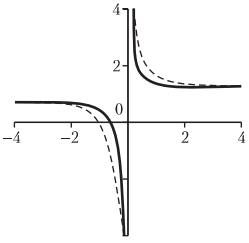
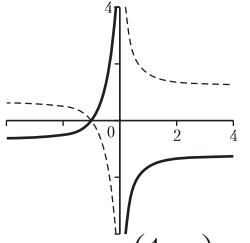
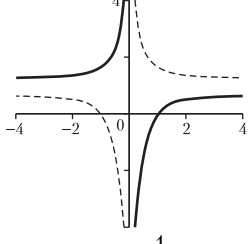
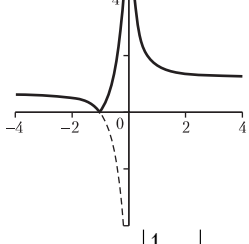
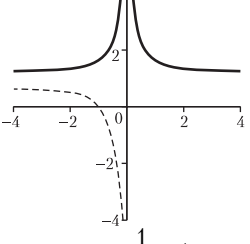
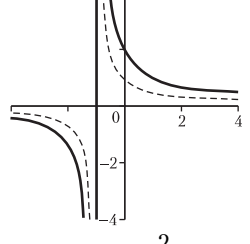
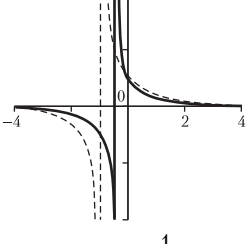
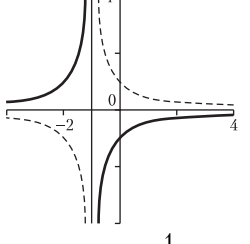
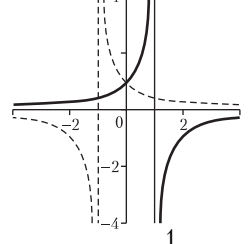
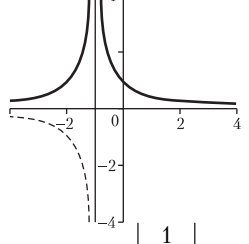
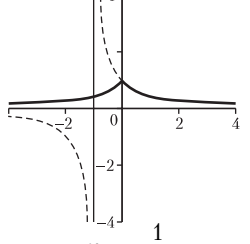


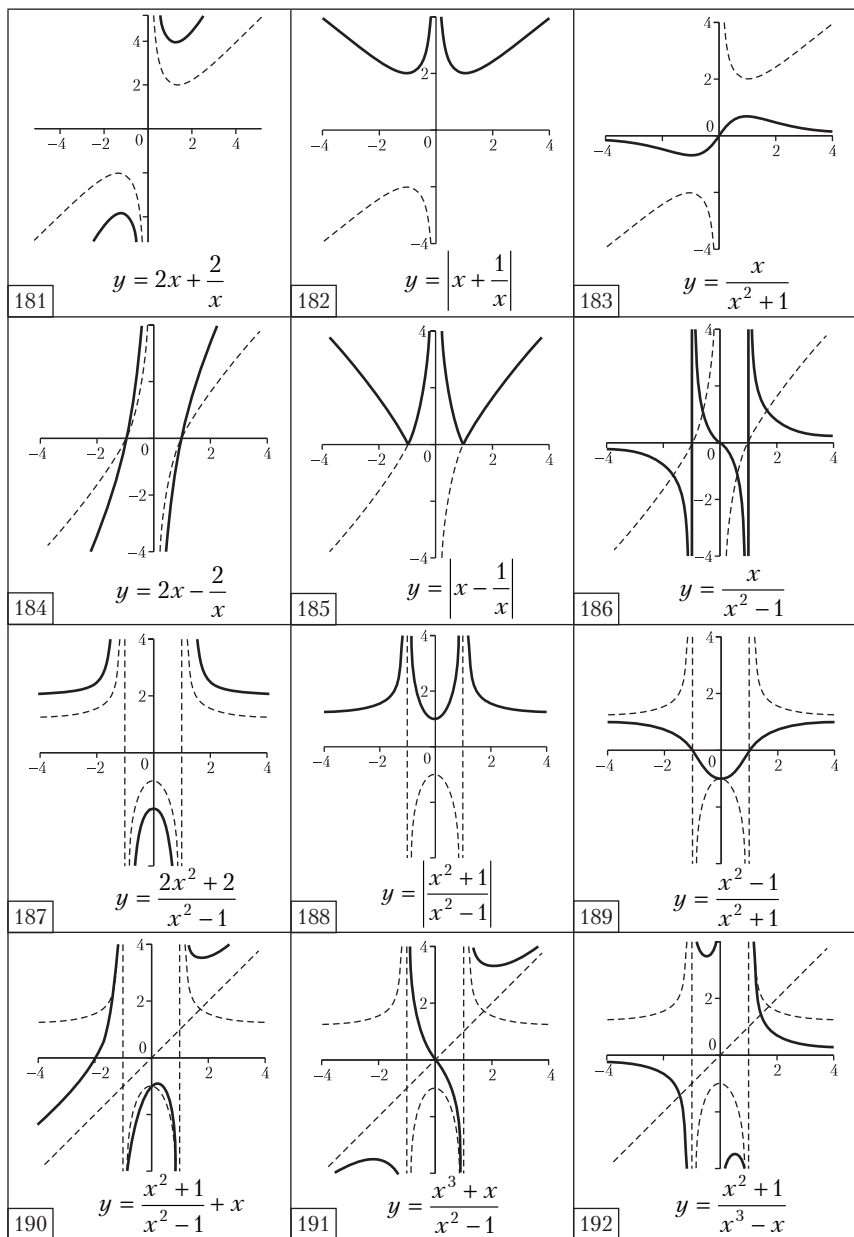
 121 $y = 2 x^2 - 2 + 2x$	 122 $y = - x^2 - 2 - x$	 123 $y = x^2 - 2 + x$
 124 $y = 4x^2 - 2 - 4x^2$	 125 $y = - x^2 - 2 + x^2$	 126 $y = x^2 - 2 - x^2$
 127 $y = 2 x^2 + 2x + 2x$	 128 $y = - x^2 + 2x - x$	 129 $y = x^2 + 2x + x$
 130 $y = 4x^2 + 2x - 4x^2 - 1$	 131 $y = - x^2 + x + x^2 - 1$	 132 $y = x^2 + x - x^2 - 1$

