В. А. ТУПИКОВ

# ОШИБКИ В РЕШЕНИИ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ ПО МАТЕМАТИКЕ

Издательство «Вышэйшая школа»

В. А. ТУПИКОВ

# ОШИБКИ В РЕШЕНИИ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ ПО МАТЕМАТИКЕ

Издание четвертое,
переработанное и дополненное

Издательство «Вышэйшая школа»
Минск 1974

51
Т85
УДК 51(075.4)

**Тупиков В. А.**

**Т85** Ошибки в решении конкурсных задач на вступительных экзаменах по математике. Изд. 4, перераб. и доп. Минск, «Вышэйшая школа», 1974.

144 с. с ил.

Пособие предназначено для абитуриентов и учащихся подготовительных курсов.

Основное внимание в нем уделено разбору ошибок, допускаемых поступающими в вузы на письменных и устных экзаменах. Кроме того, оно дает некоторое представление об уровне требований по математике, предъявляемых к поступающим в вузы.

В пособии помещены образцы вариантов письменных работ и билетов, предлагавшихся на экзаменах.

$\text{Т}\ \dfrac{0222-009}{\text{М}304(05)-74}\,19\text{—}74$ 51

# СОДЕРЖАНИЕ

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании книги материал переработан и приведен в соответствие с программой вступительных экзаменов по математике для поступающих в высшие учебные заведения СССР в 1973 г. Кроме того, дополнительно включен анализ ряда ошибок в решении конкурсных задач, допускаемых абитуриентами на вступительных экзаменах по математике. В предлагаемом издании материал по возможности систематизирован.

Пользуясь случаем, приношу благодарность *Г. Я. Биндеру, В. И. Гридасову, Н. Я. Зубаревой, В. С. Мирославской* и другим, сообщившим автору свои замечания и пожелания.

*В. Тупиков*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние годы в помощь поступающим в высшие учебные заведения издано много хороших и разнообразных пособий.

Лучшие из них (В. Б. Лидский и др. «Задачи по элементарной математике»; П. С. Моденов, С. И. Новоселов «Пособие по математике для поступающих в вузы»; Г. В. Дорофеев и др. «Пособие по математике для поступающих в вузы») представляют собой книги большого объема. Если учесть, что школьнику после испытаний на аттестат зрелости надо подготовиться к сдаче конкурсных экзаменов по трем-четырем дисциплинам, то легко представить, что он просто не в состоянии изучить фундаментальное пособие. Отобрать же самое важное и ценное из курса элементарной математики может далеко не каждый абитуриент. Поэтому возникла идея написать краткое пособие в соответствии с программой вступительных экзаменов по математике.

При работе над пособием автор пользовался в основном экзаменационными материалами высших технических и высших военных учебных заведений. Поэтому наибольшую пользу пособие принесет лицам, готовящимся к поступлению в эти учебные заведения.

В отличие от существующих пособий в этой работе показано не только, как надо решать задачи, но и как не надо. Поэтому при демонстрации ошибок, как правило, вскрыты причины их появления и одновременно приведены правильные решения. Это главным образом относится к наиболее распространенным ошибкам. В других же случаях читателю предлагается самостоятельно выявить характер ошибки и исправить ее, что должно заставить читателя размышлять над прочитанным, а значит, и глубже познавать материал программы.

В пособии основное внимание уделено анализу ошибок по алгебре и тригонометрии, так как эти разделы элементарной математики наиболее широко используются при изучении высшей математики, физики и других общеобразовательных дисциплин в вузе.

Опыт вступительных экзаменов показывает, что совершенно неблагополучно обстоит дело с оформлением контрольных письменных работ. Поэтому с целью оказания некоторой помощи поступающим в вузы в конце книги помещены варианты письменных работ с решениями.

При работе над рукописью большую помощь автору оказали советами и замечаниями кандидаты педагогических наук М. В. Еремеева и Н. В. Метельский, которым автор выражает искреннюю благодарность. Автор также заранее благодарит тех, кто пришлет свои замечания и пожелания по адресу: 220600, г. Минск, ул. Кирова, 24, издательство «Вышэйшая школа».

# О ТРЕБОВАНИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫХ К ПОСТУПАЮЩИМ В ВУЗЫ

Требования по математике определяются программой вступительных экзаменов для поступающих в вузы, издаваемой ежегодно Министерством высшего и среднего специального образования СССР.

«На экзамене по математике поступающий в высшее учебное заведение должен показать:

а) четкое знание математических определений и теорем, предусмотренных программой, умение доказывать эти теоремы;

б) умение точно и сжато выражать математическую мысль в устном и письменном изложении;

в) уверенное владение математическими знаниями и навыками, предусмотренными программой, умение применять их при решении задач». (Программы вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР в 1973 году. М., «Высшая школа», 1973, стр. 10).

Готовясь к поступлению в высшее учебное заведение, абитуриент при работе над программой по математике должен особое внимание обратить на следующие вопросы.

## I. По алгебре и элементарным функциям

1. Формулы сокращенного умножения и деления.
2. Деление многочлена на многочлен.
3. Разложение многочленов на множители различными способами.

4. Тождественные преобразования алгебраических выражений.

5. Абсолютная величина действительного числа и арифметический корень, связь между ними.

6. Решение уравнений и систем уравнений. Решение задач на составление уравнений и систем уравнений.

7. Функция и область ее определения. Свойства и графики функций:

$$y=kx+b;\ y=\frac{k}{x};\ y=ax^2+bx+c;\ y=a^x,\ y=\log_a x.$$

8. Геометрическая прогрессия, в частности бесконечно убывающая.

9. Действия над логарифмами.

10. Решение неравенств и систем неравенств.

11. Исследование решения квадратного уравнения и системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

12. Радианная мера углов и ее связь с градусной.

13. Изменение тригонометрических функций при изменении угла от 0° до 360°.

14. Формулы приведения. V

15. Зависимость между тригонометрическими функциями одного аргумента.

16. Тригонометрические функции углов 30°, 45° и 60°. V

17. Теоремы сложения. V

18. Формулы двойного и половинного аргумента.

19. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента.

20. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

21. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение, в частности суммы $\sin\alpha+\cos\beta$.

22. Тождественные преобразования тригонометрических выражений.

23. Функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$; их свойства и графики.

24. Определение периодов функций.

25. Решение тригонометрических уравнений.

26. Решение неравенств вида:

$$\sin x>m;\ \cos x>m;\ \operatorname{tg} x>m;$$
$$\sin x<m;\ \cos x<m;\ \operatorname{tg} x<m.$$

27. Применение методов алгебры и тригонометри к решению геометрических задач.

## II. По геометрии

1. Понятие геометрического места точек.
2. Метрические соотношения в треугольнике и круге.
3. Теорема косинусов.
4. Теорема синусов.
5. Изображение геометрических фигур и тел на чертеже.
6. Площади плоских фигур.
7. Площади поверхностей и объемы многогранников и круглых тел.
8. Решение простейших геометрических задач на построение.

Абитуриент должен иметь четкое представление о таких важных понятиях, постоянно употребляемых в математике, как определение, аксиома, теорема, прямая и обратная теоремы, противоположная и обратная противоположной теоремы; о том, какие условия являются необходимыми, какие достаточными и какие необходимыми и достаточными.

Поступающий в вуз должен уметь:

— достаточно бегло и точно производить арифметические действия над отвлеченными и именованными числами, как целыми, так и дробными;

— с требуемой точностью округлять результаты, полученные при вычислениях;

— пользоваться математическими таблицами.

На вступительных экзаменах по математике очень большое внимание уделяется выбранному приему решения той или иной задачи. Важно не только то, что правильно получен ответ, но и каким путем он получен. Поэтому при подготовке к экзаменам по математике необходимо отыскивать наиболее рациональные способы решения задач.

Среди абитуриентов широко распространено мнение, что к поступающим в вузы предъявляются повышенные требования по математике по сравнению с требованиями, предъявляемыми в средней школе. Это совершенно неверно (см. приложения 1, 2, 3). «Провалы» на вступительных экзаменах являются результатом слабого знания школьного курса математики, а отнюдь не повышенных требований. В подтверждение сказанного приведем примеры ошибок, которые были допущены при выполнении контрольных работ на письменных экзаменах по математике (табл. 1).

Таблица 1

| Допускались записи | Правильная запись |
|---|---|
| 1 | 2 |
| $\frac{6x^2}{2x^2+3x}=3+2x$ | $\frac{6x^2}{2x^2+3x}=\frac{6x}{2x+3}$ |
| $(1-x)^3=(1-x)(1+x+x^2)$ | $(1-x)^3=1-3x+3x^2-x^3$ |
| $(x^{\sqrt{5}})^2=x^5$ | $(x^{\sqrt{5}})^2=x^{2\sqrt{5}}$ |
| $(9^{\sqrt{x}})^2=9^{2+\sqrt{x}}$ | $(9^{\sqrt{x}})^2=9^{2\sqrt{x}}$ |
| $\frac{4^x}{2^x}=2$ | $\frac{4^x}{2^x}=\frac{2^{2x}}{2^x}=2^x$ |
| $2^x+4^x=6^x$ | $2^x+4^x=2^x+2^{2x}=2^x(1+2^x)$ |
| $4\cdot 2^x=8^x$ | $4\cdot 2^x=2^2\cdot 2^x=2^{2+x}$ |

Продолжение таблицы

| 1 | 2 |
|---|---|
| $a^{-\frac{1}{3}} = a^3$ | $a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ |
| $\frac{1}{a^{-2}b^2 - 1} = \frac{a^2}{b^2 - 1}$ | $\frac{1}{a^{-2}b^2 - 1} = \frac{1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} = \frac{a^2}{b^2 - a^2}$ |
| Так как $\sqrt[3]{x} = 2$, то $x = \sqrt[3]{2}$ | Так как $\sqrt[3]{x} = 2$, то $x = 2^3$ |
| $2x^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2x}$ | $2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ |
| $(\sqrt[3]{x^3 - 8})^{\frac{1}{2}} = \sqrt[\frac{3}{2}]{x^3 - 8}$ | $(\sqrt[3]{x^3 - 8})^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{(x^3 - 8)^{\frac{1}{2}}}$ |
| $\frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt[4]{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ | $\frac{\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt[4]{1 + x^2}} = \frac{\sqrt[4]{(1 + x^2)^2}}{\sqrt[4]{1 + x^2}} = \sqrt[4]{1 + x^2}$ |
| $\sqrt{-x^2} = -\sqrt{x^2} = -x$ | $\sqrt{-x^2} = \sqrt{x^2}\,\sqrt{-1} = \lvert x \rvert i$ |
| $(\lg x^3)^2 = \lg x^6$ | $(\lg x^3)^2 = \lg^2 x^3$ |
| $\frac{4 \sin 6x}{2} = 2 \sin 3x$ | $\frac{4 \sin 6x}{2} = 2 \sin 6x$ |
| $\sqrt{m^2 \sin^2 \alpha + m^2 \cos^2 \alpha} = 1$ | $\sqrt{m^2 \sin^2 \alpha + m^2 \cos^2 \alpha} = \lvert m \rvert$ |
| $\frac{a}{\sin x} + \frac{a}{\cos x} = \frac{2a}{\sin x \cos x}$ | $\frac{a}{\sin x} + \frac{a}{\cos x} = \frac{a (\cos x + \sin x)}{\sin x \cos x}$ |
| $\frac{d + d \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2d \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ | $\frac{d + d \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = d \cdot \frac{1 + \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = d \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$ |
| $\sin 7x - \sin 5x = \sin 2x$ | $\sin 7x - \sin 5x = 2 \sin x \cos 6x$ |

# ОШИБКИ В РЕШЕНИИ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим ошибки, наиболее часто встречающиеся на вступительных экзаменах по математике.

## I. Ошибки по алгебре и элементарным функциям

### Тождественные преобразования

1. Нарушается порядок действий при выполнении тождественных преобразований. Например, выражение

$$1-\frac{\sqrt{x}}{x-1}:\frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

преобразовывалось следующим образом:

$$1-\frac{\sqrt{x}}{x-1}=\frac{x-\sqrt{x}-1}{x-1};$$

$$\frac{x-\sqrt{x}-1}{x-1}:\frac{\sqrt{x}-1}{x}\ \text{и т. д.}$$

Абитуриенты забывают, что сначала выполняются действия высших, а затем низших ступеней. В приведенном примере следовало вычитание произвести после выполнения деления дробей.

Довольно часто нарушается правило раскрытия скобок. Многие не знают, что в дробном выражении, записанном с помощью черты, последняя заменяет собой скобки. Все это приводит к ошибочным записям.

**Примеры.**

1) $(\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2})(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2})=x-(x-a^2)=-a^2$.

2) $1-\dfrac{a^2+b^2}{2ab}=\dfrac{2ab-a^2+b^2}{2ab}$.

Надеемся, читатель самостоятельно выявит характер допущенных ошибок.

**2.** Наблюдаются случаи, когда при тождественных преобразованиях алгебраических выражений абитуриенты «отбрасывают» общий знаменатель складываемых дробей. Например, допускают запись

$$\frac{3}{2a^2b}+\frac{4}{a^3b^3}=3ab^2+8.$$

Общий знаменатель обычно «отбрасывают» при решении уравнений (следя при этом за равносильностью). Здесь же абитуриенты незаконно применяют метод аналогии, распространяя свойство уравнений на тождественные преобразования алгебраических дробей.

**3.** Неверно применяются формулы сокращенного умножения и деления, нарушаются правила действий над степенями с рациональными показателями.

**Примеры.**

1) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^{-3}=\dfrac{1}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}$.

2) $\dfrac{a^3-b^3}{a-b}=a^2-b^2$.

3) $m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}=(m-n)^{\frac{1}{2}}$.

4) $a^{-1}+b^{-1}=\frac{1}{a+b}$.

5) $(a^2)^{-\frac{1}{5}}=\frac{1}{(a^2)^5}$.

6) $m^{-\frac{2}{3}}=m^{\frac{3}{2}}$.

7) $(-b^{\frac{1}{4}})^{-4}=-b$.

8) $5^{4x}-5^{2x}+5=4x-2x+1$.

9) $16^z-4^z=4^z(4^2-1)$.

10) $9^{2-x}=9^2-9^x$.

Рекомендуем читателю найти ошибки самостоятельно.

**4.** Поступающие в вузы не имеют достаточных навыков в разложении многочленов на множители и выделении полного квадрата из многочлена, а поэтому часто допускают ошибки. Учитывая это, рассмотрим два примера.

**Пример 1.** Разложить на множители многочлен

$$x^4+2x^3-x^2+4x-6.$$

Решение. $x^4+2x^3-x^2+4x-6=$

$$=x^4+2x^3-3x^2+2x^2+4x-6=$$
$$=x^2(x^2+2)+2x(x^2+2)-3(x^2+2)=$$
$$=(x^2+2)(x^2+2x-3)=$$
$$=(x^2+2)(x-1)(x+3).$$

**Пример 2.** Выделить полный квадрат в трехчлене

$$x^4-6x^2+5.$$

Решение. $x^4-6x^2+5=x^4-6x^2+$

$$+\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2+5=(x^4-6x^2+9)-9+5=$$

$$=(x^2-3)^2-4.$$

5. Неверно производятся действия над радикалами.

**Примеры.**

1) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{4b}=\sqrt[7]{4a^3b}$.

2) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{4b}=\sqrt[12]{4a^3b}$.

3) $\dfrac{\sqrt[6]{(x-1)^4}}{\sqrt{(x-1)^4}}=1$.

Следует помнить, что нельзя перемножать и делить подкоренные выражения, если радикалы не приведены к одному показателю.

6. Дробь ошибочно считается равной ее степени или корню из нее.

**Примеры.**

1) $\dfrac{2a\sqrt{a^3-b^3}}{a^3-b^3}=\dfrac{4a^2(a^3-b^3)}{(a^3-b^3)^2}$.

2) $\dfrac{(a-b)^3}{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^3}=\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$.

7. Сокращение дробей производится с грубыми нарушениями существующих правил или не производится вообще.

**Примеры.**

1) $\dfrac{2m+2(m+n)^3}{(m+n)^2(2m+n)}=\dfrac{2m+2(m+n)}{2m+n}$

(сокращено одно из слагаемых числителя данной дроби на множитель знаменателя).

2) $$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-1}{\sin\alpha}=1+\cos\alpha-1=\cos\alpha.$$

3) $$\frac{a-b}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}=\frac{\sqrt[4]{a^4}-\sqrt[4]{b^4}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}=\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}$$

(сокращены отдельно соответственно уменьшаемые и вычитаемые разностей).

4) $$\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha-\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}3\alpha.$$

5) $$\frac{\sqrt{a^3b}\,(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{ab}\,(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

(дробь не сокращена на $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$).

8. Часто вместо простейшего общего знаменателя дробей находят общий знаменатель, что значительно усложняет математические выкладки.

**Примеры.**

1) $$\frac{a+\sqrt[3]{a^2x}}{x+\sqrt[3]{ax^2}}-1=\frac{a+\sqrt[3]{a^2x}-x-\sqrt[3]{ax^2}}{x+\sqrt[3]{ax^2}}$$

(до приведения к общему знаменателю дробь следовало сократить на $(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a})$).

2) $$\frac{a^2-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+a\sqrt[3]{b}=\frac{a^2-b\sqrt{a}+a\sqrt{a}\sqrt[3]{b}-a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}$$

(в левой части дробь следовало предварительно сократить на $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b})$).

3) $\frac{3}{x-2}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}=\frac{3\left(x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right)-x^{\frac{1}{3}}(x-2)}{(x-2)\left(x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right)}$

(вычитаемое не сокращено на $x^{\frac{1}{3}}$).

4) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}-\frac{a}{x-a}=\frac{\sqrt{x}(x-a)-a(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(x-a)}$

(знаменатель вычитаемой дроби не разложен на множители $(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})$).

**9.** Распределительный закон распространяется на извлечение корня из суммы и разности.

**Примеры.**

1) $\sqrt{9x^4-25}=3x^2-5$.

2) $\sqrt{x^4+16x^2y^2+y^4}=x^2+4xy+y^2$.

3) $\sqrt[3]{a^3-2b^2}+\sqrt[3]{2b^2}=\sqrt[3]{a^3-2b^2+2b^2}=\sqrt[3]{a^3}=a$.

**10.** Поверхностное понятие абсолютной величины действительного числа и арифметического корня приводило к неверным заключениям.

**Примеры.**

1) $\sqrt{(4-\sqrt{32})^2}=4-\sqrt{32}=4-4\sqrt{2}=4(1-\sqrt{2})$.

2) $\sqrt{\frac{(m+n)^2}{(m-n)^2}}=\frac{m+n}{m-n}$ (по условию $m$ и $n$ — действительные числа).

3) $\sqrt{\frac{k+1}{(1-k)^2}}=\frac{\sqrt{k+1}}{1-k}$ (по условию $k>1$).

4) $\sqrt{\sin^2\alpha}=\sin\alpha$.

5) $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

6) $\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\sin\alpha+\cos\alpha$ $\left(\text{по условию } \pi< <\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$.

В связи с последними примерами напомним некоторые определения.

*Определение 1. Абсолютной величиной* действительного числа $a$ называется неотрицательное действительное число, удовлетворяющее условиям

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{если } a>0; \\ 0, & \text{если } a=0; \\ -a, & \text{если } a<0. \end{cases}$$

Из определения следует, что $a\leqslant|a|$.

С понятием абсолютной величины числа тесно связано понятие арифметического корня.

*Определение 2.* Неотрицательное значение корня $n$-й степени из неотрицательного числа $a$ называется *арифметическим корнем.*

**Примеры.**

1) $\sqrt[4]{81}=3$ — арифметический корень.

2) $\sqrt[3]{-125}=-5$ — неарифметический корень.

3) $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, & \text{если } a\geqslant0; \\ -a, & \text{если } a<0. \end{cases}$

4) $\dfrac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}=\dfrac{|a-b|}{a-b}=\begin{cases} 1, & \text{если } a>b; \\ -1, & \text{если } a<b. \end{cases}$

6) $\sqrt{x^6}=|x^3|=\begin{cases} x^3, & \text{если } x\geqslant 0; \\ -x^3, & \text{если } x<0. \end{cases}$

Теперь, видимо, нетрудно объяснить ошибки, допущенные абитуриентами в примерах 1)—6). Очевидно, следовало писать:

1) $\sqrt{(4-\sqrt{32})^2}=-(4-\sqrt{32})=4\sqrt{2}-4=4(\sqrt{2}-1)$;

2) $\sqrt{\dfrac{(m+n)^2}{(m-n)^2}}=\left|\dfrac{m+n}{m-n}\right|$;

3) $\sqrt{\dfrac{k+1}{(1-k)^2}}=\dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{(1-k)^2}}=\dfrac{\sqrt{k+1}}{-(1-k)}=\dfrac{\sqrt{k+1}}{k-1}$.

4) $\sqrt{\sin^2\alpha}=\begin{cases} \sin\alpha, & \text{если } \sin\alpha\geqslant 0 \text{ (угол } \alpha \text{ оканчивается в I или II квадранте);} \\ -\sin\alpha, & \text{если } \sin\alpha<0 \text{ (угол } \alpha \text{ оканчивается в III или IV квадранте)} \end{cases}$

5) $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha}=\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha, & \text{если } \operatorname{tg}\alpha\geqslant 0 \text{ (угол } \alpha \text{ оканчивается в I или III квадранте),} \\ -\operatorname{tg}\alpha, & \text{если } \operatorname{tg}\alpha<0 \text{ (угол } \alpha \text{ оканчивается во II или IV квадранте).} \end{cases}$

6) $\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=-(\sin\alpha+\cos\alpha)$, так как в III квадранте $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ отрицательны.

