Издательство МЦНМО
Москва • 2006

XI
Турнир математических боёв им. А. П. Савина

Издательство МЦНМО
Москва • 2006

УДК 51
ББК 22.1
Т86

Настоящее издание осуществлено при поддержке Московского городского дворца детского (юношеского) творчества.

Т86 XI Турнир математических боёв им. А. П. Савина. — М.: МЦНМО, 2006.— 96 с.

ISBN 5-94057-231-6

Книга подготовлена по материалам XI летнего Турнира математических боёв им. А. П. Савина, заключительного этапа конкурса «Математика 6–8», проводимого журналом «Квант».

Здесь собраны условия и решения задач математической регаты, математических боёв, командной и личной олимпиады, а также математической карусели. Решения задач специально отделены от условий, чтобы читатель мог самостоятельно порешать понравившиеся ему задачи. В приложении приведены списки победителей Турнира.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся олимпиадными задачами по математике: школьников 6–9 классов, а также школьных учителей и руководителей математических кружков.

ББК 22.1

Издание подготовлено методической комиссией XI Турнира математических боёв им. А. П. Савина (руководитель А. Д. Блинков).

ISBN 5-94057-231-6

Введение

Ежегодный летний математический турнир служит заключительным этапом конкурса «Математика 6–8», который проводится журналом «Квант». Одиннадцатый турнир состоялся (по традиции последних лет) в конце июня на базе отдыха «Берендеевы поляны» (Костромская область) и собрал 26 команд из Костромы, Магнитогорска, Москвы, Омска, Перми, Снежинска, Троицка и Харькова.

Организаторами этого турнира являлись: Московский городской дворец детского (юношеского) творчества и его филиал, Дом научно-технического творчества молодёжи, Департамент общего и профессионального образования Костромской области, Костромской центр дополнительного образования одарённых школьников, Федерация профсоюзов Костромской области, Фонд математического образования и просвещения. Содействие турниру оказали также компания Yandex и Клуб жён политиков «Подруги».

Председателем оргкомитета турнира являлся Г. В. Кондаков. В составе методической комиссии, осуществлявшей подбор задач, работали: А. Акопян, М. Берштейн, А. Блинков, Ю. Блинков, Д. Вельтищев, М. Вельтищев, М. Галамов, Е. Горская, В. Гуровиц, А. Жуков, Д. Калинин, Т. Караваева, Г. Мерзон, И. Раскина, В. Сендеров, А. Скопенков, Б. Френкин, Е. Чернышёва, П. Чулков.

Схема проведения фестиваля в последние годы остаётся неизменной. Турнир открывается двумя математическими регатами, проходящими параллельно (для 8–9 и 6–7 классов). Затем проводится командная олимпиада, по результатам которой (с учётом возраста школьников) команды ранжируются по лигам для проведения математических боёв. На прошедшем турнире соревнования проходили в четырёх лигах: высшей и первой для 8–9 классов; высшей для 7 классов и первой для 6–7 классов.

Помимо турнира математических боёв проводится устная личная олимпиада (также, как и регата, отдельно для двух возрастов). В свободное время школьники имели возможность ознакомиться с культурными достопримечательностями Костромы и Галича, поучаствовать в спортивных и культурных мероприятиях и интеллектуальных играх.

Распорядок фестиваля 2005 г.

- 25 июня — Математическая регата
- 26 июня — Командная олимпиада
- 27 июня — Математические бои, Первый тур
- 28 июня — Математические бои, Второй тур
- 29 июня — Личная олимпиада
- 30 июня — Математические бои, Третий тур
- 1 июля — Математические бои, Четвёртый тур

1. Условия задач

1.1. Математическая регата

1.1.1. 6–7 классы

Первый тур

1.1. (6 баллов) 109 яблок разложены по пакетам. В некоторых пакетах лежит по x яблок, в других по 3 яблока. Найдите все возможные значения x, если всего пакетов — 20.

1.2. (6 баллов) Изобразите как можно больше квадратов так, чтобы каждые два имели ровно по две общие вершины.

1.3. (6 баллов) В комнате 12 человек; некоторые из них честные, то есть всегда говорят правду, остальные всегда лгут. «Здесь нет ни одного честного человека», — сказал первый. «Здесь не более одного честного человека», — сказал второй. Третий сказал, что честных не более двух, четвёртый — что не более трёх, и так далее до двенадцатого, который сказал, что честных людей не более одиннадцати. Сколько честных людей в комнате на самом деле?

Второй тур

2.1. (7 баллов) Два парома одновременно отходят от противоположных берегов реки и пересекают её перпендикулярно берегам. Скорости паромов постоянны, но не равны. Паромы встречаются на расстоянии 720 метров от берега, после чего продолжают движение. На обратном пути они встречаются в 400 метрах от другого берега. Какова ширина реки?

2.2. (7 баллов) В результате измерения сторон и одной диагонали четырёхугольника получены числа: 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Какова длина измеренной диагонали?

2.3. (7 баллов) Петя записал на компьютере число 1. Каждую секунду компьютер прибавляет к числу на экране сумму его цифр. Может ли через какое-то время на экране появиться число 123456789?

Третий тур

3.1. (7 баллов) По шоссе со скоростью 60 *км/ч* едет колонна машин длиной 300 метров. Проезжая мимо поста ДПС, каждая машина сбрасывает скорость до 40 *км/ч*. Какова будет длина колонны, когда все машины проедут пост ДПС?

3.2. (7 баллов) В треугольнике ABC угол A равен 40°, угол B равен 20°, а $AB - BC = 4$. Найдите длину биссектрисы угла C.

3.3. (7 баллов) Можно ли так расположить фишки на доске 8×8, чтобы в любых двух вертикалях фишек было поровну, а в любых двух горизонталях — не поровну?

Четвёртый тур

4.1. (8 баллов) Докажите, что

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{2004}{2005!} < 1.$$

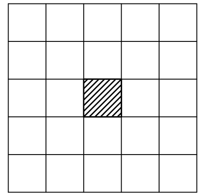


Рис. 1

4.2. (8 баллов) Из квадрата 5×5 вырезали центральную клетку (см. рис. 1). Разрежьте получившуюся фигуру на две части, из которых можно склеить куб $2 \times 2 \times 2$.

4.3. (8 баллов) Назовём трёхзначное число *хребтовым*, если средняя цифра в его десятичной записи больше, чем крайние, и *овражным*, если его средняя цифра меньше крайних. Каких чисел больше: хребтовых или овражных?

1.1.2. 8–9 классы

Первый тур

1.1. (6 баллов) Существует ли такое натуральное число n, что число $2^8 + 2^{11} + 2^n$ является полным квадратом?

1.2. (6 баллов) Известно, что для сторон и углов треугольника ABC выполняется равенство $\frac{BC}{\cos\angle A} = \frac{AC}{\cos\angle B}$. Верно ли, что $AC = BC$?

1.3. (6 баллов) Может ли натуральное число-палиндром, состоящее из 100 цифр, быть простым? (Число называется *палиндромом*, если оно читается слева направо и справа налево одинаково.)

Второй тур

2.1. (7 баллов) См. задачу 3.1 Математической регаты 6–7 классов.

2.2. (7 баллов) Можно ли разрезать неравнобедренный треугольник на две части так, чтобы из этих частей можно было сложить трапецию, у которой две стороны данного треугольника являются: а) основаниями; б) боковыми сторонами?

2.3. (7 баллов) Зал для танцев представляет собой n-угольник. Для каких k можно расставить вдоль стенок k светильников так, чтобы у каждой стенки стояло ровно по два светильника? (Если светильник стоит в углу, то он «занимает» две стенки.)

Третий тур

3.1. (8 баллов) См. задачу 4.1 Математической регаты 6–7.

3.2. (8 баллов) Какое количество сторон выпуклого многоугольника может иметь такую же длину, как и наибольшая диагональ этого многоугольника?

3.3. (8 баллов) Найдите все тройки (x, y, z) натуральных чисел, для которых выполняется равенство $3xy + 3yz + 3zx = 5xyz + 3$.

Четвёртый тур

4.1. (9 баллов) Найдите наименьшее значение выражения

$$L(x, y) = \sqrt{(x-9)^2+4} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(y-3)^2+9}.$$

4.2. (9 баллов) Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O. Прямая AO вторично пересекает окружность, описанную около треугольника BOC, в точке M. Найдите OM, если $BC = 3$, а $\angle BAC = 120^\circ$.

4.3. (9 баллов) На плоскости отмечено n точек ($n > 1$) и рассматриваются всевозможные отрезки с концами в этих точках. Назовём отрезок *чётным*, если на нём лежит чётное количество отмеченных точек, и *нечётным*, если на нём лежит нечётное количество отмеченных точек. Каких отрезков больше: чётных или нечётных?

1.2. Математические бои

1.2.1. Первый тур

Первая Лига 6–7

1. Решая задачу, Гриша нашёл два двузначных натуральных числа. Для каждого из этих чисел Саша подсчитал сумму цифр, а Вова — произведение цифр. Могло ли произведение результатов Саши совпасть с суммой чисел, полученных Вовой?

И. Акулич

2. Берендей и Снегурочка играют в следующую игру. Они по очереди стирают буквы во фразе «БЕРЕНДЕЕВЫ ПОЛЯНЫ». За один ход стирается либо только одна буква, либо одна буква и все такие же буквы. Выигрывает тот, кто сотрёт последнюю букву. Начинает Снегурочка. Кто выигрывает при правильной игре?

Фольклор

3. На шахматной доске изначально расставлено несколько ладей. Разрешается ставить на пустые клетки дополнительные ладьи, если каждая такая ладья угрожает не менее, чем двум имеющимся на доске ладьям. Какое наименьшее количество ладей надо изначально расставить, чтобы по указанным правилам можно было заполнить ладьями всю доску? (Ладья угрожает фигуре, если находится с ней на одной горизонтали или вертикали и между ними нет других фигур.)

И. Акулич

4. На пяти островах завтракали 30 аистов. На каждом острове аисты

поделили лягушек поровну, причем каждый аист с первого острова съел больше, чем каждый аист со второго, со второго — больше, чем с третьего, и т. д. Сколько лягушек могло быть съедено на каждом из островов, если всего было съедено 42 лягушки, и каждый аист съел хотя бы одну лягушку?

Фольклор

5. Одновременно были зажжены две свечи одинаковой длины: одна потолще (сгорающая за 4 часа), другая потоньше (сгорающая за 2 часа). Через некоторое время обе свечи были потушены. Оказалось, что огарок толстой свечи в 3 раза длиннее огарка тонкой свечи. Сколько времени горели свечи?

Фольклор

6. Барон Мюнхгаузен рассказывал, что он побывал на острове Невезения, имеющем форму многоугольника, у которого шесть идущих подряд углов острые. Можно ли утверждать, что барон лжёт?

Фольклор

7. Среди первых 99 натуральных чисел выбрано 50 чисел. Известно, что никакие два из них не дают в сумме ни 99, ни 100. Чему равна сумма выбранных чисел?

Фольклор

8. Вася пытается подобрать такое целое число a, что $a^2 = \overline{МЯУМЯУ}$, где $М$, $Я$, $У$ — некоторые цифры, и $М \neq 0$. Удастся ли ему это сделать?

В. Сендеров

Высшая Лига 7

1. Решая задачу, Гриша нашёл десять двузначных натуральных чисел. Для каждого из этих чисел Саша подсчитал сумму цифр, а Вова — произведение цифр. Могло ли произведение результатов Саши совпасть с суммой чисел, полученных Вовой?

И. Акулич

2. На шахматной доске изначально расставлено n ладей. Разрешается поставить на пустую клетку дополнительную ладью, если она угрожает не менее, чем трём имеющимся на доске ладьям. При каком наименьшем n можно заполнить ладьями всю доску? (Ладья угрожает фигуре, если находится с ней на одной горизонтали или вертикали и между ними нет других фигур.)

И. Акулич

3. Найдите все такие натуральные числа x, что

$$x^2 = \overline{\underbrace{y\ldots y}_{n}\underbrace{z\ldots z}_{n}}.$$

(Здесь y и z — ненулевые цифры, а $n > 1$.)

В. Сендеров

4. Продавец расположил набор из ста гирек массами 1, 2, 3, ..., 100 граммов в произвольном порядке: m_1, m_2, $m_3, \ldots, m_{100}$. Докажите, что гирьки массами $|m_1 - 1|, |m_2 - 2|, |m_3 - 3|, \ldots, |m_{100} - 100|$ граммов можно расположить на двух чашах весов так, что весы окажутся в равновесии.

В. Произволов

5. См. задачу 2 Первой Лиги 6–7.

6. В магазине продаются гирлянды лампочек, соединённых по кругу. Имеются гирлянды с любым количеством лампочек от 25 до 100. Лампочки можно зажигать по одной в произвольном порядке. Назовём *связанными* лампочки, между которыми находится ровно 11 лампочек. Если при включении какой-либо лампочки обе связанные с ней уже горят, то одну из них (любую по желанию) требуется погасить. Если горит только одна одна из связанных с ней, то её нужно погасить. На гирлянде какой длины можно зажечь больше всего лампочек?

А. Малеев

7. Можно ли разрезать заданный треугольник на два треугольника так, что в каждом из них можно отметить по равной стороне, причём отмеченные стороны не лежат на одной прямой?

А. Шаповалов, В. Сендеров, Б. Френкин

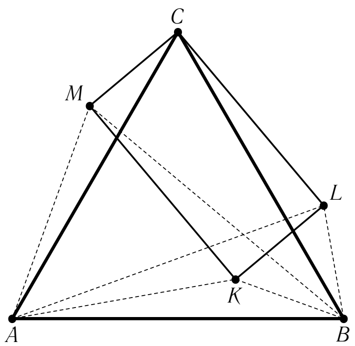


Рис. 2

8. Треугольник ABC равносторонний. Точки K, L и M таковы, что $\triangle ABK = \triangle CBL = \triangle ACM = \triangle MBK = \triangle ALK$ (см. рис. 2). Докажите, что $CLKM$ — прямоугольник.

Д. Калинин

Первая Лига 8–9

1. Существуют ли десять натуральных чисел, обладающих следующим свойством: произведение сумм цифр этих чисел равно сумме произведений их цифр?

И. Акулич

2. См. задачу 2 Высшей Лиги 7.

3. См. задачу 8 Первой Лиги 6–7.

4. Докажите, что для любых положительных чисел a, x_1, x_2, ..., x_n ($n > 1$) выполняется неравенство:

$$\frac{x_1}{a + x_1} + \frac{x_2}{a + x_2} + \ldots + \frac{x_n}{a + x_n} > \frac{S}{a + S},$$

где $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

В. Сендеров

5. В строку выписывается последовательность целых чисел. Первый член последовательности положителен, а каждый следующий её член, начиная со второго, вычисляется по следующему правилу:

1) если в предыдущем числе нет одинаковых цифр, то к предыдущему числу прибавляется количество его цифр;

2) если в предыдущем числе есть одинаковые цифры, то из предыдущего числа вычитается двойка.

Докажите, что, начиная с определённого места последовательности, числа станут периодически повторяться.

А. Жуков

6. В магазине продаются гирлянды из $n > 2$ лампочек, соединённых по кругу. Лампочки можно зажигать по одной в произвольном порядке. Если при включении какой-либо лампочки обе её соседние уже горят, то одну из них (любую по желанию) требуется погасить. Если горит только одна соседняя, то её нужно погасить. Какое наибольшее количество лампочек можно зажечь таким способом?

А. Малеев

7. Разрежьте заданный треугольник на три треугольника так, что в них можно отметить по равной стороне, причём никакие две из трёх отмеченных сторон не лежат на одной прямой.

А. Шаповалов, В. Сендеров, Б. Френкин

8. Через точку O внутри квадрата $ABCD$ провели прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые пересекли стороны AB, BC, CD и DA в точках X, Y, Z и T соответственно. Известно, что DY — биссектриса угла XYC. Докажите, что площадь прямоугольника $XBYO$ в два раза больше площади четырехугольника $ZDTO$.

Д. Калинин

Высшая Лига 8–9

1. Для каких натуральных n существуют n таких различных натуральных чисел, что произведение сумм цифр этих чисел равно сумме произведений их цифр?

И. Акулич

2. См. задачу 2 Высшей Лиги 7.

3. Найдите все такие целые числа x, что $x^2 = \overline{yyzztt}$, где y, z, t — некоторые цифры, $y \neq 0$.

В. Сендеров

4. См. задачу 4 Первой Лиги 8–9.

5. См. задачу 5 Первой Лиги 8–9.

6. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

7. Можно ли с помощью циркуля и линейки разбить произвольный треугольник на четыре треугольника так, чтобы в них можно было отметить по равной стороне, причём никакие две из четырёх отмеченных сторон не лежали бы на одной прямой и не были бы параллельны друг другу?

А. Шаповалов, В. Сендеров, Б. Френкин

8. В окружности проведены две равные хорды AB и BC, угол между которыми равен 30°. Квадрат расположен так, что одна его вершина находится на дуге AC, другая — на дуге BC, а две оставшиеся — по одной на хордах. Докажите, что сторона квадрата равна радиусу окружности.

М. Волчкевич

1.2.2. Второй тур

Первая Лига 6–7

1. В двух ящиках лежат перчатки трех цветов: в левом ящике — 17 белых, 4 синих и 4 красных (все — на левую руку), в правом ящике — 13 белых, 8 синих и 8 красных (все — на правую руку). Какое наименьшее количество перчаток надо вытащить (одновременно и не глядя), чтобы среди них обязательно нашлась пара перчаток одного цвета?

Фольклор

2. Из шахматной доски вырезали связную фигуру, в которой белых клеток не меньше, чем чёрных. Верно ли, что на этой фигуре можно разместить столько доминошек, сколько в ней чёрных клеток? (Одна доминошка занимает две соседние клетки.)

А. Гусаков

3. В государстве несколько городов. Из каждого города выходит хотя бы одна дорога, и между любыми двумя городами не может быть больше одной дороги. Сколько городов может быть в государстве, если всего в нём 7 дорог?

И. Раскина

4. У Ксюши было 80 рублей, а у Наташи — 64 рубля. Каждая из девочек захотела купить как можно больше шоколадок «Алёнка». Ксюша получила восемь рублей сдачи, а Наташа — десять. Смогут ли девочки, сложившись, купить ещё одну шоколадку?

Фольклор

5. Берендей и Снегурочка играют в игру на бесконечной клетчатой полоске ширины 1. Снегурочка своим ходом ставит два крестика в любые свободные клетки. Берендей стирает либо одиночный крестик, либо любое количество крестиков, идущих подряд. Начинает Снегурочка. Может ли Снегурочка в какой-то момент получить 2005 крестиков, идущих подряд?

Фольклор

6. На первом этаже большого дома у лифта встретились пятеро друзей. Женя сказал: «Если считать отсюда, то я живу выше Вовы в 2 раза, выше Пети в 3 раза, выше Андрея в 4 раза и выше Тани в 6 раз». «Ты это здорово подметил, — отозвался Андрей, — а ты, Петя, потише стучи своими гантелями у меня над головой». На каком этаже живет Андрей?

Фольклор

7. Семь чисел записали по кругу. Затем для каждых двух соседних чисел посчитали их сумму и записали между ними, а первоначальные числа стёрли. Получилась замкнутая цепочка из чисел 1, -5, 5, 22, 9, -1, 3. Можно ли найти исходные числа?

Фольклор

8. Из Москвы с улицы Донской в Берендеевы Поляны выехали автобусы с детьми. Когда они проехали 70 *км*, с той же улицы вслед за ними выехал Григорий Вячеславович и догнал автобусы в Костроме. После этого автобусы проехали 40 *км*, а Григорий Вячеславович за то же время — 50 *км*. Найдите расстояние от Москвы до Костромы.

Фольклор

Высшая Лига 7

1. Гномы Сеня, Миша, Гриша, Дима и Вова соревновались в беге, в прыжках в высоту и в длину. Каждый раз на первом месте был гном в красной майке, на втором — в синей, на третьем — в зелёной (у каждого гнома только одна майка). Последнее место в беге занял гном Сеня, в прыжках в высоту — гном Вова, в прыжках в длину — гном Гриша. Могут ли у гномов Миши и Димы быть майки одинакового цвета?

Т. Караваева

2. Грани кубика имеют такой же размер, как и клетки шахматной доски. Одна из граней красная, а остальные — синие. Кубик поставили на одну из клеток красной гранью вниз и прокатили (перекатывая через ребро) по всей доске, пройдя каждую клетку по одному разу. В итоге кубик оказался на исходной клетке, красной гранью вниз. Найдите наибольшее возможное количество клеток, на которых кубик стоял красной гранью вниз.

В. Гуровиц

3. См. задачу 1 Первой Лиги 6–7.

4. См. задачу 2 Первой Лиги 6–7.

5. Про два треугольника известно, что для каждого из них сумма длин любых двух его сторон равна сумме длин каких-нибудь двух сторон другого треугольника. Обязательно ли треугольники равны?

Д. и М. Вельтищевы

6. В стране n городов. Между некоторыми из них проложены дороги, причём из каждого города ведёт хотя бы одна дорога (между двумя городами может быть не более одной дороги). Общее число дорог — 100. Найдите все возможные значения n.

А. Скопенков

7. Решите в натуральных числах уравнение $x^3 - 4x = y^2$.

В. Сендеров

8. Сколько натуральных чисел из первой тысячи обладают свойством: сумма всех их делителей нечётна?

А. Блинков

Первая Лига 8–9

1. См. задачу 1 Первой Лиги 6–7.

2. См. задачу 2 Высшей Лиги 7.

3. На доске написаны числа от 1 до 100. Два игрока по очереди вычёркивают числа, пока не останется два числа. Если их можно поставить вместо p и q в уравнение $x^2 + px + q$ так, чтобы у этого уравнения были целые различные корни, то выигрывает второй игрок, а иначе выигрывает первый. Кто выигрывает при правильной игре?

Е. Куликов

4. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

5. Пусть a, b, c — стороны треугольника, а p — его полупериметр. Докажите, что

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} > p.$$

В. Сендеров

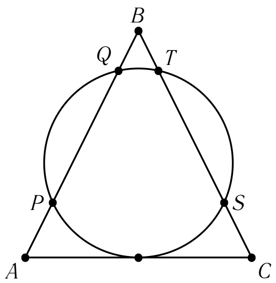


Рис. 3

6. Окружность радиуса R касается основания AC равнобедренного треугольника ABC в его середине и пересекает сторону AB в точках P и Q, а сторону CB в точках S и T (см. рис. 3). Окружности, описанные около треугольников SQB и PTB, пересекаются в точках B и X. Найдите расстояние от точки X до основания треугольника ABC.

Д. Калинин

7. Существует ли такое натуральное число a, что в последовательности

$$x_n = n^2 + 2005an + 2004a^2$$

любые два соседних члена взаимно просты?

В. Сендеров

8. См. задачу 8 Высшей Лиги 7.

Высшая Лига 8–9

1. Дан треугольник ABC и точка P внутри него. Она проецируется на стороны BC, CA, AB в их внутренние точки A', B', C' соответственно,

а затем — в точки A'', B'', C'' на сторонах $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ соответственно. Докажите, что

$$PA \cdot PA' \cdot PA'' = PB \cdot PB' \cdot PB'' = PC \cdot PC' \cdot PC''.$$

А. Заславский

2. В первом ряду шахматной доски стоят восемь одинаковых чёрных ладей, а в последнем ряду — восемь одинаковых белых ладей. За какое минимальное число ходов белые ладьи могут обменяться местами с чёрными? (Ходы чёрных и белых ладей не обязательно чередуются.)

С. Токарев

3. См. задачу 3 Первой Лиги 8–9.

4. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

5. См. задачу 5 Первой Лиги 8–9.

6. См. задачу 6 Первой Лиги 8–9.

7. См. задачу 7 Первой Лиги 8–9.

8. См. задачу 1 Первой Лиги 6–7.

1.2.3. Третий тур

Первая Лига 6–7

1. На двух чашках весов лежат гирьки так, что весы показывают равновесие. Все эти гирьки разложили иначе по чашкам, но так, что весы вновь показали равновесие. В третий раз на левой чашке поместили только те гирьки, которые оба раза уже были на ней. На правой чашке тоже оставили только те гирьки, которые оба раза уже были на ней. Будет ли на весах вновь равновесие?

В. Произволов

2. Аня познакомилась с Борей раньше, чем с Витей и Гришей. Боря познакомился с Витей раньше, чем с Аней и Гришей. Витя познакомился с Гришей раньше, чем с Борей и с Аней. А с кем раньше познакомился Гриша: с Аней, с Борей или с Витей?

В. Гуровиц

3. Если к году, в котором была придумана эта задача, прибавить сумму цифр, требующихся для записи этого года, получится 2010. В каком году была придумана эта задача?

Фольклор

4. Среди 8 человек имеется один фальшивомонетчик. Каждый знает, кто фальшивомонетчик, но стесняется назвать его. Инспектор Варнике может выделить любую группу среди этих 8 человек, состоящую более чем из одного человека, и задать вопрос: «Имеется ли среди вас фальшивомонетчик?» На этот вопрос все отвечают правду. За какое наименьшее количество вопросов инспектор может гарантированно определить фальшивомонетчика?

А. Жуков

5. Рубик хочет распилить свой кубик на уголки из трёх маленьких кубиков. Сможет ли он это сделать?

Фольклор

6. Вместо матбоя жюри и две команды решили сыграть в следующую игру. В кучке лежит 451 спичка. Ходят по очереди. Команды имеют право брать 1 или 2 спички, а жюри — 1, 2 или 3. При этом команды объединяют свои усилия против жюри, а жюри имеет право выбрать очередь своего хода: первый, второй или третий. Выигрывает тот, кто возьмёт последнюю спичку. Кто победит при правильной игре?

Фольклор

7. В вершинах куба записано по натуральному числу. В середине каждого ребра записана сумма чисел, находящихся на концах этого ребра, а в центре каждой грани — сумма чисел, находящихся в вершинах этой грани. Может ли сумма всех 26 чисел равняться 2005?

Фольклор

8. В очередном забеге по коридору общежития участвуют 44 весёлых таракана. Тараканы стартовали одновременно от одной стены. Добежав до противоположной стены, таракан сразу поворачивает обратно. Первый таракан бежит не очень быстро, второй — вдвое быстрее, третий — вдвое быстрее второго, и так далее. Могут ли тараканы встретиться все вместе в точке, отличной от точки старта?

По мотивам А. Заславского

Высшая Лига 7

1. В треугольнике ABC сторона AB равна 1. Известно, что одна из биссектрис треугольника ABC перпендикулярна одной из его медиан, а некоторая другая биссектриса перпендикулярна другой медиане. Чему может быть равен периметр треугольника ABC?

А. Акопян, Ю. Блинков, Е. Горская

2. В квадрате $ABCD$ отметили 9 точек, не лежащих на диагоналях и отрезках, соединяющих середины противоположных сторон квадрата. Рядом с каждой из них написали номера вершин квадрата в порядке близости к данной точке. Верно ли, что рядом с какими-то двумя точками написано одно и то же?

Д. Калинин

3. Взаимно простые натуральные числа x, y, z удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = z^4$. Докажите, что число xy делится на 8.

В. Сендеров

4. В 100-этажном доме испорчен лифт. Он может либо подниматься при нажатии одной кнопки на 79 этажей вверх, либо при нажатии другой — на 21 этаж вниз. Когда сверху меньше 79 этажей, лифт вверх не пойдёт, аналогично — вниз. Лифт отправляется с первого этажа. Какое наименьшее количество раз надо нажать на кнопки, чтобы лифт вернулся на первый этаж?

А. Спивак

5. В некотором государстве 80 городов. Один из них является столицей. Некоторые пары городов соединены дорогами. Из каждого города выходит либо одна, либо три дороги. Известно, что из каждого города можно попасть по дорогам в столицу ровно одним способом. Назовем город *захолустным*, если из него выходит ровно одна дорога. Для каждого захолустного города подсчитали количество дорог в пути, соединяющем этот город со столицей. Найдите наибольшее возможное значение суммы всех подсчитанных чисел.