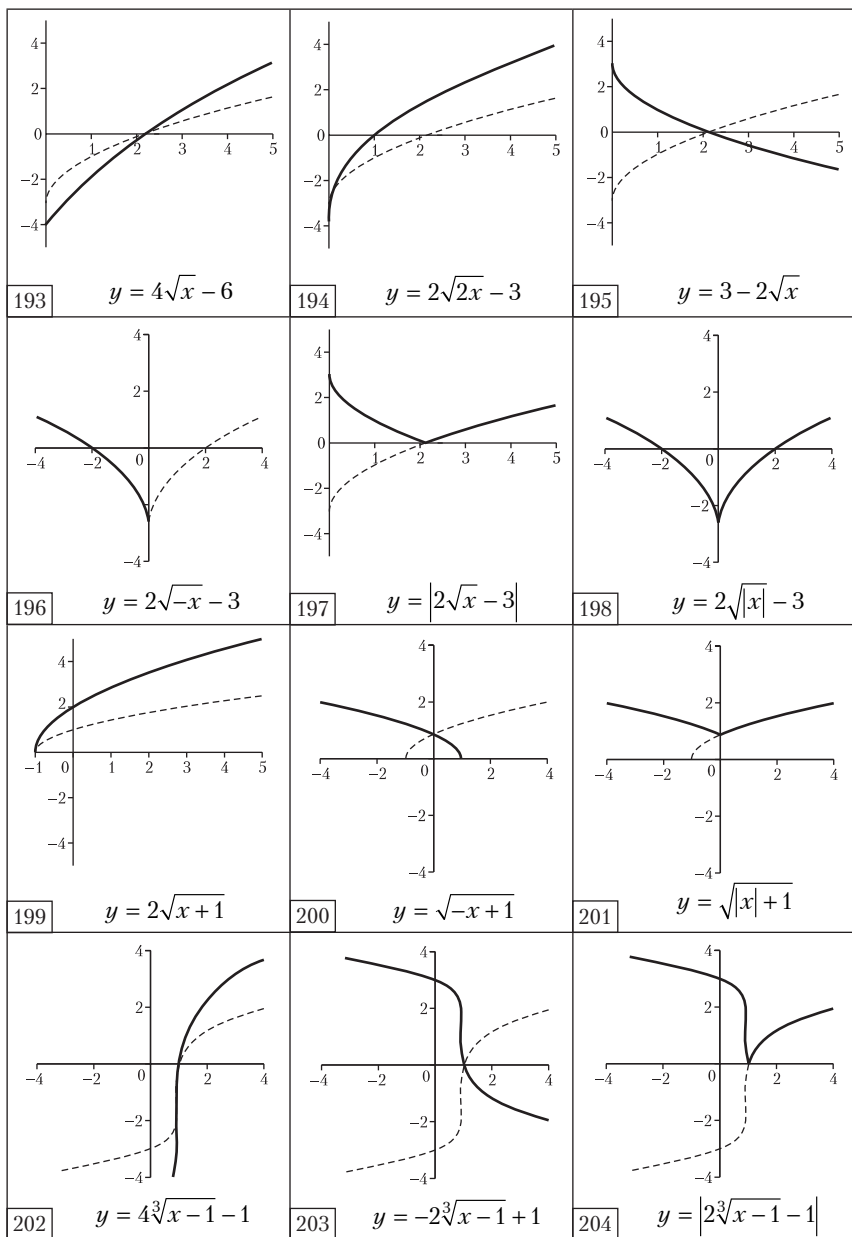
 133 $y = 2(x^3 - 2)$	 134 $y = 8x^3 - 2$	 135 $y = -(x^3 - 2)$
 136 $y = -x^3 - 2$	 137 $y = x^3 - 2$	 138 $y = x ^3 - 2$
 139 $y = (x - 2)^3$	 140 $y = \frac{(2x - 2)^3}{2}$	 141 $y = -\frac{(x - 2)^3}{2}$
 142 $y = -\frac{(x + 2)^3}{2}$	 143 $y = \frac{((x - 2)^3)}{2}$	 144 $y = \frac{(x - 2)^3}{2}$

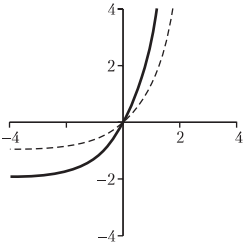
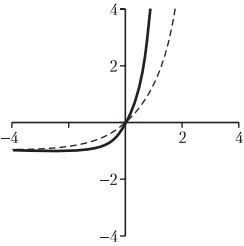
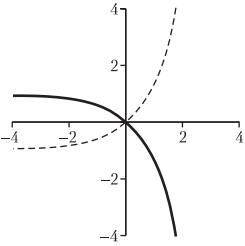
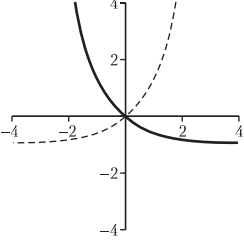
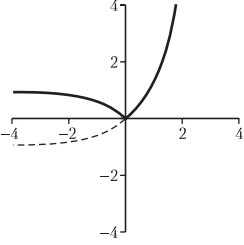
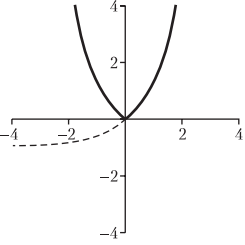
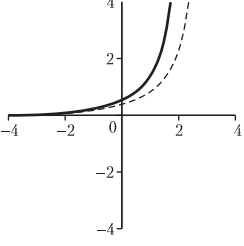
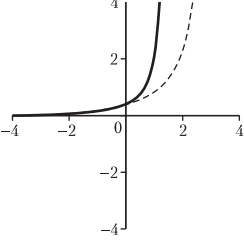
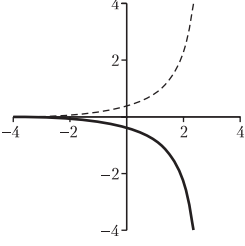
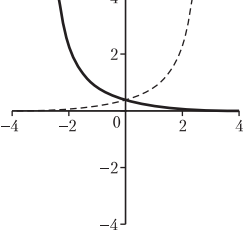
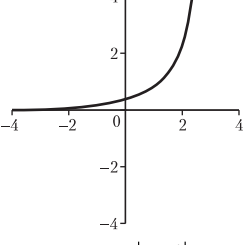
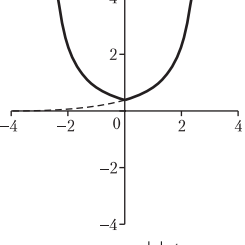
 145 $y = 2x(x-2)^2$	 146 $y = 2x(2x-2)^2$	 147 $y = -x(x-2)^2$
 148 $y = -x(x+2)^2$	 149 $y = x(x-2)^2$	 150 $y = x (x -2)^2$
 151 $y = 2x(x^2-2)$	 152 $y = 2x(4x^2-2)$	 153 $y = -x(x^2-2)$
 154 $y = -x(x^2-2)$	 155 $y = x(x^2-2)$	 156 $y = x (x^2-2)$