Попутно заметим, что все правила действий над радикалами, изучаемые в школьном курсе алгебры, установлены лишь для арифметических корней. Некоторые забывают об этом и допускают грубые ошибки при подведении множителя под знак корня.

Например, пишут

$$-4\sqrt{5}=\sqrt{5\cdot(-4)^2}=\sqrt{5\cdot 16}=\sqrt{80}.$$

На вступительных экзаменах по математике абитуриентам часто предлагаются примеры, где требуется дать заключение о правильности приведенного решения. Например, верно ли

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{11}}=\sqrt[6]{(\sqrt{5}-\sqrt{11})^2}=$$
$$=\sqrt[6]{(\sqrt{11}-\sqrt{5})^2}=\sqrt[3]{\sqrt{11}-\sqrt{5}}\ ?$$

Ответ следует немедленно: «Конечно, верно». В действительности же совершенно неверно. Равенство $\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^2}$ справедливо только при условии, что $a\geqslant 0$. Если же $a<0$, то левая часть его отрицательна, а правая положительна. При $a<0$ следует писать $\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{-a}$. Когда знак $a$ неизвестен, надо записывать $\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{|a|}$.

## Уравнения

**11.** При решении уравнений область допустимых значений неизвестного, как правило, не устанавливается, хотя это полезно и выгодно (мы здесь исключаем случаи, когда установление области допустимых значений неизвестного вызывает большие затруднения).

Например, абитуриенты решают уравнение

$$\lg(x-5)-\lg(3-2x)=1$$

следующим образом:

$$\lg \frac{x-5}{3-2x}=1; \quad \frac{x-5}{3-2x}=10;$$

$$x-5=30-20x; \quad 21x=35; \quad x=\frac{5}{3}.$$

Выполняют проверку:

$$\lg\left(\frac{5}{3}-5\right)-\lg\left(3-2\cdot\frac{5}{3}\right)=1;$$

$$\lg\left(-\frac{10}{3}\right)-\lg\left(-\frac{1}{3}\right)=1.$$

Делают заключение: при положительном основании отрицательные числа логарифмов не имеют, значит, корень $x=\frac{5}{3}$ — посторонний. Уравнение решения не имеет.

Все верно, но проделано много бесполезной работы. К такому выводу можно прийти гораздо быстрее, если установить область допустимых значений неизвестного, пользуясь приведенным определением.

*Определение.* Множество всех значений неизвестного, при которых обе части уравнения имеют смысл, называется *областью допустимых значений неизвестного.*

Установим область допустимых значений неизвестного данного уравнения. Уравнение имеет смысл, если

$$\begin{cases} x-5>0; \\ 3-2x>0 \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} x>5; \\ x<\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Как видим, система неравенств не имеет решений, а следовательно, и уравнение не имеет решений.

**12.** Как показывает опыт вступительных экзаменов, среди значительной части поступающих в вузы бытует два диаметрально противоположных мнения относительно проверки полученного решения уравнения. Одни считают, что проверка должна производиться всегда, а другие считают ее необязательной. В действительности же проверка в одних случаях является обязательной и входит в состав решения уравнения, а в других случаях она совершенно не нужна.

Проверка полученного решения уравнения обычно делается с целью исключения посторонних корней, которые чаще всего появляются в результате следующих преобразований:

а) при умножении обеих частей уравнения с дробными членами на общий знаменатель, содержащий неизвестное. Так, умножив все члены уравнения $\frac{x-5}{x-1}+\frac{5+3x}{x^2-1}=0$ на $(x^2-1)$, приобретем посторонний корень $x=1$;

б) при сокращении дробных членов на множитель, содержащий неизвестное. Например, сократив в уравнении $\frac{x^2-81}{x-9}-2x=0$ дробь на $(x-9)$, получим корень $x=9$, который является посторонним;

в) при взаимном уничтожении подобных членов, содержащих неизвестное (в знаменателе, или под знаком радикала, или под знаком логарифма).

**Примеры.**

1) Вычеркнув в уравнении

$$4x^2-\frac{2}{3x^2}-x^3+\frac{2}{3x^2}=0$$

второй и четвертый члены, получим

$$4x^2-x^3=0;\ x_1=x_2=0;\ x_3=4.$$

Корни $x_1$ и $x_2$ — посторонние.

2) Вычеркнув в уравнении

$$x+3\sqrt{x+2}+5-3\sqrt{x+2}=0$$

члены, содержащие радикалы, получим

$$x+5=0;\ x=-5.$$

Корень $x=-5$ — посторонний.

3) Вычеркнув в уравнении

$$x^2+\frac{1}{4}\lg x+x-6-\frac{1}{4}\lg x=0$$

второй и пятый члены, получим

$$x^2+x-6=0;\ x_1=-3;\ x_2=2.$$

Корень $x_1=-3$ — посторонний;

г) при возведении в четную степень обеих частей уравнения. Например, при возведении в квадрат обеих частей уравнения $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5$ появляется посторонний корень $x=165$;

д) при потенцировании. Так, из уравнения $\lg(x-1)+\lg(x+1)=0$, потенцируя, получим $\lg(x^2-1)=0$; $x^2-1=1$; $x=\pm\sqrt{2}$. Проверкой убеждаемся, что корень $x=-\sqrt{2}$ — посторонний.

При каждом из указанных преобразований может произойти расширение области допустимых значений неизвестного, что и обусловливает возможность появления посторонних корней.

Выявление посторонних корней подстановкой их в данное уравнение часто приводит к большим трудностям, а поэтому, где возможно, их выявляют анализом уравнения и полученных решений. В частности, корни, не входящие в область допустимых значений неизвестного, следует отбросить без проверки. К сожалению, многие абитуриенты не знают этого, а поэтому, как правило, не устанавливают область допустимых значений неизвестного. Более того, абитуриенты часто не видят разницы между корнями уравнения и областью допустимых значений неизвестного.

Необходимо знать, что если область допустимых значений неизвестного найдена и при решении уравнения получены корни, принадлежащие ей, то проверка корней не нужна, если при этом в процессе решения не нарушалась равносильность уравнений. Если же область допустимых значений неизвестного при преобразованиях данного уравнения не меняется, но равносильность по тем или иным причинам нарушается, то в процессе решения могут появиться посторонние корни или же, наоборот, корни могут оказаться потерянными.

**Пример 1.** Имеем уравнение

$$\lg^2 x - \lg x = 0. \qquad (1)$$

Область допустимых значений неизвестного $x>0$. После сокращения всех членов данного уравнения на $\lg x$ получим

$$\lg x - 1 = 0, \qquad (2)$$

откуда

$$\lg x = 1; \quad x = 10.$$

При переходе от уравнения (1) к уравнению (2) потерян корень $x=1$, хотя область допустимых значений неизвестного и осталась прежней.

Если все члены уравнения (2) умножим на $\lg x$, получим уравнение (1). В результате такого преобразования появится корень $x=1$, не удовлетворяющий уравнению (2).

**Пример 2.** Решить уравнение

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} = 4.$$

Решение. Область допустимых значений неизвестного

$$\begin{cases} x-3\geqslant 0; \\ 2x+1\geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x\geqslant 3; \\ x\geqslant -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad x\geqslant 3.$$

Возводя обе части данного уравнения в квадрат, получим

$$x-3+2\sqrt{(x-3)(2x+1)}+2x+1=16$$

или

$$2\sqrt{(x-3)(2x+1)}=18-3x.$$

После возведения обеих частей в квадрат имеем

$$4(x-3)(2x+1)=324-108x+9x^2.$$

$$x^2-88x+336=0,\ x_1=4,\ x_2=84.$$

Проверка показывает, что хотя $x_2$ и принадлежит области допустимых значений неизвестного, но не является корнем данного уравнения.

Ответ: $x=4$.

13. Следует иметь в виду, что такие преобразования, как логарифмирование, а также умножение и деление уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут привести к сужению области допустимых значений неизвестного, а значит, и к потере корней.

Например, уравнение

$$\lg x^2=\lg 81 \tag{1}$$

решалось так:

$$\lg x^2=\lg 9^2;$$

$$2\lg x=2\lg 9;$$

$$\lg x=\lg 9;$$

$$x=9. \qquad (2)$$

Решение неверно, так как потерян корень $x=-9$. Это произошло потому, что при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) произошло сужение области допустимых значений неизвестного. Областью допустимых значений неизвестного уравнения (1) является множество всех действительных чисел, за исключением $x=0$, а уравнения (2) — множество положительных чисел.

Данное уравнение решается иначе. Если логарифмы чисел по основанию 10 равны, то равны и сами числа, т. е. $x^2=81$, откуда $x=\pm 9$.

**14.** На практике, когда не представляется возможным избежать преобразований, приводящих к нарушению равносильности уравнений, рекомендуется делать преобразования, приводящие к расширению области допустимых значений неизвестного. В этом случае посторонние корни исключаются проверкой.

Следует помнить, что обычно легче исключить посторонний корень, чем найти потерянный.

**Пример.** Решить уравнение

$$\lg (x-10)^2+\lg x^2-\lg 576=0.$$

На экзаменах некоторые поступающие решили уравнение так:

$$\lg (x-10)^2+\lg x^2=\lg 24^2; \qquad (1)$$

$$2\lg (x-10)^2+2\lg x=2\lg 24; \qquad (2)$$

$$\lg (x-10)+\lg x=\lg 24; \quad \lg (x-10)x=\lg 24;$$

$$(x-10)x=24; \quad x^2-10x-24=0; \quad x_1=12, \quad x_2=-2.$$

Произвели проверку и убедились, что $x_1$ и $x_2$ удовлетворяют данному уравнению. Абитуриенты не заметили потери двух корней исходного уравнения, которая прои зошла в результате сужения области допустимых значе ний неизвестного при переходе от (1) к (2).

Решим данное уравнение иначе. Область допустимы значений неизвестного $x \neq 0$, $x \neq 10$.

$$\lg (x-10)^2 + \lg x^2 = \lg 576;$$

$$\lg (x-10)^2 x^2 = \lg 24^2;$$

$$(x-10)^2 x^2 = 24^2; \qquad (3$$

$$(x-10) x = \pm 24. \qquad (4$$

Отсюда:

1) $x^2 - 10x - 24 = 0$, $x_1 = 12$, $x_2 = -2$.

2) $x^2 - 10x + 24 = 0$, $x_3 = 6$, $x_4 = 4$.

При переходе от (3) к (4) область допустимых значе ний неизвестного расширилась, поэтому проверка необ ходима.

Ответ: $x_1 = 12$, $x_2 = -2$, $x_3 = 6$, $x_4 = 4$.

**15.** Формальное использование положения «произведение равно нулю, если по крайней мере один из сомножителей равен нулю» приводило к существенным ошибкам в решении уравнений. Например, абитуриенты после перенесения всех членов в левую часть уравнения и разложения ее на множители получили

$$(x-5)(x+2)\sqrt{x-3} = 0,$$

затем записали:

1) $x-5=0$, $x_1 = 5$,

2) $x+2=0$, $x_2 = -2$,

3) $\sqrt{x-3} = 0$, $x_3 = 3$.

Они не обратили внимания, что при $x_2=-2$ левая часть не имеет смысла, так как $\sqrt{x-3}$ не имеет смысла.

Подобная ошибка нередко встречается в решениях тригонометрических уравнений, содержащих $\operatorname{tg} mx$ или $\operatorname{ctg} mx$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$.

**16.** Часто абитуриенты неверно пользовались методом аналогии, полагая, что если произведение равно единице, то по крайней мере один из сомножителей равен единице. Имея уравнение

$$(x+1)(x^2-x+1)=1,$$

писали:

$$x+1=1;$$

$$x^2-x+1=1 \text{ и т. д.}$$

Данное же уравнение решается очень просто. Заметив, что левая его часть есть сумма кубов, получим

$$x^3+1=1;\ x^3=0;\ x_1=x_2=x_3=0.$$

**17.** Многие не могли решить такого трехчленного уравнения:

$$5(x-3)^{\frac{1}{4}}-6=(x-3)^{\frac{1}{2}}.$$

Ошибка у всех была одна и та же. Полагая, что

$$(x-3)^{\frac{1}{2}}=z,$$

уравнение переписали в виде

$$5z^2-z-6=0$$

и, конечно, не получили нужного результата.

Где ошибка? Рекомендуем читателю найти ее самостоятельно.

18. Распространенная ошибка — сокращение всех членов уравнения на множитель, содержащий неизвестное из-за чего довольно часто происходит потеря корней Например, уравнение

$$3^x(x^2-2x-3)=9(x^2-2x-3)$$

решалось так: сократив члены уравнения на $(x^2-2x-3)$ получим

$$3^x=9;\ 3^x=3^2;\ x=2.$$

Такое решение приводило к потере двух корней. Покажем, как следовало решать данное уравнение.

Перенося член $9(x^2-2x-3)$ в левую часть, получим

$$3^x(x^2-2x-3)-9(x^2-2x-3)=0.$$

Выносим общий множитель за скобки:

$$(x^2-2x-3)(3^x-9)=0.$$

Отсюда:

1) $x^2-2x-3=0;\ x_1=3;\ x_2=-1;$

2) $3^x-9=0;\ 3^x=9;\ 3^x=3^2;\ x_3=2.$

19. Нередко уравнения и системы уравнений решаются без учета допустимых значений параметров, входящих в уравнения.

**Пример 1.** Решить уравнение

$$mx-nx=m.$$

Ответ обычно записывался в виде

$$x=\frac{m}{m-n}.$$

При каких значениях $m$ и $n$ уравнение имеет решение, оставалось неясным, т. е. решение уравнения фактически не доводилось до конца.

Следовало отметить:

1) если $m \neq n$, то деление $m$ на $(m-n)$ всегда возможно и уравнение имеет единственное решение;

2) если $m=n$ и $m \neq 0$, то уравнение решения не имеет;

3) если $m=n=0$, то уравнению удовлетворяет любое значение $x$.

В справедливости двух последних заключений легко убедимся, если перепишем данное уравнение в виде

$$(m-n)x=m.$$

**Пример 2.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} mx+y=n; \\ x+my=2m. \end{cases}$$

Многие ограничились записью ответа

$$x=\frac{m(n-2)}{m^2-1}, \quad y=\frac{2m^2-n}{m^2-1}.$$

Как и в предыдущем примере, решение не доводилось до конца.

Следовало отметить:

1) если $m^2-1 \neq 0$ или $m^2 \neq 1$, $m \neq \pm 1$, то деление на $(m^2-1)$ всегда возможно и система имеет единственное решение;

2) если $m=\pm 1$, а $m(n-2) \neq 0$ или $2m^2-n \neq 0$ — система решений не имеет;

3) если $m=\pm 1$, $m(n-2)=0$, $2m^2-n=0$ (последние два равенства выполняются при $n=2$) — система имеет бесчисленное множество решений.

Из данной системы уравнений найдем

$$(m^2-1)x=m(n-2); \quad (m^2-1)y=2m^2-n.$$

Эти равенства позволяют убедиться в справедливост двух последних заключений.

**20.** Поверхностное представление о таких понятиях, как абсолютная величина и арифметический корень, при-водит к серьезным ошибкам в решении уравнений. Учиты-вая, что при действиях с абсолютными величинами допус-каются самые разнообразные ошибки, приведем подроб-ное решение некоторых примеров, предлагавшихся н вступительных экзаменах.

**Пример 1.** Решить уравнение

$$|x-3|+|x-4|-1=0.$$

Решение. Находим корни выражений, стоящих по знаками абсолютных величин, и располагаем их в поряд-ке возрастания. Полагая $x-3=0$ и $x-4=0$, найдем $x_1=3$; $x_2=4$. Разобьем множество всех действительных чисел на интервалы:

$$-\infty<x\leqslant 3; \quad 3<x<4; \quad 4\leqslant x<+\infty.$$

На каждом из интервалов решаем уравнение о дельно.

1) $-\infty<x\leqslant 3$.

Для значений $x$ из этого интервала имеем

$$|x-3|=-(x-3)=-x+3;$$

$$|x-4|=-(x-4)=-x+4.$$

Данное уравнение приводится к виду

$$-x+3-x+4-1=0,$$

тсюда

$$x=3.$$

Значение $x=3$ является корнем уравнения, так как о удовлетворяет условию $-\infty<x\leqslant 3$.

2) $3<x<4$.

указанном интервале будем иметь

$$|x-3|=x-3; \quad |x-4|=-(x-4)=-x+4.$$

Данное уравнение приводится к уравнению

$$x-3-x+4-1=0,$$

которое является тождеством, а поэтому справедливо при любом $x$ из интервала $3<x<4$.

3) $4\leqslant x<+\infty$.

В этом интервале

$$|x-3|=x-3; \quad |x-4|=x-4.$$

Данное уравнение можно переписать

$$x-3+x-4-1=0,$$

откуда

$$x=4.$$

Ответ: $3\leqslant x\leqslant 4$.

**Пример 2.** Решить уравнение

$$|2x-4|+|x-3|+|1-x|=4. \qquad (1)$$

Решение. Переписываем уравнение в виде

$$2|x-2|+|x-3|+|x-1|=4, \qquad (2)$$

находим:

$$x-2=0,\text{ если } x=2;$$

$$x-3=0,\text{ если } x=3;$$

$$x-1=0,\text{ если } x=1.$$

Уравнение (2) решаем в каждом из интервалов $(-\infty, 1), [1, 2), [2, 3), [3, \infty)$.

1) $x<1$. $-(2x-4)-(x-3)-(x-1)=4$, $-4x+8=4$ $x=1$ — не входит в рассматриваемый интервал;

2) $1\leqslant x<2$. $-2(x-2)-(x-3)+(x-1)=4$, $-2x+6=4$, $x=1$ — корень;

3) $2\leqslant x<3$. $2(x-2)-(x-3)+(x-1)=4$, $2x-2=4$ $x=3$ — не входит в рассматриваемый интервал;

4) $x\geqslant 3$. $2(x-2)+(x-3)+(x-1)=4$, $4x-8=4$ $x=3$ — корень.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=3$.

**Пример 3.** Решить уравнение

$$\sqrt{(x+3)^2}=x+3.$$

Некоторые из поступающих утверждали, что корнем исходного уравнения является любое действительное число.

Утверждение ошибочное. Так как в элементарной математике рассматриваются арифметические корни, данное уравнение равносильно такому:

$$|x+3|=x+3.$$

Так как модуль числа равен самому числу, то это число неотрицательно. Следовательно,

$$x+3\geqslant 0 \text{ или } x\geqslant -3.$$

Множество значений $x$, удовлетворяющих последнему неравенству, и является решением данного уравнения.

**Пример 4.** Решить уравнение

$$\lg\sqrt{(x-10)^2}-1=0.$$

Решение. Так как $\lg\sqrt{(x-10)^2}=\lg|x-10|$, то

$$\lg|x-10|-1=0;\quad \lg|x-10|=1;\quad |x-10|=10.$$

Если $x\geqslant 10$, тогда $|x-10|=x-10$; $x-10=10$; $x_1=20$; если $x<10$, тогда $|x-10|=10-x$; $10-x=10$; $x_2=0$.

Ответ: $x_1=20$; $x_2=0$.

**21.** Опыт проведения вступительных экзаменов показывает, что абитуриенты свободно владеют методом уединения радикала при решении иррациональных уравнений. В то же время метод введения вспомогательных неизвестных (подстановки) усвоен крайне слабо. В результате этого решения иррациональных уравнений часто получаются громоздкими и не доводятся до конца. Некоторые забывают, что при решении иррациональных уравнений требуется находить только действительные значения неизвестных.

**Пример 1.** Решить уравнение

$$x^2-4x-\sqrt{2x^2-8x+12}=6.$$

Абитуриенты данное уравнение решили так. Уединили радикал в правой части уравнения:

$$x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}.$$

Обе части уравнения возвели в квадрат:

$$x^4+16x^2+36-8x^3-12x^2+48x=2x^2-8x+12;$$

$$x^4-8x^3+2x^2+56x+24=0.$$

Продолжения решения не последовало.

Как видим, применение метода уединения радикала привело к уравнению 4-й степени, решение которого в общем виде в элементарной математике не дается.

Решение. Данное уравнение легко решается методом подстановки. Пусть

$$z=\sqrt{2x^2-8x+12}.$$

Находим

$$z^2=2x^2-8x+12,\ z^2=2(x^2-4x)+12;$$

$$x^2-4x=\frac{1}{2}(z^2-12).$$

Данное уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{2}(z^2-12)-z=6.$$

Отсюда

$$z^2-2z-24=0,\ z_1=6,\ z_2=-4.$$

Учитывая, что понятие арифметического корня сохраняется и здесь, значение $z^2=-4$ отбрасываем.

Итак,

$$\sqrt{2x^2-8x+12}=6.$$

После упрощений получим

$$x^2-4x-12=0,\ x_1=6,\ x_2=-2.$$

Поскольку после возведения в квадрат могли появиться посторонние корни, необходима проверка. Подставляя значения сначала $x_1$, а затем $x_2$ в данное уравнение, убеждаемся, что $x_1$ и $x_2$ — корни исходного уравнения.

Ответ: $x_1=6$, $x_2=-2$.

**Пример 2.** Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}}+\sqrt{\frac{8-6x+x^2}{18-7x-x^2}}=\frac{13}{6}.$$

Решение. Уравнение теряет смысл, если $8-6x+x^2=0$ или $18-7x-x^2=0$, то есть при значениях $x=2$, $x=4$ и $x=-9$.