А. Скопенков

6. В треугольнике есть сторона, длина которой больше 1. Верно ли, что его можно разрезать на несколько треугольников, в каждом из которых есть сторона длины 1?

А. Шаповалов

7. В противоположных углах шахматной доски записаны числа 1 и 15. Докажите, что можно, и притом единственным образом, расставить в остальные клетки числа так, чтобы каждое из поставленных чисел равнялось полусумме своих наибольшего и наименьшего соседей (клетки называются соседними, если они имеют общую сторону).

В. Гуровиц

8. См. задачу 4 Первой Лиги 6–7.

Первая Лига 8–9

1. Три окружности проходят через точку X. Пусть A, B, C — точки их пересечения, отличные от X; A' — вторая точка пересечения прямой AX и окружности BCX; точки B' и C' определяются аналогично. Докажите, что треугольники ABC', $AB'C$ и $A'BC$ подобны.

А. Заславский

2. В четырёхугольнике $ABCD$ прямые, симметричные диагонали BD относительно биссектрис углов B и D, пересекаются в точке P, расположенной внутри четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что проекции точки P на стороны $ABCD$ являются вершинами равнобедренной трапеции или параллелограмма.

А. Заславский

3. Взаимно простые натуральные числа x, y, z удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = z^4$. Докажите, что число xy делится на 7.

В. Сендеров

4. Докажите, что существуют натуральные числа m, n, для которых
$$\left|\frac{m^2}{n^3} - \sqrt{2005}\right| < \frac{1}{10^9}.$$

В. Берник

5. Алхимик хранит эликсир в четырёх одинаковых сосудах. Можно сливать два сосуда в один (сосуд может вместить весь эликсир), или поставить два сосуда на чашечные весы и лить из третьего в тот, где эликсира меньше, пока весы не уравновесятся (или эликсир в третьем сосуде не кончится). Алхимик помнит, что так можно получить сосуд ровно с одной унцией эликсира (но не помнит, как), и что в каждом сосуде целое число унций эликсира (но не помнит, сколько). Первоначально один из сосудов пуст. Докажите, что можно, попереливав, восстановить исходные количества в каждом сосуде и при этом узнать, где сколько эликсира.

А. Шаповалов

6. В некотором государстве 80 городов. Один из них является столицей. Некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что из каждого города можно попасть по дорогам в столицу ровно одним способом. Назовем город *захолустным*, если из него выходит ровно одна дорога. Для каждого захолустного города подсчитали количество дорог в пути, соединяющем этот город со столицей. Докажите, что сумма всех подсчитанных чисел меньше 2005.

А. Скопенков

7. Улицы города проходят либо с севера на юг, либо с запада на восток. С одного перекрёстка выезжают три велосипедиста: на север, на восток и на юг. Через некоторое время они встречаются на другом перекрёстке, причём каждый въезжает на него в том же направлении, в каком он выехал с первого перекрёстка. Докажите, что один из велосипедистов пересёк траекторию другого.

Б. Френкин

8. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

Высшая Лига 8–9

1. Треугольник вписали в окружность. Через точку пересечения его медиан провели произвольную хорду. Докажите, что сумма квадратов расстояний от её концов до всех вершин треугольника в три раза больше квадрата длины самой хорды.

М. Волчкевич

2. См. задачу 2 Первой Лиги 8–9.

3. См. задачу 3 Первой Лиги 8–9.

4. Имеется 400 положительных чисел, каждое из которых меньше суммы любых восьми других. Докажите, что среди них можно выбрать пять чисел, четвёртая степень каждого из которых меньше суммы четвёртых степеней любых двух других.

И. Акулич

5. См. задачу 5 Первой Лиги 8–9.

6. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

7. См. задачу 7 Первой Лиги 8–9.

8. В двух клетках шахматной доски записаны числа 1 и 13 соответственно (см. рис. 4). Докажите, что можно, и притом единственным образом, расставить в остальные клетки числа так, чтобы каждое число, кроме тех двух, которые были на доске изначально, равнялось полусумме своих наибольшего и наименьшего соседей (клетки называются *соседними*, если они имеют общую сторону).

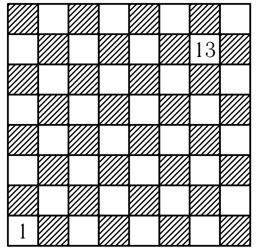


Рис. 4

В. Гуровиц

1.2.4. Четвёртый тур

Высшая Лига 7

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно. Прямая PQ пересекает продолжение стороны AC в точке R. Докажите, что $BQ = AR$.

А. Акопян

2. В равнобедренном треугольнике ABC угол B равен $120°$. На стороне AC отмечена точка M, делящая отрезок AC в отношении $1 : 2$. Найдите угол MBC.

А. Хачатурян

3. Даны числа a и b. Известно, что среди чисел $a+b$, $a-b$, ab и $\frac{a}{b}$ три числа равны, а четвёртое отлично от них. Найдите все возможные значения a и b.

Б. Френкин

4. Двое играют в игру. Первый пишет на доске (если она пуста) или дописывает справа к написанному числу одну из цифр 1, 2 или 3. Второй может приписать в любом месте или вычеркнуть в любом месте числá две одинаковые цифры, стоящие рядом, либо приписать или вычеркнуть два одинаковых стоящих рядом двузначных числа. Вначале доска пуста. Может ли первый добиться того, что на доске появится не менее чем 2005-значное число?

И. Иванов

5. Докажите, что в вершинах любого конечного графа можно расставить натуральные числа так, чтобы наименьшее общее кратное любой пары чисел в вершинах, соединённых ребром, было равно одному и тому же числу, а наименьшее общее кратное чисел в любой паре вершин, не соединённых ребром, от этого числа отличалось.

А. Шаповалов

6. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 10$ все натуральные числа от 1 до n можно разбить на две группы так, что произведение чисел в одной из групп отличалось от произведения чисел в другой группе не более, чем на 3% (проценты берутся от меньшего числа).

И. Акулич

7. Каждая клетка доски 8×8 окрашена в какой-то цвет, при этом в любой строке и любом столбце есть клетки только двух цветов. Какое наибольшее количество различных цветов может быть использовано?

Д. Калинин

8. Пусть $S(n)$ — сумма всех делителей натурального числа n (включая 1 и само число). Для каких n выполняется равенство $S(2n) = 3S(n)$?

А. Блинков

Вариант B

1. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка Q такая, что $\angle ABQ = \angle QDA$. Докажите, что $\angle BQA + \angle CQD = 180°$.

В. Произволов

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно. Вневписанная окружность, касающаяся стороны AB и продолжений сторон BC и AC, касается продолжения стороны AC в точке R. Доказать, что точки P, Q и R лежат на одной прямой.

А. Акопян

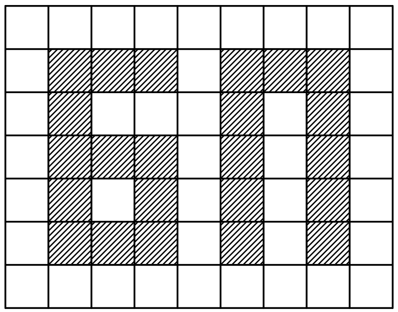


Рис. 5

3. См. задачу 4 Высшей Лиги 7.

4. См. задачу 5 Высшей Лиги 7.

5. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

6. См. задачу 7 Высшей Лиги 7.

7. Когда-то давным-давно при въезде в Берендеевы Поляны стоял щит, изображённый на рис. 5. Постройте прямую так, чтобы она разделила каждую из букв «Б» и «П» на две части равной площади («часть» — то, что лежит по одну сторону от прямой).

Фольклор

8. Положительные числа x, y и z таковы, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Докажите, что

$$\frac{x+y}{x^2+xy+y^2} + \frac{y+z}{y^2+yz+z^2} + \frac{z+x}{z^2+zx+x^2} \leqslant \frac{2}{3}.$$

Д. Калинин

Вариант A

1. См. задачу 1 Варианта B.

2. См. задачу 2 Варианта B.

3. См. задачу 4 Высшей Лиги 7.

4. Двое по очереди красят клетки доски 2005×2005. Клетку нельзя закрашивать, если в её столбце или строке уже есть хотя бы две закрашенные клетки. Кто не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

С. Спиридонов

5. См. задачу 5 Высшей Лиги 7.

6. Докажите, что уравнение $x^2 + y^3 = z^4$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

В. Лецко

7. На плоскости даны 1000 синих и 1000 красных точек. Расстояние между любыми точками разного цвета не превосходит 1. Докажите, что либо все красные, либо все синие точки можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

А. Акопян, В. Дольников

8. Существует ли бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, произведение любых ста членов которой делится на их сумму?

И. Акулич, В. Сендеров

1.3. Личная олимпиада

1.3.1. 6–7 класс

Довывод

1. В магазине продаётся шоколад в виде букв английского алфавита. Одинаковые буквы стоят одинаково, а разные имеют различные цены. Известно, что слово ONE стоит \$6, слово TWO стоит \$9, а слово ELEVEN стоит \$16. Сколько стоит слово TWELVE?

Г. Гальперин

2. Из книжки, состоящей из трёх листов (см. рис. 6), вырежьте лист Мёбиуса. *Листом Мёбиуса* называется полоска с любыми краями, перекрученная один раз (см. рис. 7) и склеенная (см. рис. 8).

Фольклор

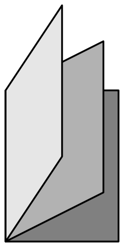


Рис. 6

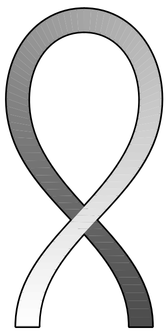


Рис. 7

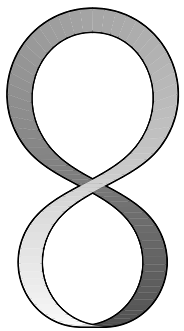


Рис. 8

3. Перед экзаменом Вася вырвал из учебника 20% страниц. Докажите, что если нумерация страниц начиналась с 1, то сумма номеров оставшихся страниц делится на 4.

В. Гуровиц

4. В вершинах треугольника записано по натуральному числу, на каждой стороне — произведение чисел, записанных в её концах, а внутри треугольника — произведение чисел, записанных в его вершинах. Сумма всех семи чисел равна 1000. Какие числа записаны в вершинах треугольника?

А. Шаповалов

Вывод

5. Прямоугольник разрезан на нечётное количество равных частей. Верно ли, что они все являются прямоугольниками?

С. Маркелов

6. В бесконечном городе все кварталы — квадраты одного размера. Велосипедист стартовал с перекрестка. Через полминуты за ним поехал другой велосипедист. Каждый едет с постоянной скоростью 1 квартал в минуту и на каждом перекрестке поворачивает либо направо, либо налево. Могут ли они встретиться?

М. Вельтищев, П. Купцов

7. Углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны 15° и 30°. Какой угол образует с этой стороной проведенная к ней медиана?

М. Волчкевич

1.3.2. 8–9 класс

Довывод

1. Докажите, что если графики двух квадратных трехчленов симметричны относительно прямой, то эта прямая параллельна одной из координатных осей или совпадает с ней.

А. Блинков

2. На арене цирка (не в её центре) стоит тумба, на которой сидит лев. По команде укротителя лев спрыгивает с тумбы и бежит по прямой. Добежав до бортика, он поворачивает на 90°, снова добегает до бортика, поворачивает на 90° и бежит дальше по арене. Докажите, что на арене (но не на тумбе) можно положить кусочек мяса так, что, независимо от первоначального направления движения, лев съест мясо.

М. Панов

3. Таблица 3×3 заполнена нулями. За один ход разрешается увеличить на единицу числа в трёх клетках, образующих уголок любой ориентации. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все числа стали равными и положительными?

Р. Савченко

4. Докажите, что для произвольных положительных чисел a и b выполняется неравенство

$$\sqrt{1-\frac{a^2}{(a+b)^2}}+\sqrt{1-\frac{b^2}{(a+b)^2}} \leqslant \sqrt{3}.$$

В. Сендеров

Вывод

5. 11 лучших футбольных команд Украины сыграли каждая с каждой по одному матчу. При этом оказалось, что каждая команда забила в первом матче 1 гол, во втором матче 2 гола, ..., в десятом матче — 10 голов. Какое наибольшее количество сыгранных матчей могло закончиться вничью?

И. Акулич

6. Внутри треугольника ABC выбрана точка P. Через точку P проведены прямые, параллельные сторонам треугольника, которые пересекают другие стороны в точках X, Y, Z, T, V, W. Докажите, что если эти шесть точек лежат на одной окружности, то её центр лежит на прямой OP, где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

А. Акопян

7. Существует ли арифметическая прогрессия, составленная из 2005 натуральных чисел, ни одно из которых не является квадратом, однако их произведение — квадрат?

В. Сендеров

1.4. Командная олимпиада

В скобках указаны номера классов, для которых предлагалась задача.

1. [7] В равенстве $AX \cdot ЭX = XЭ \cdot XA$ буквы обозначают цифры. Докажите, что $\frac{X}{Э} = \frac{A}{X}$.

А. Жуков

2. [7] На плоскости нарисовали четыре равных треугольника так, что любые два имеют ровно две общих вершины. Верно ли, что все они имеют общую вершину?

В. Гуровиц

3. [7] Матбой начался между 10 и 11 часами, когда часовая и минутная стрелки были направлены в противоположные стороны, а закончился между 16 и 17 часами, когда стрелки совпали. Сколько времени продолжался матбой?

А. Заславский

4. [7] Каждую букву русского алфавита закодировали последовательностью из нулей и единиц (последовательности могут быть разной длины). Используя этот код, Сеня записал слово «СЛОН». Оказалось, что полученная последовательность нулей и единиц расшифровывается однозначно. Какое наименьшее количество цифр могло в ней быть?

А. Акопян

5. [7, 8] На доске записаны числа от 1 до n. Два игрока по очереди вычеркивают какое-нибудь число и все числа, не взаимно простые с ним (если такие существуют). Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Докажите, что найдется $n > 1000$ такое, что выигрышной стратегией обладает первый игрок.

Д. Григоренко

6. [7, 8, 9] Можно ли, используя по одному разу каждую из цифр от 0 до 9, составить число, обладающее следующими свойствами: если вычеркнуть двойку, то оно поделится на 2; если вычеркнуть тройку, то оно поделится на 3; если вычеркнуть четверку, то оно поделится на 4; ... ; если вычеркнуть девятку, то оно поделится на 9?

И. Акулич

7. [7, 8, 9] На клетчатом листе по линиям сетки нарисован многоугольник, который можно разрезать на 30 квадратиков 2×2. Какое наибольшее количество трёхклеточных уголков можно из него гарантированно вырезать?

Т. Караваева

8. [7] Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что $\angle BAD = \angle CDA = 60°$, а также $\angle CAD = \angle CDB$. Докажите, что $AB + CD = AD$.

В. Произволов

9. [8, 9] Положительные числа x и y таковы, что $x+y > 1$. Докажите, что $2(x^2 + y^2) > x + y$.

В. Сендеров

10. [8, 9] Пусть $ABCD$ — трапеция ($AD \parallel BC$), точка E лежит на отрезке BC. На отрезке AD постройте точку X, такую что $YZ \parallel AD$, где Y — точка пересечения AE и BX, а Z — точка пересечения DE и CX.

В. Сендеров

11. [9] У Пети был прямоугольный коврик с целочисленными сторонами, причём длина была кратна ширине. Петя разрезал его на части и сшил их так, что снова получился прямоугольный коврик, причём длина увеличилась на простое число p, а ширина осталась целочисленной. Найдите длину нового коврика.

Т. Караваева

12. [8] Треугольными называются числа, представимые в виде $\frac{n(n+1)}{2}$, где n — натуральное. Существуют ли треугольные числа, большие чем 10^{100}, сумма которых также является треугольным числом?

В. Произволов, В. Сендеров

13. [9] Треугольными называются числа, представимые в виде $\frac{n(n+1)}{2}$, где n — натуральное. Существуют ли два треугольных числа, больших чем 10^{100}, сумма которых также является треугольным числом?

В. Произволов, В. Сендеров

14. [8, 9] Выписано несколько n-значных чисел, в записи которых используются только цифры 1 и 2, причём любые два числа отличаются по крайней мере в 51% разрядов. Докажите, что выписано не более пятидесяти одного числа.

А. Шень

15. [8, 9] Отрезок CH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая к гипотенузе AB. Точки O_1, O_2 и O — центры вписанных окружностей треугольников ACH, BCH и ABC соответственно. Докажите, что отрезки CO и O_1O_2 равны и перпендикулярны.

А. Хачатурян

1.5. Математическая карусель

1.5.1. Исходный рубеж

1. У каждого из троих ребят есть старинные монеты. У первого и второго вместе на 6 монет больше, чем у второго и третьего. Сколько монет у первого мальчика, если у всех троих всего 11 монет?

2. Полный бидон молока стоит 29 рублей, а бидон, заполненный молоком наполовину, стоит 18 руб 50 коп. Сколько стоит пустой бидон?

3. Разделите фигуру (см. рис. 9) по линиям сетки на четыре равные части, чтобы в каждой части была ровно одна закрашенная клетка.

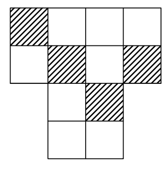


Рис. 9

4. У скольких пятизначных чисел все цифры чётные?

5. Хоккейная команда провела три матча, забив в ворота противника всего 3 шайбы и пропустив одну шайбу. Один из матчей она выиграла, другой свела вничью, а третий проиграла. С каким счетом закончился каждый матч?

6. Сестёр у Вити на две больше, чем братьев. На сколько в этой семье девочек больше, чем мальчиков?

7. Сколько существует трёхзначных чисел, делящихся на 17 без остатка?

8. В полдень по местному времени из города A в город B вылетел самолёт, совершил там посадку в 17 часов местного времени и отправился обратно в 21 час местного времени. Самолёт вернулся в город A в 10 утра местного времени города A. Сколько часов длится перелёт самолёта между городами?

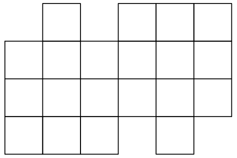


Рис. 10

9. Разрежьте на 4 равные части фигуру, изображённую на рис. 10.

10. Приведите один пример, как можно заменить звездочки знаками действий (умножения, деления, сложения или вычитания) и расставить скобки, чтобы равенство было верным:

$$1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 100.$$

11. Сумма двух чисел равна 2005. Частное от деления большего числа на меньшее равно 6. А чему равен остаток?

12. Решите ребус: $** + *** = ****$, если каждое число — палиндром (то есть читается одинаково справа налево и слева направо).

1.5.2. Зачётный рубеж

1. Два пакета молока и пачка творога стоят 26 руб. Две пачки творога и пакет молока стоят 26 руб 80 коп. Сколько стоит пакет молока?

2. В классе 20 человек. Каждый из них ходит в кружок по математике или в кружок по вышиванию, а 7 человек посещают и тот, и другой кружок. В кружок по математике ходит в 2 раза меньше школьников этого класса, чем в кружок по вышиванию. Сколько ребят этого класса ходят в кружок по математике?

3. В написанном на доске примере на умножение хулиган изменил две цифры. Получилось $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247$. Восстановите исходный пример.

4. Четверо купцов заметили, что если они сложатся без первого, то соберут 90 сольдо, без второго — 85, без третьего — 80, без четвертого — 75 сольдо. Сколько у кого денег?

5. Сто игроков играли в теннис. Проигравший игру обижался и уходил. Какое наибольшее число теннисистов могло выиграть по две партии?

6. В семейном ансамбле «Ласковый Лай» участвуют Тит Фомич, Фома Титович, Фома Фролович, Фрол Фомич и Фрол Фролович Собакины.

Один из них поёт, его отец играет на шарманке, брат держит в руках микрофон, а дети бьют в барабан. Как зовут певца?

7. Сколькими способами можно заменить в числе $**253*$ звёздочки цифрами, чтобы полученное число делилось на 72?

8. Написали два числа — первое и второе. К первому прибавили второе и получили третье. Ко второму прибавили третье и получили четвёртое, и так далее. Чему равна сумма шести выписанных чисел, если пятое равно 7?

9. Разделите фигуру по линиям сетки на четыре равные части, чтобы в каждой части была ровно одна закрашенная клетка (см. рис. 11).

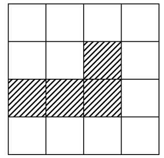


Рис. 11

10. Коля коллекционирует автобусные билетики с номерами от 000 000 до 999 999, у которых сумма цифр номера четна. Два билета с одним и тем же номером Коле не нужны. Сколько билетов будет в полной коллекции Коли? (Здесь билет с номером 000 000 существует!)

11. Представьте число 2004 в виде суммы нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел.

12. К занумерованным от 1 до 6 граням кубика приставили ещё 6 кубиков такой же величины так, чтобы грани с одинаковыми номерами совместились. Какова может быть сумма открытых цифр на гранях получившейся фигуры?

13. Одну из сторон прямоугольника увеличили на 99 *см*, а другую уменьшили на 1 *см*. Как может измениться площадь прямоугольника: увеличиться, уменьшиться или остаться неизменной?

14. Коля и Витя, гуляя по парку, набрели на круглую поляну, обсаженную дубами. Коля пошел вокруг поляны, считая деревья. Витя сделал то же, но начал с другого дерева. Дерево, которое было у Коли под номером 31, у Вити было 13-е, а 13-е — под номером 35. Сколько дубов росло вокруг поляны?

15. В первой строке записали число 1. Во второй — 2, 3. В третьей — 3, 4, 5, и так далее: в n-ой строке записано n подряд идущих натуральных чисел, начиная с n. Сколько раз будет выписано число 2005?

16. Разрежьте на 4 равные части фигуру, изображенную на рис. 12.

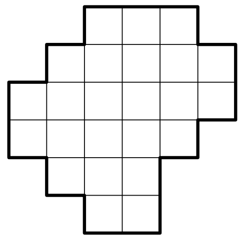


Рис. 12

17. У Пети 28 одноклассников. У них различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?

18. Лыжник рассчитал, что если он будет проходить в час 10 *км*, то прибудет на турбазу на час позже срока, а если будет бежать со скоростью

15 *км/ч*, то прибудет на час раньше срока. С какой скоростью ему надо бежать, чтобы прибыть точно в срок?

19. Сколько существует трёхзначных чисел, которые при любой перестановке цифр делятся на 6?

20. Имеется 30 брёвен, длины 3 и 4 метра, суммарная длина которых равна 100 метров. Сколько распилов нужно сделать, чтобы распилить брёвна на куски длины 1 метр? (Каждым распилом пилится ровно одно бревно.)

2. Решения задач

2.1. Математическая регата

2.1.1. 6–7 классы

Первый тур

1.1. Ответ: 10 или 52.

Первое решение. Если бы в каждом пакете было по 3 яблока, то всего яблок было бы 60, но на самом деле яблок на 49 больше. Значит, «лишние» яблоки надо распределить поровну по некоторым пакетам. Так как $49 = 7 \cdot 7 = 49 \cdot 1$ и всего пакетов — 20, то либо в 7 пакетах содержится по 7 «лишних» яблок, либо в одном пакете 49 «лишних» яблок. В первом случае $x = 10$, а во втором случае $x = 52$.

Второе решение. Пусть есть n пакетов, в которых лежит по 3 яблока. Тогда количество пакетов, в которых находится по x яблок, равно $20 - n$. Из условия следует, что $3n + x(20 - n) = 109$. Преобразуем полученное уравнение так, чтобы его левую часть можно было разложить на множители: $20x + 3n - nx - 60 = 49 \Leftrightarrow 20(x - 3) - n(x - 3) = 49 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - 3)(20 - n) = 49$. Отсюда получим, что

$$\begin{cases} x = 10, \\ n = 13 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 52, \\ n = 19. \end{cases}$$

1.2. Решение. Можно изобразить три квадрата, удовлетворяющих условию (см. рис. 13 и 14).

Комментарий. Можно доказать, что более трёх квадратов изобразить нельзя, и что никаких других способов расположения трёх квадратов не существует, однако в задаче это не требуется.

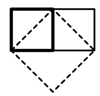


Рис. 13

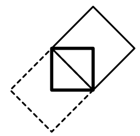


Рис. 14

1.3. Ответ: 6 человек.

Решение. Заметим, что если кто-то из присутствующих солгал, то и все предыдущие солгали. Такие в комнате есть, иначе первый сказал правду, а по его словам, честных в комнате нет. По аналогичной причине в комнате обязательно есть и честные.

Пусть в комнате x лжецов. Последний лжец сказал, что в комнате не более $(x - 1)$ честного. Значит, на самом деле в комнате не менее x честных. Далее, $(x + 1)$-й человек уже сказал правду про то, что в комнате не более x честных. Значит, количество честных в точности равно x, то есть количеству лжецов. Следовательно, в комнате 6 честных человек.

Второй тур

2.1. Ответ: 1760 метров.

Первое решение. Суммарное расстояние, пройденное паромами к моменту первой встречи, равно ширине реки, а к моменту второй встречи равно утроенной ширине реки. Так как скорости паромов постоянны, то до второй встречи каждый из них пройдёт втрое большее расстояние, чем до первой встречи. Так как один из паромов до первой встречи прошёл 720 метров, то до второй встречи он прошёл расстояние $720 \cdot 3 = 2160$ метров. При этом он прошёл путь, равный ширине реки, и ещё 400 метров. Следовательно, ширина реки равна $2160 - 400 = 1760$ метров.

Второе решение. Пусть ширина реки равна S метров, а скорости паромов равны x и y. Тогда по условию задачи можно составить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{720}{x} = \frac{S-720}{y}, \\ \frac{S+400}{x} = \frac{2S-400}{y}. \end{cases}$$

Разделим одно уравнение системы на другое, и после преобразований получаем $S^2 = 1760S$, откуда $S = 1760$ (корень $S = 0$ — посторонний по смыслу задачи).

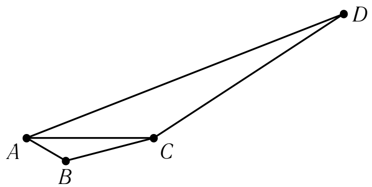


Рис. 15

2.2. Ответ: 2,8.

Решение. Пусть измерены стороны четырёхугольника $ABCD$ и диагональ AC (см. рис. 15). Так как AC — общая сторона двух треугольников, то $AC \neq 7{,}5$ (оставшиеся числа не могут быть длинами сторон двух треугольников в силу неравенства треугольника). Следовательно, длину 7,5 имеет одна из сторон, например, AD. Тогда в треугольнике ADC длины остальных сторон равны 5 и 2,8 (иначе не будет выполняться неравенство треугольника). Случай $AC = 5$ невозможен, потому что стороны треугольника ABC не могут иметь длины 1, 2 и 5. Значит, $AC = 2{,}8$, а $CD = 5$. Оставшиеся стороны AB и BC имеют длины 1 и 2 (в любом порядке).

2.3. Ответ: нет, не может.

Решение. Воспользуемся тем, что остатки от деления на 9 любого натурального числа и его суммы цифр равны. Если этот остаток отличен от нуля, то и после прибавления к числу суммы его цифр остаток будет отличен от нуля. Так как последовательность чисел, появляющихся на экране, начинается с числа 1, в ней никогда не встретится число, кратное 9. Но сумма цифр числа 123456789 равна 45, поэтому это число делится на 9.

Третий тур

3.1. Ответ: 200 метров.

Решение. Так как первоначальная скорость движения колонны равна 1000 *м/мин*, то «хвост» колонны окажется у поста ДПС через 0,3 минуты после того, как мимо ДПС проедет «голова» колонны. За это время голова успеет проехать $\frac{40}{60}$ *км/мин* $\cdot\, 0{,}3$ *мин* $= 0{,}2$ *км* $= 200$ *м*.

3.2. Ответ: 4.