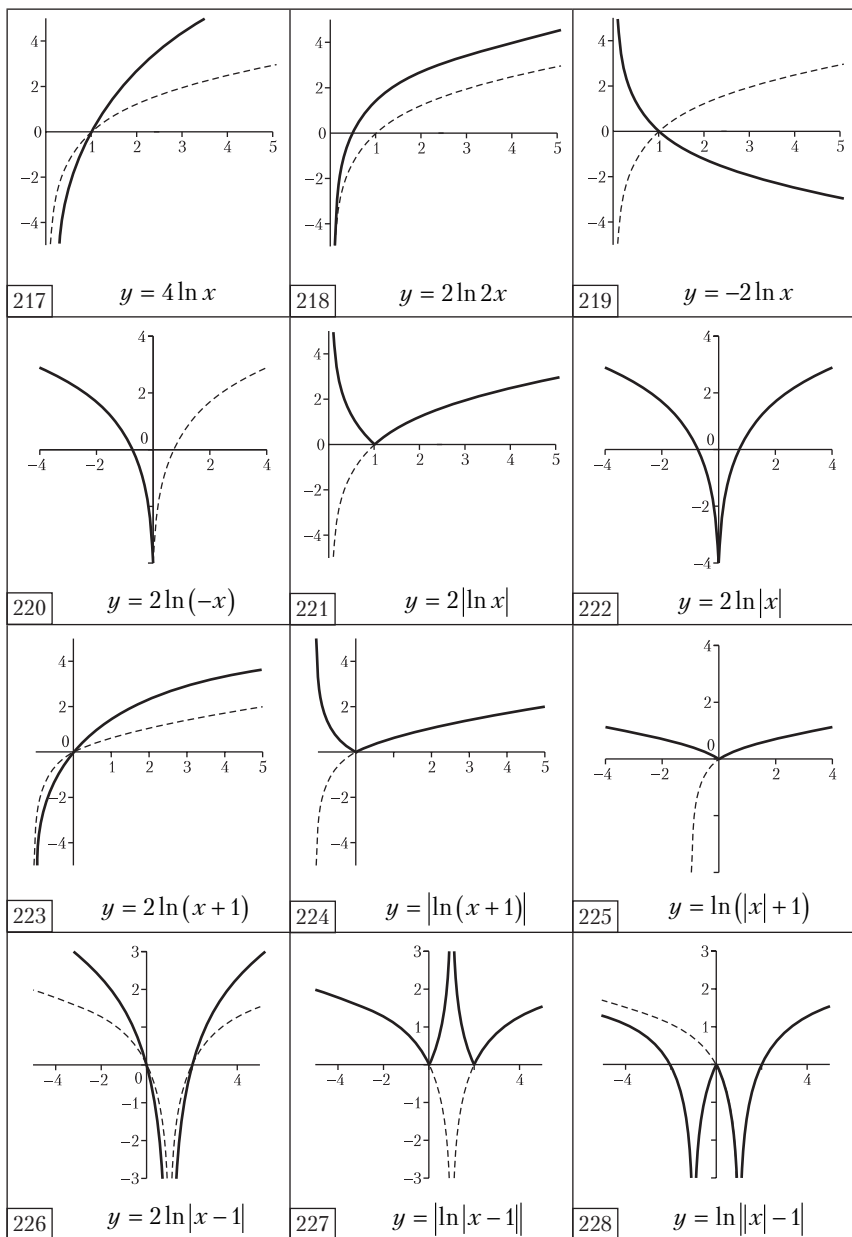
 157 $y = 2x(x-2)^3$	 158 $y = 2x(2x-2)^3$	 159 $y = -x(x-2)^3$
 160 $y = 2x^2(x-2)^2$	 161 $y = 4x^2(2x-2)^2$	 162 $y = -x^2(x-2)^2$
 163 $y = 2(x^3 - x^2)(x+2)$	 164 $y = (8x^3 - 4x^2)(2x+2)$	 165 $y = -(x^3 - x^2)(x+2)$
 166 $y = 2x(2x-1) \times (2-x)(x-3)$	 167 $y = 2x(4x-1) \times (2-2x)(2x-3)$	 168 $y = -x(2x-1) \times (2-x)(x-3)$