Пусть

$$z=\sqrt{\frac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}}.$$

Тогда

$$\sqrt{\frac{8-6x+x^2}{18-7x-x^2}}=\frac{1}{z}.$$

Исходное уравнение примет вид

$$z+\frac{1}{z}=\frac{13}{6}.$$

Отсюда

$$6z^2-13z+6=0,\ z_1=\frac{3}{2},\ z_2=\frac{2}{3}.$$

Имеем:

1) $\sqrt{\dfrac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}}=\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}=\dfrac{9}{4}$;

$$72-28x-4x^2=72-54x+9x^2;\ 13x^2-26x=0;$$

$13x(x-2)=0$; $x=0$, а $x=2$ — не принадлежит области допускаемых значений неизвестного.

2) $\sqrt{\dfrac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}}=\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}=\dfrac{4}{9}$;

$$162-63x-9x^2=32-24x+4x^2;\ 13x^2+39x-130=0;$$

$$x^2+3x-10=0;\ x=-5, \text{ а } x=2 \text{ — отбрасываем.}$$

Проверка показывает, что значения неизвестного $x=$ и $x=-5$ являются корнями данного уравнения.

Ответ: $x_1=0$, $x_2=-5$.

Попытки решить данное уравнение методом уединения радикала ни к чему не привели.

**22.** Решение двучленных уравнений обычно ограничивается указанием только действительных корней.

Например, уравнение

$$x^3-125=0$$

решалось так:

$$x^3=125;\ x=\sqrt[3]{125};\ x=5.$$

Следует его решать

$$(x-5)(x^2+5x+25)=0,$$

откуда

$$x-5=0;$$

$$x^2+5x+25=0 \text{ и т. д.}$$

Аналогично проводилось решение уравнения $x^4-81=0$:

$$x^4=81;\ x=\sqrt[4]{81};\ x=\pm3.$$

Следовало его решать

$$(x^2-9)(x^2+9)=0,$$

отсюда

$$x^2-9=0;\ x^2=9;\ x_{1,2}=\pm3;$$

$$x^2+9=0;\ x^2=-9;\ x_{3,4}=\pm3i.$$

**23.** При решении уравнения

$$(3^{\sqrt{0,5x}}+19)^2=10\,000$$

многие писали

$$3^{0,5x}+38\cdot 3^{\sqrt{0,5x}}+361=10\,000 \text{ и т. д.}$$

Здесь, во-первых, без надобности левая часть возведена в квадрат, во-вторых, допущена ошибка при возведении в степень $3^{\sqrt{0,5x}}$, так как правильно

$$(3^{\sqrt{0,5x}})^2=3^{2\sqrt{0,5x}}.$$

Как же следовало решать данное уравнение?

Извлекая корень из обеих частей уравнения, получим

$$3^{\sqrt{0,5x}}+19=100$$

(в правой части нельзя писать $\pm 100$, так как сумма положительных чисел отрицательной быть не может), откуда

$$3^{\sqrt{0,5x}}=81;\ 3^{\sqrt{0,5x}}=3^4.$$

$$\sqrt{0,5x}=4;\ 0,5x=16;\ x=32.$$

Проверкой убеждаемся, что $x=32$ — корень уравнения.

**24.** Решение уравнения

$$4^x-5^x=0$$

записывалось в виде

$$\lg(4^x-5^x)=0;\ x\lg 4-x\lg 5=0;\ x(\lg 4-\lg 5)=0;$$
$$x=0.$$

Ответ получен правильный, но решение порочно. Может возникнуть вопрос: «Почему же решение порочно, если ответ верный?» В решении допущены две ошибки. Во-первых, при логарифмировании уравнения $4^x-5^x=0$ $\lg 0$ принят равным нулю, а в действительности он не существует; во-вторых, почленно прологарифмирована разность $(4^x-5^x)$. Одна ошибка исключила другую, и получился правильный ответ. Покажем, как надо решать данное уравнение:

$$4^x=5^x;\quad \frac{4^x}{5^x}=1.$$

Деление уравнения на $5^x$ возможно, так как ни при каком значении $x$ степень $5^x\neq 0$. Далее,

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x=1;\quad \left(\frac{4}{5}\right)^x=\left(\frac{4}{5}\right)^0.$$

Степени числа $\frac{4}{5}$ равны, значит, равны и показатели этих степеней. Итак, $x=0$.

Уравнение, конечно, можно решить и с помощью логарифмирования. Логарифмируя равенство

$$4^x=5^x,$$

получим

$$x\lg 4=x\lg 5,$$

отсюда

$$x(\lg 4-\lg 5)=0;$$

$$x=0.$$

25. Некоторые, решая логарифмическое уравнение, получили

$$(\log_5 x)^{\frac{1}{3}} = 1,$$

затем записали

$$(\log_5 x)^{\frac{1}{3}} = (\log_5 x)^0.$$

Сделали заключение: $\frac{1}{3} \neq 0$, следовательно, уравнение решения не имеет.

Неверно. Дело в том, что из равенства степеней, основания которых равны единице, не следует равенство показателей этих степеней.

Поэтому необходимо было особо рассмотреть случай, когда $\log_5 x = 1$. Отсюда $x = 5$. Этот корень абитуриенты потеряли.

26. Уравнение

$$(x+5)^{x^2+x-2} = 1$$

решалось так:

$$(x+5)^{x^2+x-2} = (x+5)^0;$$

$$x^2+x-2=0;\ x_1=1,\ x_2=-2.$$

Неверно. Уравнения $a^{\varphi(x)} = a^{\psi(x)}$ $(a \neq 1)$ и $\varphi(x) = \psi(x)$ равносильны. Если же $a$ содержит неизвестное $x$, тогда уравнения $a^{\varphi(x)} = a^{\psi(x)}$ и $\varphi(x) = \psi(x)$ могут оказаться не равносильными. Последнее может произойти, в частности, когда при некотором значении неизвестного $x$ будет $a = 1$, но $\varphi(x) \neq \psi(x)$.

На основании сказанного, положив $x+5=1$, найдем $x=-4$.

Далее, необходимо проверить, не выполняется ли при каком-либо значении $x = x_0$ равенство $(-1)^{2n} = 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Если оно справедливо, то $x_0$ — корень уравнения.

Положив $x+5=-1$, найдем $x=-6$. Проверим, буде ли $x^2+x-2$ четным числом при $x=-6$.

$x^2+x-2=(-6)^2-6-2=28$ — четное число. Следова тельно, $x=-6$ — корень уравнения.

Итак, абитуриенты потеряли два корня: $x=-$ и $x=-6$.

Решим данное уравнение другим способом. Логариф мируя уравнение, получим

$$(x^2+x-2)\lg|x+5|=0.$$

Имеем:

1) $x^2+x-2=0,\ x_1=1,\ x_2=-2;$

2) $\lg|x+5|=0,\ |x+5|=1.$

Если $\quad x+5>0$, то $x+5=1,\ x_3=-4;$

если $\quad x+5<0$, то $-(x+5)=1,\ x_4=-6.$

Ответ: $x_1=1,\ x_2=-2,\ x_3=-4,\ x_4=-6.$

**27.** Значительная часть ошибок при решении логариф мических уравнений является результатом нарушени правил потенцирования и действий над логарифмами.

**Примеры.**

1) Из уравнения

$$\log_4 4+\frac{\log_4(10-x)}{\log_4 x}=\frac{2\log_4 4}{\log_4 x}$$

получают

$$4[(10-x)-x]=16-x.$$

Здесь частное логарифмов ошибочно заменено лог рифмом разности.

2) Уравнение

$$\log_3 x\cdot\log_3(3x)=\log_3(81x)$$

решалось так:

$$\log_3(3x^2)=\log_3(81x);$$
$$3x^2=81x;$$
$$x=27.$$

В решении допущены две грубые ошибки. Во-первых, произведение логарифмов двух чисел заменено логарифмом произведения этих чисел; во-вторых, при решении уравнения $3x^2=81$ потерян корень $x=0$; правда, этот корень не является корнем данного уравнения, но к сожалению, абитуриенты этого не отмечают. Решение данного уравнения должно быть следующим: область допустимых значений неизвестного $x>0$;

$$\log_3 x(\log_3 3+\log_3 x)=\log_3 81+\log_3 x;$$
$$\log_3 x(1+\log_3 x)=\log_3 3^4+\log_3 x;$$
$$\log_3 x+\log_3^2 x=4\log_3 3+\log_3 x:$$
$$\log_3^2 x=4;\ \log_3 x=\pm 2;$$
$$x_1=3^2=9;\ x_2=3^{-2}=\frac{1}{9}.$$

Ответ: $x_1=9$; $x_2=\frac{1}{9}$.

3) Уравнение

$$\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)=1+\lg(2^{x-2}+1)$$

переписывалось в виде

$$2+4^{x-2}+9=10+2^{x-2}+1.$$

Здесь логарифмы чисел незаконно приравнены к самим числам.

Данное уравнение решается так:

$$\lg[2(4^{x-2}+9)]=\lg[10(2^{x-2}+1)],$$

отсюда

$$2(4^{x-2}+9)=10(2^{x-2}+1) \text{ и т. д.}$$

**28.** Теоремы о логарифмировании произведения, частного и степени, доказанные для положительных чисел, могут быть распространены и на случай отрицательных чисел, если воспользоваться понятием абсолютной величины числа. Если $x$ и $y$ — любые действительные числа, отличные от нуля, и имеют одинаковые знаки, то:

$$\log_a(xy)=\log_a|x|+\log_a|y|; \quad (1)$$

$$\log_a \frac{x}{y}=\log_a|x|-\log_a|y|. \quad (2)$$

При любом значении $x \neq 0$ и четном $n$

$$\log_a x^n=n\log_a|x|. \quad (3)$$

Если $x \neq 0$, $x \neq 1$ и $N>0$, то при четном $n$

$$\log_{x^n} N=\frac{1}{n}\log_{|x|} N. \quad (4)$$

**Пример.** Решить уравнение

$$\lg x^2=4.$$

Решение. Перепишем уравнение так:

$$2\lg|x|=4,$$

отсюда

$$\lg|x|=2; \quad |x|=100.$$

Ответ: $x_1=100$; $x_2=-100$.

Если бы уравнение переписали в виде $2\lg x=4$, то потеряли бы корень $x=-100$.

**29.** Обычно у поступающих в вузы вызывают большие затруднения действия над логарифмами с разными основаниями, так как абитуриенты либо не умеют пользоваться формулами:

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}, \qquad (1)$$

где $a>0$; $b>0$; $N>0$; $a\neq 1$; $b\neq 1$;

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}; \qquad (2)$$

либо не знают их.

Последняя формула является следствием формулы (1). Незнание формул (1) и (2) приводило к тому, что решения уравнений, содержащих логарифмы, зачастую выполнялись крайне нерационально или с грубыми ошибками. Учитывая это, приведем полное решение некоторых уравнений, предлагавшихся на вступительных экзаменах.

**Пример 1.** Решить уравнение

$$\log_2 5\log_5 x\log_3 x-(2-\log_5 2)\log_2 x\log_3 5=0.$$

Решение. Область допустимых значений неизвестного $x>0$. Пользуясь формулой (1), перепишем уравнение в виде

$$\log_2 5\cdot\frac{\log_2 x}{\log_2 5}\cdot\frac{\log_2 x}{\log_2 3}-$$

$$-\left(2-\frac{\log_2 2}{\log_2 5}\right)\log_2 x\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 3}=0.$$

После упрощений получим:

$$\log_2^2 x+\log_2 x(1-2\log_2 5)=0;$$

$$\log_2 x(\log_2 x+1-2\log_2 5)=0.$$

Отсюда:

1) $\log_2 x=0$; $x_1=2^0=1$;

2) $\log_2 x+1-2\log_2 5=0$; $\log_2 x=\log_2 25-\log_2 2$;

$$\log_2 x=\log_2 \frac{25}{2};\quad x_2=12{,}5.$$

Ответ: $x_1=1$; $x_2=12{,}5$.

**Пример 2.** Решить уравнение

$$(\log_x 5+2)\log_5^2 x=1.$$

Решение. Область допустимых значений неизвестного $x>0$, $x\neq 1$.

Пользуясь формулой (2), перепишем уравнение

$$(\log_x 5+2)\cdot\frac{1}{\log_x^2 5}=1.$$

Освобождаясь от дроби, получим

$$\log_x 5+2=\log_x^2 5$$

или

$$\log_x^2 5-\log_x 5-2=0,$$

отсюда

$$\log_x 5=\frac{1\pm 3}{2};\quad (\log_x 5)_{\mathrm{I}}=2;\quad (\log_x 5)_{\mathrm{II}}=-1.$$

Имеем:

1) $x^2=5$, $x_1=\sqrt{5}$ (учитывая область допустимых значений $x$, отрицательное значение корня не берем);

2) $x^{-1}=5$, $x_2=\frac{1}{5}$. Проверка показывает, что значения $x_1$ и $x_2$ удовлетворяют уравнению.

Ответ: $x_1=\sqrt{5}$; $x_2=\frac{1}{5}$.

При решении логарифмических уравнений иногда выгодно использовать формулу

$$\log_a N=\log_{a^m} N^m. \tag{3}$$

**Пример 3.** Решить уравнение

$$\log_{81} x-2\log_3 x+5\log_9 x=1{,}5.$$

Решение. Область допустимых значений неизвестного $x>0$. С помощью формулы (3) перепишем уравнение в виде

$$\log_{81} x-2\log_{81} x^4+5\log_{81} x^2=1{,}5$$

или

$$\log_{81} x-8\log_{81} x+10\log_{81} x=1{,}5,$$

отсюда

$$3\log_{81} x=\frac{3}{2};\ \log_{81} x=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x=9$.

Нередко встречалось, что при решении уравнений, содержащих логарифмы с разными основаниями, без всякой к тому надобности делался переход к логарифмам при одном основании. Например, многие сделали такое преобразование, решая систему

$$\begin{cases} \log_2(xy)=5; \\ \log_{\frac{1}{2}}\frac{x}{y}=1. \end{cases}$$

Здесь логарифмы приводить к одному основанию не имело смысла. Убедимся в этом.

Из второго уравнения системы найдем

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{2};\ y=2x.$$

Подстановка в первое уравнение дает:

$$\log_2(2x^2)=5;\ 2x^2=2^5;\ x^2=16;\ x_{1,2}=\pm 4.$$

Очевидно,

$$y=\pm 8.$$

Проверкой убеждаемся в правильности полученных решений.

Ответ: (4; 8); (—4; —8).

**30.** Многие из поступающих, применяя формулу

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$$

к решению уравнений, забывают, что она справедлива только при определенных условиях ($a>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$ и $N>0$).

Несоблюдение указанных условий обычно приводит к потере корней исходного уравнения. Следует помнить, что потери корней не произойдет, когда новым основанием логарифмов является функция $\varphi(x)$, которая определена и принимает положительные значения, отличные от единицы, на всей области допустимых значений неизвестного данного уравнения, и при этом соблюдаются остальные условия ($a>0$, $a\neq 1$, $N>0$).

**Пример 1.** Решить уравнение

$$20\log_{4x}\sqrt{x}+7\log_{16x}x^3-3\log_{\frac{x}{2}}x^2=0.$$

Приводилось решение. Область допустимых значений неизвестного данного уравнения $x>0$.

$$10\log_{4x}x+21\log_{16x}x-6\log_{\frac{x}{2}}x=0;$$

$$\frac{10}{\log_x(4x)}+\frac{21}{\log_x(16x)}-\frac{6}{\log_x\frac{x}{2}}=0;$$

$$10\log_x(16x)\cdot\log_x\frac{x}{2}+21\log_x(4x)\cdot\log_x\frac{x}{2}-$$
$$-6\log_x(4x)\cdot\log_x(16x)=0;$$

$$10(\log_x 2^4+\log_x x)(\log_x x-\log_x 2)+$$
$$+21(\log_x 2^2+\log_x x)(\log_x x-\log_x 2)-$$
$$-6(\log_x 2^2+\log_x x)(\log_x 2^4+\log_x x)=0;$$

$$10(4\log_x 2+1)(1-\log_x 2)+21(2\log_x 2+1)(1-\log_x 2)-$$
$$-6(2\log_x 2+1)(4\log_x 2+1)=0;$$

$$40\log_x 2+10-40\log_x^2 2-10\log_x 2+42\log_x 2+$$
$$+21-42\log_x^2 2-21\log_x 2-48\log_x^2 2-6-$$
$$-24\log_x 2-12\log_x 2=0;$$

$$-130\log_x^2 2+15\log_x 2+25=0;$$

$$26\log_x^2 2-3\log_x 2-5=0.$$

Отсюда:

1) $\log_x 2 = \frac{1}{2}$, $x^{\frac{1}{2}} = 2$, $x = 4$.

2) $\log_x 2 = -\frac{5}{13}$, $x^{-\frac{5}{13}} = 2$, $x = \frac{1}{4\sqrt[5]{18}}$.

В приведенном примере сделан переход к логарифмам по основанию $x$. Так как область допустимых значений неизвестного $x>0$, значит, новое основание может быть равным единице. Но при $x=1$ нарушается одно из условий применимости формулы перехода к логарифмам по новому основанию. Поэтому необходимо проверить, не будет ли $x=1$ корнем данного уравнения. Подставив значение $x=1$ в исходное уравнение, убедимся, что это корень уравнения. Его абитуриенты потеряли.

Ответ: $x_1=4$; $x_2 = \frac{1}{4\sqrt[5]{8}}$; $x_3=1$.

**Пример 2.** Решить уравнение

$$\log_{3x^2}(9x^4) - \log_{\frac{x^2}{3}} x^2 = 0.$$

Абитуриенты решили это уравнение следующим образом:

$$\frac{\log_x(9x^4)}{\log_x(3x^2)} - \frac{\log_x x^2}{\log_x \frac{x^2}{3}} = 0;$$

$$\log_x(9x^4) \cdot \log_x \frac{x^2}{3} - \log_x x^2 \cdot \log_x(3x^2) = 0;$$

$$2\log_x(3x^2)\cdot\log_x\frac{x^2}{3}-2\log_x x\cdot\log_x(3x^2)=0;$$

$$\log_x(3x^2)\,(2\log_x x-\log_x 3-1)=0;$$

$$(\log_x 3+2)\,(1-\log_x 3)=0.$$

Записали:

1) $\log_x 3+2=0$, $\log_x 3=-2$, $x^{-2}=3$, $x^2=\frac{1}{3}$, $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $1-\log_x 3=0$, $\log_x 3=1$, $x_3=3$

Областью допустимых значений неизвестного данного уравнения является множество действительных чисел, кроме $x=0$. Делая переход к новому основанию логарифмов $\varphi(x)=x$, поступающие не обратили внимания, что оно может быть отрицательным для значений $x<0$ из области допустимых значений неизвестного, поэтому могла произойти потеря корней. Чтобы избежать этого, можно, например, перейти к основанию $\varphi(x)=|x|$, предварительно проверив, не будет ли $|x|=1$ решением исходного уравнения. В этом случае имеем:

1) $\log_{|x|}3=-2$, $3=|x|^{-2}$, $|x|^2=\frac{1}{3}$, $x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2) $\log_{|x|}3=1$, $|x|=3$, $x_{3,4}=\pm 3$.

Ответ: $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_3=3$, $x_4=-3$.

**31.** Системы уравнений решаются крайне нерациональными методами.

**Примеры.**

1) Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x^y=9; \\ \sqrt[y]{324}=2x^2. \end{cases}$$

Абитуриенты решили эту систему следующим образом. Заменили данную систему равносильной ей:

$$\begin{cases} x^y=9; \\ 324^{\frac{1}{y}}=2x^2. \end{cases}$$

Прологарифмировали каждое из уравнений:

$$\begin{cases} y \lg x=\lg 9; \\ \dfrac{1}{y} \lg 324=\lg 2+2 \lg x. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы нашли

$$y=\frac{\lg 9}{\lg x}.$$

Подстановка во второе уравнение дала:

$$\frac{\lg x \lg 324}{\lg 9}=\lg 2+2 \lg x;$$

$$\frac{\lg x \lg (2\cdot 9)^2}{\lg 3^2}=\lg 2+2 \lg x;$$

$$\frac{\lg x\cdot 2(\lg 2+2 \lg 3)}{2 \lg 3}=\lg 2+2 \lg x;$$

$$\lg x(\lg 2+2\lg 3)-2\lg 3\lg x=\lg 2\lg 3;$$

$$(\lg 2+2\lg 3-2\lg 3)\lg x=\lg 2\lg 3;$$

$$\lg 2\lg x=\lg 2\lg 3;\ \lg x=\lg 3,\ x=3.$$

Нашли

$$y=\frac{\lg 9}{\lg 3}=\frac{\lg 3^2}{\lg 3}=\frac{2\lg 3}{\lg 3}=2.$$

Следовало же решать данную систему уравнений так.

Область допустимых значений $x$ и $y$: $x>0$, $x\neq 1$, $y$ — любое действительное число, кроме 0.

Второе уравнение системы перепишем в виде

$$(2x^2)^y=324$$

или

$$2^y\cdot(x^y)^2=324.$$

Заменив $x^y$ на 9, из первого уравнения получим

$$2^y\cdot 9^2=324,$$

отсюда

$$2^y=4;\ 2^y=2^2;\ y=2.$$

Подстановка в первое уравнение системы дает:

$$x^2=9;\ x=\pm\sqrt{9}=\pm 3.$$

Значение $x=-3$ отбрасываем, так как оно не принадлежит области допустимых значений $x$.