Решение. Отложим на стороне AB отрезок BD, равный BC. Тогда треугольник BCD — равнобедренный с углом при вершине $20°$, поэтому углы при основании равны $80°$ (см. рис. 16). Пусть CE — биссектриса треугольника ABC. Из условия следует, что $\angle ACE = 60°$, поэтому $\angle AEC = 180° - (40° + 60°) = 80°$. Таким образом, в треугольнике DEC равны два угла, поэтому он равнобедренный. Тогда угол при его вершине C равен $20°$, поэтому $\angle ACD = 60° - 20° = 40°$. Значит, треугольник ACD также равнобедренный, следовательно, $CE = CD = AD = AB - BC = 4$.

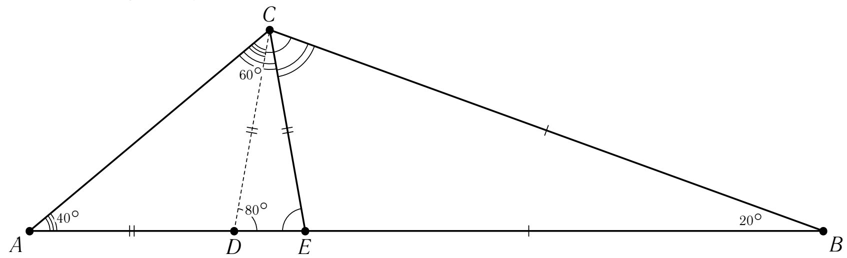


Рис. 16

3.3. Ответ: да, можно. Например, фишки можно расположить так, как показано на рис. 17.

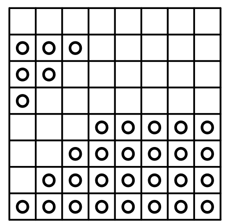


Рис. 17

Комментарий. Поиск искомого расположения облегчается следующим рассуждением. Количество фишек на горизонтали может быть любым целым числом от 0 до 8. Сумма всех этих чисел, взятых по одному разу, равна 36. Если в любых двух горизонталях разное количество фишек, то отсутствует ровно одно из этих девяти чисел. Так как при этом во всех восьми вертикалях поровну фишек, то сумма оставшихся фишек должна быть кратна 8. Следовательно, не должно быть горизонтали, в которой 4 фишки, потому что $36 - 4 = 32 \vdots 8$.

Четвёртый тур

4.1. Решение. Пусть

$$S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{2004}{2005!}.$$

Тогда

$$S + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{2004!} + \frac{1}{2005!} = \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \ldots + \frac{2005}{2005!} = \\ = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{2004!},$$

откуда находим, что

$$S + \frac{1}{2005!} = 1.$$

Поэтому $S = 1 - \frac{1}{2005!} < 1$, что и требовалось доказать.

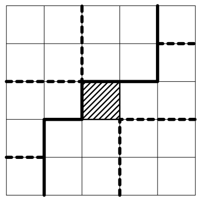


Рис. 18

4.2. Первое решение. Разрежем фигуру так, как показано на рис. 18. Жирными линиями показаны линии разреза, пунктиром — линии сгиба.

Сложим по линиям сгиба правую фигуру. Составим из неё нижнюю грань, левую грань, три клетки задней грани и одну клетку верхней грани куба. Остались передняя грань, правая грань, три клетки верхней грани и одна клетка задней грани — их мы составим из левой фигуры.

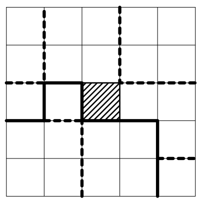


Рис. 19

Второе решение. Разрежем фигуру так, как показано на рис. 19. Из верхней фигуры мы можем составить нижнюю грань, переднюю грань, правую грань и три клетки левой грани куба. Остались верхняя и задняя грани, а также одна клетка левой грани — их мы составим из нижней фигуры.

4.3. Ответ: овражных чисел больше.

Решение. Заметим, что если x — хребтовое число, то число $999 - x$ является овражным, и наоборот. При этом первая цифра любого хребтового числа меньше девяти, поэтому соответствующее ему овражное число также трёхзначное. Поэтому овражных чисел не меньше, чем хребтовых.

Однако для овражного числа x, начинающегося с 9 (например, для числа 912), число $999 - x$ не является трёхзначным, поэтому овражных чисел больше.

2.1.2. 8–9 классы

Первый тур

1.1. Ответ: да, например, $n = 12$.

Решение. Воспользуемся формулой квадрата суммы. Подберём число n так, чтобы 2^8 было квадратом первого числа, 2^{11} — удвоенным произведением первого числа на второе, а 2^n — квадратом второго числа. Так как $2^8 = (2^4)^2$, а $2^{11} = 2 \cdot 2^4 \cdot 2^6$, то $n = 2 \cdot 6 = 12$. Тогда

$$2^8 + 2^{11} + 2^{12} = \left(2^4\right)^2 + 2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 + \left(2^6\right)^2 = \left(2^4 + 2^6\right)^2 = 80^2.$$

1.2. Ответ: да, верно.

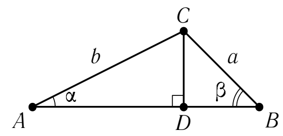


Рис. 20

Обозначим $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$. Пусть также $a = BC$ и $b = AC$.

Первое решение. Из условия следует, что косинусы углов α и β имеют одинаковый знак, поэтому эти углы острые. Проведём в данном треугольнике высоту CD (см. рис. 20). Тогда $BD = a\cos\beta = b\cos\alpha = AD$. Следовательно, CD — медиана треугольника ABC, то есть $AC = BC$.

Второе решение. Из условия следует, что $\frac{\cos^2\alpha}{a^2} = \frac{\cos^2\beta}{b^2}$, а из теоремы синусов — что $\frac{\sin^2\alpha}{a^2} = \frac{\sin^2\beta}{b^2}$. Сложим эти два уравнения и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Получим, что $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2}$, откуда $a = b$, так как $a, b > 0$.

1.3. Ответ: нет, не может.

Первое решение. Воспользуемся признаком делимости на 11: число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность суммы цифр, стоящих на чётных местах, и суммы цифр, стоящих на нечётных местах, делится на 11. В данном случае эта разность равна 0, поэтому данное число делится на 11 и не является простым.

Второе решение. Докажем, что данное число делится на 11, не используя признак делимости. Пусть наше число имеет вид

$$S = \overline{a_0 a_1 \ldots a_{48} a_{49} a_{49} a_{48} \ldots a_1 a_0}.$$

Тогда его можно записать в виде суммы

$$S = a_0(10^{99} + 1) + a_1(10^{98} + 1) + \ldots + a_{49}(10^{50} + 10^{49}) = \\ = \sum_{n=0}^{49} a_n(10^{99-n} + 10^n) = \sum_{n=0}^{49} a_n \cdot 10^n \cdot (10^{99-2n} + 1).$$

По теореме Безу при любом нечётном k число $x^k + 1$ делится на $x + 1$, откуда следует, что каждое слагаемое делится на 11. Следовательно, и вся сумма делится на 11, а значит, число S не является простым.

Второй тур

2.1. См. задачу 3.1 Математической регаты 6–7 классов.

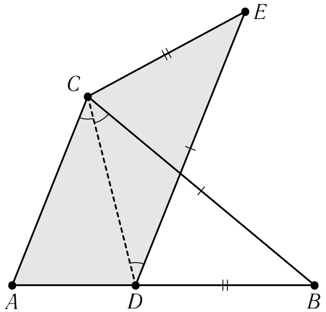


Рис. 21

2.2. Ответ: в обоих случаях — можно.

Решение.

а) Разрежем данный треугольник ABC по одной из биссектрис, например, по биссектрисе CD (см. рис. 21). Получим два треугольника ACD и BCD. Отразим треугольник BCD симметрично относительно серединного перпендикуляра к проведённой биссектрисе и получим треугольник ECD. Так как $\angle ACD = \angle CDE$, то $AC \parallel DE$, то есть $ACED$ — трапеция с основаниями AC и DE $(= BC)$.

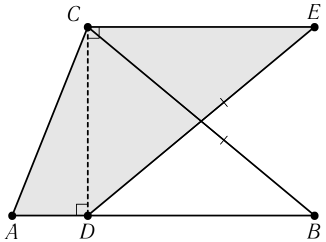


Рис. 22

б) Разрежем данный треугольник ABC по высоте, лежащей внутри треугольника (хотя бы одна такая высота найдётся, например, CD, см. рис. 22). Получим два треугольника ACD и BCD. Отразим треугольник BCD симметрично относительно серединного перпендикуляра к проведённой высоте и получим треугольник ECD. Так как $\angle ADC = \angle DCE = 90°$, то $AD \parallel CE$, то есть $ACED$ — трапеция с боковыми сторонами AC и DE $(= BC)$.

Отметим, что поскольку данный треугольник не является равнобедренным, то в обоих случаях получается трапеция, а не параллелограмм.

2.3. Ответ: для всех k, таких что $n \leqslant k \leqslant 2n$.

Решение. Очевидно, что наиболее экономный способ — расставить светильники по всем углам, тогда их будет ровно n; а наименее экономный — поставить по два светильника к каждой стенке, не занимая углы, тогда их будет ровно $2n$.

Для всех k, таких что $n < k < 2n$, указанная расстановка также возможна. Действительно, можно расставить по одному светильнику в $2n - k$ последовательных вершинах многоугольника, а около остальных $k - n$ вершин (но не в них) поставить по одному светильнику с каждой стороны. Тогда всего будет $(2n - k) \cdot 1 + (k - n) \cdot 2 = k$ светильников, и у каждой стенки будет стоять ровно два светильника.

Третий тур

3.1. См. задачу 4.1 Математической регаты 6–7.

3.2. Ответ: две, одна или ни одной.

Решение. Легко привести пример многоугольника, у которого нет ни одной стороны, равной наибольшей диагонали — достаточно взять любой правильный многоугольник.

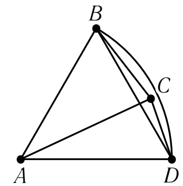


Рис. 23

Также несложно привести пример многоугольника, в котором одна или две стороны равны наибольшей диагонали. Рассмотрим, например, дугу BD величиной в 60° с центром в точке A (см. рис. 23). Выберем точку C между этой дугой и хордой BD, тогда BD — бóльшая диагональ четырёхугольника $ABCD$ и $AB = AD = BD$. Если немного уменьшить сторону AD, оставив треугольник ABD равнобедренным, то BD — бóльшая диагональ и $AB = BD$.

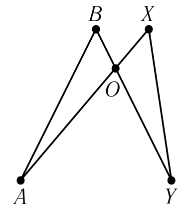


Рис. 24

Докажем, что сторон, равных наибольшей диагонали многоугольника, не может быть больше двух. Предположим, что их хотя бы три, тогда среди них найдутся две стороны, не имеющие общих точек, которые обозначим AB и XY. Четырёхугольник $ABXY$ выпуклый, поэтому его диагонали AX и BY, являющиеся также и диагоналями многоугольника, пересекаются в точке O (см. рис. 24). Применяя неравенство треугольника для треугольников AOB и XOY, получим:

$$\begin{cases} AO + OB > AB, \\ XO + OY > XY. \end{cases}$$

Сложим эти два неравенства, получим $AX + BY > AB + XY$. Следовательно, по крайней мере одна из диагоналей AX или BY больше, чем наибольшая диагональ многоугольника.

Полученное противоречие доказывает, что сторон, равных наибольшей диагонали, не более двух, причём они могут быть только соседними!

3.3. Ответ: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.

Решение. Поскольку уравнение симметрично относительно x, y, z, можно считать, что $x \leqslant y \leqslant z$, а остальные тройки получаются всевозможными перестановками чисел x, y, z. Тогда $3xy + 3yz + 3zx \leqslant 9yz$, а $5xyz + 3 > 5xyz$. Следовательно, $5xyz < 9yz$, откуда $x = 1$. Исходное равенство принимает вид: $3y + 3z = 2yz + 3$. Так как $3y + 3z \leqslant 6z$, а $2yz + 3 > 2yz$, то $2yz < 6z$, откуда следует, что $y < 3$. Если $y = 1$, то из равенства $3y + 3z = 2yz + 3$ следует, что $z = 0$, что невозможно. Остаётся единственная возможность $y = 2$, тогда из равенства $3y + 3z = 2yz + 3$ получаем, что $z = 3$.

Четвёртый тур

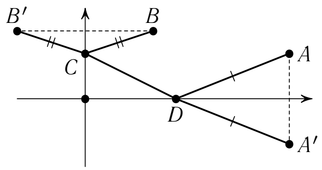


Рис. 25

4.1. Ответ: 13.

Решение. Введём на плоскости систему координат и рассмотрим точки $A(9,2)$, $B(3,3)$, $C(0,y)$, $D(x,0)$. Тогда $L(x,y) = AD + DC + CB$ (см. рис. 25). Таким образом, данное выражение принимает наименьшее значение тогда и только тогда, когда длина ломаной $ADCB$, концы которой фиксированы, а точки D и C находятся на указанных осях координат, будет наименьшей.

Рассмотрим точку $A'(9,-2)$, симметричную точке A относительно оси абсцисс, и точку $B'(-3,3)$, симметричную точке B относительно оси ординат. Получим, что $AD + DC + CB = A'D + DC + CB'$, поэтому наименьшее значение такой суммы равно длине отрезка $A'B'$. Оно достигается, если точки C и D лежат на этом отрезке. Осталось вычислить длину отрезка $A'B'$:

$$A'B' = \sqrt{(-9-3)^2 + (-2-3)^2} = 13.$$

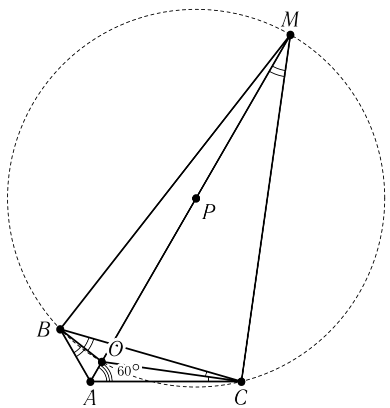


Рис. 26

4.2. Ответ: $OM = 6$.

Решение. Пусть $\alpha = \frac{1}{2}\angle CBA$, $\beta = \frac{1}{2}\angle BCA$ (см. рис. 26). Так как $\angle BAC = 120°$, то $\alpha + \beta = 30°$, $\angle BOC = 150°$. По свойству вписанных углов, $\angle AMC = \angle OBC = \alpha$. Запишем выражение для суммы углов треугольника AMC: $60° + \alpha + 2\beta + \angle BCM = 180°$. Отсюда с учётом равенства $\alpha + \beta = 30°$ получим $\beta + \angle BCM = 90°$, то есть $\angle OCM = 90°$. Следовательно, OM — диаметр окружности.

По следствию из теоремы синусов для треугольника BOC, получаем $OM = 2R = \frac{BC}{\sin\angle BOC} = \frac{3}{\sin 150°} = 6$.

4.3. Ответ: чётных отрезков больше.

Решение. Рассмотрим прямую, на которой лежит не менее двух точек. Докажем по индукции, что на этой прямой чётных отрезков больше,

чем нечётных. Если точек две, то единственный отрезок является чётным. Пусть для k точек утверждение верно. Добавим к ним ещё одну точку так, чтобы остальные точки лежали по одну сторону от неё. Тогда образуется k новых отрезков. Если k чётно, то половина из них чётные, а другая половина — нечётные. Если k нечётно, то чётных отрезков образуется на один больше, чем нечётных. Видим, что в обоих случаях чётных отрезков добавляется не меньше, чем нечётных. Следовательно, утверждение верно для $k + 1$ точки.

Доказанное утверждение верно для каждой прямой, содержащей хотя бы две отмеченные точки, из чего и следует утверждение задачи.

2.2. Математические бои

2.2.1. Первый тур

Первая Лига 6–7

1. Ответ: да, могло, например, если Гриша нашёл числа 22 и 10.

2. Ответ: выигрывает Снегурочка.

Решение. У Снегурочки есть выигрышная стратегия. Первым ходом она стирает четыре буквы «Е». Остальные буквы расположим так:

БРДВЫЫ|ННПОЛЯ

На каждый ход Берендея Снегурочка стирает буквы, расположенные в этой схеме симметрично.

3. Ответ: две ладьи.

Решение. Если поставить только одну ладью, то доску заполнить не удастся (ведь по условию нужно, чтобы под боем находилось не менее двух ладей). Покажем, что двух ладей достаточно. Поставим их в противоположные углы шахматной доски. После этого можно поставить по ладье в оставшиеся углы, далее заполнить все клетки по краю доски, а потом и всю остальную доску.

4. Решение. На пятом острове аисты не могли съесть больше чем по одной лягушке, так как в противном случае каждый аист съел не меньше двух, а, значит, всего было съедено не меньше 60 лягушек.

Так как каждый аист съел хотя бы по одной лягушке, посчитаем их трапезы за вычетом одной лягушки. Тогда на пятом острове аисты не съели ничего, на четвёртом съели хотя бы по одной, на третьем — хотя бы по две, на втором — хотя бы по три, и на первом — хотя бы по четыре лягушки. Всего было съедено 12 лягушек.

Пусть на пятом острове завтракали 26 аистов. Остальные четверо завтракали по одному на каждом острове, на их долю приходится 12 лягушек, и каждый съел разное количество. Легко проверить, что $12 = 1 + 2 + 3 + 6$ и $12 = 1 + 2 + 4 + 5$, а других вариантов нет.

Пусть на пятом острове завтракали 25 аистов. Оставшиеся пятеро съели 12 лягушек, причём только двое из них съели по одинаковому количеству лягушек. Несложный перебор показывает, что $12 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5$ и $12 = 1 + 2 + 2 + 3 + 4$, а других вариантов нет.

Пусть на пятом острове завтракали 24 аиста. Поделим 12 лягушек между оставшимися шестью. Пусть каждый съел минимально возможное количество, тогда $12 = 1+1+1+2+3+4$. Если увеличить трапезу хотя бы одному из аистов, получится больше двенадцати, поэтому приведённый вариант — единственный.

Меньше 24 аистов на пятом острове быть не может, так как даже если семь аистов на четырёх первых островах съедят минимально возможное количество лягушек, получится $1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 13$, а у нас есть только 12 лягушек. Тем более не может быть на первых четырёх островах больше семи аистов.

Таким образом, все возможные случаи разобраны. Добавим каждому аисту по одной неучтённой лягушке и получим ответ: в первом случае либо $26 + 2 + 3 + 4 + 7$, либо $26 + 2 + 3 + 5 + 6$; во втором случае либо $25 + 2 \cdot 2 + 3 + 4 + 6$, либо $25 + 2 + 2 \cdot 3 + 4 + 5$; в третьем случае — $24 + 3 \cdot 2 + 3 + 4 + 5$.

5. Ответ: 1 *ч* 36 *мин*.

Решение. Пусть свечи горели x часов. Тогда сгорело $\frac{x}{4}$ толстой свечи и $\frac{x}{2}$ тонкой. Так как огарок толстой свечи в три раза длиннее тонкой, можно составить уравнение $1 - \frac{x}{4} = 3 \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)$. Решив его, получим $x = 1{,}6$.

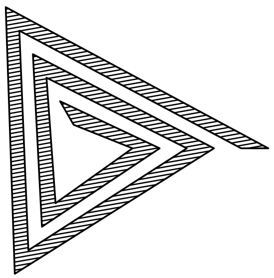


Рис. 27

6. Ответ: нет, нельзя.

Решение. Остров может иметь форму невыпуклого многоугольника, например, такую, как показано на рис. 27.

Комментарий. Аналогичным образом можно построить многоугольник с любым количеством острых углов, идущих подряд.

7. Ответ: 3725.

Решение. Разобьём числа на пары, дающие в сумме 100. Получим 49 пар и отдельное число 50. Из каждой пары может быть выбрано только одно число, поэтому число 50 обязательно присутствует. Значит, число $49 = 99 - 50$ не может быть выбрано, поэтому выбрано парное

ему число 51. Значит, отсутствует число 48, следовательно, присутствует парное ему число 52. Аналогично, не может быть выбрано 47, поэтому выбрано 53. Продолжая рассуждения, получаем, что выбраны числа: $50, 51, 52, 53, \ldots, 99$. Их сумма равна 3725.

8. Ответ: нет, не удастся.

Решение. Имеем $\overline{МЯУМЯУ} = \overline{МЯУ} \cdot 1000 + \overline{МЯУ} = 1001 \cdot \overline{МЯУ}$. Так как $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, то есть не содержит квадратов, то a^2 должно делиться на 1001^2. Но это невозможно, поскольку

$$1001^2 > 1000000 > \overline{МЯУМЯУ}.$$

Высшая Лига 7

1. Ответ: Да, могло. Например, Гриша мог получить числа $22, 10, \ldots, 10$.

2. Ответ: 10 ладей.

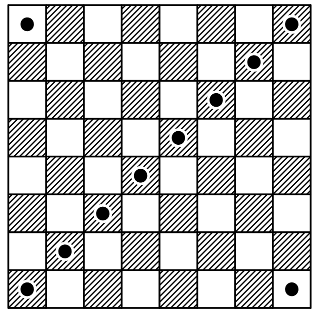


Рис. 28

Решение. Расставим 10 ладей следующим образом: 4 ладьи по углам и 6 ладей на одной из диагоналей (см. рис. 28). Легко видеть, что при такой расстановке можно сначала заполнить ладьями все граничные клетки доски, а потом заполнить все остальные клетки. Покажем, что меньшим количеством ладей обойтись нельзя. В самом деле, в углах доски ладьи обязаны стоять, поскольку ладья, стоящая в углу, угрожает не более чем двум ладьям. Осталось 6 пустых вертикалей и горизонталей. Если на какой-нибудь горизонтали не будет ни одной ладьи, то на эту горизонталь нельзя поставить ни одной ладьи. Значит, на каждой вертикали и каждой горизонтали должна быть хотя бы одна ладья.

3. Ответ: $x = 88$.

Решение. Полный квадрат с двумя или более одинаковыми последними цифрами может оканчиваться только на 44 или 00 (подробное доказательство этого факта приведено в решении задачи 3 Высшей Лиги 8–9). Таким образом, $z = 4$, поэтому

$$x^2 = \underbrace{1\ldots1}_{n} \cdot (10^n \cdot y + 4).$$

Пусть $n \geqslant 4$. Разделим полученное равенство на 4:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \underbrace{1\ldots1}_{n} \cdot (25 \cdot 10^{n-2} \cdot y + 1).$$

Теперь возьмём остаток по модулю 4. Получим

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 \equiv 3\cdot 1 \pmod 4.$$

Таким образом, квадрат целого числа имеет остаток 3 при делении на 4. Но это невозможно, поэтому при $n \geqslant 4$ решений нет.

Рассмотрим случай $n = 3$. Тогда $x^2 = 111\cdot(1000y+4)$. Поскольку $111 = 3\cdot 37$, а слева стоит полный квадрат, необходимо, чтобы число $1000y+4$ делилось на 111. Но отсюда следует, что $(y+4)\,\vdots\,111$, а это невозможно, поскольку y — цифра. Итак, в этом случае также нет решений.

Разберём случай $n = 2$. Тогда $x^2 = 11\cdot(100y+4)$, поэтому $(y+4)\,\vdots\,11$, откуда $y = 7$. Получаем уравнение $x^2 = 7744$, откуда $x = 88$.

4. Решение. Сумма чисел $(m_1-1), (m_2-2), \ldots, (m_{100}-100)$ равна нулю. Поэтому сумма модулей положительных чисел из этого набора равна сумме модулей отрицательных чисел. Положив гирьки, соответствующие этим двум наборам чисел, на разные чашки весов, получим равновесие.

5. См. задачу 2 Первой Лиги 6–7.

6. Ответ: на гирлянде из 97 лампочек можно зажечь 95 лампочек.

Решение. Мы решим эту задачу в общем случае, для гирлянды из n лампочек. Нам будет удобно нумеровать лампочки с нуля: $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Будем двигаться вправо от нулевой лампочки по связанным с ней. Мы отметим лампочки с номерами, кратными 12: $0, 12, 24, \ldots$ Зафиксируем момент, когда мы впервые попадём снова в лампочку с номером 0. Выясним, сколько шагов нам на это потребуется. С одной стороны, мы идём шагами длиной 12, с другой стороны, мы сделали целое число оборотов по n. Ясно, что первый раз это случится, когда мы пройдём расстояние НОК$(12, n)$. При этом будет отмечено $m = \frac{\text{НОК}(12,n)}{12}$ лампочек. Поскольку

$$\text{НОК}(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a, b)},$$

получаем, что

$$m = \frac{12n}{\text{НОД}(12, n)\cdot 12} = \frac{n}{\text{НОД}(12, n)}.$$

Если в гирлянде остались неотмеченные лампочки, то берём любую из них и аналогично станем получать другую цепочку, то есть пойдём шагами длиной в 12 лампочек, пока опять не придём в точку старта. Понятно, что эта цепочка не пересечётся с первой и что в ней тоже

будет m лампочек. Продолжим процесс разделения на цепочки, пока все лампочки не будут исчерпаны. Всего цепочек будет, очевидно, $\frac{n}{m} = \text{НОД}(12, n)$.

Зачем нам такое разделение на цепочки? Дело в том, что лампочки в разных цепочках никак не могут повлиять друг на друга. А в одной цепочке связанные лампочки становятся как бы соседними. Применим результат аналогичной задачи 6 Первой Лиги 8–9. Получим, что в каждой цепочке длины m можно зажечь $m-2$ лампочки. Значит, во всей гирлянде мы не сможем зажечь $n - \text{НОД}(12, n)\cdot 2$ лампочки.

Осталось применить эту формулу. При $n = 100, 99, 98$ потери слишком велики, а при $n = 97$ цепочка всего одна, поэтому мы потеряем всего 2 лампочки. Итак, нужно купить гирлянду из 97 лампочек.

7. Ответ: можно.

Решение. Пусть a, b, c — длины сторон нашего треугольника. Если $a = c$, то разбиение показано на рис. 29, где отмечены AB и BC, а точка D выбрана произвольно внутри отрезка AC. Если же $a > c$, то разбиение показано на рис. 30, где отмечены AB и CD.

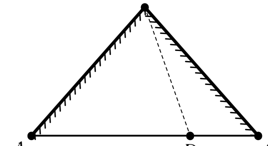


Рис. 29

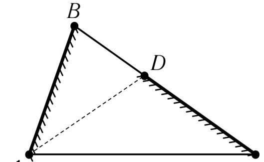


Рис. 30

8. Решение. Углы ABK и CBL равны как соответствующие углы в равных треугольниках, поэтому $\angle KLB = \angle ABC = 60^\circ$ (см. рис. 31). Поскольку $BK = BL$, треугольник BKL равносторонний. Из условия следует, что треугольник AKM равносторонний, поэтому $\angle AKM = 60^\circ$. Из равенства треугольников ABK и MBK следует равенство углов AKB и MKB, а потому каждый из них равен 150°. Следовательно, $\angle MKL = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$. Поскольку $\angle AMK = 60^\circ$ и $\angle KLB = 60^\circ$, аналогично получаем, что $\angle CMK = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$ и $\angle KLC = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$. Итак, у четырёхугольника $CKLM$ три прямых угла, следовательно, это прямоугольник.

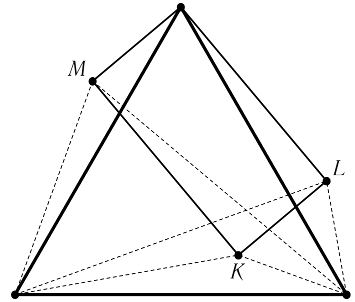


Рис. 31

Первая Лига 8–9

1. Ответ: да, например, числа вида 10^k, где $k = 0, \ldots, 9$.

2. См. задачу 2 Высшей Лиги 7.

3. См. задачу 8 Первой Лиги 6–7.

4. Решение. Заменим во всех знаменателях левой части числа x_i на их сумму S. От этого сумма только уменьшится. Осталось заметить, что новая сумма в точности равна правой части.

Комментарий. Задача также может быть решена методом математической индукции.