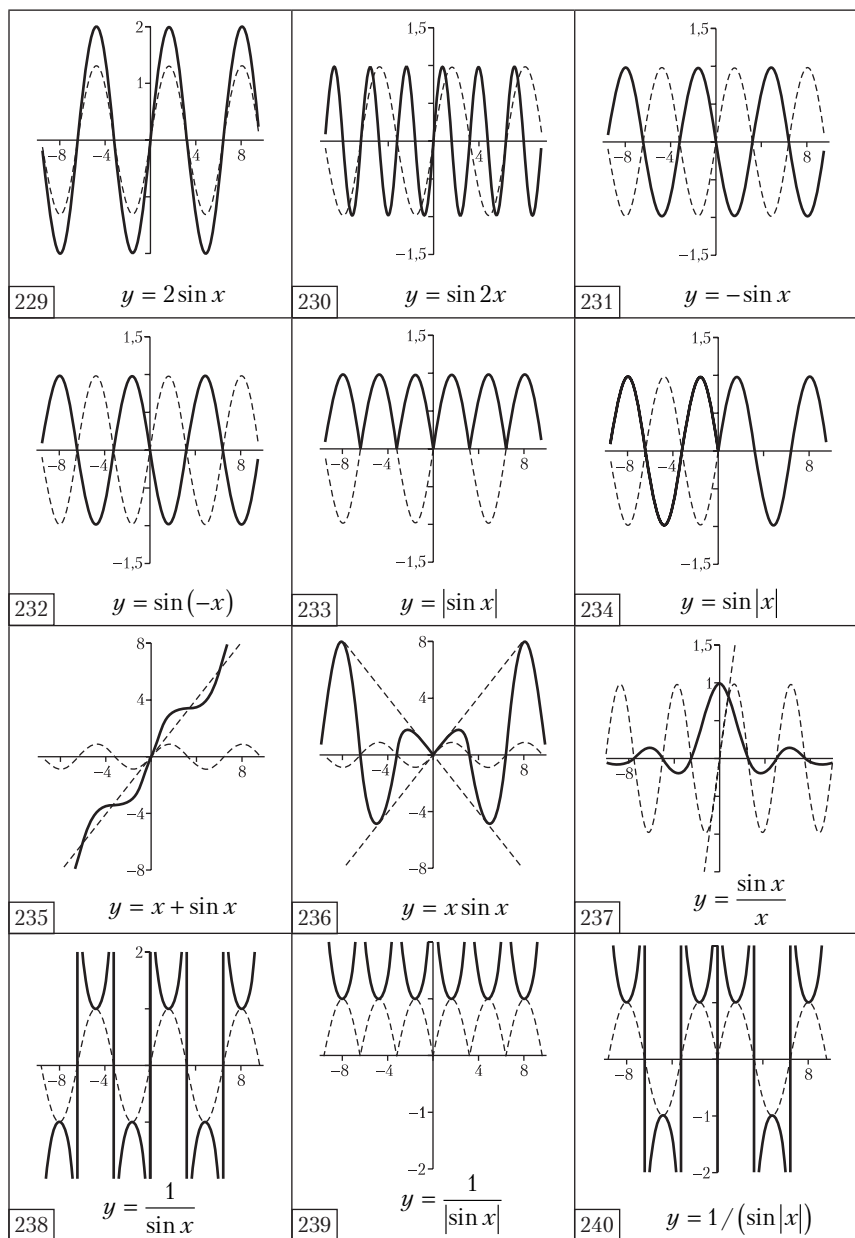
 169 $y = \frac{2}{x} + 2$	 170 $y = \frac{1}{2x} + 1$	 171 $y = -\left(\frac{1}{x} + 1\right)$
 172 $y = -\frac{1}{x} + 1$	 173 $y = \left \frac{1}{x} + 1\right$	 174 $y = \frac{1}{ x } + 1$
 175 $y = \frac{2}{x+1}$	 176 $y = \frac{1}{2x+1}$	 177 $y = -\frac{1}{x+1}$
 178 $y = \frac{1}{1-x}$	 179 $y = \left \frac{1}{x+1}\right$	 180 $y = \frac{1}{ x } + 1$

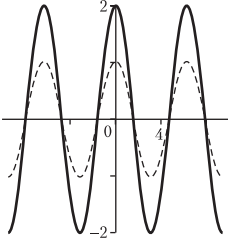
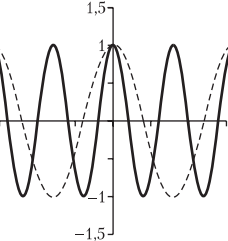
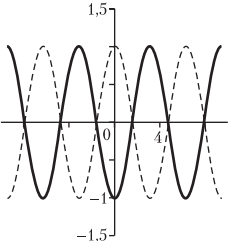
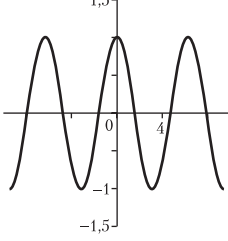
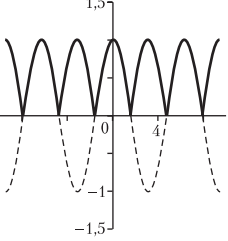
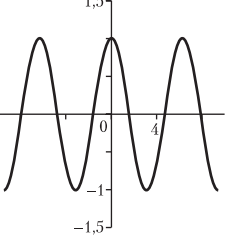
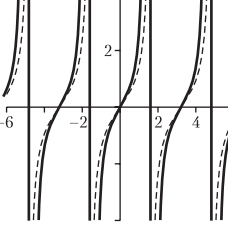
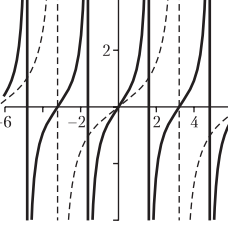
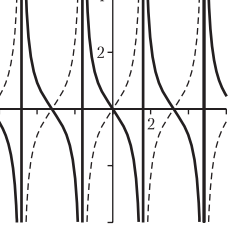
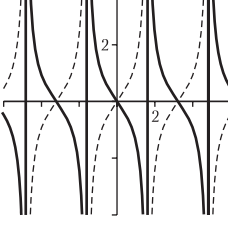
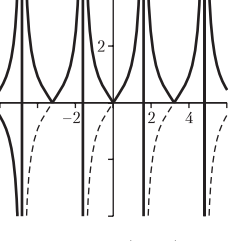
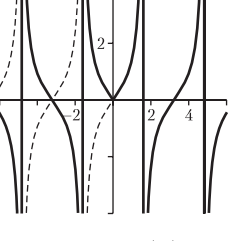


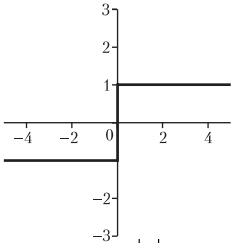
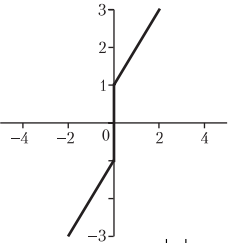
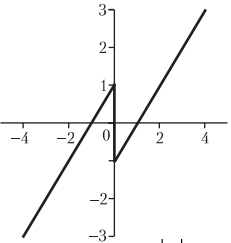
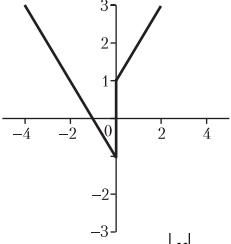
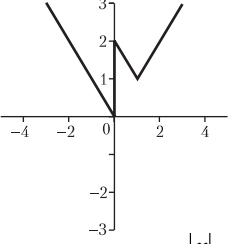
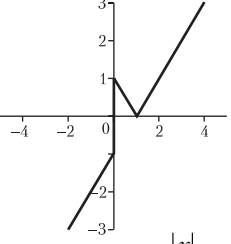
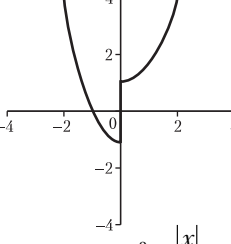
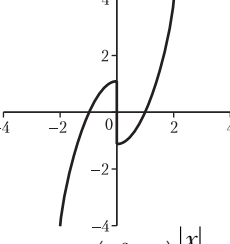
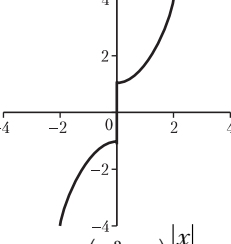
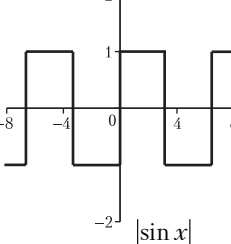
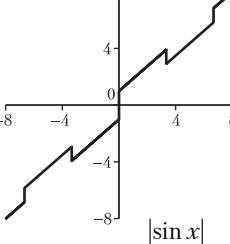
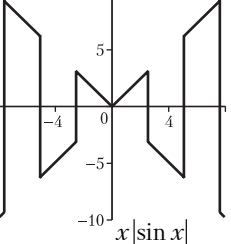