Ответ: $x=3$; $y=2$.

Надеемся, читатель без труда сможет оценить преимущество второго способа решения.

2) Система

$$\begin{cases} 3^{x-y-1}=1; \\ 9^{x+y}=729 \end{cases}$$

решалась логарифмированием обеих частей каждого уравнения, т. е.

$$\begin{cases} (x-y-1)\lg 3=\lg 1; \\ (x+y)\lg 9=\lg 729 \text{ и т. д.} \end{cases}$$

Можно решить проще, без логарифмирования. Представим систему в виде

$$\begin{cases} 3^{x-y-1}=3^0; \\ 9^{x+y}=9^3, \end{cases}$$

отсюда

$$\begin{cases} x-y-1=0; \\ x+y=3, \end{cases}$$

следовательно,

$$x=2;\ y=1.$$

**32.** Область допустимых значений при решении тригонометрических уравнений, как правило, не устанавливается, что является одной из причин появления ошибок. Так, решая уравнение

$$\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} x=4\sin x,$$

пишут:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x\cos x}=4\sin x;$$

$$\sin 2x=4\sin x\cos x\cos 3x;$$

$$\sin 2x=2\sin 2x\cos 3x;$$

$$\sin 2x-2\sin 2x\cos 3x=0;$$

$$\sin 2x(1-2\cos 3x)=0.$$

Отсюда находят:

$$\sin 2x=0;\ 2x=k\pi;\ x_1=\frac{k\pi}{2};$$

$$1-2\cos 3x=0;\ \cos 3x=\frac{1}{2};\ 3x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi;$$

$$x_2=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}.$$

Абитуриенты записали ответ: $x_1=\frac{k\pi}{2}$; $x_2=\pm\frac{\pi}{9}+$ $+\frac{2k\pi}{3}$. Здесь допущена грубейшая ошибка. При $x_1=\frac{k\pi}{2}$ и нечетных $k$ данное уравнение теряет смысл. Ошибка осталась незамеченной в результате того, что не была установлена область допустимых значений неизвестного.

**33.** При решении уравнений часто не учитывались ограничения, накладываемые на аргумент.

**Пример.** Уравнение $\cos\frac{x}{2}-\cos x=1$

при условии, что $0<x<\frac{\pi}{2}$, решалось так:

$$\cos\frac{x}{2}-\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=1;$$

$$\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=1;$$

$$\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+1-\cos^2\frac{x}{2}=1;$$

$$\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}=0;$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(1-2\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

Отсюда:

1) $\cos\frac{x}{2}=0$; $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $x=\pi+2k\pi$;

2) $1-2\cos\frac{x}{2}=0$; $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$; $\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+4k\pi$.

Ответ: $x_1=\pi(2k+1)$; $x_2=\frac{2\pi}{3}(6k\pm1)$.

Абитуриенты не обратили внимания, что ни одно из полученных решений не принадлежит интервалу $0<x<\frac{\pi}{2}$.

**34.** Решение тригонометрических уравнений чаще всего заканчивалось указанием частного решения или же неправильной записью общего решения.

**Примеры.** 1) При решении уравнения

$$\sin x-\cos x=0,$$

как правило, давался ответ $x=\frac{\pi}{4}$ вместо $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

2) Решая уравнение

$$\cos(45°-x)=0,$$

многие записывали $45°-x=90°$ вместо $45°-x=90°+180°k$.

3) Для уравнения

$$\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$$

указывалось значение $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ вместо $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$.

4) Общее решение уравнения

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

записывалось в виде $x=(-1)^k \arcsin\frac{\pi}{6}+k\pi$ вместо $x=(-1)^k \arcsin\frac{1}{2}+k\pi$ или $x=(-1)^k \frac{\pi}{6}+k\pi$.

Чтобы не допускать подобных ошибок, надо знать на память решение уравнений, приведенных в табл. 2.

Таблица 2

| Уравнение | Решение |
|---|---|
| $\sin x = m,\ -1 < m < 1$ | $x = (-1)^k \arcsin m + k\pi$ |
| $\cos x = m,\ -1 < m < 1$ | $x = \pm \arccos m + 2k\pi$ |
| $\operatorname{tg} x = m,\ -\infty < m < +\infty$ | $x = \operatorname{arctg} m + k\pi$ |
| $\operatorname{ctg} x = m,\ -\infty < m < +\infty$ | $x = \operatorname{arcctg} m + k\pi$ |
| $\sin x = 0$ | $x = k\pi$ |
| $\sin x = +1$ | $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ |
| $\sin x = -1$ | $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ |
| $\cos x = 0$ | $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ |
| $\cos x = +1$ | $x = 2k\pi$ |
| $\cos x = -1$ | $x = \pi + 2k\pi$ |
| $\operatorname{tg} = 0$ | $x = k\pi$ |
| $\operatorname{ctg} x = 0$ | $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ |

Примечание. В формулах $k$ — любое целое число.

Замечание. Решение уравнения $\sin x = m$ иногда выгодно записывать в две строки:

$$\begin{cases} x = \arcsin m + 2k\pi; \\ x = -\arcsin m + (2k+1)\pi. \end{cases}$$

Вот еще примеры неправильной записи общего решения.

5) Так как $\sin^2 x = \frac{3}{4}$, то $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

6) Из уравнения $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ находим $x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi$.

7) Раз $\operatorname{tg}^2 x = 3$, то $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Чтобы не делать таких ошибок, полезно помнить:

$$\sin^2 x = c,\ 0 \leqslant c \leqslant 1,\ x = \pm \arcsin \sqrt{c} + k\pi;$$
$$\cos^2 x = c,\ 0 \leqslant c \leqslant 1,\ x = \pm \arccos \sqrt{c} + k\pi;$$
$$\operatorname{tg}^2 x = c,\ 0 \leqslant c < \infty,\ x = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{c} + k\pi;$$
$$\operatorname{ctg}^2 x = c,\ 0 \leqslant c < \infty,\ x = \pm \operatorname{arcctg} \sqrt{c} + k\pi.$$

Пользуясь этими формулами, абитуриент сделает правильную запись общих решений вышеприведенных уравнений.

5) $\sin^2 x = \frac{3}{4}$; $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = \pm \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$;

6) $\cos^2 x = \frac{1}{4}$; $\cos x = \pm \frac{1}{2}$; $x = \pm \arccos \frac{1}{2} + k\pi = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$;

7) $\operatorname{tg}^2 x=3$;  $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}$;  $x=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{3}+k\pi=$
$=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$.

35. Типичной ошибкой при решении тригонометрических уравнений является сокращение всех членов уравнения на функцию, содержащую неизвестное. Это, как правило, приводит к потере корней уравнения. Так, решение уравнения

$$\cos x(2\sin 2x-1)=\cos x\sin 2x$$

ограничивалось лишь нахождением корней уравнения

$$2\sin 2x-1=\sin 2x.$$

Данное же уравнение надо решать следующим образом. Переносим члены уравнения в одну часть:

$$\cos x(2\sin 2x-1)-\cos x\sin 2x=0.$$

Выносим общий множитель $\cos x$ за скобки:

$$\cos x(2\sin 2x-1-\sin 2x)=0$$

или

$$\cos x(\sin 2x-1)=0.$$

Приравниваем последовательно каждый сомножитель нулю:

$$\cos x=0;\ \sin 2x-1=0.$$

Затем решаем полученные уравнения.

36. Тригонометрические уравнения часто решают нерациональными способами.

**Примеры.**

1) Уравнение

$$\sin x+\cos x=0$$

приводили к виду

$$\sin x+\sin(90^\circ-x)=0.$$

По формуле суммы синусов находили

$$2\sin 45^\circ\cos(x-45^\circ)=0 \text{ и т. д.}$$

Данное уравнение можно решить проще, так как оно является однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$. Все члены уравнения делим на $\cos x(\cos x\neq 0)$. Получаем

$$\operatorname{tg} x+1=0;$$

$$\operatorname{tg} x=-1;$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

2) Решая уравнение

$$\frac{1}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{\cos 2x}{\cos^2 x},$$

переписывали его в виде

$$\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=$$

$$=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Затем все члены приводили к функции $\sin x$. А было бы гораздо удобнее данное уравнение переписать

$$1+\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x=1-\operatorname{tg}^2 x$$

или

$$\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x=0.$$

Дело свелось к решению неполного квадратного уравнения.

Для рационального решения тригонометрических уравнений полезно знать теоремы об условиях равенства двух одноименных тригонометрических функций. Необходимыми и достаточными условиями равенства двух одноименных тригонометрических функций являются:

$$\sin\alpha=\sin\beta, \text{ если } \alpha-\beta=2k\pi \text{ или } \alpha+\beta=(2k+1)\pi;$$

$$\cos\alpha=\cos\beta, \text{ если } \alpha+\beta=2k\pi \text{ или } \alpha-\beta=2k\pi;$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta, \text{ если } \alpha-\beta=k\pi \text{ и } \alpha\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},$$

$$\beta\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta, \text{ если } \alpha-\beta=k\pi \text{ и } \alpha\neq k\pi,\ \beta\neq k\pi.$$

Те, кто не знал этих теорем, уравнение

$$\frac{\operatorname{tg}(5x+5)}{\operatorname{tg}(3x+5)}=1$$

переписали так:

$$\frac{\operatorname{tg}5x+\operatorname{tg}5}{1-\operatorname{tg}5x\operatorname{tg}5}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}5}{\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}5}=1 \text{ и т. д.}$$

Решение получилось очень длинным. Если воспользоваться условием равенства двух тангенсов, оно будет значительно короче. Перепишем данное уравнение в виде

$$\operatorname{tg}(5x+5)=\operatorname{tg}(3x+5),$$

отсюда

$$5x+5-(3x+5)=k\pi;$$

$$x=\frac{k\pi}{2}.$$

37. Экзаменационные письменные работы показывают, что абитуриенты избегают применения формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму при решении тригонометрических уравнений и пользуются другими формулами, приводящими к нерациональным решениям. Однако на ряде примеров можно убедиться, как просто решаются некоторые уравнения, если воспользоваться формулами преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

**Пример 1.** Решить уравнение

$$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}.$$

Решение. Пользуясь формулой

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

данное уравнение заменим равносильным:

$$\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{1}{2};$$

$$\cos 2x - \cos 4x - 1 = 0;$$

$$\cos 2x - (1 + \cos 4x) = 0;$$

$$\cos 2x - 2\cos^2 2x = 0;$$

$$\cos 2x(1 - 2\cos 2x) = 0.$$

Отсюда:

1) $\cos 2x = 0$; $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$;

2) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; $2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Ответ: $x_1 = (2k+1)\frac{\pi}{4}$; $x_2 = (6k \pm 1)\frac{\pi}{6}$.

**Пример 2.** Решить уравнение

$$\sin 5x \cos 3x = \frac{1}{2} \sin 8x - 0{,}5.$$

Решение. Пользуясь формулой

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)],$$

перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 8x - 1).$$

Находим

$$\sin 2x = -1; \quad 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Ответ: $x = (4k-1)\frac{\pi}{4}$.

**Пример 3.** Решить уравнение

$$\cos x \cos 2x = \cos 3x.$$

Решение. Воспользуемся формулой

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

и заменим данное уравнение равносильным:

$$\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)=\cos 3x;$$

$$\cos 3x=\cos x.$$

Отсюда получаем:

1) $3x+x=2k\pi$; $4x=2k\pi$; $x_1=\frac{k\pi}{2}$;

2) $3x-x=2n\pi$; $2x=2n\pi$; $x_2=n\pi$.

Решения $x_1$ и $x_2$ можно объединить.

Ответ: $x=\frac{k\pi}{2}$.

38. Особые затруднения у абитуриентов вызывают тригонометрические уравнения, для решения которых требуется математическая смекалка.

**Пример.** Имея уравнение

$$\sin 4x \cos 16x=1, \qquad (1)$$

абитуриенты переписали его

$$\sin 20x-\sin 12x=2. \qquad (2)$$

Продолжения решения не последовало. А стоило немного поразмыслить над равенством (2), и возникло бы заключение: равенство (2) возможно лишь при условии

$$\begin{cases}\sin 20x=1;\\ \sin 12x=-1.\end{cases} \qquad (3)$$

Таким образом, решение уравнения (1) свелось к решению системы (3). Находим:

1) $20x=\frac{\pi}{2}+2m\pi$; $x=\frac{\pi}{40}+\frac{m\pi}{10}$;

2) $12x=-\frac{\pi}{2}+2n\pi$; $x=-\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{6}$.

На основании определения решения системы уравнений составим равенство

$$\frac{\pi}{40}+\frac{m\pi}{10}=-\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{6}.$$

После сокращения на $\frac{\pi}{2}$ получим

$$\frac{1}{20}+\frac{m}{5}=-\frac{1}{12}+\frac{n}{3},$$

отсюда

$$n=3\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{m}{5}\right)=3\left(\frac{2}{15}+\frac{m}{5}\right)=$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{3m}{5}=1-\frac{3}{5}+\frac{3m}{5}=1+3\cdot\frac{m-1}{5}.$$

Так как $n$ — целое, то дробь $\frac{m-1}{5}$ должна быть целым числом, а, значит, $m=5k+1$, где $k$ — целое.

Итак,

$$x=\frac{\pi}{40}+\frac{5k+1}{10}\cdot\pi=\frac{\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}.$$

Ответ: $x=(4k+1)\frac{\pi}{8}$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

**39.** Многие считают, что необходимость проверки полученного решения обусловливается типом уравнения. Это неверно. В действительности необходимость проверки обусловливается избранным методом решения уравнения.

**Пример 1.** Решить уравнение

$$\sin x+\cos x=1.$$

Приводилось решение:

$$(\sin x+\cos x)^2=1;$$

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1;$$

$$\sin 2x=0,\ 2x=n\pi,\ x=\frac{n\pi}{2}.$$

Так как при решении обе части исходного уравнения возводились в квадрат (четную степень), а его левая часть может быть как положительной, так и отрицательной величиной, могли появиться посторонние корни и, следовательно, проверка полученного решения обязательна. К сожалению, абитуриенты ее не сделали.

Из решения $x=\frac{n\pi}{2}$ следовало исключить те значения $x$, которые получаются при $n=2(2k+1)$, где $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$

Некоторые данное уравнение решили так:

$$\cos x=1-\sin x;$$

$$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}=1-\sin x;$$

$$1-\sin^2 x=1-2\sin x+\sin^2 x.$$

После преобразований получили

$$\sin^2 x-\sin x=0;\ \sin x(\sin x-1)=0.$$

Отсюда нашли:

1) $\sin x=0,\ x_1=n\pi;$

2) $\sin x-1=0,\ \sin x=1,\ x_2=\frac{\pi}{2}+2n\pi.$

Проверку полученных решений не сделали. А проверка показывает, что $x_1$ удовлетворяет исходному уравнению только при $n=2k$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

Решим данное уравнение иначе. С этой целью $\sin x$ и $\cos x$ выразим через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=1$$

или

$$2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2};$$

$$2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0;\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)=0.$$

Отсюда:

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0,\ \frac{x}{2}=k\pi,\ x=2k\pi.$

2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1=0,\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1,\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi,$
$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$

Так как при преобразованиях все уравнения заменялись равносильными, проверка не нужна. Потери корней не произошло, так как значение $x=(2k+1)\pi$, при котором функция $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ теряет смысл, исходному уравнению не удовлетворяет.

Ответ: $x_1=2k\pi,\ x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$

**Пример 2.** Решить уравнение

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2.$$

Решение было выполнено следующим образом:

$$3\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=4;$$

$$3\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=4(\sin^2 x+\cos^2 x);$$

$$3\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=4\sin^2 x+4\cos^2 x;$$

$$2\sqrt{3}\sin x\cos x=\sin^2 x+3\cos^2 x;\quad 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^2 x+3;$$

$$\operatorname{tg}^2 x-2\sqrt{3}\operatorname{tg} x+3=0;\quad \operatorname{tg} x=\sqrt{3},\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi.$$

Сдающие экзамен проверки не сделали, а поэтому не заметили, что в полученную серию решений вошли посторонние. Действительно, при $k=2n+1$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ имеем

$$\sin\left[\frac{\pi}{3}+\pi(2n+1)\right]<0 \quad \text{и} \quad \cos\left[\frac{\pi}{3}+\pi(2n+1)\right]<0.$$

Следовательно,

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x<0,$$

т. е. при $k=2n+1$ левая часть данного уравнения отрицательна.

**Пример 3.** Решить уравнение

$$\sin 2x+3\cos 2x+3=0. \qquad (1)$$

Решение. Область допустимых значений неизвестного $-\infty<x<\infty$.

Перепишем уравнение так:

$$2\sin x\cos x+3(\cos 2x+1)=0$$

или

$$2\sin x\cos x+3\cdot 2\cos^2 x=0;$$

$$\cos x(\sin x+3\cos x)=0.$$

Имеем:

1) $\cos x=0$;

2) $\sin x+3\cos x=0$, $\operatorname{tg} x=-3$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x_2=\operatorname{arctg}(-3)+k\pi$.

Абитуриенты воспользовались формулами

$$\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x},\quad \cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} \qquad (2)$$

и переписали уравнение (1) в виде

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}+3\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}+3=0. \qquad (3)$$

Освободились от дробей:

$$2\operatorname{tg} x+3-3\operatorname{tg}^2 x+3+3\operatorname{tg}^2 x=0.$$

Нашли

$$\operatorname{tg} x=-3,\quad x=\operatorname{arctg}(-3)+k\pi.$$

Замечаем, что потеряна серия решений $x_1$. Почему это произошло? Как известно, формулы (2) при $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ теряют смысл. Таким образом, при переходе от (1) к (3) область допустимых значений неизвестного сузилась, что и привело к потере серии решений $x_1$.

## Неравенства

**40.** Производя действия над неравенствами надо помнить:

1. Левые и правые части двух неравенств одинакового смысла с положительными частями можно перемножать.

2. Обе части неравенства, если они положительны, можно возводить в степень с натуральным показателем.

3. Из обеих частей неравенства, если они положительны, можно извлекать квадратный корень.

4. Обе части неравенства, если они отрицательны, можно возводить в нечетную степень.

5. *Из обеих частей неравенства, если они отрицательны, можно извлекать корень нечетной степени.*

6. Неравенство

$$a^{\varphi(x)} > a^{\psi(x)},$$

если $0 < a < 1$, равносильно неравенству

$$\varphi(x) < \psi(x),$$

если $a > 1$, равносильно неравенству

$$\varphi(x) > \psi(x).$$

7. Неравенство

$$\log_a \varphi(x) > \log_a \psi(x),$$

если $0 < a < 1$, равносильно системе

$$\begin{cases} \varphi(x) < \psi(x); \\ \varphi(x) > 0; \\ \psi(x) > 0, \end{cases}$$

если $a > 1$, равносильно системе

$$\begin{cases} \varphi(x) > \psi(x); \\ \varphi(x) > 0; \\ \psi(x) > 0. \end{cases}$$

Те, кто не знал этих правил, допускали ошибки. Например, имея неравенство $a^x < a^3$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, писали

$x<3$. Следовало записать: $x<3$, если $a>1$, и $x>3$, если $0<a<1$. Для неравенства $\log_a x>\log_a 5$ допускали запись $x>5$. Правильно: $x>5$, если $a>1$, и $x<5$, если $0<a<1$.

**41.** Многие не знают, когда множеством решений неравенства является объединение нескольких множеств, а когда их пересечение. Например, решение неравенства $x^2>1$ некоторыми абитуриентами записывалось в виде $x\geqslant\pm1$. Следовало же писать

$$x^2>1=>|x|>1$$

или же

$$x^2>1=>x<-1 \quad \text{или} \quad x>1.$$

**42.** Иногда обе части неравенства умножают на знаменатель, который содержит неизвестное. Этого нельзя делать, так как неизвестен знак знаменателя.

Например, решая неравенство

$$\frac{2x+3}{x-1}>1,$$

переписывали его в виде

$$2x+3>x-1.$$

Некоторые абитуриенты решение предлагаемого неравенства сводили к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 2x+3>1; \\ x-1>1 \end{cases}$$

и, конечно, нужного результата не получали. Данное неравенство следует решать так.

Переносим единицу из правой части в левую:

$$\frac{2x+3}{x-1}-1>0.$$

Приводим к общему знаменателю

$$\frac{2x+3-x+1}{x-1}>0$$

или

$$\frac{x+4}{x-1}>0.$$

Последнее неравенство эквивалентно совокупности следующих систем:

$$\begin{cases} x+4>0; \\ x-1>0; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x+4<0; \\ x-1<0. \end{cases} \qquad (2)$$

Из системы (1) найдем

$$\begin{cases} x>-4; \\ x>1, \end{cases}$$

откуда $x>1$.

Из системы (2) получим

$$\begin{cases} x<-4; \\ x<1, \end{cases}$$

значит, $x<-4$.

Следовательно, данное неравенство удовлетворяется при $x>1$ или $x<-4$.

Замечание. Следует иметь в виду, что при «отбрасывании» знаменателя, после приведения всех членов неравенства к общему знаменателю, иногда может получиться неравенство, равносильное данному. Так, неравенства

$$\frac{2x+19}{x^2+5}>1 \text{ и } 2x+19>x^2+5$$

равносильны, так как второе неравенство получено из первого умножением обеих частей на положительное число $(x^2+5)$.