5. Решение. Заметим сначала, что все числа в последовательности являются положительными. Действительно, если в числе всего одна цифра, то повторяющихся цифр в нём нет, и, в соответствии с правилами построения последовательности, следующее число будет больше. Самое маленькое число с повторяющимися цифрами — это 11, значит, после него появится число 9, но оно однозначное, значит, следующее число будет больше. Мы видим, что отрицательных чисел получить нельзя.

Покажем, что в этой последовательности существует лишь конечное число членов, в которых количество цифр больше 11. В самом деле, если в числе больше 10 цифр, то в нём обязательно будут повторяющиеся цифры, значит, цепочка будет убывать. Это будет происходить как минимум до тех пор, пока число не станет 10-значным. Теперь посмотрим, насколько далеко мы после этого сможем уйти от самого большого 10-значного числа. Если в числе нет одинаковых цифр, то максимум того, что мы сможем из него получить, не превосходит $(10^{10}-1)+10$. Если после прибавления мы получим 11-значное число, то дальше опять будем скатываться вниз, пока не получим 10-значного числа. В любом случае, если мы хотя бы один раз получили не более чем 10-значное число, мы никогда не получим ничего более $(10^{10}-1)+10$. Отсюда следует, что наша (бесконечная) последовательность является ограниченной. По принципу Дирихле в ней обязательно найдутся два одинаковых члена. Поскольку каждый следующий член нашей последовательности определяется только предыдущим, начиная с этого момента последовательность начнёт периодически повторяться.

6. Решение. Наибольшее количество лампочек, которые можно зажечь таким способом, равно $n-2$. Покажем, что большее количество зажечь не удастся. Будем действовать от противного. Зафиксируем *первый* момент, когда удалось зажечь $n-1$ лампочку. Обозначим последнюю негорящую лампочку через A. Ясно, что в этом случае лампочка B, которая зажглась последней, соседствует с A, потому что все остальные имеют по два горящих соседа. Пусть, для определённости, B находится справа от A. Когда она зажигалась, должна была погаснуть именно лампочка A, иначе должна была бы погаснуть лампочка справа от B, а она горит. Но это означает, что перед включением лампочки B постоянно горела $n-1$ лампочка, что противоречит тому, что мы выбрали первый момент.

Можно было бы рассуждать и иначе. Количество зажжённых лампочек на каждом шаге возрастает не более, чем на 1, значит, будет момент, когда горят $n-2$ лампочки. У каждой из оставшихся двух негорящих лампочек хотя бы одна из соседних включена. Значит, при попытке включить одну из негорящих лампочек одну из горящих придётся погасить, то есть количество зажжённых лампочек не увеличится.

Покажем теперь, как зажечь $n-2$ лампочки. Пусть лампочки с номерами $1, 2, \ldots, k$ уже горят. Зажигаем лампочку $k+2$ (при этом ни одна из лампочек не погаснет). Далее зажигаем лампочку $k+1$, а лампочку $k+2$ гасим. После этих двух операций получаем цепочку $1, 2, \ldots, k+1$, состоящую из горящих лампочек. Эту процедуру можно продолжать, пока не будут зажжены лампочки с номерами $1, 2, \ldots, n-2$.

7. Решение. Упорядочим углы: $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Пусть $\alpha = \beta$. Тогда треугольник остроугольный, центр O описанной окружности лежит внутри него, и разбить можно так, как показано на рис. 32 (штриховкой отмечена принадлежность стороны треугольника).

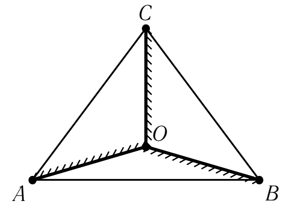


Рис. 32

Пусть $\alpha > \beta$. Рассмотрим трёхзвенную ломаную $BDEA'$ с равными звеньями и проведём из A' луч ℓ, как показано на рис. 33. Так как $\alpha > \beta = \angle BED$, то ℓ не пересечёт отрезок ED. Таким образом, ломаная оказалась внутри

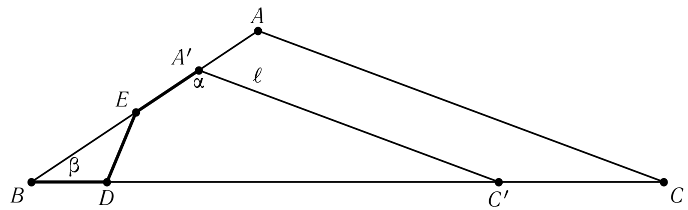


Рис. 33

треугольника $BA'C'$, где C' — точка пересечения луча ℓ с прямой BD. Переведём с помощью гомотетии треугольник $BA'C'$ в треугольник BAC (см. рис. 34). При этом преобразовании ломаная $BDEA'$ перейдёт в ломаную BD_1E_1A. Она разбивает треугольник BAC на три треугольника, которые удовлетворяют условию задачи (см. рис. 35).

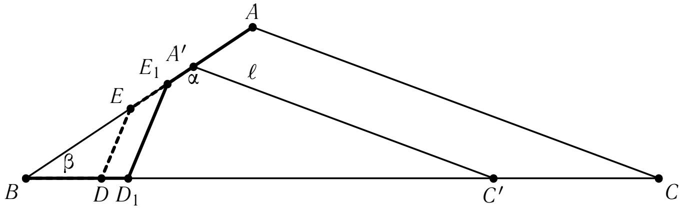


Рис. 34

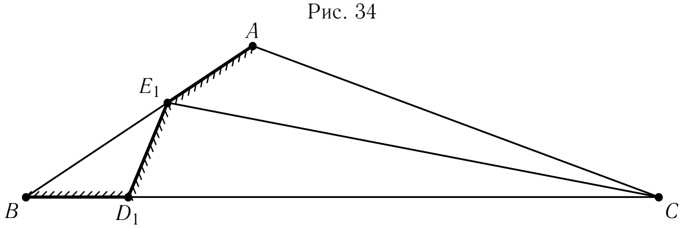


Рис. 35

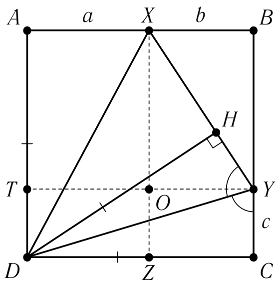


Рис. 36

8. Решение. Проведём высоту DH в треугольнике DYX (см. рис. 36). Прямоугольные треугольники DCY и DHY равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $DH = DC$. Отрезки AD и DC равны как стороны квадрата, поэтому треугольники DHX и DAX равны по гипотенузе и катету.

Обозначим $a = AX$, $b = XB$, $c = CY$. Посчитаем площадь квадрата двумя способами. С одной стороны, она равна $S = (a+b)^2$. С другой стороны, она складывается из площадей пяти прямоугольных треугольников:

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}a(a+b) + 2\cdot\frac{1}{2}c(a+b) + \frac{1}{2}b(a+b-c).$$

Приравнивая два выражения для S и упрощая их, получаем

$$b(a+b-c) = 2ac.$$

Имеем $S_{ZDTO} = ac$ и $S_{XBYO} = b(a+b-c) = 2ac$, как следует из полученного выше равенства. Но это и означает, что $S_{XBYO} = 2S_{ZDTO}$.

Высшая Лига 8–9

1. Ответ: при любых n.

Решение. Возьмём, например, числа вида 10^k, где $k = 0, \ldots, n-1$.

2. См. задачу 2 Высшей Лиги 7.

3. Ответ: $x = \pm 880$.

Решение. Решим вспомогательную задачу. Рассмотрим натуральное число $n \geqslant 10$. Пусть у числа n^2 две последние цифры совпадают. Выясним, какие они могут быть. Разделим n на 10 с остатком: $n = 10m + r$. Тогда $n^2 = (10m+r)^2 = 100m^2 + 20mr + r^2$. Первое слагаемое не влияет на последние две цифры. Слагаемое $20mr$ не влияет на разряд единиц, а к разряду десятков добавляет чётное число. Поскольку разряд единиц и разряд десятков должны совпадать, они, в частности, имеют одинаковую чётность. Разделим r^2 на 10 с остатком: $r^2 = 10q + p$. Чтобы чётности разрядов совпали, нужно, чтобы числа p и q имели одинаковую чётность. Выясним, когда это бывает:

r	**0**	1	**2**	3	4	5	6	7	**8**	9
r^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
p	0	0	0	0	1	2	3	4	6	8
q	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Мы видим, что это случается при $r = 0, 2, 8$. Значит, $p = 0$ либо $p = 4$. Итак, квадрат натурального числа, две последние цифры которого совпадают, может оканчиваться либо на 00, либо на 44. В частности, $x^2 = \overline{****00}$ либо $x^2 = \overline{****44}$.

Пусть $t = 0$. Обозначим $u = \frac{x}{10}$, тогда $u^2 = \overline{yyzz}$. Мы уже знаем, что квадрат числа, у которого две последние цифры одинаковые, заканчивается либо на 00, либо на 44. Первый вариант невозможен, потому что в этом случае $\left(\frac{u}{10}\right)^2 = \overline{yy}$, что невозможно. Следовательно, $z = 4$ и потому $u^2 = 11(100y + 4)$, откуда $100y + 4 \,\vdots\, 11 \Leftrightarrow y + 4 \,\vdots\, 11$. Отсюда $y = 7$, $u = \pm 88$. Получаем $(x, y, z, t) = (\pm 880, 7, 4, 0)$.

Пусть $t = 4$, тогда $x^2 = 11(y\cdot 10^4 + z\cdot 10^2 + 4)$. Поскольку всякий простой делитель входит в квадрат в чётной степени, число в скобках делится на 11. Это означает, что и $y + z + 4 \,\vdots\, 11$. Отсюда либо $y + z + 4 = 22$, либо $y + z + 4 = 11$. В первом случае $y = z = 9$, но число 999944 не является точным квадратом.

Во втором случае $y + z = 7$. Обозначая $u = \frac{x}{11}$, получаем

$$u^2 = \frac{y\cdot 10^4 + (7-y)\cdot 10^2 + 4}{11} = 900y + 64,$$

откуда, перенося 64 в левую часть и используя формулу разности квадратов, получаем $(u-8)(u+8) = 900y$. Так как числа $u+8$ и $u-8$ имеют одинаковую чётность, а их произведение чётно, то оба числа являются чётными. Поскольку их разность не делится на 5, а произведение делится на 25, то одно из них делится на 25. Итак, одно из этих чисел делится на 50. Покажем, что это число в точности равно 50. Действительно, из неравенства $u + 8 \geqslant 100$ следовало бы

$$(u+8)(u-8) \geqslant 8400 > 8100 \geqslant 900y,$$

поскольку y — цифра, и мы получили бы противоречие. Если $u + 8 = 50$, то $u - 8 = 34$, а если $u - 8 = 50$, то $u + 8 = 66$. Однако оба случая невозможны, потому что и в том, и в другом случае $(u-8)(u+8)$ не делится на 9.

4. См. задачу 4 Первой Лиги 8–9.

5. См. задачу 5 Первой Лиги 8–9.

6. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

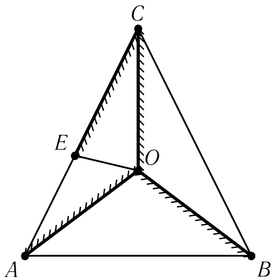


Рис. 37

7. Решение. Рассуждения будут очень похожи на те, которыми мы пользовались при решении задачи 7 Первой Лиги 8–9.

Упорядочим углы: $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Пусть $\alpha = \beta$. Тогда треугольник остроугольный, следовательно, центр O описанной окружности лежит внутри него, и разбить можно так, как показано на рис. 37 (штриховкой отмечена принадлежность стороны треугольника).

Пусть теперь $\alpha > \beta$. Рассмотрим трёхзвенную ломаную $BDEA'$ с равными звеньями и проведём из A' луч ℓ, как показано на рис. 38. Так как $\alpha > \beta = \angle BED$, то ℓ не пересечёт отрезок ED. Таким образом, ломаная оказалась внутри

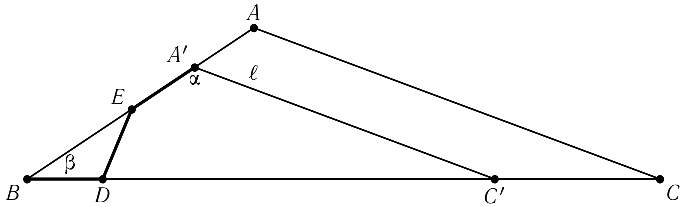


Рис. 38

треугольника $BA'C'$, где C' — точка пересечения луча ℓ с прямой BD. Переведём с помощью гомотетии треугольник $BA'C'$ в треугольник BAC (см. рис. 39). При этом преобразовании ломаная $BDEA'$ перейдёт в ломаную BD_1E_1A. Отметим на отрезке AC точку F такую, что $FC = BD_1$ (см. рис. 40). Это возможно, поскольку $CF < AB \leqslant AC$. Покажем, что прямые CF и E_1D_1 непараллельны. Допустим, что это не так. Тогда

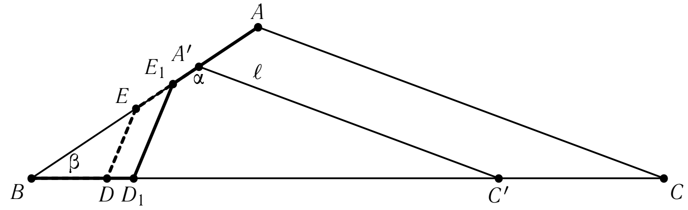


Рис. 39

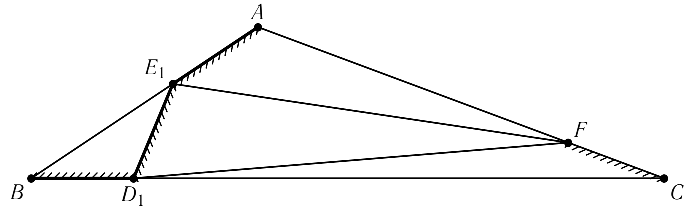


Рис. 40

$\angle D_1E_1B = \alpha$, но треугольник E_1D_1B — равнобедренный с основанием BE_1, поэтому $\beta = \angle B = \angle D_1E_1B = \alpha$, что противоречит нашему предположению. Итак, мы получили требуемое разбиение на четыре треугольника.

8. Решение. Так как вершины K, L квадрата $KLMN$ лежат на окружности (см. рис. 41), центр окружности O лежит на оси симметрии квадрата, то есть $OM = ON$. Поскольку BO — биссектриса угла MBN, то, применяя теорему синусов к треугольникам OBN и OBM, получаем $\sin \angle ONB = \sin \angle OMB$.

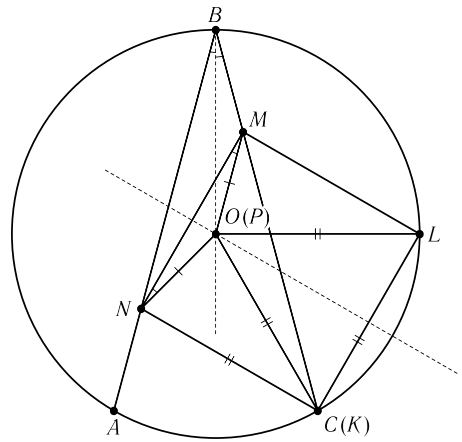


Рис. 41

Если $\angle ONB = \angle OMB$, то прямая OB является осью симметрии квадрата, что невозможно, так как K лежит на дуге AC, а L — нет. Отсюда следует, что $\angle ONB + \angle OMB = 180°$, то есть четырёхугольник $OMBN$ вписанный, и $\angle ONM = \angle OMN = \angle OBM = 15°$.

Построим равносторонний треугольник KLP. Так как $\angle NKP = 30°$ и $NK = KP$, то $\angle PNK = 75°$ и $\angle PNM = 15°$. Аналогично, $\angle PMN = 15°$. Значит, точки P и O совпадают, и $OK = KL$.

2.2.2. Второй тур

Первая Лига 6–7

1. Ответ: 22 перчатки.

Решение. Покажем, что 22 перчаток достаточно. Вытащим 5 левых и 17 правых перчаток. Если среди вынутых левых перчаток нашлись белые, то пара найдётся, поскольку среди правых перчаток обязательно будет хотя бы одна белая. Пусть теперь не вынуто ни одной белой левой перчатки. Тогда среди левых будут и синие, и красные перчатки. Но среди 17 правых всегда найдётся либо красная, либо синяя. Значит, одноцветная пара всегда найдётся.

Теперь покажем, что меньшим количеством обойтись нельзя. Пусть мы вытаскиваем L левых перчаток и R правых, причём $L+R=21$. Если $4 \leqslant R \leqslant 16$, то все правые перчатки могут оказаться не белыми, а среди левых могут, напротив, попасться лишь белые. Если $17 \leqslant R \leqslant 20$, то у нас есть шанс не вытащить ни одной правой красной перчатки, а среди не более четырёх левых перчаток может не оказаться ни одной красной перчатки. Если же $1 \leqslant R \leqslant 3$, то это могут быть, например, только красные перчатки, а среди не более 20 левых могут попасться только белые и синие. Этими тремя случаями исчерпываются варианты разбиения числа 21 на натуральные слагаемые, и в каждом случае может получиться так, что одноцветной пары не будет. Значит, 21 перчаткой обойтись нельзя.

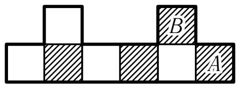


Рис. 42

2. Решение. Нет, неверно. Рассмотрим, например, фигуру, изображённую на рис. 42. В ней 4 белых и 4 чёрных клетки. Покажем, что 4 доминошки на ней разместить нельзя. В самом деле, нельзя положить доминошки так, чтобы одновременно были покрыты клетки A и B, а 4 доминошки — это уже 8 клеток, значит, свободных клеток быть не может.

3. Ответ: от 5 до 14 городов.

Решение. Докажем, что меньше 5 городов быть не может. Пусть у нас есть 4 города. Соединив каждый город с каждым дорогами, получим всего 6 дорог. Очевидно, что при меньшем количестве городов дорог будет ещё меньше.

Докажем оценку сверху. Каждая дорога соединяет два города, поэтому семь дорог соединяют не более 14 городов.

Примеры для 5, 6, 7 и 8 городов показаны на рис. 43—46. Покажем, как получить все остальные. Возьмём цепочку из 8 городов и будем проводить следующую операцию: отсоединяем крайний город от цепочки (пропадает одна дорога), ставим на карту ещё один дополнительный

город и соединяем его дорогой с только что отсоединённым городом (количество дорог становится прежним). Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока не останется 7 пар городов (см. рис. 47—49).

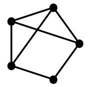


Рис. 43

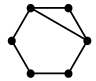


Рис. 44

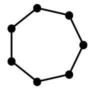


Рис. 45

Рис. 46


Рис. 47

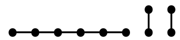


Рис. 48

...

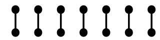


Рис. 49

4. Ответ: да, смогут.

Первое решение. Легко посчитать, что Ксюша потратила на шоколадки 72 рубля, а Наташа — 54 рубля. Поскольку каждая купила целое число шоколадок, цена одной шоколадки является общим делителем чисел 72 и 54. $\text{НОД}(72,54)=18$, поэтому цена шоколадки не больше, чем 18. Поскольку у девочек как раз осталось 18 рублей, то ещё одну шоколадку они смогут купить.

Второе решение. Поскольку Ксюша купила целое число шоколадок, и Наташа купила целое число шоколадок, разность потраченных ими денег должна делиться на цену шоколадки. А разность потраченных ими денег — 18 рублей, что как раз равно оставшимся у них деньгам. Поэтому девочки смогут купить ещё хотя бы одну шоколадку.

5. Ответ: да, сможет.

Решение. Снегурочка может получить 2005 крестиков следующим образом. Первые 2^{2005} ходов она ставит одиночные крестики. Берендей сможет стереть только половину их них, поэтому на полоске будет 2^{2004} крестиков. После этого Снегурочка рисует крестики рядом с уже стоящими. Берендей стирает половину их них, остаётся 2^{2003} групп из двух крестиков. Затем Снегурочка ставит крестики рядом с уже стоящими, получая группы из трёх крестиков. Так как Берендей сотрёт половину, останется 2^{2002} группы, и т. д. В какой-то момент на полоске будет 1 группа из 2005 крестиков.

6. Ответ: Андрей живёт на четвёртом этаже.

Решение. Пусть Андрей живёт на этаже с номером x. Тогда между первым этажом и этажом Андрея $x-1$ этаж, между первым этажом и этажом Жени $4(x-1)$, между первым этажом и этажом Пети $\frac{4(x-1)}{3}$ этажей. Поскольку Петя живёт на этаж выше Андрея, можно составить уравнение: $x-1+1=\frac{4(x-1)}{3}$. Решив уравнение, получим ответ задачи.

7. Ответ: да, можно.

Решение. Пусть между числами 1 и -5 было записано число x. Зная одно из чисел и сумму, можно определить и второе число, поэтому получаем такую табличку:

Номер числа	**Число**
1	x
2	$-5-x$
3	$5-(-5-x)=10+x$
4	$22-(10+x)=12-x$
5	$9-(12-x)=x-3$
6	$-1-(x-3)=2-x$
7	$3-(2-x)=1+x$
1	$1-(1+x)=-x$

Приравнивая первую и последнюю строку этой таблицы, получаем уравнение $x=-x$, откуда $x=0$. Теперь легко найти искомые числа. Это числа 0, -5, 10, 12, -3, 2, 1.

8. Ответ: 350 *км*.

Решение. Поскольку за одно и то же время Григорий Вячеславович проезжает 50 *км*, а автобусы — 40, значит, скорость машины в $\frac{50}{40}=$ $=1{,}25$ раз больше скорости автобусов. Пусть от Москвы до Костромы x *км*, а скорость движения автобусов равна v *км/ч*. В то время как автобусы проехали $x-70$ *км*, Григорий Вячеславович проехал x *км*. Следовательно, можно составить уравнение: $\frac{x}{1{,}25v}=\frac{x-70}{v}$. Решив его, получаем ответ.

Высшая Лига 7

1. Ответ: нет, не могут.

Решение. Поскольку гномов всего 5, то либо для красного, либо для синего, либо для зелёного цвета майку такого цвета носит всего один гном. Этот гном не может быть ни Сеней, ни Вовой, ни Гришей, поскольку известно, что если удалить каждого из них, то среди оставшихся найдутся гномы в майке и синего, и красного и зелёного цветов. Поэтому этот гном — либо Миша, либо Дима. А значит, у Миши и Димы майки разных цветов.

Заметим, что цветов маек у гномов могло быть и больше трёх, например, они могли быть такими:

Сеня	фиолетовая
Гриша	красная
Вова	красная
Дима	зелёная
Миша	синяя

2. Ответ: 20 клеток.

Решение. Покажем сначала, как можно прокатить кубик так, чтобы на доске осталось 20 красных отпечатков. Путь кубика изображён линией, точками — клетки, в которых красная грань касалась доски (см. рис. 50).

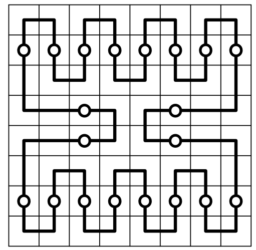


Рис. 50

Теперь покажем, что нельзя получить более 20 клеток. В процессе перекатывания кубик посетил 64 клетки. Будем называть клетки, на которых кубик стоял красной гранью вниз, *красными*, а остальные — *синими*. Понятно, что красные клетки не могли встречаться на пути кубика ни подряд, ни через одну. Таким образом, между любыми красными клетками на пути кубика будет хотя бы две синие. Если красных клеток хотя бы 22, то между первой и второй из них в пути кубика встретятся хотя бы две синие, между второй и третьей встретятся хотя бы две синие, и так далее, и между последней красной и первой встречаются хотя бы две синие. Значит, всего в пути встретятся хотя бы $2\cdot 22=44$ синие клетки, и всего клеток будет не менее 66, что невозможно. Значит, всего красных клеток не более 21.

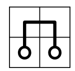


Рис. 51

Допустим, что существует путь кубика, в котором 21 красная клетка. Заметим, что если между двумя красными клетками на пути кубика встречаются две синие, то мы путешествовали «буквой П» (см. рис. 51). Посмотрим, могли ли мы так путешествовать около углов доски. Левый нижний угол мы могли обойти следующим образом: **b1**, **a1**, **a2**, **b2** или **a2**, **a1**, **b1**, **b2** (или по этим же путям, но в обратном порядке). Эти варианты обхода показаны на рис. 52 и 53.

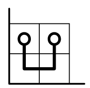


Рис. 52

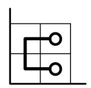


Рис. 53

Но тогда после клетки **b2** мы не сможем начать новую «букву П». Значит, около левого нижнего угла будут две красные клетки, между которыми мы путешествовали не «буквой П». Значит, будут две последовательные красные клетки около левого нижнего угла, между которыми будут хотя бы 3 синих. Аналогично для остальных трёх углов. Итак, если всего 21 красная клетка, то между соседними из них 21 промежуток, и из них хотя бы 4 промежутка содержат хотя бы 3 синие клетки, а остальные содержат хотя бы по 2 синие клетки. Значит, всего синих клеток хотя бы 46, то есть всего клеток не менее $21+46=67$, что невозможно. Значит, наше предположение неверно, и красных клеток не более 20.

3. См. задачу 1 Первой Лиги 6–7.

4. См. задачу 2 Первой Лиги 6–7.

5. Ответ: нет, не обязательно.

Решение. Возьмём, например, два равнобедренных треугольника со сторонами 4, 4, 2 и 5, 3, 3. Они удовлетворяют условию задачи, потому что $4+4=5+3$ и $4+2=3+3$.

6. Ответ: $15 \leqslant n \leqslant 200$.

Решение. Сначала докажем, что больше 200 городов получиться не может. У каждой дороги два конца, поэтому если всего 100 дорог, то городов может получиться не более $2 \cdot 100 = 200$.

Допустим, что число городов равно $n < 15$. Мы можем получить не больше дорог, чем рёбер в полном графе на n вершинах. Их количество легко посчитать — это количество сочетаний из n по 2, то есть $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. При $n = 14$ получаем $C_n^2 = 7 \cdot 13 = 91 < 100$, то есть 100 дорог провести не удастся.

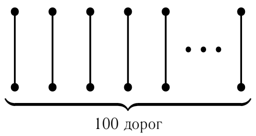


Рис. 54

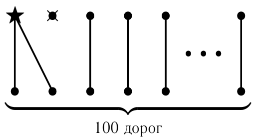


Рис. 55

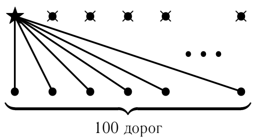


Рис. 56

Покажем теперь, что можно реализовать любое число городов n, удовлетворяющее неравенству $15 \leqslant n \leqslant 200$.

Пусть $n \geqslant 101$. Сначала построим пример для $n = 200$ (см. рис. 54). Первый город в верхнем ряду обозначим звёздочкой и будем называть его *столицей*. Теперь будем производить следующую операцию. Берём первый незачёркнутый город в верхнем ряду, не совпадающий со столицей, зачёркиваем его, а дорогу, которая шла из соответствующего нижнего города, соединяем со столицей (см. рис. 55). При этом количество городов уменьшается на единицу, а количество дорог сохраняется. Так можно продолжать, пока в верхнем ряду не останется одна столица, а все остальные города верхнего ряда будут зачёркнуты (см. рис. 56). Таким образом, мы показали, что можно получить любое количество городов от 101 до 200.

Теперь покажем, как можно получить любое количество городов от 15 до 100, сохранив количество дорог. Отделим в нижнем ряду первые 14 городов и их трогать не будем. Эти 14 городов вместе со столицей назовём *ядром*. Ядро — это граф из 15 вершин, в котором уже проведено 14 рёбер, значит, в нём можно провести ещё не более $105 - 14 = 91$ ребра. Будем производить следующую операцию. Возьмём произвольный город, не лежащий в ядре, и зачеркнём его. При этом придётся убрать ровно одну дорогу, которая соединяла этот город со столицей. Чтобы скомпенсировать количество дорог, нужно добавить ещё одно ребро в граф, образующий ядро. Итак, количество городов уменьшилось на единицу, а количество дорог сохранилось.