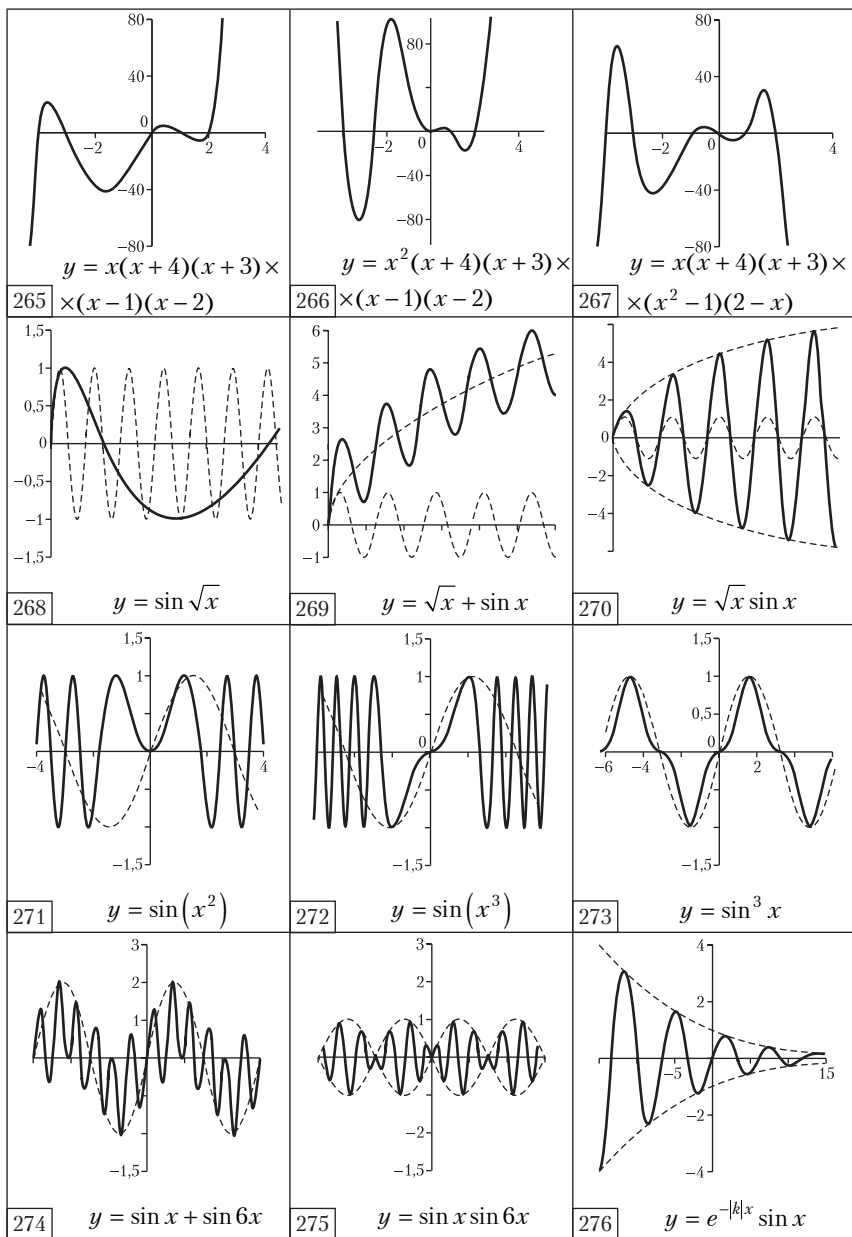
 205 $y = 2e^x - 2$	 206 $y = e^{2x} - 1$	 207 $y = -(e^x - 1)$
 208 $y = e^{-x} - 1$	 209 $y = e^x - 1$	 210 $y = e^{ x } - 1$
 211 $y = 2e^{x-1}$	 212 $y = e^{2x-1}$	 213 $y = -e^{x-1}$
 214 $y = e^{-x-1}$	 215 $y = e^{x-1}$	 216 $y = e^{ x -1}$

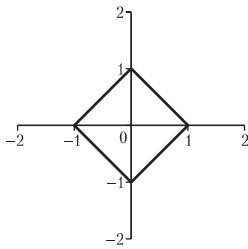
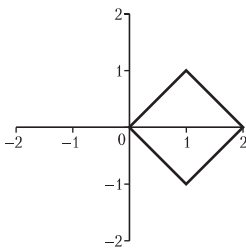
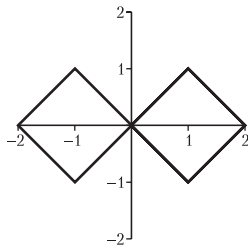
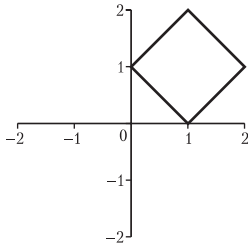
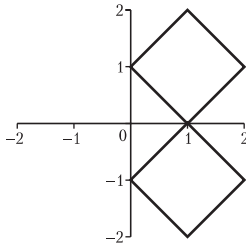
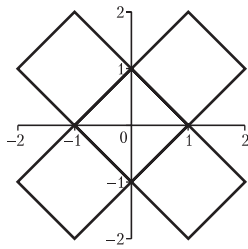
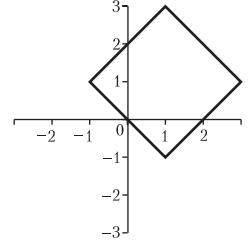
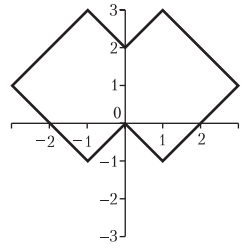
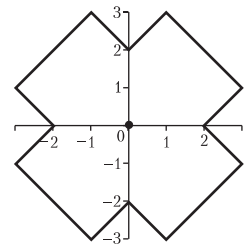
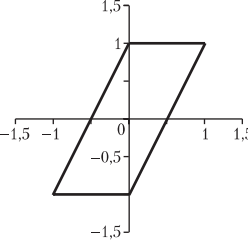
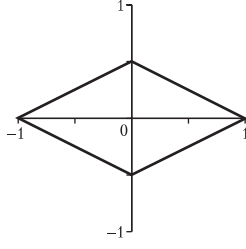
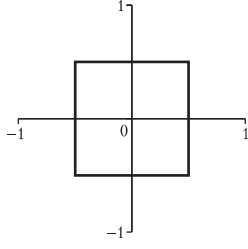