**43.** Отсутствуют элементарные навыки анализа неравенств. Например, решение неравенства

$$\frac{81+x^4}{4-x^2}<0,$$

сводилось к решению двух систем:

$$\begin{cases} 81+x^4>0; \\ 4-x^2<0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 81+x^4<0; \\ 4-x^2>0. \end{cases}$$

Совершенно очевидно, что в области действительных чисел при любых значениях $x$ будет $81+x^4>0$, поэтому решение данного неравенства равносильно решению неравенства

$$4-x^2<0.$$

**44.** Довольно часто неравенства, содержащие параметры, решаются без учета допустимых значений этих параметров.

Например, неравенство

$$a(x-1)-x-2>0$$

большинство решало так:

$$ax-a-x-2>0;\ (a-1)x>a+2;\ x>\frac{a+2}{a-1}.$$

Решение следовало продолжить:

1) $x > \frac{a+2}{a-1}$, если $a-1>0$, $a>1$;

2) $x < \frac{a+2}{a-1}$, если $a-1<0$, $a<1$;

3) решений нет, если $a-1=0$, $a=1$.

Указанный недостаток имеет место и при решении тригонометрических неравенств.

45. Опыт приемных экзаменов показывает, что большинство абитуриентов неравенства вида

$$ax^2+bx+c>0,$$

когда корни квадратного трехчлена действительные числа, решают разложением левой части на множители:

$$a(x-x_1)(x-x_2)>0 \qquad (1)$$

с последующим решением совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x-x_1>0; \\ x-x_2>0, \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x-x_1<0; \\ x-x_2<0, \text{ при } a>0 \end{cases}$$

или

$$1) \begin{cases} x-x_1>0; \\ x-x_2<0, \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x-x_1<0; \\ x-x_2>0, \text{ при } a<0. \end{cases}$$

Этот же метод они применяют и для решения неравенств типа:

$$(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}(x-x_3)^{\alpha_3}\ldots(x-x_m)^{\alpha_m}>0; \qquad (2)$$

$$\frac{(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}(x-x_3)^{\alpha_3}\ldots(x-x_m)^{\alpha_m}}{(x-x_{\mathrm{I}})^{\beta_1}(x-x_{\mathrm{II}})^{\beta_2}(x-x_{\mathrm{III}})^{\beta_3}\ldots(x-x_n)^{\beta_n}}>0, \qquad (3)$$

где $\alpha_i$ $(i=1, 2, 3, \ldots, m)$ и $\beta_k$ $(k=1, 2, 3, \ldots, n)$ — показатели степеней.

Очевидно, неравенства типа (2) и (3) решать способом, примененным к неравенству (1), нецелесообразно (решение громоздко, а как следствие этого, велика вероятность допустить ошибку при математических выкладках).

Неравенства типа (2) и (3) удобно решать так называемым методом интервалов, основанным на исследовании знака функции.

**Пример 1.** Решить неравенство

$$(x+5)^3(x+3)^2(x+1)(x-2)>0.$$

Решение. 1) Множитель $(x+5)^3$ заменяем на $(x+5)$, так как при любом значении $x$ их знаки совпадают; множитель $(x+3)^2$ при любом значении $x$, кроме $x=-3$, положителен. Учитывая это, данное неравенство заменяем более простым

$$(x+5)(x+1)(x-2)>0.$$

2) Разбиваем всю числовую ось точками $x=-5$, $x=-1$ и $x=2$ (в них левая часть неравенства обращается в нуль) на интервалы:

$$x<-5;\ -5<x<-1;\ -1<x<2;\ x>2.$$

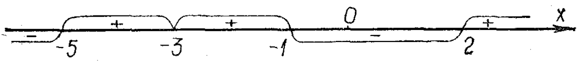


Рис. 1

При переходе $x$ из одного интервала в другой, смежный с ним, левая часть данного неравенства меняет знак на противоположный.

Легко убеждаемся, что левая часть неравенства положительна во втором, кроме точки $x=-3$, и четвертом интервалах (рис. 1).

Ответ: $-5<x<-3$, $-3<x<-1$, $x>2$.

**Пример 2.** Решить неравенство

$$\frac{x^4-10x^2+9}{x}<0.$$

Решение. Область допустимых значений неизвестного $x\neq 0$. Раскладываем числитель на множители.

$$x^4-10x^2+9=0.$$

$$x^2=z,\ z^2-10z+9=0,\ z_1=9,\ z_2=1.$$

$$x_1=3,\ x_2=-3,\ x_3=1,\ x_4=-1.$$

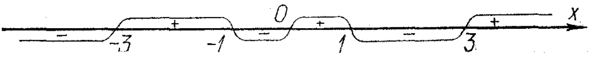


Рис. 2

Неравенство примет вид

$$\frac{(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)}{x}<0.$$

Разбиваем всю числовую ось точками $x=-3$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$ и $x=3$ на интервалы:

$$x<-3;\ -3<x<-1;\ -1<x<0;\ 0<x<1;$$
$$1<x<3;\ x>3.$$

Определяем знак левой части неравенства в каждом из интервалов и отбираем те интервалы, в которых левая часть отрицательна (рис. 2).

Ответ: $x<-3$, $-1<x<0$, $1<x<3$.

**46.** Неравенства, связанные с понятием абсолютной величины действительного числа, решались с существенными недостатками или вообще оставались нерешенными. Учитывая сказанное, приведем решения некоторых неравенств, которые предлагались абитуриентам.

**Пример 1.** Решить неравенство

$$|3x-1|+|x|>1.$$

Решение. Находим корни выражений, стоящих под знаками абсолютной величины, и располагаем их в порядке возрастания: $x=0$, $x=\frac{1}{3}$. Разбиваем множество действительных чисел на интервалы: $x<0$, $0\leqslant x<\frac{1}{3}$, $x\geqslant\frac{1}{3}$.

На каждом из интервалов данное неравенство решаем отдельно.

1) $x<0$.

Для значений $x$ этого интервала

$$|3x-1|=-3x+1; \quad |x|=-x.$$

Таким образом, данное неравенство приводится к виду

$$-3x+1-x>1, \quad -4x>0, \quad x<0.$$

2) $0\leqslant x<\frac{1}{3}$.

В указанном интервале

$$|3x-1|=-3x+1; \quad |x|=x.$$

Исходное неравенство запишется так:

$-3x+1+x>1$, $-2x>0$, $x<0$ — вне рассматриваемого интервала.

3) $x\geqslant\frac{1}{3}$.

В этом интервале

$$|3x-1|=3x-1,\ |x|=x.$$

Данное неравенство примет вид

$$3x-1+x>1,\ 4x>2,\ x>\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x<0$, $x>\frac{1}{2}$.

**Пример 2.** Решить неравенство

$$|4-3x|<2x.$$

Решение. Правая часть неравенства может быть больше левой только при $x>0$. Данное неравенство можно переписать в виде

$$-2x<4-3x<2x.$$

Приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} -2x<4-3x; \\ 4-3x<2x. \end{cases}$$

Из первого неравенства системы находим $x<4$, из второго — $x>\frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{4}{5}<x<4$.

**Пример 3.** Решить неравенство

$$\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|>3.$$

Решение. Данное неравенство эквивалентно двум:

$$\frac{2x+1}{x+1}<-3 \quad \text{и} \quad \frac{2x+1}{x+1}>3.$$

Решим каждое из этих неравенств отдельно.

1) $\dfrac{2x+1}{x+1}<-3$, $\dfrac{2x+1}{x+1}+3<0$, $\dfrac{5x+4}{x+1}<0$.

$$\begin{cases} 5x+4<0; \\ x+1>0, \end{cases} \quad \begin{cases} x<-\dfrac{4}{5}; \\ x>-1, \end{cases} \quad -1<x<-\frac{4}{5}.$$

$$\begin{cases} 5x+4>0; \\ x+1<0, \end{cases} \quad \begin{cases} x>-\dfrac{4}{5}; \\ x<-1, \end{cases} \quad \text{решений нет.}$$

2) $\dfrac{2x+1}{x+1}>3$, $\dfrac{2x+1}{x+1}-3>0$, $\dfrac{-x-2}{x+1}>0$, $\dfrac{x+2}{x+1}<0.$

$$\begin{cases} x+2>0; \\ x+1<0, \end{cases} \quad \begin{cases} x>-2; \\ x<-1, \end{cases} \quad -2<x<-1.$$

$$\begin{cases} x+2<0; \\ x+1>0, \end{cases} \quad \begin{cases} x<-2; \\ x>-1, \end{cases} \quad \text{решений нет.}$$

Ответ: $-1<x<-\dfrac{4}{5}$, $-2<x<-1$.

**47.** При решении неравенств, содержащих неизвестное под знаком квадратного корня, обычно ограничение на подкоренное выражение не накладывается. А это следует делать. Например, для неравенства

$$4+\sqrt{x-5}<2$$

обязательно надо указать, что оно имеет смысл лишь при условии $x-5\geqslant 0$. Необходимость введения такого ограничения связана с понятием арифметического корня.

Неравенство

$$\sqrt{4x+21}<x+4$$

решалось так:

$$4x+21<(x+4)^2;\ 4x+21<x^2+8x+16;$$

$$x^2+4x-5>0;\ (x-1)(x+5)>0;\ x>1 \text{ и } x<-5.$$

Абитуриенты не обратили внимания, что значения $x<-5$ не удовлетворяют данному неравенству.

Приведем правильное решение. Область допустимых значений неизвестного $x\geqslant-\frac{21}{4}$. Учитывая, что в алгебре рассматриваются арифметические корни, заключаем: $x+4\geqslant 0$.

Следовательно, данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 4x+21\geqslant 0; \\ x+4\geqslant 0; \\ x^2+4x-5>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x\geqslant-\frac{21}{4}; \\ x\geqslant-4; \\ (x-1)(x+5)>0. \end{cases}$$

Ответ: $x>1$.

**48.** Основная причина ошибок в решениях показательных и логарифмических неравенств — выполнение преобразований без учета величины основания показательной или логарифмической функции.

**Пример 1.** Решить неравенство

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x > \sqrt[3]{1{,}25}.$$

Решение. Исходное неравенство преобразуем так:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x > 1{,}25^{\frac{1}{3}}; \quad \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x > \frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}}; \quad \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Так как при положительном основании, меньшем единицы, показательная функция убывающая, значит большей степени соответствует меньший показатель, то есть $x < -\frac{1}{3}$.

Ответ: $x < -\frac{1}{3}$.

На экзаменах допускалась запись $x > -\frac{1}{3}$.

**Пример 2.** Решить неравенство

$$8^{x-\frac{1}{2}} + 3^{2x-1} > 9^{x+\frac{1}{2}} - 8^{x+\frac{1}{2}}.$$

Решение. Исходное неравенство перепишем так:

$$8^{x-\frac{1}{2}}+8^{x+\frac{1}{2}}>9^{x+\frac{1}{2}}-3^{2x-1}.$$

Это неравенство равносильно такому:

$$8^{x-\frac{1}{2}}(1+8)>9^{x-\frac{1}{2}}(9-1).$$

После деления обеих частей неравенства на $9\cdot 9^{x-\frac{1}{2}}$ получим

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{x-\frac{1}{2}}>\frac{8}{9}. \qquad (1)$$

Следовательно,

$$x-\frac{1}{2}<1. \qquad (2)$$

Ответ: $x<\frac{3}{2}$.

Некоторые из экзаменуемых в результате недостаточных знаний свойств показательной функции при переходе от (1) к (2) записывали

$$x-\frac{1}{2}>1,$$

то есть допускали грубую ошибку.

**Пример 3.** Решить неравенство

$$\log_{\frac{2}{2+x^2}}(x+5)<-1.$$

Решение. Находим область допустимых значений неизвестного:

$$\begin{cases} x+5>0; \\ \dfrac{2}{2+x^2}\neq 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x>-5; \\ x\neq 0. \end{cases}$$

При $x\neq 0$ основание логарифма $\frac{2}{2+x^2}<1$, следовательно, логарифмическая функция, стоящая в левой части данного неравенства, убывающая.

Перепишем неравенство в виде

$$\log_{\frac{2}{2+x^2}}(x+5)+1<0$$

или

$$\log_{\frac{2}{2+x^2}}(x+5)+\log_{\frac{2}{2+x^2}}\frac{2}{2+x^2}<0.$$

Потенцируя, получим

$$\log_{\frac{2}{2+x^2}}\frac{2(x+5)}{2+x^2}<0 \qquad (1)$$

или

$$\frac{2(x+5)}{2+x^2}>1. \qquad (2)$$

Отсюда

$$\frac{2(x+5)}{2+x^2}-1>0;\ 2(x+5)-2-x^2>0;$$

$$2x+10-2-x^2>0;\ x^2-2x-8<0;$$

$$(x+2)(x-4)<0.$$

Ответ: $-2<x<0,\ 0<x<4.$

При переходе от выражения (1) к (2) абитуриенты записывали

$$\frac{2(x+5)}{2+x^2}<1.$$

**Пример 4.** Решить неравенство

$$\log_x(x^2+3x-3)>1. \qquad (1)$$

Решение. Установим область допустимых значений неизвестного. Данное неравенство имеет смысл при условиях:

$$\begin{cases} x>0,\ x\neq 1; & (2) \\ x^2+3x-3>0. & (3) \end{cases}$$

Решая неравенство (3), найдем

$$x<\frac{-3-\sqrt{21}}{2} \quad \text{и} \quad x>\frac{-3+\sqrt{21}}{2}.$$

Следовательно, область допустимых значений неизвестного

$$\begin{cases} \frac{-3+\sqrt{21}}{2}<x<1; \\ x>1. \end{cases}$$

Так как основание логарифма содержит неизвестное $x$, отдельно рассмотрим два случая:

1) $0<x<1$.

После потенцирования неравенства (1), учитывая величину основания логарифма, получим

$$x^2+3x-3<x, \quad x^2+2x-3<0$$

или

$$(x-1)(x+3)<0.$$

Находим

$$-3<x<1.$$

Учитывая область допустимых значений неизвестного, заключаем

$$\frac{-3+\sqrt{21}}{2}<x<1;$$

2) $x>1$.

Потенцируя неравенство (1) и зная, что основание логарифма больше единицы, получим

$$x^2+3x-3>x,\ x^2+2x-3>0$$

или

$$(x-1)(x+3)>0.$$

Отсюда

$$x>1,\ x<-3.$$

Значения $x<-3$ не принадлежат области допустимых значений неизвестного данного неравенства.

Ответ: $x>1,\ \frac{-3+\sqrt{21}}{2}<x<1.$

В решениях абитуриентами данного неравенства были выявлены недочеты:

1) рассматривался случай, когда в неравенстве (1) основание логарифма $x>0$ (значение $x=1$ не исключалось);

2) область допустимых значений неизвестного не устанавливалась.

**Пример 5.** Решить неравенство

$$5^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7)}<1.$$

Решение. Область допустимых значений неизвестного исходного неравенства — все действительные числа, так как $x^2-5x+7>0$ при любом значении $x$. Данное неравенство равносильно такому:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7)<0. \qquad (1)$$

Учитывая, что логарифмическая функция по основанию $a<1$ убывающая, имеем

$$x^2-5x+7>1 \qquad (2)$$

или

$$(x-2)(x-3)>0.$$

Ответ: $x<2$, $x>3$.

При решении исходного неравенства многие допустили ошибку, когда делали переход от неравенства (1) к (2). Писали

$$x^2-5x+7<\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

или

$$x^2-5x+7<1.$$

**49.** Особенно плохо обстоит дело с решением элементарных тригонометрических неравенств.

**Примеры.**

1) Решение неравенства $\sin x<0$ записывалось в виде $x>180°$.

Заданное неравенство следовало решать так. Находим вначале решение для интервала $0<x<2\pi$. Как известно, синус имеет отрицательные значения при $\pi<x<2\pi$. Учитывая, что функция $\sin x$ периодическая, окончательно получим

$$\pi+2k\pi<x<2\pi+2k\pi.$$

2) Решением неравенства $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ считали значение $x > 45°$.

Приведем правильное решение. Для $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ при условии $0 < x < 2\pi$ имеем

$$x_1 = \frac{\pi}{4}; \quad x_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

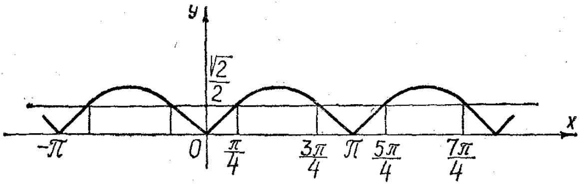


Рис. 3

Следовательно, данному неравенству удовлетворяют все дуги

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}.$$

С учетом периодичности функции $\sin x$ получим окончательный ответ

$$2k\pi + \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi.$$

Читателю рекомендуется полученное решение пояснить графически.

3) Неравенство $|\sin x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$ обычно оставалось нерешенным.

Строим графики функций $y=|\sin x|$ и $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 3) и отбираем значения $x$, удовлетворяющие заданному неравенству

$$k\pi+\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}+k\pi.$$

Рекомендуем читателю самостоятельно решить ряд неравенств, аналогичных рассмотренным.

## Функции и их графики

**50.** Многие затрудняются дать определение такого важнейшего понятия математики, как область определения функции, и не справляются с решением примеров, в которых требуется ее установить.

*Определение.* Совокупность тех значений независимой переменной $x$, для которых функция $y=f(x)$ определена, т. е. каждому значению независимой переменной $x$ соответствует одно или несколько вполне определенных значений функции, называется *областью определения* этой функции.

Отсутствие должного понимания сущности этого определения, в частности, приводило к грубейшим ошибкам в установлении области определения функций, которые представляют собой алгебраическую сумму функций. Например, область определения функции

$$y=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{4+x}}$$

устанавливалась так:

1) $-x\geqslant 0;\ x\leqslant 0;$

2) $4+x>0;\ x>-4.$

Следовало заключение: область определения данной функции $x \leqslant 0$ и $x > -4$.

Это неверно. Надо решать иначе. Функция $y_1 = \sqrt{-x}$ определена для значений $x \leqslant 0$; функция $y_2 = \frac{1}{\sqrt{4+x}}$ определена для значений $x > -4$. Следовательно, общей частью двух областей является полузамкнутый интервал $-4 < x \leqslant 0$. Он и есть область определения данной функции.

Приведем пример, с решением которого не справилась значительная часть абитуриентов.

**Пример.** Установить область определения функции

$$y = \sqrt{\lg \frac{x-5}{x^2-4}}.$$

Решение. Функция имеет смысл, если

$$\lg \frac{x-5}{x^2-4} \geqslant 0$$

или

$$\frac{x-5}{x^2-4} \geqslant 1.$$

Переносим дробь в правую часть, меняем части местами и приводим члены неравенства к общему знаменателю

$$\frac{x^2-x+1}{x^2-4} \leqslant 0$$

или

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{x^2-4} \leqslant 0.$$

Последнее неравенство справедливо при

$$x^2-4<0;\quad x^2<4;\quad |x|<2;\quad -2<x<2.$$

Ответ: Область определения функции — интервал $-2<x<2$.

**51.** Какая функция называется периодической и что такое период функции обычно абитуриенты знают. Однако их знания формальны, так как с решением примеров на определение периодов функций они, как правило, не справляются. Например, период функции

$$y=\cos 5x-\sin 2x$$

определялся следующим образом:

$$\text{для } \cos 5x \text{ период } T_1=10\pi;$$
$$\text{для } \sin 2x \text{ период } T_2=4\pi,$$

значит, период данной функции $T=6\pi$.

Допущены грубые ошибки. Правильное решение таково. Так как период синуса и косинуса равен $2\pi$,

$$\cos 5x=\cos(5x+2\pi)=\cos 5\left(x+\frac{2\pi}{5}\right);\quad T_1=\frac{2\pi}{5};$$

$$\sin 2x=\sin(2x+2\pi)=\sin 2(x+\pi);\quad T_2=\pi.$$

Представим периоды $T_1$ и $T_2$ в другом виде:

$$T_1=2\cdot\frac{\pi}{5};\qquad T_2=5\cdot\frac{\pi}{5}$$

и найдем наименьшее общее кратное чисел 2 и 5. Таким числом является 10.

Следовательно, число $T=10\cdot\frac{\pi}{5}=2\pi$ — период данной функции.

**52.** Значительное число ошибок при построении графиков функций объясняется тем, что сдающие экзамены не устанавливают областей определения функций. Покажем это на примерах.

**Пример 1.** Построить график функции

$$y=\sin(\arcsin x).$$

Решение. Область определения функции $-1\leqslant x\leqslant 1$.

По определению обратных тригонометрических функций имеем

$$y=\sin(\arcsin x)=x.$$

Учитывая область определения функции, строим ее график (рис. 4).

Абитуриенты вместо отрезка прямой $AB$ строили биссектрису I и III координатных углов (рис. 5).

**Пример 2.** Построить график функции

$$y=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x.$$

Решение. Функция определена для всех значений $x$, кроме $x=\frac{k\pi}{2}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$, так как $\operatorname{tg} x$ при $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, а $\operatorname{ctg} x$ при $x=k\pi$ теряют смысл.

Данную функцию представляем в виде $y=1$ и строим график (рис. 6).

Поступающие в качестве графика строили прямую, параллельную оси абсцисс (рис. 7).