Этот процесс будем продолжать до тех пор, пока не исчезнут все города, не лежащие в ядре. Это всегда можно сделать, поскольку количество городов, не лежащих в ядре, равно $100 - 14 = 86 < 91$. Так мы сможем получить любое количество городов от 15 до 100.

7. Ответ: решений нет.

Решение. Пусть решение существует. Тогда $(x-2)x(x+2) = y^2$. Каждый нечётный простой множитель числа y может входить лишь в одно из чисел $x-2$, x, $x+2$ и потому входит в него чётное число раз. Следовательно, каждое из этих чисел имеет вид либо z^2, либо $2z^2$ — в зависимости от того, чётное или нечётное число двоек содержится в его разложении. Значит, среди этих чисел найдётся либо два квадрата, либо два удвоенных квадрата. Но разность двух квадратов натуральных чисел не может быть равна ни 2, ни 4. То же верно и для удвоенных квадратов, и мы получаем противоречие.

8. Ответ: 53 числа.

Решение. Найдём общий вид чисел, обладающих указанным свойством.

Рассмотрим сначала нечётные числа. Каждый делитель нечётного числа является нечётным. Для того, чтобы сумма нечётных чисел была нечётной, необходимо и достаточно, чтобы количество слагаемых было нечётным. Следовательно, число должно являться точным квадратом. Действительно, число является точным квадратом тогда и только тогда, когда каждый простой делитель входит в него в чётной степени. Возьмём число n и какой-то его делитель m. Тогда $\frac{n}{m}$ — тоже делитель числа n. Поэтому все его делители разбиваются на пары $\left(m, \frac{n}{m}\right)$ за исключением случая, когда $m = \frac{n}{m}$. Тогда $m^2 = n$, то есть n является точным квадратом.

Любое чётное число m можно представить в виде $m = 2^s \cdot r$, где r нечётное, поэтому все его делители, не являющиеся делителями числа r, являются чётными. Добавление любого количества чётных чисел к искомой сумме не меняет её чётности, поэтому условию задачи удовлетворяют только такие m, для которых r — полный квадрат.

Полученный результат удобно переформулировать: искомые числа имеют вид либо n^2, либо $2n^2$, где n — натуральное.

В первой тысяче содержатся квадраты чисел от 1 до 31 и удвоенные квадраты чисел от 1 до 22, то есть всего имеется $31 + 22 = 53$ числа, обладающие указанным свойством.

Первая Лига 8–9

1. См. задачу 1 Первой Лиги 6–7.

2. См. задачу 2 Высшей Лиги 7.

3. Ответ: выигрывает второй.

Решение. Сгруппируем числа от 1 до 100 следующим образом:

$$(1, 6, 7, 8),\ (3, 2),\ (5, 4),\ (10, 9),\ (12, 11),\ \ldots,\ (100, 99),$$

то есть особо выделена четвёрка чисел, а остальные разбиты на пары вида $(k+1, k)$. Назовём пару чисел *хорошей*, если эти два числа можно подставить в уравнение так, чтобы корни были различными целыми числами. Все пары в нашем разбиении — хорошие, потому что

$$x^2 + (k+1)x + k = (x+1)(x+k).$$

Второй игрок будет действовать так: если первый вычёркивает число в какой-нибудь паре, то второй вычёркивает второе число в этой паре. Приведём схему действий в случае, когда первый вычёркивает какое-либо число из четвёрки:

Ход первого	Ход второго	Остаётся
1	8	$(7, 6)$
8	1	$(7, 6)$
6	1	$(8, 7)$
7	1	$(6, 8)$

Любая пара чисел, которая остаётся от четвёрки, тоже является хорошей. Таким образом, второй игрок всегда следит за тем, чтобы непарных чисел не оставалось, а все получающиеся из четвёрки пары тоже были хорошими. При такой стратегии останется одна хорошая пара чисел, то есть второй игрок выиграет.

4. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

5. Решение. Без ограничения общности, $a \geqslant b \geqslant c$. Тогда

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} > \sqrt{ab} + \sqrt{bc} \geqslant b + c > p.$$

Последнее неравенство сразу следует из неравенства треугольника.

6. Ответ: R.

Решение. Очевидно, что картинка симметрична относительно прямой BH, которая делит угол ABC пополам (см. рис. 57). Заметим, что

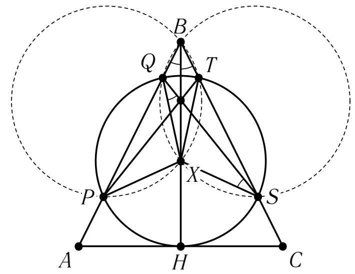


Рис. 57

$\angle QBX = \angle QSX$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Аналогично, $\angle XQS = \angle XBS$. Но $\angle QBX = \angle XBS$ в силу симметрии, поэтому все четыре угла равны между собой. Значит, треугольник QSX равнобедренный с основанием QS. Следовательно, точка X лежит на серединном перпендикуляре к хорде QS, кроме того, она, очевидно, равноудалена от точек Q и T, поэтому X является центром исходной окружности. Следовательно, расстояние от X до AC равно R.

7. Ответ: не существует.

Решение. Из условия следует, что

$$x_n = (n+a)\cdot(n+2004a),$$
$$x_{n+1} = (n+1+a)\cdot(n+1+2004a).$$

Пользуясь алгоритмом Евклида, получаем, что

$$\text{НОД}(n+2004a, n+1+a) = \text{НОД}(n+2004a, 2003a-1).$$

Остаётся заметить, что при $n = 2002a - 2$

$$\text{НОД}(2002a - 2 + 2004a, 2003a - 1) = \\ = \text{НОД}\big(2\cdot(2003a-1), 2003a-1\big) = 2003a - 1.$$

8. См. задачу 8 Высшей Лиги 7.

Высшая Лига 8–9

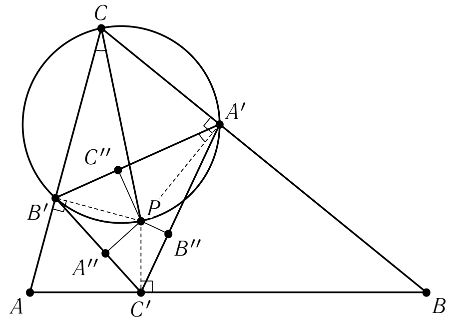


Рис. 58

1. Решение. Поскольку углы $PA'C$ и $PB'C$ прямые, то четырехугольник $PA'CB'$ вписан в окружность с диаметром PC, то есть $\angle PA'B' = \angle PCB'$. Поэтому $PC'' = PA'\sin\angle PA'B' = PA'\sin\angle PCB' = PA'\cdot\frac{PB'}{PC}$. Следовательно, $PC\cdot PC'\cdot PC'' = PA'\cdot PB'\cdot PC'$. Аналогичное равенство доказывается и для двух других произведений, значит, все они равны между собой.

2. Ответ: за 33 хода.

Решение. Вертикальные ходы будем обозначать буквой В, горизонтальные — буквой Г. Запись ВГГ означает, что ладья сделала один вертикальный ход, а затем два горизонтальных. *Весом* столбца назовём суммарное число ходов, которое сделали стоящие в нём изначально белая и чёрная ладьи (такие ладьи будем называть *ладьями данного столбца*). Очевидно, что столбцов веса 2 не бывает. Будем говорить, что ладья *закрывает* некоторый столбец, если последний её ход — это вертикальный ход длины 8 в этом столбце. Такую ладью будем называть *закрывающей*. Так как каждый столбец закрывает не более одной ладьи, то закрывающих ладей не больше 8.

Пусть вес столбца равен 4. Тогда либо обе его ладьи делают по два хода, либо одна из них делает один ход, а другая три. В первом случае обе ладьи не могут сходить ВГ (какая-то из них должна первой сделать свой вертикальный ход, другая должна освободить для неё место), следовательно одна из них делает ходы ГВ и тем самым является закрывающей. Во втором случае ладья, сделавшая один ход, закрывает свой столбец. Таким образом, в столбце веса 4 есть хотя бы одна закрывающая ладья. Если вес столбца равен 3, то одна из его ладей закрывает свой столбец, а другая делает ходы ГВ и закрывает некоторый другой столбец, то есть в столбце веса 3 обе ладьи — закрывающие. Так как закрывающих ладей не больше 8, то всего столбцов веса 3 должно быть не больше, чем столбцов, обе ладьи которых не являются закрывающими (а такими могут быть только столбцы веса 5 или больше). Таким образом, суммарный вес всех столбцов (то есть общее число ходов) не меньше 32.

Покажем, что этот вес больше 32. Равенство возможно только в том случае, когда все вертикали закрыты; в каждом столбце веса 4 ровно одна закрывающая ладья; столбцов веса 3 ровно столько же, сколько столбцов веса 5, и при этом в столбцах веса 5 нет закрывающих ладей; столбцов веса, большего 5, нет вообще.

Предположим, что все эти условия выполнены. Тогда закрывающие ладьи — это ладьи из столбцов веса 3 и 4, и они делают 1 или 2 хода, а все остальные ладьи делают не больше 3 ходов (в столбце веса 5 нет закрывающих ладей, а поэтому в нём не может быть и ладьи, сделавшей 4 хода).

Если обратить движение ладей во времени, то применимы все предыдущие рассуждения, в частности, имеется 8 закрывающих ладей. При прямом ходе времени они являются открывающими, то есть своим первым ходом проходят всю вертикаль. Таким образом, в каждом столбце есть открывающая его ладья.

Посмотрим на первый горизонтальный ход и на тот столбец, в котором оказалась сделавшая этот ход ладья. Очевидно, что он ещё не открыт. Но до того, как он будет открыт, наша ладья должна уйти из этого столбца. Поскольку ладья должна придти в столбец и уйти из него (то есть потратить на это 2 горизонтальных хода), а всего ходов не больше 3, то вертикальный ход только один и имеет длину 8. Очевидно, что он не может быть ни первым (в столбце находится вторая ладья), ни вторым (столбец ещё не открыт), а потому он последний, то есть закрывающий. Но закрывающие ладьи делают меньше 3 ходов. Противоречие.

Покажем, что 33 ходов достаточно. Опишем решение словесно, а потом приведём запись шахматных ходов. Пусть на первой горизонтали (снизу) стоят белые ладьи, а на восьмой (сверху) — чёрные.

- Самая правая нижняя (белая) ладья ходит вверх на 5 клеток (1 ход).
- Самая левая верхняя (чёрная) ладья ходит вниз на 5 клеток, затем вправо до конца (тем самым оказывается в правом столбце под сходившей первой ладьёй), затем ходит вниз до конца (и достигает цели своего путешествия) (3 хода).
- Самая левая нижняя белая ладья ходит вверх до упора и успокаивается (1 ход).
- Самая левая верхняя чёрная ладья ходит ВГВ и успокаивается (3 хода).
- Далее последние два шага повторяются ещё 6 раз.
- Ладья, сделавшая самый первый ход, идёт вверх до упора, и мы победили (1 ход).

Количество	**Ход**
1	h1-h5
3	a8-a4-h4-h1
1	a1-a8
3	b8-b2-a2-a1
1	b1-b8
3	c8-c2-b2-b1
1	c1-c8
3	d8-d2-c2-c1
1	d1-d8
3	e8-e2-d2-d1
1	e1-e8
3	f8-f2-e2-e1
1	f1-f8
3	g8-g2-f2-f1
1	g1-g8
3	h8-h6-g6-g1
1	h5-h8
33	—

3. См. задачу 3 Первой Лиги 8–9.

4. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

5. См. задачу 5 Первой Лиги 8–9.

6. См. задачу 6 Первой Лиги 8–9.

7. См. задачу 7 Первой Лиги 8–9.

8. См. задачу 1 Первой Лиги 6–7.

2.2.3. Третий тур

Первая Лига 6–7

1. Ответ: будет.

Решение. Предположим, что равновесия не будет. Можно считать, что гирьки, которые оба раза были на левой чашке весов, весят больше, чем те, которые оба раза были на правой чашке. Тогда, чтобы при первом взвешивании было равновесие, те гирьки, которые сначала были на левой чашке, а потом на правой, должны весить меньше, чем те, которые сначала были на правой чашке, а потом на левой. Но тогда при втором взвешивании левая чашка окажется тяжелее правой. Противоречие.

2. Ответ: с Витей.

Решение. Боря познакомился с Витей раньше, чем с Гришей и с Аней, а Аня познакомилась с Борей раньше, чем с Гришей, значит, знакомство Бори с Витей состоялось раньше, чем знакомства Ани с Гришей и Бори с Гришей. Поскольку Витя познакомился с Гришей раньше, чем с Борей, то Гриша раньше всех познакомился с Витей.

3. Ответ: в 1986 или 2004 году.

Решение. Пусть год записывается четырёхзначным числом, которое начинается с двойки. Тогда достаточно найти однозначное число, которое при добавлении к нему его суммы цифр даёт восемь. Это число четыре. Значит, задача могла быть придумана в 2004 году.

Пусть задача была придумана раньше двухтысячного года. Тогда сумма цифр не может быть больше $9+9+9+1=28$. Значит, само число не меньше 1982. Пусть третья цифра числа — восьмёрка. Тогда надо найти однозначное число, которое при добавлении к нему его суммы цифр даёт $2010-1980-(1+9+8)=12$. Это число шесть. Значит, задача могла быть придумана в 1986 году. Пусть третья цифра числа — девятка. Тогда надо найти однозначное число, которое при добавлении к нему его суммы цифр даёт $2010-1990-(1+9+9)=1$. Таких чисел нет.

4. Ответ: за три вопроса.

Решение. Покажем, что трёх вопросов достаточно. Условно расположим подозреваемых в вершинах куба. Введём на этом кубе координаты: каждую вершину будем кодировать тройкой нулей или единиц (см. рис. 59). «Опросим» три взаимно перпендикулярные координатные плоскости — это будут множества $\{(0,y,z)\}$, $\{(x,0,z)\}$, $\{(x,y,0)\}$. Опрос каждой плоскости устанавливает координату фальшивомонетчика по x, y и z: если мы получили ответ «да», то соответствующая координата фальшивомонетчика равна нулю, иначе единице.

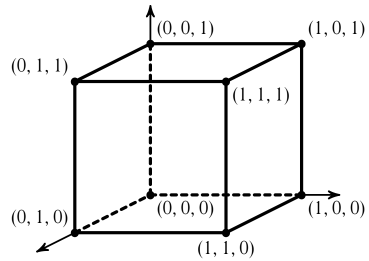


Рис. 59

Теперь докажем, что двух вопросов не хватит. Действительно, ответ на каждый вопрос инспектора позволяет разбить множество из 8 человек на 2 подмножества, в одном из которых находится фальшивомонетчик. Припишем каждому человеку упорядоченную пару (a_1,a_2) из нулей и единиц следующим образом. Если данный человек по результату первого опроса оказался в одной группе с фальшивомонетчиком, то $a_1=1$; иначе $a_1=0$. Аналогично по результату второго опроса определяется a_2. Как бы инспектор ни задавал два вопроса, могут найтись два человека с парой $(1,1)$. Тогда инспектор не сможет определить, кто из них фальшивомонетчик.

Комментарий. Может показаться, что способ задать три вопроса, описанный в решении, довольно сложен. Действительно, есть и другой способ, основанный на методе *половинного деления*. Именно, разделим всех подозреваемых на две равные группы и опросим одну из них. В зависимости от ответа выберем либо её, либо другую группу. За один вопрос мы уменьшили количество подозреваемых вдвое. Повторим эту процедуру для той «половинки», в которой находится фальшивомонетчик, и так далее. Так можно продолжать, пока количество подозреваемых не уменьшится до 2.

Теперь возьмём одного человека (назовём его A) из тех, кто находится вне подозрения, и добавим к этим двум людям, а одного из тех (любого) исключим. Зададим последний вопрос полученной группе из 2 человек. Если ответ отрицательный, то исключённый из группы человек и есть фальшивомонетчик, а иначе фальшивомонетчиком является сосед A в полученной группе.

Оба алгоритма достаточно универсальны и тривиально обобщаются на произвольное количество человек, равное степени двойки. Однако существенное отличие первого алгоритма от второго состоит в том, что опрашиваемые множества выбираются заранее, а в алгоритме, основанном на методе половинного деления, каждое следующее подмножество людей выбирается на основании всех предыдущих ответов.

5. Ответ: да, сможет.

Решение. Будем отмечать разрезы пунктирными линиями. Сначала разрежем кубик вертикальными разрезами, как показано на рис. 60 (изображён вид сверху). Тогда он распадётся на три фигуры, изображённые на рис. 61, и одну фигуру, изображённую на рис. 62. А их уже несложно разрезать на уголки.

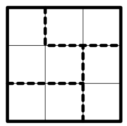


Рис. 60

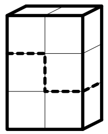


Рис. 61

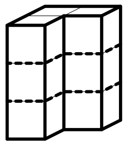


Рис. 62

6. Ответ: выиграет жюри.

Решение. Заметим, что после того, как обе команды сделают ход, в кучке может оказаться на две, три или четыре спички меньше. Если первым ходом жюри возьмёт одну спичку, а потом будет делать ходы так, чтобы количество спичек в кучке всегда делилось на пять, то жюри выиграет независимо от того, как ходят команды.

7. Ответ: нет, не может.

Решение. Сложим все 26 чисел. Тогда числа, которые записаны в вершинах, будут подсчитаны один раз как числа, записанные в вершинах, трижды, как числа, записанные на рёбрах, и трижды, как числа, записанные на гранях. Значит, в этой сумме все числа подсчитаны семь раз, следовательно, сумма всех чисел должна делится на семь, а это не так.

8. Ответ: да, могут, например, в точке, находящейся на расстоянии две трети от точки старта.

Решение. Когда первый таракан окажется на расстоянии $\frac{2}{3}$ от точки старта, второй таракан пробежит $\frac{4}{3}$ и окажется в той же точке. Третий таракан к этому времени пробежит $\frac{8}{3}$ и тоже окажется в этой точке. Пусть какой-то таракан с нечётным номером находится в этой точке. Это значит, что он чётное число раз пробежал весь коридор и после этого ещё пробежал $\frac{2}{3}$. Тогда таракан, который бежит вдвое быстрее, пробежал весь коридор туда-обратно вдвое большее число раз и ещё $\frac{4}{3}$, то есть оказался в той же точке. А следующий таракан пробежал весь коридор туда-обратно вчетверо большее число раз, и ещё $\frac{8}{3}$. Таким образом, все тараканы встретятся в этой точке.

Высшая Лига 7

1. Ответ: 5 или 2,5.

Решение. Исследуем, какими соотношениями связаны длины сторон треугольника, у которого одна из биссектрис перпендикулярна медиане, а некоторая другая биссектриса перпендикулярна другой медиане.

Пусть в треугольнике KLM биссектриса KP перпендикулярна медиане LN (см. рис. 63), тогда KP — одновременно биссектриса и высота в треугольнике KLN, следовательно, $KL = KN = a$ и $KM = 2KL = 2a$.

Предположим, что некоторая другая биссектриса этого треугольника перпендикулярна другой медиане. Возможны такие случаи:

1) если это биссектриса угла KML (см. рис. 64), то она может быть перпендикулярна только медиане, выходящей из вершины K, следовательно, по соображениям, приведённым в первом абзаце, $LM = 2KM = 4a$. Такого треугольника не существует, так как для него не выполняется неравенство треугольника: $a + 2a < 4a$.

2) Если биссектриса угла KLM перпендикулярна медиане, выходящей из вершины K (см. рис. 65), то $LM = 2KL = 2a$.

3) Если биссектриса угла KLM перпендикулярна медиане, выходящей из вершины M (см. рис. 66), то $KL = 2LM$, то есть $LM = \frac{a}{2}$. Этот случай тоже невозможен, так как не выполнено неравенство треугольника: $a + \frac{a}{2} < 2a$.

Таким образом, единственный возможный случай — равнобедренный треугольник, основание которого в два раза меньше боковой стороны. Если AB — основание, то периметр P треугольника ABC равен $1 + 2 + + 2 = 5$, если же AB — боковая сторона, то $P = 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2{,}5$.

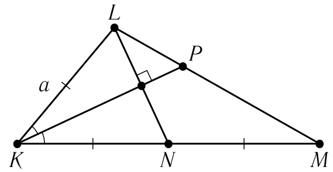


Рис. 63

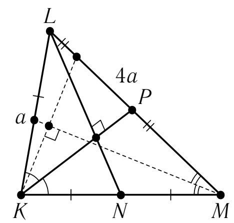


Рис. 64

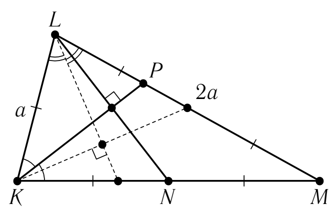


Рис. 65

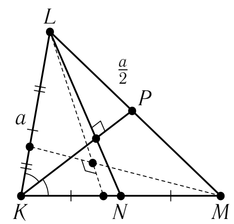


Рис. 66

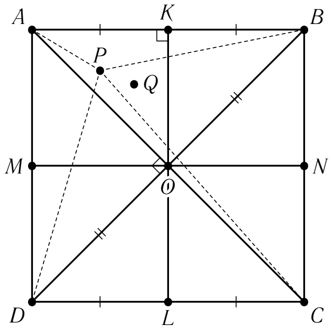


Рис. 67

2. Ответ: да, верно.

Решение. Диагонали квадрата и отрезки, соединяющие середины его боковых сторон, разбивают квадрат на 8 треугольников. Так как рассматриваются 9 точек, то по принципу Дирихле две из них окажутся в одном треугольнике.

Докажем, что если две точки попали в одну часть, то рядом с ними написано одно и то же. Без ограничения общности можно считать, что точки P и Q лежат в треугольнике AKO (см. рис. 67).

Докажем вспомогательное утверждение.

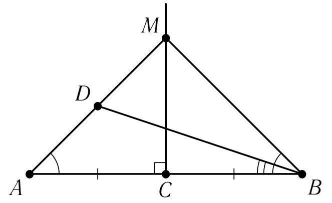


Рис. 68

Лемма. К отрезку AB проведён серединный перпендикуляр CM (см. рис. 68). Точка D лежит в левой полуплоскости относительно CM. Тогда $AD < BD$.

Доказательство. Продлим AD до пересечения с CM. Треугольник AMB равнобедренный, поэтому $\angle MAB = \angle MBA$, следовательно, $\angle ABD < \angle MBA = \angle DAB$. Так как в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то $AD < BD$. (Если точка D лежит в правой полуплоскости, то $AD > BD$.) Лемма доказана.

Поскольку KL — серединный перпендикуляр к отрезку AB и обе точки лежат в левой полуплоскости относительно KL, то $PA < PB$ и $QA < QB$. Также KL — серединный перпендикуляр к отрезку CD и обе точки лежат в левой полуплоскости относительно него, поэтому $PD < PC$ и $QD < QC$.

С другой стороны, AC — серединный перпендикуляр к отрезку BD и обе точки лежат в правой полуплоскости относительно него, поэтому $PB < PD$ и $QB < QD$.

Таким образом, $PA < PB < PD < PC$ и $QA < QB < QD < QC$, следовательно, рядом с точками P и Q написано одно и то же.

3. Решение. Числа x и y не могут быть одновременно нечётными, поскольку z^4 не может давать остаток 2 от деления на 4. Поэтому без ограничения общности можно считать, что x чётно. Тогда y нечётно, поэтому и z нечётно.

Покажем, что НОД$(z^2-y, z^2+y) = 2$. Действительно, если $z^2 - y = 2^k \cdot s$ и $z^2 + y = 2^k \cdot t$, то $2z^2 = 2^k \cdot (s+t)$, а поскольку z нечётно, то $k \leqslant 1$. С другой стороны, поскольку y и z нечётны, числа $z^2 - y$ и $z^2 + y$ являются чётными, значит, $k = 1$. Теперь допустим, что

$$\begin{cases} z^2 - y = p \cdot m, \\ z^2 + y = p \cdot n, \end{cases}$$

где p — простое число, отличное от 2. Тогда

$$\begin{cases} 2z^2 = p \cdot (m+n), \\ 2y = p \cdot (m-n). \end{cases}$$

Но тогда получается, что p является общим делителем y и z, что невозможно по условию.

Поскольку $x^2 = (z^2 - y)(z^2 + y)$, то, с учётом сказанного выше про НОД, получаем $z^2 - y = 2u^2$, $z^2 + y = 2v^2$ и $x = 2uv$, где u и v — некоторые натуральные числа. Сложив и поделив на 2, получаем, что $z^2 = u^2 + v^2$. Аналогично началу решения можно считать, что u чётно, а v нечётно. Тогда $u^2 = (z-v)(z+v)$ делится на 8. Поэтому u делится на 4, откуда $x = 2uv$ делится на 8.

4. Ответ: 100.

Решение. Если $21p - 79q = 0$ для натуральных p и q, то $p \geqslant 79$ и $q \geqslant 21$. Поэтому $p + q \geqslant 100$, то есть нужно минимум 100 раз нажать на кнопки.

Покажем, что 100 нажатий достаточно. Заметим, что где бы лифт не находился, он может поехать только в одну сторону, то есть его траектория определена однозначно. Для удобства будем нумеровать этажи с нуля. Выпишем последовательность, в результате которой лифт поднимется на 1 этаж вверх.

Этаж	**Нажатий**
$79 - 3 \cdot 21 = 16$	4
$16 + 79 - 4 \cdot 21 = 11$	5
$11 + 79 - 4 \cdot 21 = 6$	5
$6 + 79 - 4 \cdot 21 = 1$	5
Итого	19

Эта последовательность повторится 5 раз, после чего лифт окажется на 5-м этаже. Будет сделано $19 \cdot 5 = 95$ нажатий. Далее потребуется ещё 5 нажатий: $5 + 79 - 4 \cdot 21 = 0$, то есть лифт окажется на первом этаже.

Комментарий. В общем случае, когда в $(n+m)$-этажном доме лифт при нажатии одной кнопки поднимается на m этажей вверх, а при нажатии другой — на n этажей вниз, наименьшее число нажатий кнопок равно $\frac{m+n}{\text{НОД}(m,n)}$.

Действительно, пронумеруем этажи от 0 до $n+m-1$ и расположим их на окружности, то есть будем считать, что у нашего дома «над» $(m+n-1)$-м этажом расположен нулевой, и так далее. Заметим, что поездка на n этажей вниз по такому кольцу — это всё равно что поездка на m этажей вверх. Поэтому теперь можно считать, что мы движемся всё время в одном направлении шагами длины m. Применяя в точности такие же рассуждения, как и при решении задачи 6 Высшей Лиги 7 первого тура, и учитывая то, что $\text{НОД}(m+n, m) = \text{НОД}(m, n)$, получаем требуемый ответ.

5. Ответ: 859.

Решение. Приведём пример, когда получится число 859. Возьмём такую схему, как показано на рис. 69 («магистраль» длины 40 с началом в столице и концом в захолустном городе, к которой прицеплено ещё 39 захолустных городов). Отметим на рёбрах графа расстояния до столицы. Ясно, что искомая сумма в этом случае равна

$$0 + (2+3+\ldots+40) + 40 = (1+2+\ldots+40) + 39 = \\ = \frac{1+40}{2}\cdot 40 + 39 = 859.$$

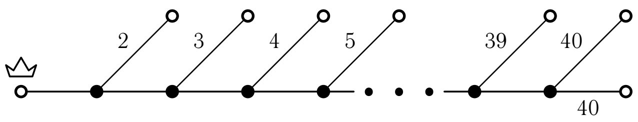


Рис. 69

Теперь докажем, что больше получить нельзя. Для каждой схемы обозначим через m максимальное расстояние от столицы до захолустного города. Назовём два города *близкими*, если они захолустные и выходящие из них дороги ведут в один и тот же город.