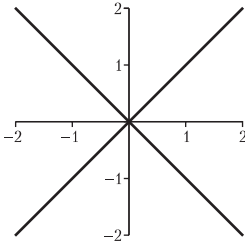
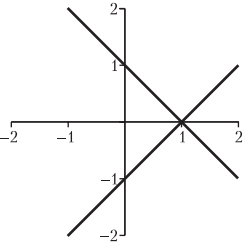
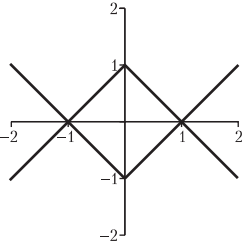
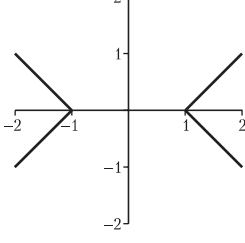
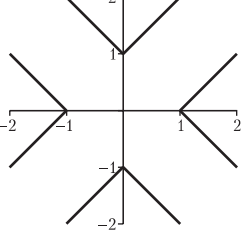
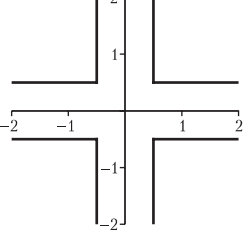
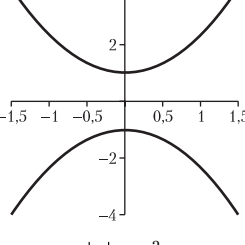
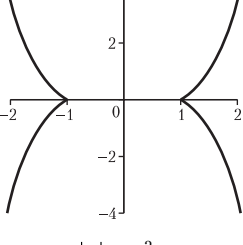
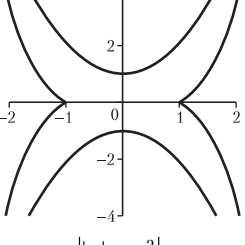
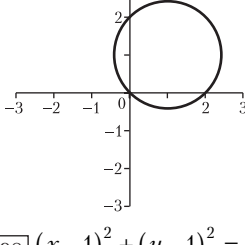
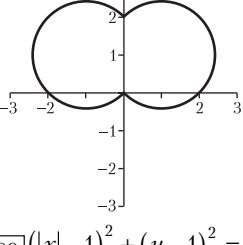
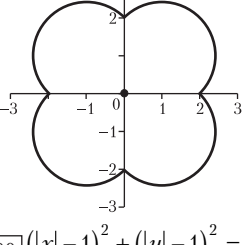


 241 $y = 2 \cos x$	 242 $y = \cos 2x$	 243 $y = -\cos x$
 244 $y = \cos(-x)$	 245 $y = \cos x$	 246 $y = \cos x$
 247 $y = 2 \operatorname{tg} x$	 248 $y = \operatorname{tg} 2x$	 249 $y = -\operatorname{tg} x$
 250 $y = \operatorname{tg}(-x)$	 251 $y = \operatorname{tg} x$	 252 $y = \operatorname{tg} x$

 253 $y = \frac{ x }{x}$	 254 $y = x + \frac{ x }{x}$	 255 $y = x - \frac{ x }{x}$
 256 $y = x + \frac{ x }{x}$	 257 $y = x-1 + \frac{ x }{x}$	 258 $y = x-1 - \frac{ x }{x}$
 259 $y = x^2 + \frac{ x }{x}$	 260 $y = (x^2 - 1) \frac{ x }{x}$	 261 $y = (x^2 + 1) \frac{ x }{x}$
 262 $y = \frac{ \sin x }{\sin x}$	 263 $y = x + \frac{ \sin x }{\sin x}$	 264 $y = x \frac{ \sin x }{\sin x}$



 277 $x + y = 1$	 278 $x-1 + y = 1$	 279 $x-1 + y = 1$
 280 $x-1 + y-1 = 1$	 281 $x-1 + y -1 = 1$	 282 $x -1 + y -1 = 1$
 283 $x-1 + y-1 = 2$	 284 $x -1 + y-1 = 2$	 285 $x -1 + y -1 = 2$
 286 $x + x-y = 1$	 287 $x + 2 y = 1$	 288 $x+y + x-y = 1$

 289 $x - y = 0$	 290 $x-1 - y = 0$	 291 $x -1 - y = 0$
 292 $x - y = 1$	 293 $x - y = 1$	 294 $x+y - x-y = 1$
 295 $y - x^2 = 1$	 296 $y - x^2 = -1$	 297 $y - x^2 = 1$
 298 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$	 299 $(x -1)^2 + (y-1)^2 = 2$	 300 $(x -1)^2 + (y -1)^2 = 2$