**Пример 3.** Построить график функции

$$y = x^{\frac{1}{\lg x}} - 7.$$

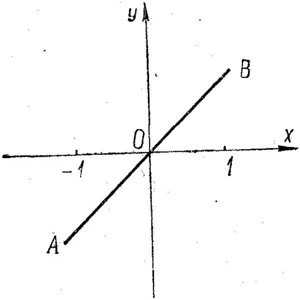


Рис. 4

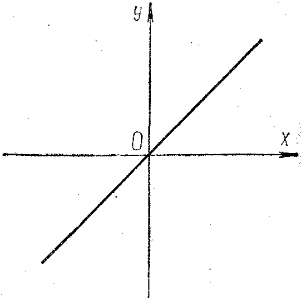


Рис. 5

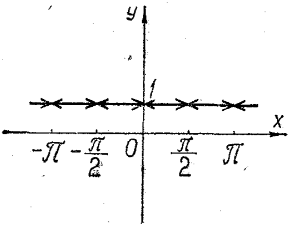


Рис. 6

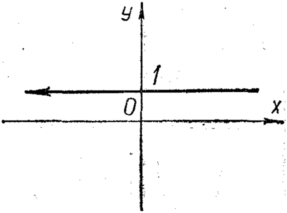


Рис. 7

Решение. Устанавливаем область определения функции:

$$\begin{cases} \lg x \neq 0; \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \neq 1; \\ x > 0. \end{cases}$$

Следовательно, $0 < x < 1$ и $x > 1$.

Применив к данной функции формулы

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}; \quad a^{\log_a N}=N,$$

получим

$$y=x^{\frac{1}{\lg x}}-7=x^{\lg_x 10}-7=10-7=3.$$

График функции изображен на рис. 8.

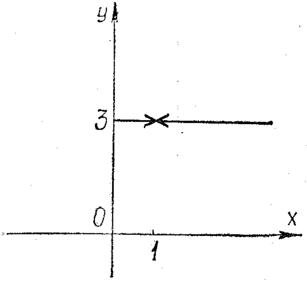


Рис. 8

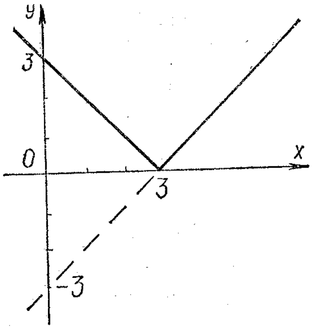


Рис. 9

Экзаменуемые, выполняя построение графика, не исключали значение $x=1$, для которого данная функция теряет смысл.

**53.** Нечеткое представление об абсолютной величине действительного числа приводило к существенным ошибкам в построении графиков функций. Рассмотрим некоторые примеры на построение графиков функций, предлагавшиеся на вступительных экзаменах.

**Пример 1.** Построить график функции

$$y=|x-3|.$$

Решение. Область определения функции

$$-\infty < x < \infty.$$

Исходя из определения абсолютной величины действительного числа, данную функцию запишем так:

$$y = \begin{cases} x-3, \text{ если } x \geqslant 3; \\ -(x-3), \text{ если } x < 3. \end{cases}$$

Как видим, задача свелась к построению графиков линейных функций $y=x-3$ и $y=-x+3$ на соответствующих интервалах (рис. 9).

**Пример 2.** Построить график функции

$$y=|x|+|x-1|+|x-2|.$$

Решение. Функция определена в интервале $-\infty < x < \infty$.

Рассмотрим данную функцию на интервалах:

1) $x<0$.

$$y=-x-(x-1)-(x-2)=-3x+3;$$

2) $0 \leqslant x < 1$.

$$y=x-(x-1)-(x-2)=-x+3;$$

3) $1 \leqslant x < 2$.

$$y=x+(x-1)-(x-2)=x+1;$$

4) $x \geqslant 2$.

$$y=x+(x-1)+(x-2)=3x-3.$$

Построив графики на каждом из интервалов, получим график данной функции (рис. 10).

**Пример 3.** Построить график функции

$$y=3^{|\log_3 x|}.$$

Решение. Область определения функции $x>0$. Рассмотрим два случая:

1) $\log_3 x<0$. Тогда $0<x<1$ и $y=3^{-\log_3 x}=x^{-1}=\frac{1}{x}$.

2) $\log_3 x\geqslant 0$. Тогда $x\geqslant 1$ и $y=3^{\log_3 x}=x$.

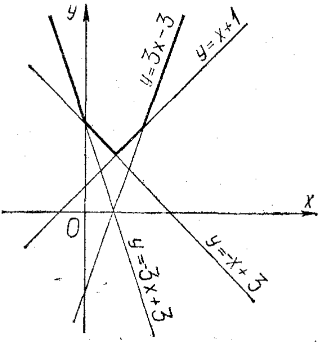


Рис. 10

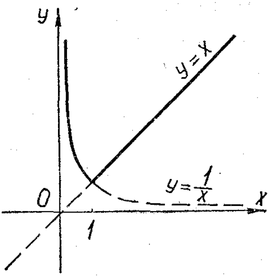


Рис. 11

Построив графики функций $y=\frac{1}{x}$ и $y=x$ в соответствующих интервалах, построим и график данной функции (рис. 11).

**Пример 4.** Построить график функции

$$y=\sqrt{\sin^2 x}.$$

Функция была переписана в виде $y=\sin x$, а затем построена синусоида. В действительности задача сводится к построению графика функции $y=|\sin x|$.

54. Поступающие в вузы крайне слабо владеют методом геометрических преобразований, довольно часто применяемым при построении графиков функций. Учитывая сказанное, приведем ряд примеров.

**Пример 1.** Построить график функции

$$y=\cos(3x-2).$$

Последовательно строились графики функций:

$$y=\cos x; \qquad (1)$$

$$y=\cos 3x; \qquad (2)$$

$$y=\cos(3x-2). \qquad (3)$$

При переходе к графику функции (3) было сделано смещение графика функции (2) на 2 единицы вправо в направлении оси $Ox$. Таким образом, вместо графика данной функции был построен график функции

$$y=\cos 3(x-2).$$

Следовало данную функцию представить в виде

$$y=\cos 3\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

и произвести сдвиг графика функции (2) вправо на $\frac{2}{3}$ единицы в направлении оси $Ox$.

**Пример 2.** Построить графики функций:

$$y=\sin\frac{x}{3} \text{ и } y=\sin 3x; \quad y=\cos\frac{x}{3} \text{ и } y=\cos 3x;$$

$$y=\operatorname{tg}\frac{x}{3} \text{ и } y=\operatorname{tg}3x;\quad y=\operatorname{ctg}\frac{x}{3} \text{ и } y=\operatorname{ctg}3x.$$

Графики указанных функций систематически строились неверно. Вместо растяжения графиков функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ в 3 раза от оси $Oy$ в направлении оси $Ox$ производилось их сжатие в 3 раза

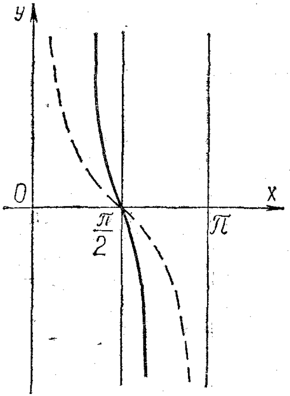


Рис. 12

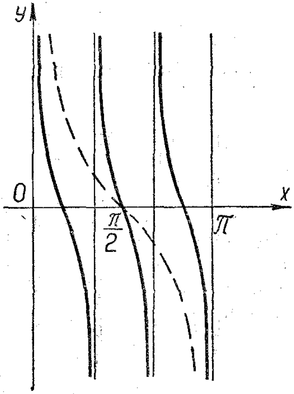


Рис. 13

и, наоборот, вместо сжатия — растяжение. Кроме того, при построении графика функции $y=\operatorname{ctg}3x$ допускалось сжатие в 3 раза каждой из ветвей графика функции $y=\operatorname{ctg} x$ к прямым, параллельным оси $Oy$, проходящим через точки пересечения этих ветвей с осью $Ox$ (рис. 12), вместо сжатия всех ветвей к оси $Oy$ (рис. 13). Аналогичная ошибка имела место и при построении графика функции $y=\operatorname{tg}3x$.

**Пример 3.** Построить график функции

$$y=-3x^2-12x+4.$$

Некоторые абитуриенты писали

$$y=-3\left(x^2+4x-\frac{4}{3}\right)=$$

$$=-3\left[(x^2+4x+4)-4-\frac{4}{3}\right]=$$

$$=-3\left[(x+2)^2-\frac{16}{3}\right]$$

и сделали заключение, что вершиной параболы является точка $\left(-2; \frac{16}{3}\right)$.

Прежде чем делать такой вывод, следовало функцию представить в виде

$$y=-3(x+2)^2+16,$$

т. е. в действительности вершиной параболы служит точка с координатами $(-2; 16)$.

**Пример 4.** Построить график функции

$$y=\frac{\pi}{2}-\arccos 2x.$$

График функции строился так, как показано на рис. 14. Правильно построенный график изображен на рис. 15.

**Пример 5.** Построить график функции

$$y=|\log_2|3-x||.$$

Решение. Область определения функции $x\neq 3$.

Данную функцию запишем так:

$$y=|\log_2|x-3||.$$

Последовательно строим графики функций:

1) $y=\log_2 x$ (рис. 16);

2) $y=\log_2|x|$ (рис. 17);

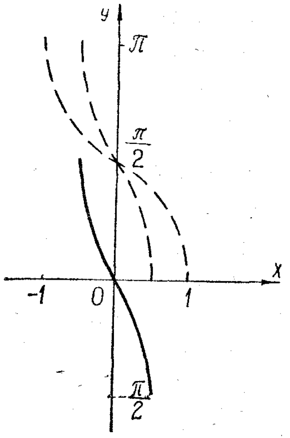


Рис. 14

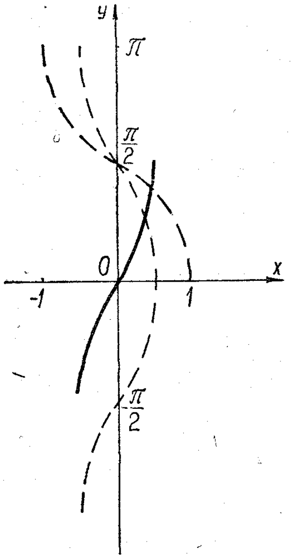


Рис. 15

3) $y=\log_2|x-3|$ — график функции $y=\log_2|x|$ смещаем вправо на 3 единицы в направлении оси $Ox$ (рис. 18);

4) $y = |\log_2|x-3||$ — участки графика функции $y = \log_2|x-3|$, где она отрицательна, отображаем зеркально относительно оси $Ox$ (рис. 19).

Заметим, что с построением графиков такого типа многие из поступающих не справляются.

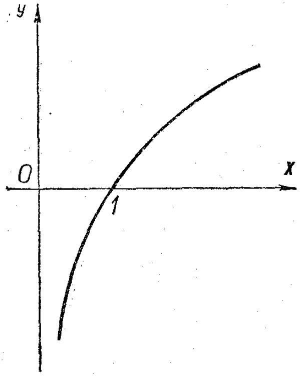


Рис. 16

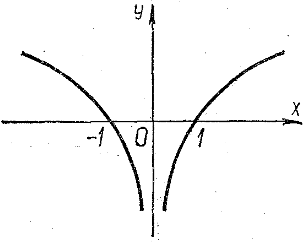


Рис. 17

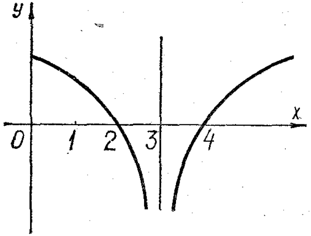


Рис. 18

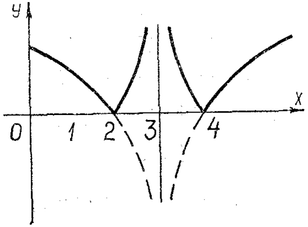


Рис. 19

**Пример 6.** Построить график функции

$$y=\left|\frac{x-1}{x-2}\right|.$$

Решение. Функция определена для всех значений $x$, кроме точки $x=2$. Функцию, стоящую под знаком абсолютной величины, преобразуем так:

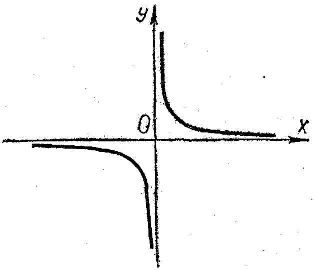


Рис. 20

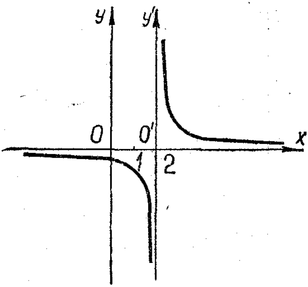


Рис. 21

$$y=\frac{(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}+1.$$

Последовательно строим графики функций:

1) $y=\frac{1}{x}$ (рис. 20);

2) $y=\frac{1}{x-2}$ — график функции $y=\frac{1}{x}$ смещаем вправо на 2 единицы масштаба в направлении оси $Ox$ (рис. 21);

3) $y=\frac{1}{x-2}+1$ — график функции $y=\frac{1}{x-2}$ смещае вверх на единицу масштаба в направлении оси $O$ (рис. 22);

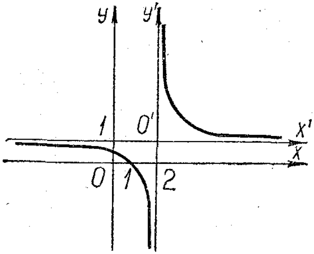


Рис. 22

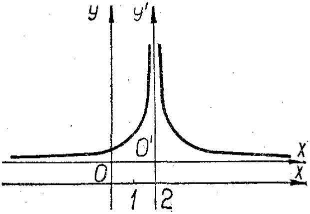


Рис. 23

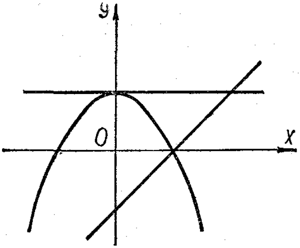


Рис. 24

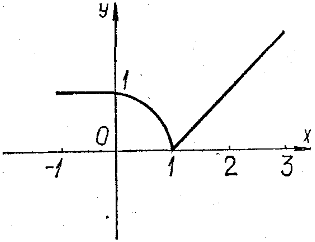


Рис. 25

4) $y=\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$ — часть графика функции $y=\frac{1}{x-2}+1$, расположенную под осью $O'x'$, отображаем зеркально относительно этой оси (рис. 23).

Графики подобного типа нередко строились «по точкам».

**55.** Графики функций зачастую строятся без учета ограничений, накладываемых на аргументы этих функций.

**Пример.** Построить график функции

$$y=\begin{cases} 1, & \text{если } -1\leqslant x<0; \\ -x^2+1, & \text{если } \quad 0\leqslant x<1; \\ x-1, & \text{если } \quad 1\leqslant x\leqslant 3. \end{cases}$$

График данной функции строился так, как показано на рис. 24. Правильно изображен график на рис. 25.

## Разные ошибки

**56.** Многими недостаточно усвоены различные математические понятия. В частности, отождествляются понятия: «уравнение имеет **бесчисленное** множество решений» и «уравнение удовлетворяется при **любом** значении неизвестного». А в действительности они не всегда имеют один и тот же смысл. Например, уравнение $\cos x=0$ имеет бесчисленное множество решений вида $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, однако $x=\pi$ не является его решением, то есть не любое значение $x$ удовлетворяет данному уравнению.

**57.** Из равенства $\log_a x=-\log_a m$ получают $x=-m$, вместо $\log_a x=\log_a m^{-1}$, $x=m^{-1}=\frac{1}{m}$.

**58.** Выражение

$$A=C^{\lg^4\sqrt{C}}$$

логарифмировалось так:

$$\lg A = \lg^4 \sqrt{C} \cdot \lg C = \frac{1}{2} \lg^4 C \cdot \lg C = \frac{1}{2} \lg^5 C.$$

Правильно

$$\lg A = \lg^4 \sqrt{C} \cdot \lg C = \left( \frac{1}{2} \lg C \right)^4 \cdot \lg C = \frac{1}{16} \lg^5 C.$$

**59.** Упростить выражение

$$\log_4 \frac{x^2}{4} - 2 \log_4 (4x^4)$$

и вычислить при $x = -4$.

Решение.

$$\log_4 x^2 - \log_4 4 - 2 \log_4 4 - 2 \log_4 x^4 =$$
$$= 2 \log_4 |x| - 1 - 2 - 8 \log_4 |x| =$$
$$= -3 - 6 \log_4 |x| = -3(1 + 2 \log_4 |x|) =$$
$$= -3(1 + 2 \log_4 |-4|) = -3(1 + 2) = -9.$$

Ответ: $-9$.

На экзаменах приводилось решение

$$2 \log_4 x - \log_4 4 - 2(\log_4 4 + 4 \log_4 x) =$$
$$= 2 \log_4 x - 1 - 2 - 8 \log_4 x = -3 - 6 \log_4 x.$$

Сделано заключение, что данное выражение при $x = -4$ теряет смысл.

**60.** При решении вычислительных задач логарифмировались тригонометрические функции, когда они имели отрицательные значения. Например, пытались находить логарифмы $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, несмотря на то, что угол $\alpha$ оканчивался во II квадранте.

**61.** Вместо

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

допускалась запись

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

Поступающие забывают, что $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$.

## II. Ошибки по геометрии

**62.** Нетвердое знание основных теорем геометрии приводит к существенным ошибкам в решении задач. Например, радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, определяют по формуле, полученной для равностороннего треугольника; поверхность неправильной пирамиды находят по формуле правильной пирамиды; объем шарового сектора вычисляют по формуле шарового сегмента и т. д. Ошибочно считают:

в любом выпуклом четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны, а противоположные углы в сумме составляют $2d$;

центром окружности, описанной около треугольника, является точка пересечения его медиан;

биссектриса угла, заключенного между основанием и боковой стороной равнобедренного треугольника, является медианой;

биссектрисы в равнобедренном треугольнике делятся в точке их пересечения в отношении $1:2$;

радиус шара, вписанного в пирамиду, равен одной трети ее высоты;

радиус, проведенный в точку касания шара, вписанного в пирамиду, параллелен основанию пирамиды.

**63.** При решении задач на пирамиду, а они очень ча[с]то предлагаются на вступительных экзаменах, забываю[т], что в пирамиде, боковые ребра которой образуют равны[е] углы с ее основанием, все боковые ребра равны, око[ло] основания можно описать окружность и высота пирамид[ы] проходит через центр этой окружности.

**64.** Типичной ошибкой является неправильное пон[и]мание условия задачи. Так, например, многие считал[и]

углом между боковым ребром и плоскостью основани[я] наклонного параллелепипеда — угол, составленный бок[о]вым ребром и стороной основания;

линейным углом двугранного угла, образованного б[о]ковой гранью и плоскостью основания правильной ч[е]тырехугольной пирамиды,— угол между боковым ребр[ом] и стороной основания или угол между боковым ребр[ом] и диагональю основания;

углом между радиусом шара, описанного около пр[а]вильной четырехугольной призмы, и ее боковой гранью — угол, образованный радиусом шара и боковым ребр[ом] призмы (радиус шара проведен в вершину призмы);

углом между скрещивающимися диагоналями дв[ух] граней куба — угол между одной из диагоналей и прое[к]цией другой на грань, в которой лежит первая диагонал[ь];

расстоянием от центра основания правильной четыре[х]угольной пирамиды до боковой грани — расстояние [от] центра основания до стороны квадрата, лежащего в осн[о]вании, а расстоянием от центра основания до боково[го] ребра — расстояние, равное половине диагонали осн[о]вания.

**65.** Довольно часто задачи решают нерационально, объяснения к чертежу не дают, шаги решения не всегда обосновывают, исследование полученного решения задачи обычно опускают.

**66.** Абитуриенты в процессе решения задачи нередко линейные и угловые величины, которые по условию не являются данными, обозначают буквами $a$, $b$, $x$, $y$, $\alpha$, $\beta$

и т. д., а затем забывают об этом и окончательный ответ выражают через них, т. е. задачу оставляют нерешенной.

**67.** У значительной части абитуриентов недостаточно развиты пространственные представления, что неизбежно приводит к серьезным ошибкам в решении конкурсных задач. Так, многие считают, что телом, полученным от вращения треугольника вокруг оси, проходящей через его вершину параллельно противоположной стороне, является цилиндр. У некоторых задачи остаются нерешенными, в частности, потому что они не могут изобразить угол, образованный диагональю прямоугольного параллелепипеда с его боковой гранью, а также линейный угол двугранного угла, образованного соседними боковыми гранями треугольной пирамиды.

**68.** Чертежи к задачам строят небрежно, без соблюдения правил параллельной проекции. Особенно неудачны чертежи, на которых требуется изобразить одно геометрическое тело, вписанное в другое.