Заметим, что для любой схемы найдутся два близких захолустных города A и B, находящиеся на расстоянии m от столицы. Действительно, возьмём произвольный захолустный город A и пройдём по (единственной) выходящей из него дороге. Мы попадём в незахолустный город, из которого выходит 3 дороги. Одна ведёт в столицу, по второй мы только что пришли, а третья ведёт в ещё один город B. Если B — незахолустный город, то найдётся захолустный город B', путь от которого до столицы проходит через B. Но тогда расстояние от столицы до B' будет больше, чем от столицы до B. Это противоречит тому, что A был наиболее удалённым городом. Таким образом, B является захолустным, и потому города A и B — близкие.

Предположим, что найдутся два других близких города. Обозначим через s расстояние от каждого из них до столицы. Удалим выходящие из них дороги и соединим их с A. Подсчитанная сумма изменится на

$$(m+1+m+1+s-1) - (m+s+s) = 1+m-s > 0,$$

то есть новая схема даёт большую сумму. Поэтому для максимальной схемы имеется ровно одна пара близких городов — тех, которые находятся на расстоянии m от столицы. Назовём *скелетом* графа то, что от него остаётся, если убрать все захолустные города. Максимальная схема соответствует графу с неразветвлённым скелетом. Действительно, если бы скелет разветвлялся, то нашлись бы две пары близких городов.

Легко видеть, что граф с неразветвлённым скелетом, удовлетворяющий условиям задачи, — это и есть схема, построенная в примере.

6. Ответ. да, верно.

Решение. Если в данном треугольнике есть сторона целой длины, то разрезать можно, например, так, как показано на рис. 70.

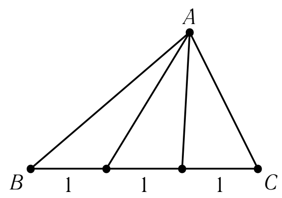


Рис. 70

Пусть таких сторон нет, и в данном треугольнике ABC длина стороны AB больше 1. Отметим на стороне BC такую точку D, чтобы длина DC была целой, а $BD < 1$ (а если $BC < 1$, то будем считать, что D совпадает с C). Проведём окружность радиуса 1 с центром в точке B (см. рис. 71). Так как точка D лежит внутри окружности, а точка A — вне её, то окружность пересечёт отрезок AD в некоторой точке E.

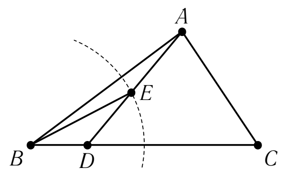


Рис. 71

Таким образом, получим треугольники ABE и BED со стороной $BE = 1$ и, быть может, треугольник ADC с целой стороной DC, к которому применимы предыдущие рассуждения.

7. Решение. На рис. 72 показана искомая схема расстановки чисел.

Доказательство единственности будет проведено для общего случая (см. задачу 8 Высшей Лиги 8–9). В нашем случае граф имеет вид прямоугольной сетки 8×8 (см. рис. 73).

8	9	10	11	12	13	14	**15**
7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8

Рис. 72

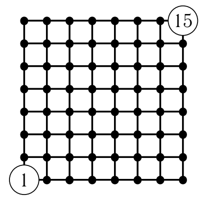


Рис. 73

8. См. задачу 4 Первой Лиги 6–7.

Первая Лига 8–9

1. Решение. Проведём необходимые дополнительные построения (см. рис. 74). Имеем $\angle AXC' = \angle ABC'$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу), также $\angle AXC' = \angle CXA' = \angle CBA'$.

Кроме того, $\angle CXA' + \angle CXA = 180^\circ$ и $\angle CB'A + \angle CXA = 180^\circ$ (так как четырёхугольник $AXCB'$ — вписанный), следовательно, $\angle CXA' = CB'A$, поэтому $\angle CBA' = \angle CB'A = \angle ABC'$.

Аналогично, $\angle A'CB = \angle A'XB = \angle B'XA = \angle B'CA$ и $\angle A'XB = 180^\circ - - \angle AXB = \angle AC'B$, поэтому в треугольниках ABC', $AB'C$ и $A'BC$ равны углы ACB', $A'CB$, $AC'B$ и углы $CB'A$, ABC', $A'BC$, следовательно, эти треугольники подобны.

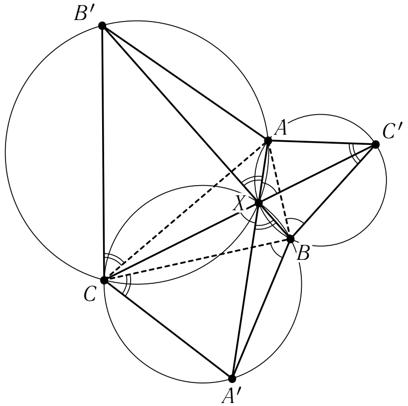


Рис. 74

2. Решение. Пусть K, L, M, N — проекции точки P на прямые AB, BC, CD, DA. Пусть K', L', M', N' — точки, симметричные точке P относительно этих прямых (см. рис. 75). Так как $BK' = BP = BL'$ и $\angle K'BD = = \angle K'BA + \angle ABD = \angle ABP + \angle PBC = = \angle B = \angle L'BD$, прямая BD — серединный перпендикуляр к отрезку $K'L'$. Аналогично, BD — серединный перпендикуляр к отрезку $M'N'$. Следовательно, четырёхугольник $K'L'M'N'$, а значит и гомотетичный ему четырёхугольник $KLMN$, является равнобедренной трапецией или прямоугольником. Именно это и требовалось доказать.

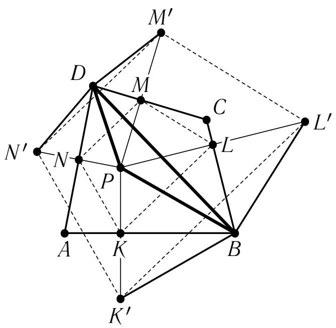


Рис. 75

3. Решение. Числа x и y не могут быть одновременно нечётными, поскольку z^4 не может давать остаток 2 от деления на 4. Поэтому можно считать, что x чётно. Тогда y нечётно, поэтому и z нечётно.

Теперь докажем делимость на 7. Имеем $y^2 = (z^2 - x)(z^2 + x)$. Рассуждая аналогично задаче 3 Высшей Лиги 7, получаем, что числа $z^2 - x$ и $z^2 + x$ взаимно просты, поэтому $z^2 - x = u^2$, $z^2 + x = v^2$ и $y = uv$. Отсюда $2z^2 = u^2 + v^2$. Квадрат целого числа при делении на 7 даёт остаток 0, 1, 2 или 4. Либо $x = z^2 - u^2 = v^2 - z^2$ делится на 7 (и тогда утверждение задачи доказано), либо числа u^2, v^2 и z^2 дают разные остатки от деления на 7. Второй случай невозможен, поскольку удвоенный квадрат целого числа при делении на 7 даёт те же остатки 0, 1, 2 и 4, а сумма двух различных чисел из набора $\{1, 2, 4\}$ не равна числу из этого набора.

4. Решение. Будем обозначать через $[a]$ целую часть числа a, то есть наибольшее целое число, не превосходящее a. Положим $M = \left[10^9\sqrt{2005}\right]$ и возьмём $m = M^2$ и $n = 10^3 \cdot M$. Тогда $\frac{m^2}{n^3} = \frac{1}{10^9} \cdot M$. Поэтому

$$\left|\frac{m^2}{n^3} - \sqrt{2005}\right| < \frac{1}{10^9} \cdot \left|\left[10^9\sqrt{2005}\right] - 10^9\sqrt{2005}\right| < \frac{1}{10^9}.$$

Комментарий. Используя понятие непрерывности функции, можно доказать более общее утверждение без всяких выкладок. Будем искать m и n в виде $m = p^3$ и $n = q^2$. Теперь нам нужно приблизить сколь угодно точно число $\sqrt{2005}$ дробью $\left(\frac{p}{q}\right)^6$. Воспользуемся непрерывностью функции $f(x) = x^6$, то есть тем фактом, что если x и y достаточно близки, то и x^6 и y^6 тоже близки. Осталось приблизить с достаточной точностью число $\sqrt[12]{2005}$ дробью $\frac{p}{q}$ (достаточно взять подходящее приближение достаточно длинной десятичной дробью).

5. Решение. В этой задаче предполагалось, что алхимик может пользоваться весами, чтобы определить, в каком из двух сосудов больше жидкости.

Будем называть *состоянием* (a_1, a_2, a_3, a_4) ситуацию, в которой в сосуде с номером i содержится a_i унций эликсира.

Пусть у нас есть состояние $(a, b, 0, n - a - b)$. Мы можем считать, что $a \leqslant b$. Тогда поставим на весы первый и третий сосуд и уравновесим их при помощи жидкости из второго сосуда, после чего выльем всю жидкость из третьего сосуда в четвёртый. Таким образом мы можем перейти от состояния $(a, b, 0, n - a - b)$ к состоянию $(a, b - a, 0, n - b)$. Назовём этот переход *основным преобразованием*.

При помощи основных преобразований мы можем запустить для a и b алгоритм Евклида. Когда он завершится, мы получим из состояния

$(a, b, 0, n - a - b)$ состояние

$$(\text{НОД}(a, b), 0, 0, n - \text{НОД}(a, b)),$$

причём мы будем знать числа $\frac{a}{\text{НОД}(a,b)}$ и $\frac{b}{\text{НОД}(a,b)}$.

Заметим, что основное преобразование обратимо. Действительно, из состояния $(a, b - a, 0, n - b)$ нетрудно получить состояние

$$(a, b - a, a, n - a - b),$$

а из него — искомое $(a, b, 0, n - a - b)$. Поэтому мы можем обратить и весь алгоритм Евклида.

Вернёмся теперь к исходной задаче: если вначале у нас было состояние $(a, b, c, 0)$, то, проделав для каждой пары сосудов алгоритм Евклида и вернувшись к исходному состоянию, мы получим достаточно информации, чтобы узнать a, b и c. Действительно, вспомнив, что $\text{НОД}(a, b, c) = 1$ (иначе бы алхимик не мог получить одну унцию), получаем, например,

$$a = \text{НОК}\left(\frac{a}{\text{НОД}(a, b)}, \frac{a}{\text{НОД}(a, c)}\right).$$

Последняя формула следует из того, что $a = \text{НОК}(x, y)$ тогда и только тогда, когда $a \mathrel{\vdots} x$, $a \mathrel{\vdots} y$ и $\text{НОД}\left(\frac{a}{x}, \frac{a}{y}\right) = 1$.

6. Решение. Пусть k — число захолустных городов. В сумму всех подсчитанных чисел каждая дорога, выходящая из захолустного города, входит один раз; каждая из остальных $79 - k$ дорог входит не более k раз. Поэтому указанная сумма не превосходит

$$k + k \cdot (79 - k) = k \cdot (80 - k) \leqslant 40^2 = 1600 < 2005.$$

Комментарий. Полученная оценка 1600 является неулучшаемой, то есть существуют схемы с такой суммой чисел. Пример показан на рис. 76.

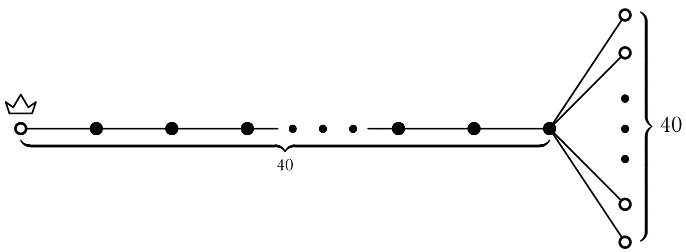


Рис. 76

7. Решение. Для начала заметим, что если какая-либо траектория самопересекается, то можно отбросить все замкнутые петли и считать её несамопересекающейся.

Пусть траектории «северного» и «южного» велосипедистов не пересекаются (кроме начальной и конечной точки). Тогда их объединение ограничивает некоторый клетчатый многоугольник. Пусть в начальный момент он находится, скажем, справа от «северного» велосипедиста (случай «слева» аналогичен — тогда от «южного» велосипедиста многоугольник находится справа). Такое расположение сохраняется в процессе движения велосипедистов (поскольку их траектории не пересекаются). Следовательно, и в начальный, и в конечный момент многоугольник располагается к востоку от местонахождения велосипедистов. Это означает, что «восточный» велосипедист вначале уезжает внутрь многоугольника, а в конце приезжает с внешней стороны. Значит, по дороге он пересекает границу многоугольника, то есть траекторию одного из двух других велосипедистов.

8. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

Высшая Лига 8–9

1. Решение. Обозначим вершины треугольника через A, B, C, а концы хорды — через X и Y. Тогда нам надо доказать, что

$$AX^2 + AY^2 + BX^2 + BY^2 + CX^2 + CY^2 = 3XY^2.$$

Можно считать, что B и C лежат по одну сторону от XY, а A — по другую (см. рис. 77). Обозначим $\angle XBY = \alpha$, тогда $\angle XCY = \alpha$, а $\angle XAY = \pi - \alpha$ (так как все они опираются на хорду XY). Запишем теорему косинусов для отрезка XY в треугольниках AXY, BXY и CXY:

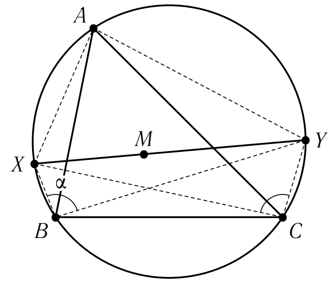


Рис. 77

$$AX^2 + AY^2 - 2AX \cdot AY \cos(\pi - \alpha) = XY^2,$$
$$BX^2 + BY^2 - 2BX \cdot BY \cos\alpha = XY^2,$$
$$CX^2 + CY^2 - 2CX \cdot CY \cos\alpha = XY^2.$$

Сложим эти три равенства, учитывая, что $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$. Теперь нам надо доказать, что

$$BX \cdot BY \cos\alpha + CX \cdot CY \cos\alpha = AX \cdot AY \cos\alpha.$$

Для этого проверим, что

$$\frac{1}{2}BX \cdot BY \sin\alpha + \frac{1}{2}CX \cdot CY \sin\alpha = \frac{1}{2}AX \cdot AY \sin\alpha,$$

то есть что сумма площадей треугольников BXY и CXY равна площади треугольника AXY.

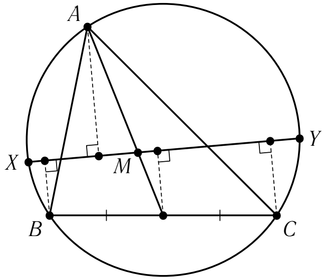


Рис. 78

Распишем эти площади через высоты, опущенные из вершин треугольника на сторону XY (обозначим эти высоты через h_A, h_B и h_C соответственно, см. рис. 78). Теперь нам достаточно доказать равенство $h_B + h_C = h_A$. Пусть h — длина перпендикуляра, опущенного на XY из середины BC. Тогда, с одной стороны, $h = \frac{1}{2}h_A$, так как точка пересечения медиан делит медиану в отношении $2:1$, считая от вершины. С другой стороны, $h = \frac{1}{2}(h_B + h_C)$, так как h — средняя линия в (прямоугольной) трапеции со сторонами h_B и h_C. Отсюда получаем искомое равенство.

2. См. задачу 2 Первой Лиги 8–9.

3. См. задачу 3 Первой Лиги 8–9.

4. Решение. Упорядочим числа по возрастанию: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{400}$. По условию

$$a_{400} < a_1 + a_2 + \ldots + a_8 < 8a_8.$$

Значит, все 393 числа $a_8, a_9, \ldots, a_{400}$ лежат на отрезке от a_8 до $8a_8$. Разделим этот отрезок длины $7a_8$ на $7 \cdot 14 = 98$ равных интервалов длины $\frac{a_8}{14}$ каждый. Так как $393 = 4 \cdot 98 + 1$, то найдётся интервал $\left[b, b + \frac{a_8}{14}\right]$, содержащий хотя бы 5 чисел. Эти числа удовлетворяют условию, поскольку

$$\frac{\left(b + \frac{a_8}{14}\right)^4}{b^4} = \left(1 + \frac{a_8}{14b}\right)^4 \leqslant \left(1 + \frac{a_8}{14a_8}\right)^4 = \left(1 + \frac{1}{14}\right)^4 < \left(1 + \frac{2}{7}\right)^2 < 2.$$

$7\frac{3}{4}$	$8\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{4}$	10	$10\frac{3}{4}$	$11\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	$12\frac{1}{4}$
7	8	9	10	11	12	**13**	$12\frac{1}{4}$
6	7	8	9	10	11	12	$11\frac{1}{2}$
5	6	7	8	9	10	11	$10\frac{3}{4}$
4	5	6	7	8	9	10	10
3	4	5	6	7	8	9	$9\frac{1}{4}$
2	3	4	5	6	7	8	$8\frac{1}{2}$
1	2	3	4	5	6	7	$7\frac{3}{4}$

Рис. 79

5. См. задачу 5 Первой Лиги 8–9.

6. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

7. См. задачу 7 Первой Лиги 8–9.

8. Решение. На рис. 79 приведена искомая расстановка чисел.

Доказательство единственности расстановки мы проведём в несколько более общей ситуации. А именно, будем решать такую основную задачу:

В двух вершинах конечного графа поставлены числа (например, 1 и 13). Доказать, что можно единственным образом расставить числа в остальных вершинах графа так, чтобы каждое число (кроме двух, поставленных изначально) равнялось полусумме своих наибольшего и наименьшего соседей.

Тогда наша задача — это основная задача для графа, имеющего вид прямоугольной сетки 8×8 (см. рис. 80).

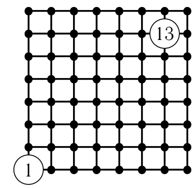


Рис. 80

Пусть у нас есть некоторая расстановка чисел, удовлетворяющая условию. Назовём её *правильной*. Приведём алгоритм восстановления чисел в вершинах графа. Алгоритм не будет зависеть от начальной расстановки, поэтому все правильные расстановки будут равны той, которая будет получена с помощью алгоритма, а значит, все равны между собой.

Через $R(v)$ будем обозначать число, записанное в вершине v. Алгоритм работает шагами, перед каждым шагом известны числа в части вершин (такие вершины будем называть *пройденными*). Перед первым шагом пройденными вершинами будут только две вершины. За каждый шаг работы алгоритм присоединяет к пройденным одну или несколько вершин. Таким образом, в конце работы алгоритма все вершины будут пройдены.

Опишем теперь шаг алгоритма. Назовём *допустимым* путь, у которого концы — это пройденные вершины, а все промежуточные вершины пути — непройденные. Назовём *наклоном* допустимого пути отношение разности известных алгоритму чисел в концах пути к количеству рёбер в пути. Другими словами, наклон пути — это разность арифметической прогрессии, «натянутой» на его концы с заданными значениями.

Алгоритм выбирает из множества всех допустимых путей путь с максимальным наклоном. Для нахождения такого пути достаточно рассмотреть все кратчайшие допустимые пути, поскольку от сокращения пути наклон только возрастает. Найдя путь с максимальным наклоном, алгоритм делает его промежуточные вершины пройденными, а числа в этих вершинах расставляет так, чтобы они образовывали арифметическую прогрессию вместе с уже известными значениями на концах пути.

Докажем по индукции корректность работы алгоритма. На нулевом шаге два известных числа найдены, разумеется, правильно. Пусть перед каким-то шагом все известные алгоритму числа найдены правильно; докажем, что на этом шаге построенные алгоритмом значения также правильны.

Пусть $\{v_1, v_2\}$ — ребро с максимальной разностью чисел в v_1 и v_2 среди всевозможных рёбер с концами в непройденных вершинах. Предположим для определённости, что значение в v_2 больше. Тогда v_2 — сосед v_1 с максимальным значением среди всех соседей. Пусть v_0 —

сосед v_1 с минимальным числом. $R(v_1) = \frac{1}{2}(R(v_0) + R(v_2))$, откуда

$$R(v_1) - R(v_0) = R(v_2) - R(v_1).$$

Аналогично, пусть v_{k+1} — сосед v_k с максимальным значением, v_{k-1} — сосед v_k с минимальным значением. Заметим, что

$$R(v_k) = \frac{1}{2}(R(v_{k-1}) + R(v_{k+1})),$$

откуда

$$R(v_k) - R(v_{k-1}) = R(v_{k+1}) - R(v_k).$$

Поскольку граф конечен, последовательность обязательно придёт в пройденную вершину и справа, и слева. Будем считать, что построение последовательности в обе стороны обрывается на пройденных вершинах. Значит, последовательность $R(v_i)$ является конечной арифметической прогрессией с известными алгоритму концами. Осталось только заметить, что последовательность v_i — путь с наибольшим наклоном, поскольку его наклон равен длине ребра с самой большой разностью значений на концах, а ни один путь не может иметь больший наклон. Тогда алгоритм выберет путь с точно таким же наклоном; но это возможно только в том случае, если значения на этом пути образуют арифметическую прогрессию. Доказательство закончено.

2.2.4. Четвёртый тур

Высшая Лига 7

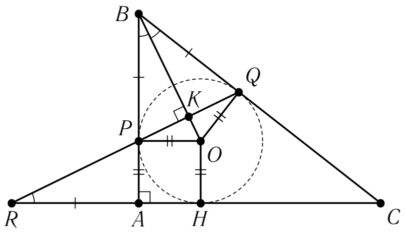


Рис. 81

1. Решение. Четырёхугольник $APOH$ является квадратом, поэтому $AP = PO$. Прямоугольные треугольники OPB и OQB равны по гипотенузе и катету. Далее, $\angle OBP = \angle ARP$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Значит, треугольники ARP и OPB равны по катету и острому углу. Отсюда $AR = BP = BQ$, что и требовалось доказать.

2. Первое решение. Проведём высоту BH в треугольнике ABC и высоту MK в треугольнике AMB. Поскольку в равнобедренном треугольнике высота является медианой, получаем, что $AH = HC$. Отсюда $AM = 2MH$. Рассмотрим прямоугольный треугольник AMK.

У него один из углов равен 30°, поэтому меньший катет MK равен половине гипотенузы AM. Следовательно, $MK = MH$. Поэтому прямоугольные треугольники BMK и BMH равны по гипотенузе и катету, следовательно, $\angle MBK = \angle MBH$, то есть BM — биссектриса треугольника ABH. А так как $\angle ABH = 60°$, получаем, что $\angle MBH = 30°$. Отсюда $\angle MBC = 30° + 60° = 90°$.

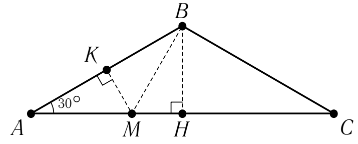


Рис. 82

Второе решение. Решим задачу с помощью обратного хода. Пусть M' — такая точка на отрезке AC, что $\angle M'BC = 90°$, тогда $\angle M'BA = 120° - 90° = 30°$, следовательно, треугольник $AM'B$ — равнобедренный с основанием AB. Значит, $AM' = BM'$. По свойству прямоугольного треугольника с углом в 30° получаем, что $BM' = \frac{1}{2}M'C$, то есть M' делит отрезок в отношении 1 : 2. Но точка, делящая отрезок в заданном отношении, единственна, поэтому $M' = M$.

3. Ответ: $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$.

Решение. Так как дробь $\frac{a}{b}$ по условию существует, получаем, что $b \neq 0$. Поэтому числа $a + b$ и $a - b$ не равны, а остальные два равны одному из них.

Допустим, что $a = 0$. Тогда либо $0 - b = 0 \cdot b$, либо $0 + b = 0 \cdot b = 0$, что невозможно, поскольку $b \neq 0$. Значит, $a \neq 0$ и обе части равенства $ab = \frac{a}{b}$ можно разделить на a. Получаем, что $b^2 = 1$. Если $b = 1$, то получаем три значения $a + 1$, $a - 1$ и a для четырёх чисел, и потому этот случай не подходит. Значит, $b = -1$ и либо $a - 1 = -a$, либо $a + 1 = -a$. В первом случае получаем $a = \frac{1}{2}$, во втором случае получаем $a = -\frac{1}{2}$.

4. Ответ: нет, не может.

Решение. Предъявим такую стратегию второго игрока, что как бы ни ходил первый, второй сможет сделать так, чтобы количество цифр на доске не превышало некоторого заданного числа, например, 100. Предположим, в какой-то момент времени после хода первого игрока на доске появилось 100-значное число. Возможны следующие случаи:

1) Среди цифр, написанных на доске, есть две подряд идущих одинаковых цифры. Тогда второй стирает эти две цифры. Поскольку первый игрок очередным ходом может добавить только одну цифру, количество цифр на доске за эти два хода не увеличилось.

2) На доске нет двух одинаковых рядом стоящих цифр, но есть сочетания вида aba, где a, b — какие-то из цифр 1, 2, 3. Достаточно рассмотреть один случай, например, когда на доске встретился набор 121. Тогда следующим ходом второй приписывает две двойки так: ...**22**121...

(на доске $100+2$ цифры), после хода первого на доске $100+3$ цифры, следующим ходом второй стирает цифры 2121 (на доске $100-1$ цифра), и после хода первого на доске по-прежнему 100 цифр.

3) Не выполняется ни первое, ни второе. Тогда одинаковые цифры разнесены между собой на два разряда, то есть любые шесть подряд идущих цифр выглядят так: $abcabc$.

Рассмотрим случай, когда встретился набор 123123. Стратегия второго игрока представлена в таблице (жирным отмечены цифры, приписываемые вторым игроком):

Кто ходит	Как ходит	Количество цифр
2-ой	$\ldots 1231\mathbf{33}23\ldots$	$+2$
1-ый	$\ldots 1231\mathbf{33}23\ldots x_1$	$+3$
2-ой	$\ldots 12\mathbf{11}313323\ldots x_1$	$+5$
1-ый	$\ldots 12\mathbf{11}313323\ldots x_1x_2$	$+6$
2-ой	$\ldots 121131332\mathbf{22}\ldots x_1x_2$	$+8$
1-ый	$\ldots 121131332\mathbf{22}\ldots x_1x_2x_3$	$+9$
2-ой	$\ldots 12132322\ldots x_1x_2x_3$	$+5$
1-ый	$\ldots 12132322\ldots x_1x_2x_3x_4$	$+6$
2-ой	$\ldots 1212\ldots x_1x_2x_3x_4$	$+2$
1-ый	$\ldots 1212\ldots x_1x_2x_3x_4x_5$	$+3$
2-ой	$\ldots \quad \ldots x_1x_2x_3x_4x_5$	-1
1-ый	$\ldots \quad \ldots x_1x_2x_3x_4x_5x_6$	0

Таким образом, указанная стратегия позволяет второму игроку сделать так, чтобы записанное на доске число никогда не стало 2005-значным.

5. Решение. Будем называть *диагональю* графа пару вершин, не соединённых ребром. Поставим в соответствие каждой диагонали некоторое простое число, причём разным диагоналям будем ставить в соответствие различные числа (это всегда можно сделать, поскольку простых чисел бесконечно много). Пусть диагоналей n штук, обозначим эти числа $p_1, \ldots, p_n$.

Расставим в вершинах графа числа 1. Затем выберем одну из диагоналей и умножим числа во всех вершинах графа, кроме тех двух, которые образуют выбранную диагональ, на простое число, соответствующее этой диагонали. Эту операцию проведём для каждой диагонали. В итоге получим граф, у которого в вершинах стоят некоторые числа. Покажем, что этот граф — искомый.

Зафиксируем произвольное ребро графа. Очевидно, что для всякой диагонали одна из вершин этого ребра не принадлежит диагонали. Следовательно, число хотя бы в одной из вершин ребра будет умножено

на простое число, соответствующее диагонали. Поскольку простые числа, соответствующие разным диагоналям, различны, получаем, что наименьшее общее кратное чисел в вершинах, соединённых ребром, будет равно произведению $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$. Значит, первое условие задачи соблюдено.