Литература

1. *Вирченко Н. А., Ляшко И. И., Швецов К. И.* Графики функций: Справочник. — К.: Наукова думка, 1979.
2. *Выгодский М. Я.* Справочник по элементарной математике. — М.: ООО «Издательство Астрель»: «Издательство АСТ», 2003.
3. *Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х.* Пособие по математике для поступающих в вузы (избранные вопросы элементарной математики). — М.: Наука, ГРФМЛ, 1976.
4. *Зайцев В. В., Рыжков В. В., Сканами М. И.* Элементарная математика. Повторительный курс. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1974.
5. *Кожухов И. Б., Прокофьев А. А.* Математика. Школьникам и абитуриентам. — М.: Махаон, 2005.
6. *Кравцев С. В., Макаров Ю. Н., Максимов В. Ф., Нараленков М. И., Чирский В. Г.* Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. — М.: Экзамен, 2003.
7. *Мельников И. И., Сергеев И. Н.* Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. Для поступающих в вузы. — М.: УНЦ ДО, УНИВЕР-ПРЕСС, 2007.
8. *Письменный Д. Т.* Готовимся к экзамену по математике: математика для старшеклассников. — М.: Айрис-пресс, 2007.
9. *Полный сборник решений задач для поступающих в вузы. Группа В / Под ред. М. И. Сканами.* — М.: ООО «Издательство «Мир и образование»; Мн.: ООО «Харвест», 2004.
10. *Потапов М. К.* Алгебра, тригонометрия и элементарные функции: Учеб. пособие / М.К. Потапов, В.В. Александров, П.И. Пасиченко; Под ред. В.А. Садовниченко. — М.: Высшая школа, 2001.
11. *Рыбасенко В. Д., Рыбасенко И. Д.* Элементарные функции: Формулы, таблицы, графики. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1987.

12. Сборник задач по математике с решениями. 8–11 классы / Под. ред. М.И. Сканава. — М.: Издательский дом «Оникс 21 век»; Мир и образование, 2002.
13. *Старков С. Н.* Математические формулы и графики функций. — СПб.: Питер, 2010.
14. *Старков С. Н.* Справочник по математическим формулам и графикам функций для студентов. — СПб.: Питер, 2010.
15. *Фаддеев Д. К., Никулин М. С., Соколовский И. Ф.* Алгебра для школьников. — М.: Физматлит, 1995.
16. *Цикунов А. Е.* Сборник математических формул. — СПб.: Питер, 2008.
17. *Черкасов О. Ю., Якушев А. Г.* Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену. — М.: Рольф, 1997.

Алфавитный указатель основных формул

А

Абсолютная величина (модуль) (1.5.1)–(1.5.16)

Арифметическая прогрессия (1.8.1)–(1.8.8)

Арифметический корень (1.6.6)–(1.6.7)

Арккосинус (1.7.59)–(1.7.64)

Арктангенс (1.7.71)–(1.7.76)

Арсинус (1.7.53)–(1.7.58)

Арктангенс (1.7.65)–(1.7.70)

В

Векторы (1.13.34)–(1.13.58)

Выделение линейного множителя в многочлене (1.2.36)

Выделение полного квадрата в квадратном трехчлене (1.2.1)–(1.2.5)

Внесение множителя под знак корня (1.6.24), (1.6.36), (1.6.44)

Вынесение множителя из-под знака корня (1.6.23), (1.6.35), (1.6.43)

Выражение суммы квадратов, суммы кубов и суммы четвертых степеней через сумму и произведение (1.1.15)–(1.1.17)

Выражение функций через тангенс половинного угла (1.7.38)–(1.7.40)

Вычисление объемов и площадей поверхности (1.13.26)–(1.13.33)

Вычисление площади треугольника (1.13.4)–(1.13.8)

Вычисление площади четырехугольника (1.13.13)–(1.13.18)

Г

Геометрическая прогрессия (1.8.9)–(1.8.14)

Д

Действия над векторами в координатной форме (1.13.36)–(1.13.54)

Действия с дробями (1.3.1)–(1.3.14)

Деление дробей (1.3.9)

Деление дроби на число и числа на дробь (1.3.12)–(1.3.14)

Длина вектора (1.13.34)

Длина окружности и дуги окружности (1.13.22)–(1.13.23)

Длина стороны правильного многоугольника (1.13.20)

Дополнительные преобразования формул сокращенного умножения (1.1.53)–(1.1.76)

Дополнительные тригонометрические тождества (1.7.83)–(1.7.100)

И

Иррациональные неравенства (1.10.88)–(1.10.99)

Иррациональные уравнения (1.9.25)–(1.9.31)

К

Квадрат разности (1.1.2)

Квадрат суммы (1.1.1)

Квадрат суммы трех слагаемых (1.1.8)

Квадратный корень (1.6.7)

Квадратные неравенства (1.10.37)–(1.10.56)

Квадратные уравнения (1.9.7)–(1.9.15)

Координаты середины отрезка между двумя точками (1.13.58)

Корни нечетной степени (1.6.25)–(1.6.36)

Корни четной степени (1.6.37)–(1.6.44)

Корни n -й степени (1.6.13)–(1.6.24)

Куб разности (1.1.5)

Куб суммы (1.1.4)

Кубические неравенства (1.10.57)–(1.10.80)

Л

Линейные неравенства (1.10.23)–(1.10.36)

Линейные уравнения (1.9.4)–(1.9.6)

Логарифмические неравенства (1.10.114)–(1.10.123)

Логарифмические уравнения (1.9.38)–(1.9.41)

Логарифмы (1.6.58)–(1.6.73)

М

Многоугольники (1.13.19)–(1.13.21)

Модуль (абсолютная величина) (1.5.1)–(1.5.16)

Н

Нахождение неизвестных членов пропорции (1.4.8)–(1.4.11)

Неравенства для средних величин (1.4.4)–(1.4.5)

Неравенства, содержащие знак модуля (1.10.81)–(1.10.87)

Неравенства тригонометрические (1.10.80)–(1.10.103)

Неравенства числовые, свойства (1.10.1)–(1.10.10)

«Нулевая» степень числа (1.6.3)

О

Области определения и множества значений тригонометрических функций (1.7.7)–(1.7.10)

Обратные тригонометрические функции (1.7.53)–(1.7.82)

Общие равносильные преобразования неравенств (1.10.11)–(1.10.20)

Общие равносильные преобразования уравнений (1.9.1)–(1.9.3)

Окружность и круг (1.13.22)–(1.13.25)

Определение модуля числа (1.5.1)

Освобождение от иррациональности в знаменателе (1.6.45)–(1.6.52)

Основное логарифмическое тождество (1.6.58)

Основное свойство дроби (1.3.1)

Основное свойство пропорции (1.4.6)

Основные свойства числовых неравенств (1.10.1)–(1.10.10)

Основные тригонометрические тождества (1.7.1)–(1.7.6)

Отрицательная дробная степень положительного числа (1.6.9)

Отрицательная целая степень числа (1.6.4)

П

Переход к новому основанию логарифма (1.6.63)