**69.** Из-за недостаточных навыков в преобразовании суммы тригонометрических функций в произведение ответы в геометрических задачах, решаемых с помощью тригонометрии, оставались неупрощенными. Так, ответ к задаче, где требовалось определить площадь боковой поверхности пирамиды, был записан в виде

$$S_{\text{бок}}=\frac{\begin{gathered}h^2(\sin\alpha\sin\beta\operatorname{tg}\beta+\sin\alpha\sin\beta\operatorname{tg}\alpha+\\+\sin\beta\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha\operatorname{tg}\beta)\end{gathered}}{2\sin\alpha\sin\beta\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Полученный ответ следовало преобразовать:

$$S_{\text{бок}}=\frac{h^2}{2}\,\frac{\sin\alpha\sin\beta\left(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\cos\beta}\right)}{\sin\alpha\sin\beta\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=$$

$$=\frac{h^2}{2}\,\frac{\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=$$

$$=\frac{h^2}{2}\,\frac{\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta+\cos\beta+\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{h^2}{2}\,\frac{\cos\alpha(\sin\beta+1)+\cos\beta(\sin\alpha+1)}{\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{h^2}{2}\,\frac{\sin(90^\circ-\alpha)[\cos(90^\circ-\beta)+1]+\sin(90^\circ-\beta)[\cos(90^\circ-\alpha)+1]}{\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{h^2}{2}\,\frac{2\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot 2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)+2\sin\left(45^\circ-\frac{\beta}{3}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)\cdot 2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{2h^2\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}\times$$

$$\times\left[\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=$$

$$= \frac{2h^2 \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha \sin\beta} \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} + \right.$$

$$\left. + \, 45^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{2h^2 \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right) \cos\frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin\alpha \sin\beta}.$$

Приложение

## ОБРАЗЦЫ ВАРИАНТОВ ПИСЬМЕННЫХ РАБОТ

### Вариант 1
(Московский институт химического машиностроения)

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\right):\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right),\quad x>1.$$

2. Решить уравнение

$$\log_2\left[84+2^{x(x-3)}\right]=\log_2 25+2.$$

3. Решить уравнение

$$\sin^3 x\cos x-\cos^3 x\sin x=\frac{1}{4}.$$

4. Апофема правильной четырехугольной пирами больше ее высоты на $m$ единиц и составляет с ней угол Определить боковую поверхность пирамиды.

5. Упростить выражение

$$2\operatorname{tg}225^\circ\sin 150^\circ+\sin^2(180^\circ+x)\cos 180^\circ.$$

## Вариант 2
### (Минский радиотехнический институт)

1. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(x^2-3x+1)}>1.$$

2. Решить уравнение

$$\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{32}.$$

3. В конус, у которого угол осевого сечения при вершине равен $\alpha$, вписан шар радиуса $R$. Найти объем части конуса, расположенной над шаром.

•

## Вариант 3
### (Рижский политехнический институт)

1. Бассейн наполняется двумя трубами за 10 *мин*. Первая труба заполняет его на 48 *мин* скорее, чем одна вторая. За какое время каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бассейн?

2. Упростить выражение

$$\left[\left(\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{a}\right):\left(\frac{b\sqrt{a}}{a-\sqrt{ab}}+\sqrt{b}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{a^2+6a+9}{a^2+a-6}\right)^{-1}\right]\frac{a+3}{5}.$$

3. Решить уравнение

$$\sin^2(x+\pi)=2\sin(x+\pi),\ \text{где}\ 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

4. Цилиндр пересечен плоскостью, перпендикулярной к основанию и отсекающей от окружности основания дугу $\alpha$. Диагональ сечения равна $d$ и наклонена к плоскости основания под углом $\beta$. Определить объем цилиндра.

## Вариант 4

(Таллинский политехнический институт)

1. Найти дробь с числителем, равным 8. Если из знаменателя искомой дроби вычесть 3, то новая дробь будет больше дроби, полученной из искомой прибавлением к ее знаменателю числа 11, на 3,5.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+xy^2=104; \\ x-xy=-16. \end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$\cos x-\cos 2x=1.$$

4. Периметр ромба 20 *см*, а сумма диагоналей 14 *см*. Найти площадь ромба.

5. В правильной четырехугольной пирамиде площадь боковой грани, образующей с плоскостью основания угол 60°, равна 16. Найти объем пирамиды.

## Вариант 5

(Ленинградский орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горный институт имени Г. В. Плеханова)

1. Упростить выражение

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)-a^{\frac{2}{3}}.$$

2. Решить уравнение

$$3^x \cdot 2^{x-1} - 3^{x-1} \cdot 2^x = 2^2 \cdot 3^2.$$

3. Решить уравнение

$$2 \sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 0.$$

4. Треугольник со сторонами 9, 10 и 17 *см* вращается вокруг высоты, проведенной из вершины его меньшего угла. Определить объем полученного тела вращения.

## Вариант 6
## (Ташкентский политехнический институт)

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}}{\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{xy} + \sqrt{y}} - \frac{2\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}\right) : \\ : \frac{-\sqrt{y} + 2\sqrt[4]{xy} - \sqrt{x}}{x + y - 2\sqrt{xy}}.$$

2. Доказать тождество

$$\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^x = 2^y; \\ \log_4 y - \log_4 x = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

4. Радиус основания конуса равен $R$, а образующая наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$. В этом конусе проведена плоскость через его вершину под углом $\varphi$ к его высоте. Найти площадь полученного сечения.

## Вариант 7
(Калининградский технический институт рыбной промышленности и хозяйства)

1. Упростить выражение

$$\left[(1-x)^{-\frac{2}{3}}+\frac{x}{\sqrt[3]{(1-x)^5}}\right]:\left[\left(1-\frac{2}{x^{-1}}+\frac{1}{x^{-2}}\right)^{-1}\sqrt[3]{1-x}\right].$$

2. Решить неравенство

$$\lg(x+3)+\lg x<\lg(x+8).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sin^2 x+\sin^2 y=\dfrac{3}{4};\\ x+y=75^\circ.\end{cases}$$

4. Диагональ $d$ прямоугольного параллелепипеда образует с его боковой гранью угол $\alpha$; проходящее через эту диагональ и боковое ребро сечение параллелепипеда образует с той же боковой гранью двугранный угол $\beta$. Определить боковую поверхность параллелепипеда.

## Вариант 8

(Новосибирский инженерно-строительный институт имени В. В. Куйбышева)

1. В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна $a$. Плоскость, проходящая через вершину конуса и одну из сторон квадрата, дает в сечении с поверхностью конуса треугольник с углом $\alpha$ при вершине. Найти объем конуса.

2. Решить уравнение

$$3^{4x+8}-4\cdot 3^{2x+5}+27=0.$$

3. Решить уравнение

$$3(1-\sin x)=1+\cos 2x.$$

## Вариант 9

(Львовский политехнический институт)

1. Ремонт пути проводили две бригады. Каждая из них отремонтировала по 10 *км*, несмотря на то, что вторая бригада работала на один день меньше первой. Сколько километров пути ремонтировала каждая бригада в день, если обе вместе ремонтировали в день 4,5 *км*.

2. Решить уравнение

$$\log_7\left(2x-\frac{9}{4}\right)-\log_7 x=\log_7(x-3).$$

3. Преобразовать в произведение

$$\frac{\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha-\sec\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}.$$

4. Треугольник вращается вокруг его стороны, прилежащей к углам $\alpha$ и $\beta$. Определить поверхность тела

вращения, если сторона треугольника, лежащая против угла $\alpha$, равна $a$.

## Вариант 10
### (Мурманское высшее инженерное морское училище)

1. Решить уравнение

$$\lg \sqrt[3]{75+5^{\sqrt{3x-2}}}=\frac{2}{3}.$$

2. Решить неравенство

$$2^{20x-x^2-61,5}\geqslant\sqrt{32}.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{\sqrt{3}}{\cos x}=4.$$

4. Решить уравнение

$$x^2+3x-8=|2x+4|.$$

## Вариант 11
### (Военная инженерная академия имени Ф. Э. Дзержинского)

1. Перевозка 1 *т* груза между двумя городами по железной дороге обходится на 20 коп. дороже, чем водны[м] путем. Сколько тонн груза можно перевезти из одного города в другой по железной дороге за 1000 руб., если водным путем за эту же сумму можно перевезти на 250 [т] груза больше?

2. Упростить выражение

$$\frac{\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y}-x}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x^{-1}}}\right)(\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y})}{x+y-(x\sqrt{x}+y\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{-1}}.$$

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x=\sin 3x \cos x.$$

4. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм с тупым углом $\alpha$ и сторонами $a$ и $b$. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Определить объем параллелепипеда.

## Вариант 12
## (Николаевский кораблестроительный институт имени адмирала С. О. Макарова)

1. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен $2\beta$, а периметр осевого сечения $2p$. Определить полную поверхность конуса.

2. Решить уравнение

$$\cos^3 x \sin x-3 \cos x \sin^3 x+\cos^2 x \sin^2 x-3 \sin 4x=0.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{3 \log_2(-x)}=\log_2 x^2.$$

## Вариант 13
## (Ворошиловградский машиностроительный институт)

1. В конусе, радиус основания которого $R$ и образующая наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$, про-

ведена плоскость сечения через вершину конуса по; углом $\beta$ к основанию. Определить площадь сечения.

2. Решить уравнение

$$7\sin^2 x - 8\sin x\cos x = 15\cos^2 x.$$

3. Вычислить

$$\left[9^{-0,25} + (3\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}}\right]\left[9^{-0,25} - (3\sqrt{3})^{-\frac{4}{3}}\right].$$

4. Решить уравнение

$$5^x - 2\cdot 5^{x-1} - \frac{3}{5^{2-x}} = \frac{3}{10^{-2}}.$$

## Вариант 14
## (Донецкий политехнический институт)

1. Электровоз должен был пройти 840 *км* за определенное время. В середине пути он был задержан н 20 *мин* и потому, чтобы прибыть вовремя, должен был увеличить скорость на 6 *км/ч*. Сколько времени электровоз затратил на весь путь?

2. Боковая поверхность цилиндра в развертке представляется прямоугольником, диагональ которого равна $d$ и составляет с основанием угол $\varphi$. Найти объем цилиндра.

3. Решить уравнение

$$x^{\lg x+1} = 100.$$

## Вариант 15
## (Севастопольский приборостроительный институт)

1. Основанием пирамиды служит ромб со стороной и тупым углом $\alpha$. Две смежные боковые грани, заключаю щие угол $\alpha$, перпендикулярны к основанию. Перпендику

ляр, опущенный из вершины угла $\alpha$ на высоту боковой грани, не перпендикулярную к основанию пирамиды, образует с основанием угол $\beta$. Определить боковую поверхность пирамиды.

**2.** Решить уравнение

$$3^{2-\log_3 x}=81x.$$

**3.** Решить уравнение

$$\sin x-\cos x-4\cos^2 x\sin x=4\sin^3 x.$$

**4.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{y}}=11; \\ 2^{\sqrt{x}}\cdot 3^{\sqrt{y}}=18. \end{cases}$$

## Вариант 16
## (Хабаровский политехнический институт)

**1.** Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби

$$\frac{1}{(5-\sqrt{3})^5}.$$

**2.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x^3}+\sqrt[5]{y^3}=35; \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{y}=5. \end{cases}$$

**3.** Решить неравенство

$$(x-2)\sqrt{x^2+1}>x^2+2.$$

**4.** Углы треугольника связаны соотношением $\sin\alpha=2\sin\beta\cos\gamma$. Доказать, что треугольник равнобедренный.

## Вариант 17
### (Ивановский энергетический институт имени В. И. Ленина)

**1.** В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $a$ и плоский угол при вершине $2\alpha$. Определить площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через одну из сторон основания перпендикулярно к противолежащему ребру.

**2.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}; \\ 4x+y=32. \end{cases}$$

**3.** Найти $\sin\alpha$, если

$$\sin(45^\circ-\alpha)=-\frac{2}{3} \quad (45^\circ<\alpha<90^\circ).$$

**4.** Упростить выражение

$$\frac{b^{\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}:\left[\frac{\sqrt{b}-\frac{a}{(ab)^{-0,5}}}{1-a}-\sqrt{ab}\right]+\frac{a}{b}\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

## Вариант 18
### (Ленинградский политехнический институт имени М. И. Калинина)

**1.** Вычислить

$$\frac{3x^{(m-n)^2}-x^{-4mn}}{x^{(m-n)^2}-x^{-4mn}}, \text{ если } x=\left[\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right]^{(m+n)^{-2}}$$

**2.** Решить уравнение

$$\sin x+\sin x\cos x=1+\cos x+\cos^2 x.$$

3. В шар радиуса $R$ вписана правильная треугольная пирамида, боковая грань которой составляет с плоскостью основания угол $\alpha$. Найти сторону основания пирамиды.

4. Решить неравенство

$$\log_x(16-6x-x^2)>1.$$

## Вариант 19

(Дальневосточный ордена Трудового Красного Знамени политехнический институт имени В. В. Куйбышева)

1. Определить объем пирамиды, зная, что высота ее $h$ лежит вне пирамиды, а две противоположные грани — равнобедренные треугольники, составляющие с ее квадратным основанием углы $\alpha$ и $\beta$ $(\alpha>\beta)$.

2. Решить уравнение

$$\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=-1.$$

3. Решить уравнение

$$(\log_2 x)^2-2\log_2 x^2+3=0.$$

4. Упростить выражение

$$\left[\frac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2}.$$

**Приложение 2**

## ОБРАЗЦЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

### Билет № 1

1. Комплексные числа в алгебраической форме и четыре действия над ними. Тригонометрическая форма комплексного числа.

2. Теорема Пифагора и ее доказательство (алгебраическое).

3. Вывести формулы синуса суммы и разности двух углов.

### Билет № 2

1. Геометрическая прогрессия. Формула любого члена геометрической прогрессии и суммы ее членов.

2. Теорема об объеме пирамиды.

3. Тригонометрические функции двойного угла.

### Билет № 3

1. Зависимость между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами.

2. Теорема о площади боковой поверхности призмы.

3. Радианная мера угла. Соотношение между градусной и радианной мерами углов.

### Билет № 4

1. Показательная функция, ее свойства и график.

2. Теорема о биссектрисе внутреннего угла треугольника.

3. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же угла.

## Билет № 5

1. Теорема о трех перпендикулярах.

2. Исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

3. Указать область определения функции

$$y=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}+\sqrt[3]{\sin x}.$$

## Билет № 6

1. Теорема косинусов и ее доказательство.

2. Общие свойства логарифмов.

3. Параллелограмм с острым углом $\varphi$ при основании описан около круга радиуса $r$. Определить значение угла $\varphi$, при котором площадь параллелограмма имеет наименьшую величину.

## Билет № 7

1. Двугранные углы. Измерение двугранных углов. Перпендикулярные плоскости. Признак перпендикулярности двух плоскостей.

2. Преобразование в произведение суммы и разности двух тангенсов.

3. Решить уравнение

$$|x^2-3x-7|=3x.$$

## Билет № 8

1. Прямая и обратная пропорциональные зависимости.

2. Теорема об объеме усеченного конуса.

3. Решить неравенство

$$\cos^2 x+2\cos x>0.$$

## Билет № 9

1. Теоремы о перпендикуляре, опущенном из вершины угла на гипотенузу.
2. Функция $y=\cos x$, ее свойства и график.
3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(xy)=5; \\ \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x}{y}=1. \end{cases}$$

4. Найти период функции

$$y=\sin^4 x.$$

## Билет № 10

1. Доказать, что

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

2. Уравнения. Понятие об эквивалентности уравнений. Основные свойства уравнений.
3. Решить неравенство

$$|x^2-4x-3|<2.$$

4. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$. Под каким углом наклонена к плоскости основания плоскость, проходящая через две образующие, составляющие угол $\beta$.

## Билет № 11

1. Общие свойства неравенств. Решение неравенств первой степени с одним неизвестным.

2. Окружность. Формула длины окружности.

3. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол $\alpha$. Найти двугранный угол при боковом ребре.

4. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0.$$

## Билет № 12

1. Теорема синусов и ее доказательство.

2. Свойства средней линии треугольника и трапеции.

3. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+5=0; \\ xy+36=0. \end{cases}$$

4. В шар радиуса $r$ вписан цилиндр, диагональ осевого сечения которого наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$. Найти боковую поверхность цилиндра.

## ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННЫХ РАБОТ С РЕШЕНИЯМИ

### Вариант 1

**1.** Упростить выражение

$$\frac{x^{\frac{1}{4}}-1}{x^{\frac{1}{4}}+1}\cdot\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}+1}+3,\ \text{если}\ x\geqslant 0.$$

Решение.

$$\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\cdot\frac{\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}}{(\sqrt[4]{x}-1)^2}+3=\frac{(\sqrt[4]{x}-1)\,|\sqrt{x}-1|}{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt[4]{x}-1)^2}+$$

$$+3=\frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}-1}+3=\begin{cases}4,\ \text{если}\ x>1;\\ 2,\ \text{если}\ 0\leqslant x<1;\\ \text{не имеет смысла, если}\ x=1.\end{cases}$$

Ответ: 4, если $x>1$; 2, если $0\leqslant x<1$; не имеет смысла, если $x=1$.

**2.** Решить уравнение

$$\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}+3).$$

Решение. Область допустимых значений неизвестного $-\infty<x<\infty$.

Уравнение можно записать в виде

$$\log_2(4^x+4)=\log_2 2^x+\log_2(2^{x+1}+3).$$

Потенцируя, получим

$$\log_2(4^x+4)=\log_2[2^x(2^{x+1}+3)],$$

отсюда

$$4^x+4=2^x(2^{x+1}+3);$$

$$2^{2x}+4=2^{2x}\cdot 2+3\cdot 2^x;$$

$$2^{2x}+3\cdot 2^x-4=0.$$

Положив $2^x=z$, имеем

$$z^2+3z-4=0; \quad z_1=-4; \quad z_2=1.$$

Очевидно, $2^x\neq -4$. Следовательно,

$$2^x=1, \quad 2^x=2^0, \quad x=0.$$

При преобразовании исходного уравнения в процессе его решения мы производили потенцирование, однако при этом область допустимых значений неизвестного не изменилась; полученное уравнение является равносильным данному. В связи с этим проверка корня путем подстановки его в данное уравнение не является составной частью решения уравнения, а поэтому ее не производим.

Ответ: $x=0$.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} y=2; \\ \operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} y=2. \end{cases}$$

Решение. Перепишем данную систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x+\dfrac{1}{\operatorname{tg} y}=2; \\ \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}+\operatorname{tg} y=2. \end{cases}$$

Освобождаясь от дробей, получим

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y+1=2 \operatorname{tg} y; \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y+1=2 \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, находим

$$\operatorname{tg} y-\operatorname{tg} x=0 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y.$$

Тангенсы двух углов равны, следовательно,

$$x-y=k\pi, \quad x=y+k\pi.$$

Подставив значение $x$ во второе уравнение данной системы, получим

$$\operatorname{ctg}(y+k\pi)+\operatorname{tg} y=2,$$

отсюда

$$\operatorname{ctg} y+\operatorname{tg} y=2; \quad \frac{1}{\operatorname{tg} y}+\operatorname{tg} y=2; \quad \operatorname{tg}^2 y-2 \operatorname{tg} y+1=0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} y=1; \quad y=\frac{\pi}{4}+n\pi.$$

Подстановка значения $y$ в равенство $x=y+k\pi$ дает

$$x=\frac{\pi}{4}+n\pi+k\pi=\frac{\pi}{4}+(k+n)\pi=\frac{\pi}{4}+m\pi,$$

где

$$m=k+n.$$

Ответ: $x=(4m+1)\frac{\pi}{4}$; $y=(4n+1)\frac{\pi}{4}$.

**4.** В правильной четырехугольной усеченной пирамиде диагональ перпендикулярна к боковому ребру, длина которого $l$. Определить объем пирамиды, зная, что каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом $\varphi$ (рис. 26).

Объяснение к чертежу. Многогранник $AC_1$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида, следовательно, основания пирамиды — квадраты. Диагональное сечение пирамиды $AA_1C_1C$ — равнобедренная трапеция, лежащая в плоскости, перпендикулярной к основаниям пирамиды. Значит, высота пирамиды $A_1E$ и диагональ пирамиды $A_1C$ лежат в плоскости трапеции $AA_1C_1C$. Основание высоты пирамиды принадлежит диагонали $AC$. По условию диагональ $A_1C \perp AA_1$, а значит $\angle AA_1C = 90°$. Углом между боковым ребром пирамиды $AA_1$ и ее основанием является угол, образованный этим ребром и его проекцией на основание пирамиды, т. е. $\angle A_1AE$.

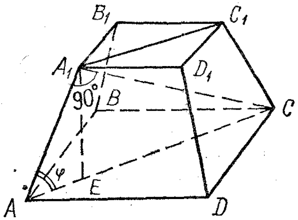

Рис. 26

Дано: $A_1A = l$;
$\angle A_1AC = \varphi$;
$CA_1 \perp AA_1$.

Определить $V_{\text{ус. пир}}$.

Решение. Объем правильной усеченной пирамиды находим по формуле

$$V_{\text{ус. пир}} = \frac{h}{3}(Q + q + \sqrt{Qq}),$$

где $h$ — высота пирамиды;
$Q$ — площадь нижнего основания пирамиды;
$q$ — площадь верхнего основания пирамиды.

С целью сокращения математических выкладок введем обозначения:

$A_1E=h$, $AB=a$ и $A_1B_1=b$.

1) Определяем высоту пирамиды.

Из прямоугольного $\triangle AA_1E$ $h=l\sin\varphi$.

2) Находим площади оснований.

Из прямоугольного $\triangle AA_1C$ $AC=\dfrac{l}{\cos\varphi}$;

из прямоугольного $\triangle ACD$ $AC=a\sqrt{2}$.

Следовательно,

$$\frac{l}{\cos\varphi}=a\sqrt{2};\quad a=\frac{l}{\sqrt{2}\cos\varphi}.$$

Итак,

$$Q=a^2=\frac{l^2}{2\cos^2\varphi}.$$

Из прямоугольного $\triangle A_1C_1D_1$ $A_1C_1=b\sqrt{2}$.