Теперь рассмотрим диагональ с номером k. Ей соответствует простое число p_k. По построению, ни одна из вершин диагонали не будет умножена на p_k. Что касается всех остальных множителей, то они, по тем же соображениям, что и для рёбер, попадут хотя бы в одну вершину. Значит, наименьшее общее кратное чисел в вершинах, не соединённых ребром, будет равно $p_1 \cdot \ldots \cdot \widehat{p}_k \cdot \ldots \cdot p_n$ (крышка означает пропуск множителя). Таким образом, наименьшее общее кратное чисел на каждой из диагоналей будет своим (поскольку все числа различны).

6. Решение. Мы будем доказывать утверждение по индукции. Сначала докажем, что из его справедливости для $n=k$ при $k \geqslant 10$ следует, что оно справедливо для $n=k+4$.

Пусть числа $1, \ldots, k$ можно разбить на две группы с произведениями, равными A и B соответственно, так, что $\frac{A}{B} < 1,03$, причём $A \geqslant B$. Добавим числа $k+1$ и $k+4$ в группу «А», а числа $k+2$ и $k+3$ определим в группу «В». Тогда произведение чисел в новой первой группе равно $A_1 = A\cdot(k+1)\cdot(k+4)$, а во второй группе равно $B_1 = B\cdot(k+2)\cdot(k+3)$.

Возможны два случая. Если $A_1 \geqslant B_1$, то условие выполнено, поскольку

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A}{B}\cdot\frac{k^2+5k+4}{k^2+5k+6} < 1,03\cdot 1 = 1,03.$$

Если же $B_1 > A_1$, то отношение большего к меньшему всё равно изменится не сильно:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{B}{A}\cdot\frac{k^2+5k+6}{k^2+5k+4} = \frac{B}{A}\cdot\left(1+\frac{2}{k^2+5k+4}\right) < \\ < 1\cdot\left(1+\frac{2}{10^2+5\cdot 10+4}\right) < 1,03.$$

Чтобы завершить доказательство, осталось обосновать базу индукции, то есть предъявить требуемые разбиения для $n = 10, 11, 12, 13$. Они приведены в следующей таблице:

n	Группа «А»	Группа «В»	Отношение
10	$1\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10=1920$	$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9=1890$	$<1,02$
11	$1\cdot3\cdot4\cdot6\cdot8\cdot11=6336$	$2\cdot5\cdot7\cdot9\cdot10=6300$	$<1,01$
12	$1\cdot4\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11=22176$	$2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot10\cdot12=21600$	$<1,03$
13	$1\cdot2\cdot5\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11=79200$	$3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot12\cdot13=78624$	$<1,01$

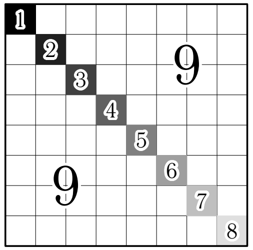


Рис. 83

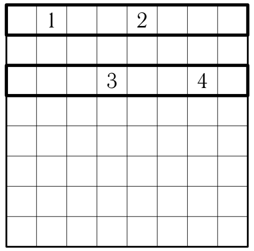


Рис. 84

7. Ответ: 9 цветов.

Решение. Доску можно покрасить в 9 цветов так, как показано на рис 83.

Докажем, что большее количество цветов использовать нельзя. Докажем сначала, что количество цветов не превосходит 10. В первой строке есть клетки не более чем двух цветов, например, цвета 1 и цвета 2 (клеток цвета 2 может не быть вовсе). Рассмотрим какой-нибудь столбец. При покраске этого столбца мы можем использовать не более одного нового цвета (отличного от 1 и 2). Таким образом, использовав не более двух цветов на покраску первой строки, для окрашивания оставшихся 8 столбцов мы можем потратить не более 8 новых цветов, поэтому всего может быть использовано не более 10 цветов.

Докажем теперь, что покрасить доску, использовав 10 цветов, невозможно. Предположим, что нам это удалось. Поскольку количество строк меньше, чем число цветов, найдётся строка, в которой используются два различных цвета (назовём их 1 и 2). Без ограничения общности можно считать, что это первая строка (см. рис. 84). Назовём её первой выделенной строкой. Клетки цветов $3, \ldots, 10$ уже нельзя ставить в первую выделенную строку, значит, эти цвета сосредоточены в оставшихся семи строках. Но так как осталось 8 цветов, какие-то два из них придётся поставить на одну строку. Без ограничения общности это цвета 3 и 4. Будем называть строку, в которой они стоят, второй выделенной строкой. Рассмотрим теперь произвольный столбец. В нём уже есть клетка цвета 1 или цвета 2 (в первой выделенной строке) и клетка цвета 3 или цвета 4 (во второй выделенной строке). Значит, для покраски этого столбца уже нельзя использовать никаких других цветов, кроме 1, 2, 3 или 4. Значит, вся таблица покрашена только в 4 цвета, а не в 10. Полученное противоречие показывает, что 10 цветов использовать нельзя.

8. Ответ: для нечётных n.

Решение. Заметим, что делителями числа $2n$ являются все делители числа n, а также все вдвое большие их числа. Для нечётных n эти два множества делителей не пересекаются, то есть $S(2n) = S(n) + 2S(n) = 3S(n)$. Если же n чётно, то эти множества пересекаются, например, по числу 2 (оно является одновременно делителем числа n и удвоенным делителем числа n). Следовательно, $S(2n) < S(n) + 2S(n)$, то есть равенство выполняется только при нечётном n.

Вариант В

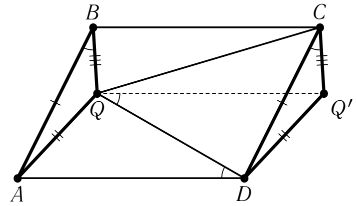


Рис. 85

1. Решение. Построим треугольник $CQ'D$, равный треугольнику ABQ, как показано на рис. 85. Тогда $AQ = DQ'$, $AQ \parallel DQ'$, следовательно, $AQQ'D$ — параллелограмм.

Так как $\angle DQQ' = \angle ADQ = \angle ABQ = \angle DCQ'$, то четырёхугольник $QCQ'D$ — вписанный, поэтому $\angle DQ'C + \angle CQD = \angle BQA + \angle CQD = 180°$.

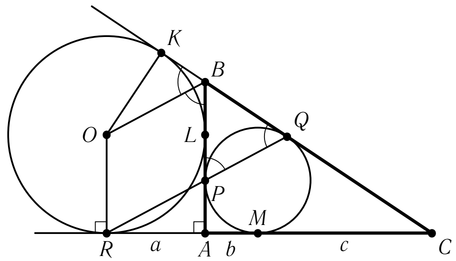


Рис. 86

2. Первое решение. Пусть O — центр вневписанной окружности, K и L — точки касания вневписанной окружности с продолжением стороны BC и стороной AB, соответственно. Пусть M — точка касания вписанной окружности со стороной AC (см. рис. 86).

Так как $OLAR$ — квадрат, то $OR \parallel AB$ и $OR = AL$.

Докажем, что $BL = AP$. Поскольку $CK = CR$ и $CQ = CM$ (как отрезки касательных), то $CK - CQ = CR - CM$, то есть $BK + BQ = AM + AR$. Используя равенства $RA = AL$, $AM = AP$, $BQ = BP$ и $BK = BL$ (как отрезков касательных), получаем, что $BL + BP = AL + AP$, то есть $2BL + LP = 2AP + LP$, следовательно, $BL = AP$ и $BP = AL$.

Отсюда $OR = AL = BP$ и $OR \parallel AB$, следовательно, $OBPR$ — параллелограмм.

С другой стороны, BO — биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника BPQ, следовательно, $BO \parallel QP$.

Таким образом, $OB \parallel RP$ и $OB \parallel PQ$, следовательно, точки Q, P и R лежат на одной прямой.

Второе решение. Воспользуемся теоремой Менелая. Чтобы доказать, что точки Q, P и R лежат на одной прямой, нам достаточно доказать, что $\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1$ или, поскольку $BQ = BP$, что $\frac{CR \cdot AP}{QC \cdot AR} = 1$.

Пусть $AR = a$, $AM = b$, $CM = c$. Тогда $CR = a + b + c$, $QC = c$ и $AP = b$, и надо доказать, что $\frac{(a+b+c)b}{ac} = 1$.

Используем доказанное в первом способе равенство отрезков BL

и AP: $AB = AL + BL = AR + AP = AR + AM = a + b$, $BC = BQ + CQ = BP + CM = AL + CM = a + c$. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ABC верно равенство $AC^2 + AB^2 = BC^2$, то есть $(a+b)^2+(b+c)^2 = (a+c)^2$. Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим $ab + b^2 + bc = ac$, следовательно, $b(a + b + c) = ac$. А это и требовалось доказать.

3. См. задачу 4 Высшей Лиги 7.

4. См. задачу 5 Высшей Лиги 7.

5. См. задачу 6 Высшей Лиги 7.

6. См. задачу 7 Высшей Лиги 7.

7. Решение. Разделим каждую из букв пунктирными линиями на три части так, чтобы центральные части были центрально-симметричными, а крайние части — равны по площади (см. рис. 87). Так, у буквы «Б» крайние части имеют площадь 5, а у буквы «П» — площадь 3 (единица площади — квадрат из 9 маленьких клеточек). Точки C_1 и C_2 — центры симметрии центральных частей букв. Заметим, что всякая прямая, проходящая через точку C_1 и пересекающая букву «Б» только по центральной части, делит её на две части равной площади. Аналогично, всякая прямая, проходящая через точку C_2 и пересекающая букву «П» только по центральной части, делит её на две части равной площади. Следовательно, прямая C_1C_2 разбивает каждую из букв на части равной площади (легко проверить, что она наклонена не настолько сильно, чтобы задеть крайние части буквы «Б»). Построить её не составляет труда.

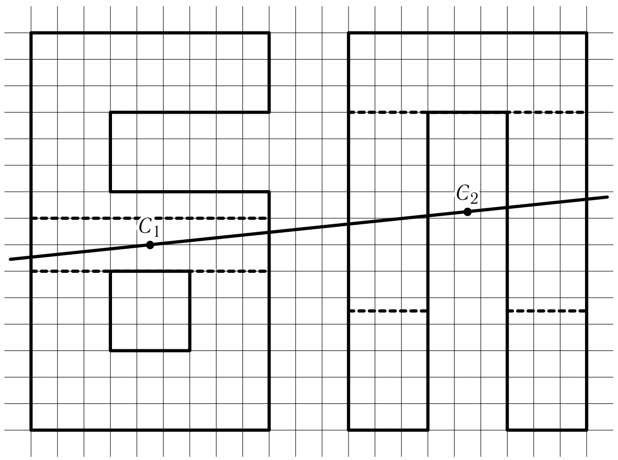


Рис. 87

8. Решение. Положим $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$ и $c = \frac{1}{z}$. Тогда $a + b + c = 1$, а выражение в левой части перепишется в следующем виде:

$$L = \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} + \frac{bc(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{ca(c+a)}{c^2+ca+a^2}.$$

Оценивая сумму квадратов в знаменателе снизу с помощью неравенства $A^2 + B^2 \geqslant 2AB$, получаем

$$L \leqslant \frac{ab(a+b)}{3ab} + \frac{bc(b+c)}{3bc} + \frac{ca(c+a)}{3ca} = \frac{2(a+b+c)}{3} = \frac{2}{3},$$

что и требовалось доказать.

Вариант А

1. См. задачу 1 Варианта В.

2. См. задачу 2 Варианта В.

3. См. задачу 4 Высшей Лиги 7.

4. Ответ: выигрывает второй.

Решение. Будем называть столбец (или строку) *открытым*, если в нём закрашена ровно одна клетка, и *закрытым*, если закрашенных клеток — две.

Будем ходить каждым ходом в пустой столбец и в ту же строку, что и первый, до тех пор, пока первый не закроет какой-нибудь столбец, либо пока не кончатся пустые столбцы. В первом случае ещё есть пустые столбцы (после хода второго всегда оставалось нечётное число ещё неоткрытых столбцов), поэтому второй может, сходив в ту же строку, открыть новый столбец. Во втором случае второй, сходив в ту же строку, закрывает любой столбец. И в том и в другом случае после хода второго остаётся чётное число открытых столбцов и чётное число пустых столбцов (то есть тех, в которые ещё не ходили).

Теперь второй будет поддерживать сложившуюся после его хода ситуацию, то есть

- чётное число открытых столбцов,
- чётное число пустых столбцов,
- нет открытых строк,

действуя следующим образом: если первый открывает новый столбец, то и второй открывает новый столбец, сходив в ту же строку. Если первый закрывает столбец, то и второй закрывает любой другой столбец, сходив в ту же строку.

Второй всегда может сделать ход, следуя этой стратегии, значит, он не проиграет. Поскольку ничьих не бывает, то он выиграет.

5. См. задачу 5 Высшей Лиги 7.

6. Решение. Заметим, что если (a, b, c) — решение данного уравнения, то $(p^6 \cdot a, p^4 \cdot b, p^3 \cdot c)$ — тоже решение (здесь p — произвольное натуральное число). Следовательно, достаточно найти хотя бы одно решение. Рассмотрим тождество $1 + 8 = 9$ и домножим его на 3^6, получим $3^6 + 2^3 \cdot 3^6 = 3^8$. Переписывая его в виде $(3^3)^2 + (2 \cdot 3^2)^3 = (3^2)^4$, видим, что решением нашего уравнения является, например, тройка $(27, 18, 9)$.

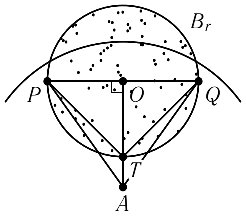


Рис. 88

7. Решение. Пусть B_r — круг минимального радиуса, накрывающий все красные точки, а B_b — круг минимального радиуса, накрывающий все синие точки. Без ограничения общности, радиус B_r не превосходит радиус B_b.

В силу минимальности на границе B_r найдутся либо две диаметрально противоположные красные точки, либо три красные точки, образующие остроугольный треугольник (иначе круг B_r можно было бы уменьшить). Поскольку любой круг радиуса 1 с центром в синей точке содержит все красные точки, то он должен содержать по крайней мере половину окружности круга B_r.

Допустим, что радиус круга B_r больше, чем $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Все синие точки не могут лежать *строго внутри* круга B_r (иначе их можно было бы накрыть кругом меньшего радиуса). Поэтому есть синяя точка, лежащая на границе B_r или вне его. Обозначим эту синюю точку через A. Покажем, что круг радиуса 1 с центром в точке A (будем называть его синим) содержит менее половины окружности круга B_r.

Предположим противное. Пусть O — центр B_r. Тогда синий круг содержит диаметр PQ красного круга, перпендикулярный AO (см. рис. 88). Точку пересечения отрезка AO и красной окружности обозначим через T. Имеем $OP = OT > \frac{1}{\sqrt{2}}$, поэтому

$$PT > \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1.$$

Но так как $OA \geqslant OT$, то $1 \geqslant PA \geqslant PT$. А мы только что доказали, что $PT > 1$. Противоречие.

Итак, синий круг содержит менее половины окружности круга B_r, а с другой стороны имеет радиус 1. Но мы уже в самом начале доказали, что такого не может быть. Значит, исходное допущение неверно, и на самом деле радиус B_r не превосходит $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

8. Ответ: нет, не существует.

Решение. Рассмотрим первые 99 членов этой последовательности: $a_1, \ldots, a_{99}$. Положим

$$P = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{99}, \quad S = a_1 + \ldots + a_{99}.$$

Пусть a — какой-либо член этой последовательности. По условию имеем $(P \cdot a) \vdots (S + a)$. Положим $d = \text{НОД}(a, S + a)$. Из алгоритма Евклида следует, что $d \leqslant S$. Кроме того, $(P \cdot d) \vdots (S + a)$. Отсюда следует, что $P \cdot d \geqslant S + a$, а из предыдущего неравенства — что $P \cdot S \geqslant P \cdot d$. Следовательно, имеет место цепочка неравенств:

$$P \cdot S \geqslant P \cdot d \geqslant S + a.$$

Числа P и S — фиксированные, а число a было произвольным членом последовательности. Из последнего неравенства следует, что $a \leqslant P \cdot S - S$, то есть число a ограничено константой. Следовательно, последовательность не может быть бесконечно возрастающей.

2.3. Личная олимпиада

2.3.1. 6–7 класс

Довывод

1. Решение. Заметим, что, переставляя буквы в словах ELEVEN и TWO, мы можем получить слова ONE и TWELVE. Следовательно, слово TWELVE стоит $\$16 + \$9 - \$6 = \$19$.

Комментарий. Заметим, что и на самом деле TWELVE = ELEVEN+ + TWO − ONE, так как $12 = 11 + 2 - 1$.

2. Решение. Развернём книжку так, чтобы угол между страницами стал прямым, а затем вырежем из неё полоску, как показано на рис. 89.

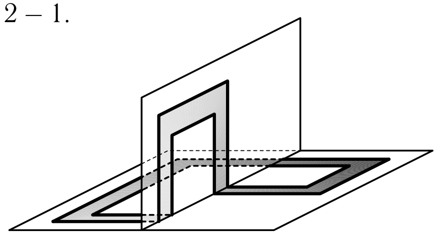


Рис. 89

3. Решение. Увеличим номер каждой оставшейся нечётной страницы на 1. Тогда обе страницы на каждом листе имеют одинаковые чётные номера и их сумма кратна 4. Значит, сумма всех «новых» номеров оставшихся страниц кратна 4. Поскольку вырвано в 4 раза меньше страниц, чем осталось, то количество оставшихся страниц также делится на 4. Следовательно, мы увеличили сумму номеров страниц на число, кратное 4, а значит и исходная сумма номеров невырванных страниц кратна 4.

4. Решение. Пусть в вершинах записаны числа a, b и c. Тогда на сторонах записаны числа ab, bc и ac, а в самом треугольнике — число abc. По условию,

$$a + b + c + ab + ac + bc + abc = 1000.$$

Прибавим к обоим частям уравнения по 1, получим

$$1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc = 1001.$$

Сгруппируем слагаемые в левой части и разложим её на множители:

$$\begin{aligned}(1 + a) + (b + ab) + (c + ac) + (bc + abc) &= \\ = (1 + a) + (1 + a)b + (1 + a)c + (1 + a)bc &= \\ = (1 + a)(1 + b + c + bc) = (1 + a)(1 + b + c(1 + b)) &= \\ = (1 + a)(1 + b)(1 + c) = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.&\end{aligned}$$

Заметим, что поскольку числа a, b и c — натуральные, то ни одна из скобок не равна 1. Следовательно, $a + 1$, $b + 1$ и $c + 1$ — числа 7, 11, 13, взятые в некотором порядке, поэтому a, b и c — это числа 6, 10, 12.

Вывод

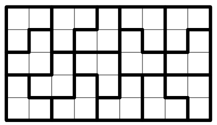


Рис. 90

5. Решение. Нет, неверно. Например, можно разрезать прямоугольник 5×9 на уголки из трёх клеток так, как показано на рис. 90.

6. Ответ: нет, не могут.

Решение. Раскрасим кварталы города в шахматном порядке так, чтобы справа от первого велосипедиста в момент старта находился чёрный квартал. Докажем, что в каждый момент времени чёрный квартал находится справа от любого из велосипедистов. Действительно, пусть это было верно в некоторый момент времени. Доехав до конца квартала, велосипедист либо повернёт налево, и тогда справа от него будет другой чёрный квартал, либо повернёт направо, и тогда справа от него окажется тот же чёрный квартал.

Теперь докажем, что велосипедисты не встретятся. Очевидно, что они не могут встретиться на перекрёстке. Поскольку велосипедисты едут с одной скоростью, они смогут встретиться, только если будут ехать навстречу друг другу. Но тогда получится, что чёрный квартал находится по левую руку от одного из велосипедистов. А это невозможно.

7. Решение. Пусть ABC — данный треугольник, CD — его медиана. Построим угол $ABE = 30°$ (см. рис. 91). Тогда треугольник ABE — равнобедренный с основанием AB. В нём медиана является высотой и биссектрисой, поэтому $\angle DEB = \angle DEA = 60°$. Продолжим отрезок BE за точку E, тогда EA — биссектриса угла FED. Следовательно, точка C — точка пересечения биссектрисы внешнего угла FED и биссектрисы угла ABE, поэтому она равноудалена от прямых EF, DE и AD. Следовательно, точка C лежит на биссектрисе внешнего угла ADE. Так как угол ADE — прямой, то $\angle CDE = \frac{1}{2}\angle ADE = 45°$.

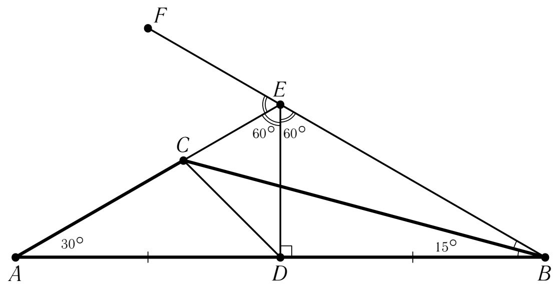


Рис. 91

2.3.2. 8–9 класс

Довывод

1. Решение. Будем называть параллельными не только прямые, не имеющие общих точек, но и совпадающие. Каждая из данных парабол имеет ось симметрии, параллельную прямой Oy. Поскольку параболы симметричны относительно прямой ℓ, то и эти оси симметричны относительно ℓ. Следовательно, они либо параллельны прямой ℓ (тогда ℓ параллельна оси ординат), либо перпендикулярны ей (тогда ℓ параллельна оси абсцисс).

2. Решение. Пусть тумба находится в точке T. Тогда лев движется вдоль ломаной $TABC$ (см. рис. 92). Продолжим AT до пересечения с окружностью в точке D. Хорды BC и AD симметричны относительно центра окружности, так как они перпендикулярны хорде AB. Следовательно, независимо от начального направления, лев пройдёт через точку T', симметричную точке T относительно центра окружности.

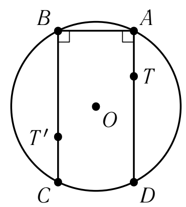


Рис. 92

3. Ответ: нет, нельзя.

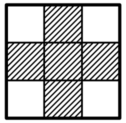


Рис. 93

Первое решение. Пусть можно добиться того, чтобы все числа стали равны некоторому натуральному числу n. Тогда сделано $3n$ ходов. Рассмотрим крест из пяти клеток (см. рис. 93). Любой уголок занимает не менее двух клеток креста и не более одной клетки вне креста. Следовательно, при увеличении трёх чисел на 1 сумма чисел в клетках креста увеличивается по крайней мере на 1 больше, чем сумма чисел в остальных клетках. Значит, после $3n$ ходов сумма чисел в клетках креста будет отличаться от суммы чисел в остальных клетках не менее, чем на $3n$, а должна отличаться на $5n - 4n = n$.

Второе решение. Пусть можно добиться того, чтобы все числа стали равны некоторому натуральному числу n. Тогда сумма всех чисел в квадрате равна $9n$. Рассмотрим углы квадрата. Заметим, что с помощью одного уголка нельзя увеличить число одновременно в двух углах. Значит, нужно поставить минимум $4n$ уголков. Но тогда сумма чисел во всём квадрате будет не меньше $4 \cdot 3n = 12n > 9n$. Противоречие.

4. Первое решение. Возведём левую часть неравенства в квадрат и применим неравенство $(A+B)^2 \leqslant 2(A^2+B^2)$:

$$\left(\sqrt{1-\frac{a^2}{(a+b)^2}}+\sqrt{1-\frac{b^2}{(a+b)^2}}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\left(1-\frac{b^2}{(a+b)^2}\right)+\left(1-\frac{a^2}{(a+b)^2}\right)\right)=$$

$$=2\left(1+1-\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\right)=2\left(1+\frac{2ab}{(a+b)^2}\right)\leqslant 2\left(1+\frac{1}{2}\right)=3.$$

Второе решение. Так как $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{x+y}{2}}$, то

$$\sqrt{1-\frac{a^2}{(a+b)^2}}+\sqrt{1-\frac{b^2}{(a+b)^2}} \leqslant \sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{(a+b)^2}+1-\frac{b^2}{(a+b)^2}}=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{2ab+b^2+2ab+a^2}{(a+b)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2a^2+2b^2+8ab}{(a+b)^2}}=\sqrt{2+\frac{4ab}{(a+b)^2}}\leqslant\sqrt{3},$$

так как $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

Вывод

5. Решение. По условию каждая команда в первой игре забила 1 гол. В случае ничьей она и пропустила 1 гол. Тогда для другой команды эта встреча также была первой. Так как количество команд нечётно, их нельзя разбить на пары. Значит, хотя бы одна из команд сыграла не вничью свой первый матч. Аналогичное верно для вторых, третьих, …, десятых матчей. Поскольку каждый матч учтён дважды, результативных матчей (то есть не ничейных) было не менее 5, а тогда ничьих было не больше $\frac{11\cdot 10}{2} - 5 = 50$.

Приведём пример турнира с 50 ничьими. Занумеруем команды числами от 1 до 11 и в таком порядке расположим по кругу. Составим 5 пар из соседних команд (оставив 11-ю команду без пары). Сначала играют между собой команды в парах, а затем 11-я играет с 1-й (со счётом 1 : 2). Снова объединяем команды в пары, исключая на этот раз 1-ю, и пусть снова встретятся команды в парах (и вновь будет 5 ничьих).

Теперь расположим команды по кругу с шагом 2, а именно в порядке 1 3 5 7 9 11 2 4 6 8 10 (у каждой команды оба соседа поменялись). Применив ту же схему розыгрыша, получим ещё 11 игр, из которых одна результативная. Далее применим эту же схему для шага 3, 4 и 5. Всего получим $11 \cdot 5 = 55$ игр, из которых 50 ничьих, что и требовалось.

6. Решение. Так как четырёхугольник $ZTVW$ — вписанный, то $\angle CTV = \angle ZWV = \angle BAC$ (см. рис. 94). Прямая VT параллельна касательной CR в точке C к окружности ω, описанной около треугольника ABC, так как $\angle BAC = \angle BCR$. Рассмотрим точку M — середину отрезка VT. Имеем $PM = MC$, так как $PTCV$ — параллелограмм.

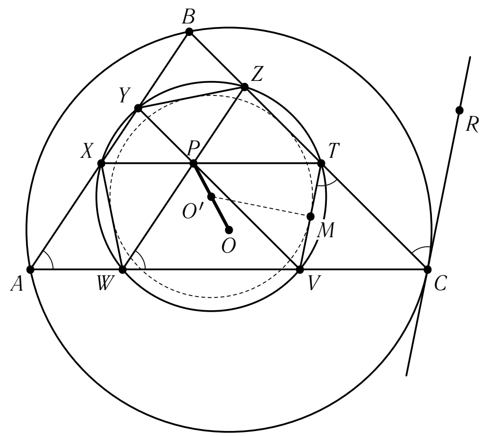


Рис. 94

Сделаем гомотетию с центром в точке P с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Пусть центр O окружности ω при этой гомотетии переходит в точку O'. Окружность ω перейдёт в окружность ω′, проходящую через середины отрезков XW, YZ и VT. Эти отрезки будут касаться окружности ω′, поскольку при гомотетии касательная CR останется параллельной самой себе и перейдёт в прямую VT. Кроме того, точки касания окружности ω′ будет серединами отрезков XW, YZ и VT. Далее, эти отрезки попарно равны как боковые стороны трапеций, вписанных в окружность. Значит, точки X, Y, Z, T, V и W будут равноудалены от точки O'. Поэтому точка O' является центром окружности, проходящей через точки X, Y, Z, T, V, W. По построению, точки P, O и O' лежат на одной прямой (ибо O' гомотетична O относительно P).

7. Ответ: да, существует.