Периметр и полупериметр треугольника (1.13.3)

Площадь круга и сектора круга (1.13.24)–(1.13.25)

Площадь правильного многоугольника (1.13.21)

Площадь треугольника (1.13.4)–(1.13.8)

Площадь четырехугольника (1.13.13)–(1.13.18)

Положительная дробная степень неотрицательного числа (1.6.8)

Показательные неравенства (1.10.100)–(1.10.113)

Показательные уравнения (1.9.32)–(1.9.37)

Положительная дробная степень неотрицательного числа (1.6.8)

Правила дифференцирования (1.12.18)–(1.12.24)

Преобразование выражений, содержащих четвертые степени (1.1.10)–(1.1.14)

Применение формул сокращенного умножения (1.1.18)–(1.1.52)

Прогрессии (1.8.1)–(1.8.14)

Производная сложной функции (1.12.25)

Производные основных элементарных функций (1.12.1)–(1.12.17)

Производные пропорции (1.4.12)–(1.4.15)

Пропорции (1.4.6)–(1.4.15)

Проценты (1.4.16)–(1.4.18)

Р

Равенство векторов (1.13.35)

Разложение многочлена на простейшие множители (1.2.37)–(1.2.40)

Разложения на множители некоторых многочленов 2-й, 3-й и 4-й степени (1.2.6)–(1.2.13), (1.2.14)–(1.2.23), (1.2.24)–(1.2.34)

Разность квадратов (1.1.3)

Разность кубов (1.1.6)

Раскрытие модуля функции (1.5.2)

Расстояние между двумя точками (1.13.55)

Рациональная степень положительного числа (1.6.11)–(1.6.12)

Решение неравенств (1.10.1)–(1.10.147)

Решение уравнений (1.9.1)–(1.9.90)

С

Свойства корней (1.6.13)–(1.6.44)

Свойства обратных тригонометрических функций (1.7.77)–(1.7.82)

Свойства логарифмов (1.6.58)–(1.6.73)

Свойства модуля (1.5.3)–(1.5.16)

Свойства четности и нечетности тригонометрических функций (1.7.15)–(1.7.18)

Свойство периодичности тригонометрических функций (1.7.15)–(1.7.18)

Связь радианной и градусной меры угла (1.7.101)–(1.7.105)

Скалярное произведение векторов (1.13.46)–(1.13.54)

Сложение и вычитание векторов (1.13.36)–(1.13.39)

Сложение и вычитание дробей (1.3.3)–(1.3.7)

Сокращение дробей (1.3.2)

Соотношение между сторонами треугольника (1.13.2)

Среднее арифметическое (1.4.1)

Среднее гармоническое (1.4.3)

Среднее геометрическое (1.4.2)

Средние величины (1.4.1)–(1.4.5)

Степени и корни (1.6.1)–(1.6.57)

Степень числа с действительным показателем (1.6.53)–(1.6.57)

Степень числа с натуральным показателем (1.6.1)–(1.6.2)

Степень числа с целым показателем (1.6.3)–(1.6.5)

Степень числа с рациональным показателем (1.6.11)–(1.6.12)

Строгие и нестрогие неравенства (1.10.21)–(1.10.22)

Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника (1.13.19)

Сумма внутренних углов выпуклого четырехугольника (1.13.12)

Сумма внутренних углов треугольника (1.13.1)

Сумма кубов (1.1.7)

Т

Таблица знаков тригонометрических функций (1.7.106)–(1.7.109)

Таблица значений обратных тригонометрических функций (1.7.119)–(1.7.122)

Таблица значений тригонометрических функций (1.7.110)–(1.7.118)

Таблица производных (1.12.1)–(1.12.17)

Теорема Виета (1.9.10)

Теорема косинусов (1.13.11)

Теорема о подборе корней многочлена с целочисленными коэффициентами (1.2.35)

Теорема Пифагора (1.13.9)

Теорема синусов (1.13.10)

Типовые способы замены переменной (1.11.1)–(1.11.16)

Треугольники (1.13.1)–(1.13.11)

Тригонометрические неравенства (1.10.124)–(1.10.147)

Тригонометрические уравнения (1.9.42)–(1.9.59)

Тригонометрические формулы (1.7.1)–(1.7.118)

У

Умножение вектора на число (1.13.40)–(1.13.44)

Умножение дробей (1.3.8)

Умножение дроби на число и числа на дробь (1.3.10)–(1.3.11)

Уравнение касательной к графику функции (1.12.26)

Уравнение окружности (1.13.56)–(1.13.57)

Уравнения, приводящиеся к квадратным (1.9.60)–(1.9.90)

Уравнения, содержащие знак модуля (1.9.16)–(1.9.24)

Ф

Формулы геометрии (1.13.1)–(1.13.58)

Формула Герона (1.13.6)

Формула корней квадратного уравнения (1.9.7)

Формулы кратных углов (1.7.22)–(1.7.27)

Формулы половинных углов (1.7.28)–(1.7.30)

Формулы понижения степени (1.7.28)–(1.7.29)

Формулы преобразования произведения в сумму (1.7.35)–(1.7.37)

Формулы преобразования суммы в произведение (1.7.31)–(1.7.34)

Формулы приведения (1.7.41)–(1.7.52)

Формулы разложения многочленов на множители (1.2.1)–(1.2.40)

Формулы сложения (1.7.19)–(1.7.21)

Формулы сокращенного умножения и другие тождества (1.1.1)–(1.1.76)

Ч

Частные случаи квадратных уравнений (1.9.11)–(1.9.15)

Частные случаи тригонометрических уравнений (1.9.48)–(1.9.59)

Четырехугольники (1.13.12)–(1.13.18)

Сергей Николаевич Старков

Справочник по математике для школьников

Заведующий редакцией
Руководитель проекта
Ведущий редактор
Редактор
Художественный редактор
Корректор
Верстка

А. Кривцов
А. Кривцов
Ю. Сергиенко
К. Кноп
Л. Адуевская
И. Тимофеева
Л. Егорова

ООО «Мир книг», 198206, Санкт-Петербург, Петергофское шоссе, 73, лит. А29.
Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, том 2;
95 3005 — литература учебная.

Подписано в печать 28.10.11. Формат 60х90/16. Усл. п. л. 9,000. Доп. тираж 3500. Заказ
Отпечатано с фотоформ в ИПК ООО «Ленинградское издательство»,
194044, Санкт-Петербург, ул. Менделеевская, 9.