Но $A_1C_1=AC-2AE$, где $AE=l\cos\varphi$.

Следовательно,

$$b\sqrt{2}=a\sqrt{2}-2l\cos\varphi=\frac{l}{\cos\varphi}-2l\cos\varphi=$$

$$=l\cdot\frac{1-2\cos^2\varphi}{\cos\varphi}=-\frac{l\cos 2\varphi}{\cos\varphi},$$

отсюда

$$b=-\frac{l\cos 2\varphi}{\sqrt{2}\cos\varphi}.$$

Итак,

$$q=b^2=\frac{l^2\cos^2 2\varphi}{2\cos^2\varphi}.$$

3) Находим объем усеченной пирамиды.

$$V_{\text{ус. пир}}=\frac{l\sin\varphi}{3}\left(\frac{l^2}{2\cos^2\varphi}+\frac{l^2\cos^2 2\varphi}{2\cos^2\varphi}-\frac{l^2\cos 2\varphi}{2\cos^2\varphi}\right)=$$

$$=\frac{l^3\sin\varphi}{3}\cdot\frac{1+\cos^2 2\varphi-\cos 2\varphi}{2\cos^2\varphi}=$$

$$=\frac{l^3\sin\varphi(1-\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)}{6\cos^2\varphi}=$$

$$=\frac{l^3\sin\varphi(1-\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)(1+\cos 2\varphi)}{6\cos^2\varphi(1+\cos 2\varphi)}=$$

$$=\frac{l^3\sin\varphi(1+\cos^3 2\varphi)}{6\cos^2\varphi\cdot 2\cos^2\varphi}=\frac{l^3\sin\varphi(1+\cos^3 2\varphi)}{12\cos^4\varphi}.$$

Исследование решения. Допустимые значения угла $\varphi$ определяются неравенством $0°<\varphi<90°$. Задача при указанном значении угла $\varphi$ всегда имеет решение, причем оно — единственное. Объем усеченной пирамиды, при заданном $l$, будет тем меньше, чем меньше $\varphi$, а при заданном $\varphi$ объем будет тем больше, чем больше $l$.

Ответ: $V_{\text{ус. пир}}=\dfrac{l^3\sin\varphi(1+\cos^3 2\varphi)}{12\cos^4\varphi}$ *куб. ед.*

## Вариант 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy=40; \\ x^{\lg y}=4. \end{cases}$$

Решение. Область допустимых значений неизвестных $x>0\,(x\neq 1)$; $y>0$.

Логарифмируя каждое уравнение данной системы, получим

$$\begin{cases} \lg x+\lg y=\lg 40; \\ \lg y\cdot\lg x=\lg 4. \end{cases}$$

Положим $\lg x=z_1$ и $\lg y=z_2$. Пользуясь теоремо Виета, составим квадратное уравнение

$$z^2-\lg 40\cdot z+\lg 4=0.$$

Находим

$$z_{1,2}=\frac{\lg 40\pm\sqrt{\lg^2 40-4\lg 4}}{2};$$

$$z_{1,2}=\frac{\lg 40\pm\sqrt{(\lg 4+\lg 10)^2-4\lg 4}}{2};$$

$$z_{1,2}=\frac{\lg 40\pm\sqrt{(\lg 4+1)^2-4\lg 4}}{2};$$

$$z_{1,2}=\frac{\lg 40\pm\sqrt{(\lg 4-1)^2}}{2}.$$

Учитывая, что правила действий над радикалами уст новлены лишь для арифметических корней, получим

$$z_{1,2}=\frac{\lg 4+\lg 10\pm(-\lg 4+1)}{2}$$

отсюда

$$z_1=1;\quad z_2=\lg 4\quad \text{или}\quad z_1=\lg 4;\quad z_2=1.$$

Имеем:

1) $\lg x=1,\ x_1=10;$ $\lg y=\lg 4,\ y_1=4;$

2) $\lg x=\lg 4,\ x_2=4;$ $\lg y=1,\ y_2=10.$

Ответ: (10; 4); (4; 10).

**2.** Решить уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 2x-\sin^2 3x-\sin^2 4x=0.$$

Решение. Пользуясь формулой синуса половинного аргумента, перепишем уравнение в виде

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}-\frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1-\cos 8x}{2}=0,$$

отсюда

$$\cos 2x+\cos 4x=\cos 6x+\cos 8x.$$

Преобразуем суммы косинусов в произведения

$$2\cos 3x\cos x=2\cos 7x\cos x.$$

Получаем

$$(\cos 3x-\cos 7x)\cos x=0.$$

Имеем:

1) $\cos x=0$; $x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi$;

2) $\cos 3x-\cos 7x=0$; $\cos 3x=\cos 7x$.

Если косинусы углов равны, то сумма и разность этих углов равна $2k\pi$.

Следовательно,

$$3x+7x=2k\pi;\quad x_2=\frac{k\pi}{5};$$

$$7x-3x=2k\pi;\quad x_3=\frac{k\pi}{2}.$$

Замечаем, что решение $x_3$ при нечетных $k=2m+1$ совпадает с решением $x_1$, а при четных $k=2m$ совпадает с решением $x_2$, когда в последнем $k=5m$.

Ответ: $x_1=(2k+1)\frac{\pi}{2}$; $x_2=\frac{k\pi}{5}$.

**3.** Двугранный угол при основании правильной тр[...]угольной пирамиды равен $\alpha$. Определить двугранный уг[...] между боковыми гранями этой пирамиды (рис. 27).

Объяснение к чертежу. Многогранник $SABC$- правильная треугольная пирамида. Это означает, что в основании пирамиды лежит равносторонний треугольник $ABC$, а высота пирамиды $SO$ проходит через его центр; боковые грани $ASB$, $ASC$ и $BSC$ — равные равнобедренные треугольники. Из точки $S$ опустим перпендикуляр $SK$ на сторону основания $BC$. Точку $A$ соединим с точкой $K$; $AK \perp BC$ — по теореме о трех перпендикулярах. $\angle SKA$ — линейный угол двугранного угла $BC$; $\angle SKA = \alpha$; $BK = KC$, так как $\triangle BSC$ — равнобедренный. Через сторону основания $BC$ проведем плоскость $BDC \perp AS$. Тогда $BD \perp AS$ и $CD \perp AS$. Следовательно, $\angle BDC$ — линейный угол искомого двугранного угла $AS$. Обозначим его через $x$. $BD = CD$, как соответственные высоты в равных треугольниках, а значит, треугольник $BDC$ — равнобедренный. Построим отрезок $DK$; $DK \perp BC$;

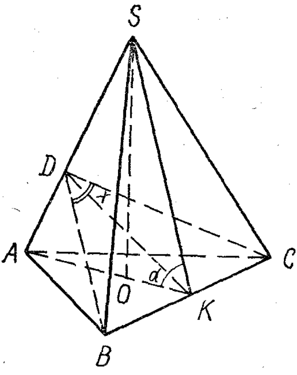


Рис. 27

$\angle BDK = \frac{x}{2}$ ($DK$ — медиана и биссектриса равнобедренного треугольника $BDC$).

Решение. 1) Из прямоугольного $\triangle BDK$ $\sin\frac{x}{2} = \frac{BK}{BD}$.

2) Выражаем $BK$ и $BD$ через $KO$.

$$KO = \frac{1}{2} AO,$$

где $AO$ — радиус окружности, описанной около равностороннего $\triangle ABC$.

$$BC = AO\sqrt{3}, \quad BK = KO\sqrt{3}.$$

Из прямоугольного $\triangle KSO$ $KS = \frac{KO}{\cos\alpha}$;

из прямоугольного $\triangle BSK$ $BS = \sqrt{KS^2 + BK^2}$.

Находим

$$AS = BS = \sqrt{\frac{KO^2}{\cos^2\alpha} + 3\cdot KO^2} = \frac{KO}{\cos\alpha}\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}.$$

Так как треугольники $BSC$ и $ASB$ равные, то их площади равны, т. е.

$$S_{ASB} = S_{BSC} = \frac{BC\cdot KS}{2} = BK\cdot KS =$$

$$= KO\sqrt{3}\cdot\frac{KO}{\cos\alpha} = \frac{KO^2\sqrt{3}}{\cos\alpha}.$$

С другой стороны,

$$S_{ASB} = \frac{BD\cdot AS}{2},$$

отсюда

$$BD = \frac{2S_{ASB}}{AS};$$

$$BD = \frac{2KO^2\cdot\sqrt{3}\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot KO\sqrt{1+3\cos^2\alpha}} = \frac{2KO\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}.$$

3) Находим двугранный угол между боковыми гранями пирамиды.

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{BK}{BD}=\frac{KO\cdot\sqrt{3}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2KO\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2}.$$

Учитывая, что $\angle BDK=\frac{x}{2}$ — острый угол прямоугольного треугольника, имеем

$$\frac{x}{2}=\arcsin\frac{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2},$$

отсюда

$$x=2\arcsin\frac{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2}.$$

Исследование решения. Допустимые значения угла $\alpha$ определяются неравенством $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Задача при указанном значении угла $\alpha$ всегда имеет решение, причем оно — единственное. Допустимые значения угла определяются неравенством $\frac{\pi}{3}<x<\pi$. Величина угла $x$ убывает с возрастанием угла $\alpha$.

Ответ: $x=2\arcsin\frac{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2}$.

## Вариант 3

1. Сумма цифр двузначного числа равна 9. Если переставить цифры этого двузначного числа, то отношение

вновь полученного числа к первоначальному окажется равным $\frac{3}{8}$. Найти двузначное число.

Решение. Введем обозначения:

$x$ — число десятков искомого числа;

$y$ — число единиц искомого числа;

$10x+y$ — искомое число.

По условию задачи

$$\begin{cases} x+y=9, \\ \frac{10y+x}{10x+y}=\frac{3}{8}. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы найдем

$$y=9-x.$$

Подставляя значение $y$ во второе уравнение системы, получим

$$\frac{10(9-x)+x}{10x+9-x}=\frac{3}{8},$$

отсюда

$$\frac{10-x}{x+1}=\frac{3}{8};\ 80-8x=3x+3;\ 11x=77;\ x=7.$$

Находим

$$y=9-7=2.$$

Ответ: 72.

2. Решить уравнение

$$\sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}}-\sqrt[3x-7]{32^{0,6x-1,8}}=0.$$

Решение. Область допустимых значений неизвестного $x$ — множество действительных чисел, кроме $x=$ и $x=\frac{7}{3}$.

Перепишем данное уравнение в виде

$$\sqrt[x-1]{2^{\frac{3x-1}{3}}}=\sqrt[3x-7]{2^{5\,(0{,}6x-1{,}8)}}$$

или

$$2^{\frac{3x-1}{3(x-1)}}=2^{\frac{3x-9}{3x-7}}.$$

Так как степени числа 2 равны, должны быть равны и показатели этих степеней.

$$\frac{3x-1}{3(x-1)}=\frac{3x-9}{3x-7}.$$

Приводим дроби к общему знаменателю и освобождаемся от него $\left(\text{при условии } x\neq 1 \text{ и } x\neq\frac{7}{3}\right)$:

$$9x^2-3x-21x+7=9x^2-9x-27x+27.$$

Отсюда

$$12x=20;\quad x=\frac{5}{3}.$$

Так как из области допустимых значений неизвестного исключены значения $x=1$ и $x=\frac{7}{3}$, при которых уравнение теряет смысл, то проверка полученного корня не является составной частью решения данного уравнения.

Ответ: $x=\frac{5}{3}$.

3. Решить неравенство

$$\lg \sqrt{x-2}+0{,}5 \lg (3x-5) > \frac{1}{2}.$$

Решение. Левая часть неравенства имеет смысл, если

$$\begin{cases} x-2>0; \\ 3x-5>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x>2; \\ x>\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, область допустимых значений неизвестного $x>2$.

Данное неравенство представим в виде

$$\frac{1}{2} \lg (x-2)+\frac{1}{2} \lg (3x-5) > \frac{1}{2}.$$

Сократив все члены на $\frac{1}{2}$, получим

$$\lg (x-2)+\lg (3x-5)>1.$$

После потенцирования неравенство примет вид

$$\lg (x-2)(3x-5)>1.$$

Так как логарифм числа по основанию 10 больше единицы, то само число должно быть больше 10, т. е.

$$(x-2)(3x-5)>10.$$

Отсюда

$$3x^2-11x+10>10; \quad x(3x-11)>0.$$

Последнее неравенство справедливо при условиях:

$$1) \quad \begin{cases} x>0; \\ 3x-11>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x>0; \\ x>\dfrac{11}{3}; \end{cases} \quad x>\frac{11}{3};$$

2) $\begin{cases} x<0; \\ 3x-11<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<0; \\ x<\frac{11}{3}; \end{cases}$ $x<0.$

Значения $x>\frac{11}{3}$ удовлетворяют данному неравенству а значения $x<0$ — не удовлетворяют, так как не принад лежат области допустимых значений неизвестного.

Ответ: $x>\frac{11}{3}$.

**4.** Доказать тождество

$$\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\alpha-\sin^2\beta=2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

Решение. Преобразуем левую часть тождества дующим образом:

$$\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\alpha-\sin^2\beta=(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)^2-$$
$$-\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin^2\alpha\cos^2\beta+2\sin\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\alpha+$$
$$+\sin^2\beta\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin^2\alpha(\cos^2\beta-1)+$$
$$+\sin^2\beta(\cos^2\alpha-1)+2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta=$$
$$=-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta=$$
$$=2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta-2\sin^2\alpha\sin^2\beta=$$
$$=2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=$$
$$=2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta).$$

Левая часть приведена к такому же виду, какой имеет правая часть, тождество доказано.

**5.** В треугольнике сумма боковых сторон равна 30 *см*, основание 24 *см*, а один из углов при основании 60°. Определить боковые стороны (рис. 28).

Дано: Треугольник $ABC$;

$$AC=24\ см;$$
$$AB+BC=30\ см;$$
$$\angle BAC=60°.$$

Определить $AB$ и $BC$.

Р е ш е н и е. Строим $BD \perp AC$. Треугольник $ABD$ прямоугольный. $\angle ABD=90°-60°=30°$. Известно, что катет

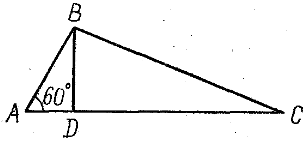


Рис. 28

прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, т. е. $AD=\frac{AB}{2}$.

Введем обозначения: $AB=x$, $BC=30-x$.

По теореме о квадрате стороны, лежащей против острого угла треугольника, можем написать

$$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AD$$

или

$$(30-x)^2=24^2+x^2-2\cdot 24\cdot \frac{x}{2}.$$

Отсюда

$$900-60x+x^2=576+x^2-24x;\quad 324=36x;\quad x=9.$$

Следовательно,

$$AB=9;\quad BC=30-9=21.$$

О т в е т: $AB=9$ *см*; $BC=21$ *см*.

# ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ, ПОМЕЩЕННЫМ В ПРИЛОЖЕНИИ 1

| Вариант | Задачи | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | $\frac{1}{2x(x-1)}$ | $x_1 = 4$; $x_2 = -1$ | $x = \frac{(4k-1)\pi}{8}$ | $\frac{m^2 \sin\alpha}{\sin^4\frac{\alpha}{2}}$ *кв. ед.* |
| 2 | $x < 0$; $x > 3$ | $x = \frac{\pi(2k+1)}{8}$ | $\frac{1}{3}\pi R^3 \left[\frac{\cos^4\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(2 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)\right]$ *куб. ед.* | |
| 3 | 12 *мин*; 1 *ч* | 1 | $x = \pi(k-1)$, где $k = 1, 2$. | $\frac{\pi d^3 \sin\beta\cos^2\beta}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ *куб. ед* |
| 4 | $\frac{8}{5}$ | $(4; 5)$; $\left(32; \frac{3}{2}\right)$ | $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ | 24 *кв. см* |

*Продолжение*

| Ва-риант | Задачи 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 0 | $x = 3$ | $x_1 = \operatorname{arctg} 2 + k\pi$; $x_2 = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + k\pi$ | $504\,\pi$ *куб. см* |
| 6 | $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}$ | — | (4; 8) | $\frac{R^2 \sin\alpha}{\cos^2\alpha \cos^2\varphi} \times$ $\times \sqrt{\cos(\varphi + \alpha)\cos(\varphi - \alpha)}$ *куб. ед.* |
| 7 | 1 | $0 < x < 2$ | $x_1 = 45^\circ(4k + 1)$; $y_1 = 30^\circ(1 - 6k)$; $x_2 = 30^\circ(6k + 1)$; $y_2 = 45^\circ(1 - 4k)$ | $\frac{\sqrt{8}\, d^2 \sin\alpha \sin(45^\circ + \beta)}{\sin^2\beta} \times$ $\times \sqrt{\sin(\alpha + \beta)\sin(\beta - \alpha)}$ *кв. ед.* |
| 8 | $\frac{\pi a^3 \sqrt{\cos\alpha}}{12 \sin\frac{\alpha}{2}}$ *куб. ед.* | $x_1 = -1$; $x_2 = -1{,}5$ | $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $x_2 = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi$ | |
| 9 | 2 *км*; 2,5 *км* | $x = 4{,}5$ | $\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin 2\alpha}$ | $\frac{2\pi a^2 \sin\beta \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha}$ *кв. ед* |

*Продолжение*

| Ва-риант | Задачи | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 10 | $x=2$ | $4 \leqslant x \leqslant 16$ | $x_1 = \frac{\pi}{18} - \frac{2k\pi}{3}$; $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ | $x_1 = 3$; $x_2 = -2{,}5 - \sqrt{10{,}25}$ |
| 11 | $1000$ *т* | 1 | $x = \frac{k\pi}{3}$ | $2ab \sin\alpha \sqrt{-ab\cos\alpha}$ *куб. ед.* |
| 12 | $\frac{\pi p^2 \sin\beta}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}$ *кв. ед.* | $x_1 = k\pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $x_3 = \frac{\pi}{6} + k\pi$; $x_4 = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ | $x_1 = -1$; $x_2 = -\sqrt[4]{8}$ | |
| 13 | $\frac{R^2 \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha \sin^2\beta} \times$ $\times \sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}$ *кв. ед.* | $x_1 = \operatorname{arctg}\frac{15}{7} + k\pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ | $\frac{26}{81}$ | $x = 4$ |
| 14 | 10 *ч* | $\frac{d^3 \cos^2\varphi \sin\varphi}{4\pi}$ *куб. ед.* | $x_1 = 10$; $x_2 = 0{,}01$ | |

| Вариант | Задачи 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 15 | $a^2 \sin\alpha \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$ *кв. ед.* | $x=\frac{1}{3}$ | $x=k\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ | $x_1=\left(\frac{2\lg 3}{\lg 2}\right)^2$, $y_1=\left(\frac{\lg 2}{\lg 3}\right)^2$; $x_2=1,\ y_2=4$ |
| 16 | $\left(\frac{5+\sqrt{3}}{22}\right)^5$ | (16; 243); (81; 32) | Решений нет | — |
| 17 | $\frac{a^2}{2}\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}$ *кв. ед.* | (4; 16) | $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{6}$ | $\frac{3b-2a}{3b}$ |
| 18 | $\sqrt{a}+2$ | $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ | $\frac{4R\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{4+\operatorname{tg}^2\alpha}$ *лин. ед.* | $1<x<\frac{-7+\sqrt{113}}{2}$ |
| 19 | $\frac{h^3\sin^2(\alpha-\beta)}{3\sin^2\alpha\sin^2\beta}$ *куб. ед.* | $x_1=-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x_2=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$; $x_3=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ | $x_1=8$; $x_2=2$ | $\frac{(x^2-\sqrt{x^4-a^4})^2}{a^4}$ |

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ, ПОМЕЩЕННЫМ В ПРИЛОЖЕНИИ 2

Билет № 5. $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, где $k$ — целое число.

Билет № 6. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Билет № 7. $x_1 = 7$; $x_2 = \sqrt{7}$.

Билет № 8. $(4k-1)\frac{\pi}{2} < x < (4k+1)\frac{\pi}{2}$.

Билет № 9. (4; 8); (—4; —8). Период функции — число $\pi$.

Билет № 10. $-1 < x < 2-\sqrt{5}$; $2+\sqrt{5} < x < 5$. $\arcsin\left(\frac{\sin\beta}{\cos\frac{\beta}{2}}\right)$.

Билет № 11. $2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right) \cdot x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Билет № 12. (—9; 4); (4; —9). $2\pi r^2 \sin 2\alpha$.

*Тупиков Владимир Александрович*

ОШИБКИ В РЕШЕНИИ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ ПО МАТЕМАТИКЕ

Изд. 4. Перераб. и доп.

Редактор *А. А. Белянкина*. Худож. редактор *Г. И. Важнов*. Техн. редактор *М. Н. Кислякова*. Корректор *Е. В. Сукач*.

АТ 17110. Сдано в набор 2/X 1973 г. Подписано в печать 19/XII 1973 г. Бумага $70\times108^1/_{32}$ типогр. № 3. Печ. л. 4,5 (6,3). Уч.-изд. л. 5,71. Изд. № 73—17. Тираж 150 000 экз. Цена 16 коп. Зак. 811.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Редакция литературы по математике, физике и энергетике. Минск, ул. Кирова, 24. Отпечатано с матриц ордена Трудового Красного Знамени типографии издательства ЦК КП Белоруссии. Минск, Ленинский пр., 79, полиграфкомбинатом им. Я. Коласа, Госкомитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Минск, Красная, 23.