Решение. Возьмём простые числа p и q такие, что $2004 < p < q$, и рассмотрим вначале следующую арифметическую прогрессию с разностью $q - p$:

$$p, q, \ldots, p + 2004(q - p).$$

Ясно, что число $p + k(q - p)$, где $0 \leqslant k \leqslant 2004$, делится на p лишь при $k = 0$, то есть ни один из членов прогрессии, кроме первого, не делится на p. Аналогично, такое число делится на q лишь при $k = 1$, то есть ни один член прогрессии, кроме второго, не делится на q. Обозначим через P произведение всех членов нашей прогрессии и докажем, что арифметическая прогрессия

$$P \cdot p, P \cdot q, \ldots, P \cdot \bigl(p + 2004(q - p)\bigr)$$

является искомой. Произведение всех её членов, равное P^{2006}, является точным квадратом. Далее, любой член новой прогрессии, кроме первого, делится на p и не делится на p^2, а первый член делится на q и не делится на q^2. Значит, точных квадратов среди членов этой прогрессии нет.

2.4. Командная олимпиада

1. Решение. По условию,

$$(10 \cdot A + X)(10 \cdot Э + X) = (10 \cdot X + Э)(10 \cdot X + A).$$

Раскрыв скобки в этом выражении, получим

$$100 \cdot A \cdot Э + 10 \cdot X \cdot Э + 10 \cdot A \cdot X + X^2 = 100 \cdot X^2 + 10 \cdot X \cdot Э + 10 \cdot A \cdot X + A \cdot Э.$$

Упрощая выражение, получаем $99 \cdot A \cdot Э = 99 \cdot X^2$. Так как число не может начинаться с нуля, то $Э \neq 0$ и $X \neq 0$. Разделив обе части полученного равенства на $99 \cdot X \cdot Э$, получаем требуемое.

2. Ответ: нет, неверно.

Решение. Возьмём прямоугольник $ABCD$ и рассмотрим четыре треугольника ABC, BCD, CDA и DAB (см. рис. 95). Они удовлетворяют условию задачи, однако вершины, общей для всех четырёх треугольников, не существует.

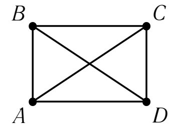


Рис. 95

3. Ответ: 6 часов.

Решение. За 6 часов с момента начала боя часовая стрелка пройдёт половину циферблата и окажется между 16 и 17 часами, а минутная обойдёт циферблат 6 раз, поэтому угол между ними изменится на 180°. Стрелки совпадут, но между 16 и 17 часами стрелки не могут совпасть дважды. Значит, это и есть момент окончания боя.

Примечание. Задача может быть также решена путём составления уравнения.

4. Ответ: 7 цифр.

Решение. Заметим, что меньшим числом символов обойтись нельзя. В самом деле, если цифр не больше 6, то какие-то две из четырёх букв должны быть закодированы последовательностью длины 1, то есть одна из них закодирована цифрой 0, а другая — цифрой 1. Но тогда можно расшифровать любую последовательность, используя только эти две буквы.

Закодируем буквы, например, так:

С	«10»
Л	«11»
О	«0»
Н	«01»

Все остальные буквы закодируем разным количеством единиц, большим трёх. Нашему слову будет соответствовать последовательность 1011001. Буквы, закодированной «1», нет, а буква, начинающаяся с «10», ровно одна — «10». Таким образом, первая буква однозначно восстанавливается. Аналогично существует ровно одна буква, начинающаяся с «11», и не существует буквы, начинающейся с «110». Значит вторая буква тоже расшифрована. Буквы, код которой начинается с «00», нет, значит третья буква закодирована символом «0». Если код четвёртой буквы — «0», то пятая буква должна быть закодирована символом «1», а таких букв не бывает, значит четвёртая буква закодирована «01».

Примечание. Существуют и другие примеры, но буква, закодированная одной цифрой, не может быть первой или последней.

5. Решение. Выберем произвольное простое число p, большее 1001. Докажем, что выигрышным является либо число p, либо число $p-1$. Если для $n = p-1$ первый игрок имеет выигрышную стратегию, то задача решена. В противном случае выигрышную стратегию имеет второй игрок. В этом случае выберем $n = p$. Первым ходом первый игрок вычёркивает одно число p и оставляет второму игроку проигрышную позицию — числа от 1 до $p-1$. Следовательно, в этом случае первый игрок имеет выигрышную стратегию.

6. Ответ: можно. Например, число 1346897520 удовлетворяет условию.

Комментарий. Если последняя цифра числа — ноль, то с делимостью на 5 проблем не возникает. Поскольку сумма всех цифр числа равна 45, при вычёркивании цифр 3 или 9 сумма цифр оставшегося числа будет делиться, соответственно, на 3 и на 9. Чтобы обеспечить делимость на 2, 4 и 8, можно последние три цифры числа сделать равными 5, 2 и 0 соответственно. Осталось подобрать положение остальных цифр так, чтобы при вычёркивании цифры 7 оставшееся число делилось на 7.

7. Ответ: 30 уголков.

Решение. Очевидно, что из каждого квадратика 2×2 можно вырезать по уголку. На рис. 96 приведён пример многоугольника, из которого нельзя вырезать больше. Докажем это. Будем говорить, что уголок принадлежит квадрату, если в этом квадрате лежат хотя бы две из его трёх клеток. Заметим, что ни одному квадрату не может принадлежать более одного уголка. Таким образом, уголков не больше, чем квадратов.

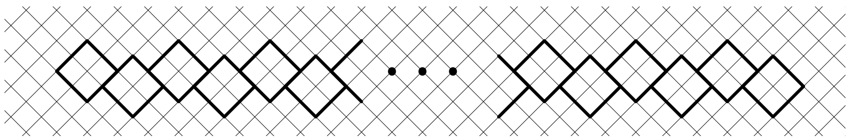


Рис. 96

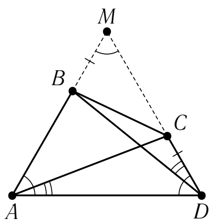


Рис. 97

8. Решение. Продолжим стороны AB и DC до пересечения в точке M, тогда $\angle AMD = 60^\circ$. Следовательно, треугольник AMD равносторонний. Треугольники MBD и DCA равны по стороне ($AD = MD$) и двум прилежащим углам, следовательно, $MB = DC$. Поэтому

$$AB + DC = AB + BM = AM = AD.$$

9. Первое решение. Рассмотрим следующую цепочку неравенств: $2(x^2+y^2) \geqslant (x+y)^2 > 1 \cdot (x+y)$. Докажем первое неравенство:

$$2(x^2+y^2) - (x+y)^2 = 2(x^2+y^2) - x^2 - 2xy - y^2 = (x-y)^2 \geqslant 0.$$

Второе неравенство следует из условия.

Второе решение. Разделим обе части неравенства на 2, вычтем из левой части неравенства правую и преобразуем полученное выражение следующим образом:

$$x^2 + y^2 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}.$$

Уравнение $\left(x-\frac14\right)^2 + \left(y-\frac14\right)^2 - \frac18 = 0$ задаёт окружность с радиусом $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ и центром в точке $\left(\frac14, \frac14\right)$ (см. рис. 98). Неравенству $x + y > 1$ удовлетворяют те точки (x, y) плоскости, которые расположены выше прямой $x + y = 1$.

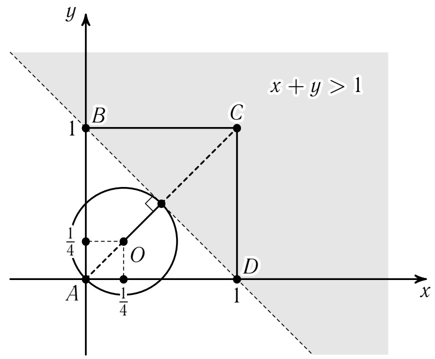


Рис. 98

Расстояние от центра окружности до прямой $x + y = 1$ равно

$$\frac{AC}{2} - AO = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

то есть окружность касается этой прямой и, следовательно, не имеет общих точек с закрашенной частью плоскости. Таким образом, закрашенная часть плоскости удовлетворяет неравенству

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} > 0.$$

10. Решение. Если $YZ \parallel AD$, то $\frac{EZ}{ZD} = \frac{EY}{YA}$. Треугольник BEY подобен треугольнику XAY, а треугольник CEZ подобен треугольнику XDZ. Следовательно, $\frac{EC}{XD} = \frac{EZ}{ZD} = \frac{EY}{YA} = \frac{BE}{AX}$, откуда $\frac{CE}{BE} = \frac{DX}{XA}$.

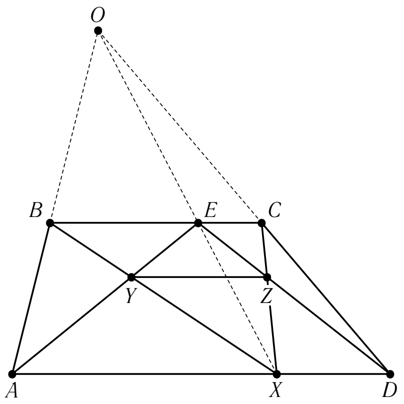


Рис. 99

Таким образом, задача сведена к нахождению точки, которая делит отрезок AD в том же отношении, что точка E делит отрезок BC. Её можно найти, например, следующим образом. Пусть O — точка пересечения прямых AB и CD (см. рис. 99). Тогда точка, в которой прямая OE пересекает отрезок AD, является искомой точкой X.

11. Ответ: длина Петиного коврика стала равна p^2.

Решение. Пусть стороны коврика были равны n и kn. Тогда площадь коврика была равна kn^2. После перекраивания большая сторона стала равна $kn+p$, значит, меньшая равна $\frac{kn^2}{kn+p}$. Поскольку это тоже целое число, kn^2 делится на $kn+p$. Так как $n(kn+p) = kn^2 + np$, то и np делится на $kn+p$. Тогда на $kn+p$ делятся $k \cdot np$ и $knp + p^2 = p(kn+p)$. Значит, p^2 делится на $kn+p$, то есть $kn+p$ равно 1, p или p^2. Но $kn+p$ больше p и потому равно p^2.

12. Ответ: да, существуют.

Решение. Выберем n так, чтобы $\frac{n+1}{2}$ было достаточно большим треугольным числом (например, $n+1 = 10^{100}(10^{100}+1)$). Сложив n треугольных чисел, равных $\frac{n+1}{2}$, мы также получим треугольное число, равное $\frac{n(n+1)}{2}$.

13. Ответ: да, существуют.

Решение. Заметим, что сумма чисел от 1 до n равна треугольному числу: $1+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Также равна треугольному числу и сумма чисел от 1 до $n+1$. Выберем n так, чтобы $n+1$ было достаточно большим треугольным числом (например, $n+1 = \frac{10^{100}(10^{100}+1)}{2}$). Тогда искомыми треугольными числами будут сумма чисел от 1 до n и число $n+1$.

14. Решение. Пусть существует r чисел, удовлетворяющих условию. Выпишем их все одно под другим. Оценим сверху и снизу количество P различных пар цифр 1—2, стоящих в одном столбце. (Более формально: нас интересует количество троек (i, j, k), где i и j — номера строк, k —

номер столбца, причём на пересечении k-го столбца и i-й строки стоит 1, а на пересечении k-го столбца и j-й строки — 2.)

С одной стороны, количество пар строк равно $\frac{r(r-1)}{2}$, и для каждой пары строк найдётся не менее $0{,}51n$ пар единиц и двоек, поэтому $P \geqslant 0{,}51n \cdot \frac{r(r-1)}{2}$. С другой стороны, если в столбце x единиц, то двоек имеется $r-x$, поэтому количество интересующих нас пар равно $x(r-x) \leqslant \frac{r^2}{4}$. Поэтому $P \leqslant n \cdot \frac{r^2}{4}$.

Решая неравенство $n \cdot \frac{r^2}{4} \geqslant 0{,}51n \cdot \frac{r(r-1)}{2}$, получаем $r \leqslant 51$. Таким образом, можно выбрать не более 51 числа, удовлетворяющего условию.

15. Решение. Докажем, что $O_1O_2 = CO$. Обозначим $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $x = CO$. Прямоугольные треугольники BHC и BCA подобны по острому углу (см. рис. 100). Коэффициент подобия равен отношению гипотенуз и равен $\frac{a}{c}$. Значит, $HO_2 = \frac{a}{c}x$ (расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной окружности). Аналогично, $HO_1 = \frac{b}{c}x$. Так как O_1 — центр вписанной окружности треугольника ACH, то $\angle O_1HC = 45°$. Аналогичным образом получаем $\angle O_2HC = 45°$. Значит, $\angle O_1HO_2 = 90°$, следовательно,

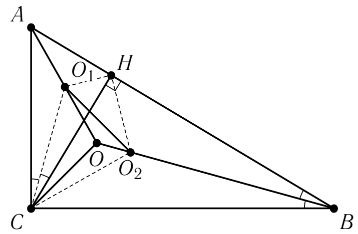


Рис. 100

$$O_1O_2^2 = HO_1^2 + HO_2^2 = \frac{b^2}{c^2}x^2 + \frac{a^2}{c^2}x^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2}x^2 = x^2 = CO^2.$$

Докажем, что $O_1O_2 \perp CO$. Направленные углы O_1AC и O_2CB равны, как половины равных углов BAC и HCB. Так как $AC \perp BC$, то $AO_1 \perp CO_2$. Аналогично, $BO_2 \perp CO_1$. Так как AO_1 и BO_2 пересекаются в точке O, то O является ортоцентром треугольника CO_1O_2. Поэтому CO — высота в том же треугольнике, то есть $CO \perp O_1O_2$.

2.5. Математическая карусель

2.5.1. Исходный рубеж

1. Ответ: 7 или 8.

2. Ответ: 8 руб.

3. Ответ: можно разрезать фигуру на трёхклеточные уголки (см. рис. 101).

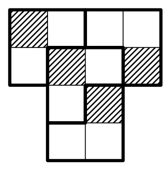


Рис. 101

4. Ответ: у 2500.

5. Ответ: выиграла 3 : 0, вничью 0 : 0, проиграла 0 : 1.

6. Ответ: на одну.

7. Ответ: 53.

8. Ответ: 9 часов.

9. Ответ: можно разрезать на пятиклеточные уголки (см. рис. 102).

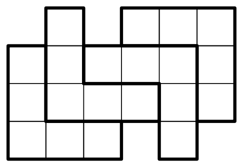


Рис. 102

10. Ответ: например, $(1 \cdot 2 + 3) \cdot 4 \cdot 5 = 100$.

11. Ответ: 3.

12. Ответ: $22 + 979 = 1001$.

2.5.2. Зачётный рубеж

1. Ответ: 8 руб. 40 коп.

2. Ответ: 9.

3. Ответ: $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 4 = 2240$.

4. Ответ: 20, 25, 30, 35.

5. Ответ: 49.

6. Ответ: Фрол Фомич.

7. Ответ: 10.

8. Ответ: 28.

9. Ответ: можно разрезать так, как показано на рис. 103.

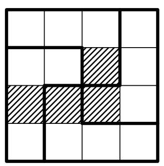


Рис. 103

10. Ответ: 500000.

11. Ответ: $2004 = 667 + 668 + 669$.

12. Ответ: 105.

13. Ответ: все три случая возможны.

14. Ответ: 40.

15. Ответ: 1003 раза.

16. Ответ: можно разрезать так, как показано на рис. 104.

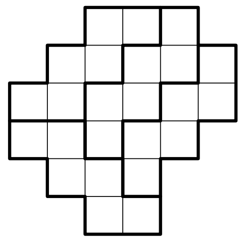


Рис. 104

17. Ответ: 14 друзей.

18. Ответ: 12 *км/ч*.

19. Ответ: 22 числа.

20. Ответ: 70 распилов.

3. Приложение

3.1. Призёры турнира математических боёв

7 класс (Высшая Лига)	
I	«Эврика», г. Харьков (рук. А. Л. Берштейн)
II	школа №17, г. Москва (рук. Д. А. Коробицын)
III	«Дворец-2», г. Москва (рук. Г. В. Кондаков)
6–7 класс (Первая Лига)	
I	г. Троицк (рук. И. А. Цвелая)
8–9 классы (Высшая Лига)	
I	ФМЛ №9, г. Пермь (рук. Г. А. Одинцова)
II	«1543-8-2», г. Москва, гимназия №1543 (рук. И. В. Раскина)
II	«1543-9-1», г. Москва, гимназия №1543 (рук. А. В. Хачатурян)
III	«1543-9-2», г. Москва, гимназия №1543 (рук. А. В. Хачатурян)
III	«1543–57», г. Москва, сборная (рук. С. Е. Дубов)
8–9 классы (Первая Лига)	
I	лицей «Вторая школа», г. Москва (рук. Л. В. Санина)
II	школа №218, г. Москва (рук. Ю. А. Блинков)
II	«1543-8-1», г. Москва, гимназия №1543 (рук. И. В. Раскина)
III	г. Кострома (рук. Н. Л. Чернятьев)
III	г. Магнитогорск (рук. А. В. Христева)

3.2. Призёры личной олимпиады

6 класс	
I	Дудкин Александр — г. Харьков, «Эврика», ФМЛ №27
II	Ивлев Фёдор — г. Троицк, лицей
II	Артемьев Михаил — г. Троицк, гимназия (4 класс)
II	Николаев Семён — г. Москва, МММФ[1]
ПГ[2]	Ланина Наталья — г. Москва, ДНТТМ[3]
ПГ	Василенко Никита — г. Москва, ДНТТМ
ПГ	Баранова Ксения — г. Москва, ДНТТМ

[1]Малый механико-математический факультет
[2]Похвальная грамота
[3]Дом научно-технического творчества молодёжи

ПГ	Андреева Анна — г. Москва, МММФ
ПГ	Артемьева Галина — г. Троицк, гимназия
ПГ	Нуждин Даниил — г. Москва, МММФ
ПГ	Коломеец Иван — г. Москва, ДНТТМ
7 класс	
I	Соболев Евгений — г. Харьков, «Эврика», гимназия №47
II	Таран Александр — г. Омск, ФМЛ №64
II	Гусев Антон — г. Омск, ФМЛ №64
II	Василенко Артём — г. Омск, ФМЛ №64
II	Таранникова Екатерина — г. Москва, школа №2007
III	Ефремов Дмитрий — г. Магнитогорск
III	Лисичкин Владислав — г. Харьков, «Эврика», гимназия №47
III	Соболев Дмитрий — г. Харьков, «Эврика», гимназия №47
III	Маянцев Кирилл — г. Волгореченск, школа №3
III	Мошкин Виталий — г. Магнитогорск
III	Бичурин Игорь — г. Харьков, «Эврика», УВК №55
III	Паламарчук Игорь — г. Москва, ДНТТМ
III	Царьков Олег — г. Москва, ДНТТМ
8 класс	
I	Марченко Евгений — г. Москва, гимназия №1543
II	Андреев Михаил — г. Москва, лицей «Вторая школа»
II	Ромаскевич Елена — г. Москва, гимназия №1543
III	Морозов Сергей — г. Москва, гимназия №1543
III	Погребнов Алексей — г. Москва, гимназия №1543
III	Кисловская Анна — г. Кострома, лицей №32
III	Удимов Даниил — г. Москва, гимназия №1543
III	Фурашова Мария — г. Кострома, лицей №32
III	Чекалкин Серафим — г. Москва, гимназия №1543
III	Гладков Игорь — г. Пермь, ФМЛ №9
ПГ	Демин Алексей — г. Москва, гимназия №1543
ПГ	Цой Светлана — г. Москва, школа №2007
ПГ	Марченко Денис — г. Пермь, ФМЛ №9
ПГ	Сильченко Анна — г. Москва, лицей «Вторая школа»
ПГ	Хатунцев Денис — г. Москва, гимназия №1543
9 класс	
II	Малеев Андрей — г. Снежинск, гимназия №127
II	Селегей Даниил — г. Москва, гимназия №1543
II	Кочерга Евгений — г. Снежинск, гимназия №127
II	Арутюнов Владимир — г. Москва, гимназия №1543
II	Хайруллин Егор — г. Пермь, ФМЛ №9
III	Хлебников Фёдор — г. Москва, гимназия №1543

III	Волков Фёдор — г. Москва, гимназия №1543
III	Махлин Антон — г. Москва, гимназия №1543
III	Котов Андрей — г. Москва, гимназия 1№543
III	Махлин Игорь — г. Москва, гимназия №1543
III	Кухаренко Артём — г. Москва, гимназия №1543
III	Истомин Алексей — г. Пермь, ФМЛ №9
III	Рощупкин Александр — г. Москва, гимназия №1543
ПГ	Тимофеева Диана — г. Москва, гимназия №1543
ПГ	Шапцев Алексей — г. Пермь, ФМЛ №9
ПГ	Горбатов Роман — г. Снежинск, гимназия №127
ПГ	Реброва Елизавета — г. Москва, гимназия №1543
ПГ	Соколов Иван — г. Москва, школа №91
ПГ	Кочанов Георгий — г. Москва, школа №91
ПГ	Осечкина Мария — г. Пермь, ФМЛ №9
ПГ	Лобода Иван — г. Снежинск, гимназия №127

Специальную премию за самое быстрое решение топологической задачи получил ученик 4-го класса гимназии города Троицка Михаил Артемьев.

Оглавление

Редакторы: *М. Берштейн*, *Д. Вельтищев*, *Д. Мусатов*, *Н. Нетрусова*, *Б. Френкин*.
Тех. редактор: *М. Вельтищев*.
Обложка: *М. Вельтищев*.

Издательство Московского Центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано к печати 16.02.2006 г.
Формат 60 × 90/16. Печать офсетная. Печ. л. 6. Тираж 1000 экз. Заказ №

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

XII

Турнир математических боёв им. А. П. Савина

Издательство МЦНМО

Москва • 2007

УДК 51
ББК 22.1
Т86

Т86 XII Турнир математических боев им. А. П. Савина. — М.: МЦНМО, 2007. — 120 с.

ISBN 978-5-94057-278-7

Книга подготовлена по материалам XII летнего Турнира математических боев им. А. П. Савина, заключительного этапа конкурса «Математика 6–8», проводимого журналом *Квант*.

Здесь собраны условия и решения задач математической регаты, математических боев, командной и личной олимпиады. Решения задач специально отделены от условий, чтобы читатель мог самостоятельно порешать понравившиеся ему задачи. В приложении приведены списки победителей Турнира.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся олимпиадными задачами по математике: школьников 6–9 классов, а также школьных учителей и руководителей математических кружков.

ББК 22.1

Введение [1]

База отдыха «Берендеевы поляны» под Судиславлем Костромской области уже стала традиционным местом проведения финальных соревнований конкурса имени А. П. Савина. Летом 2006 года здесь состоялся XII финальный летний турнир математических боев, который в очередной раз побил рекорд по количеству команд-участниц: тридцать шесть. На турнире присутствовали школьники из пятнадцати городов. Приехали отдельные команды из Иваново, Кирова, Костромы, Магнитогорска, Перми, Троицка, Харькова. Ну и, конечно же, больше всего команд представила Москва. Примечательная особенность последних турниров — соревнования стали привлекательными для девятиклассников.

В организации турнира, кроме журнала *Квант*, приняли участие Московский городской дворец детского (юношеского) творчества (председатель оргкомитета турнира Г. Кондаков), образовательная программа «Большая перемена» (руководитель программы депутат областной думы и председатель Федерации профсоюзов Костромской области М. А. Батин), Департамент общего и профессионального образования администрации Костромской области, Фонд математического образования и просвещения. Спонсорскую помощь командам оказали также некоторые организации на местах. Так, школьники Черноголовки выражают свою благодарность Объединенной профсоюзной организации научного центра Черноголовка РАН (зам. председателя ОПО НЦЧ РАН Л. А. Ковалева).

Работу методической комиссии возглавил А. Шаповалов, специально прилетевший на турнир из Швеции. В составе комиссии работали опытные члены жюри, не раз принимавшие участие в подобного рода мероприятиях: А. Акопян, М. Берштейн, А. Блинков (зам. председателя оргкомитета), Ю. Блинков, А. Горская, В. Гуровиц, А. Жуков, Д. Калинин, Т. Караваева, И. Раскина, В. Сендеров,

---

[1] *Квант*, 2007, №2

А. Скопенков, А. Спивак, С. Токарев (организатор первых летних турниров), В. Трушков, Б. Френкин, Е. Чернышева, В. Шарич. Руководители команд также принимали активное участие в работе жюри: помогали судить отдельные бои, организовывать и проводить дополнительные интеллектуальные игры: «Математическая регата», «Завалинка». С лекциями перед школьниками выступили А. Скопенков («Найди количество раскрасок»), Н. Нетрусова («Узлы и косы»), А. Шаповалов («Принцип узких мест»).

Турнир проводился по традиционной схеме: командная олимпиада в первый день [1], затем ежедневные математические бои, между которыми в один из дней проводилась личная устная олимпиада. В день проведения олимпиады для школьников организовывались экскурсии в старинные города Галич и Кострому.

А. В. Жуков

[1] Для 9 классов вместо командной олимпиады был проведен нулевой тур математических боев

1. Условия задач

1.1. Математическая регата

1.1.1. 6–7 классы

Первый тур

1.1. (6 баллов) До отхода поезда остается 2 минуты. Расстояние до вокзала — 2 километра. Если первый километр бежать со скоростью 30 километров в час, то можно ли успеть на поезд?

1.2. (6 баллов) Покажите, как разрезать фигуру, изображенную на рис. 1, на две равные части (не обязательно по линиям сетки).

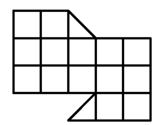


Рис. 1

1.3. (6 баллов) Может ли значение суммы

$$(1+2+3+4)\cdot 5+(6+7+8+9)\cdot 10+(11+12+13+14)\cdot 15+\ldots$$

при каком-то количестве слагаемых оканчиваться на $\overline{10}$?

1.4. (6 баллов) Каждому из ста жителей острова, часть жителей которого — рыцари, а остальные — лжецы, был задан вопрос: «Сколько среди вас рыцарей?». В ответ было названо сто различных чисел. Какое число наверняка было названо?

Второй тур

2.1. (7 баллов) У Алисы живет крокозябра. Каждый день она съедает бананов ровно в два раза больше своего веса, а каждую ночь худеет в три раза. Уезжая на четырехдневные каникулы, Алиса оставила ей 40 кг бананов, и этого крокозябре в точности хватило. Сколько весила крокозябра до отъезда Алисы?

2.2. (7 баллов) В прямоугольном треугольнике ABC проведены биссектрисы AP и BQ из вершин острых углов. Точки D и E — основания перпендикуляров, опущенных из Q и P на гипотенузу AB. Найдите угол DCE.

2.3. (7 баллов) Имеет ли решение ребус: $\overline{\text{ДО}} \cdot \overline{\text{ЧЬ}} = \overline{\text{МАМА}}$?

2.4. (7 баллов) Дан квадрат 2×2, разбитый на четыре единичных квадрата. Некоторая ломаная пересекает все стороны единичных квадратов. Какое наименьшее количество звеньев может содержать такая ломаная?

Третий тур

3.1. (8 баллов) Рассеянный Вовочка при сложении двух чисел по ошибке приписал ноль на конце первого слагаемого и вместо числа 2006 получил число 4157. Какие числа складывал Вовочка?

3.2. (8 баллов) В равностороннем треугольнике ABC точка D — середина BC. Из точки O, лежащей на стороне BC, опущены перпендикуляры OK и OM на стороны AB и AC. Найдите периметр четырехугольника $AMOK$, если периметр треугольника ACD равен p.

3.3. (8 баллов) Существует ли такой набор из десяти натуральных чисел, что каждое из них не делится ни на одно из остальных, а квадрат каждого из этих чисел делится на каждое из остальных?

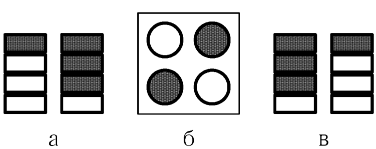


Рис. 2

3.4. (8 баллов) На квадратном столе лежат четыре стопки шашек двух цветов. Известно, что черных и белых шашек поровну. На рис. 2 приведены виды стола спереди, сверху и слева соответственно. Какой цвет имеет шашка, лежащая внизу в дальнем правом углу стола?

1.1.2. 8–9 классы

Первый тур

1.1. (6 баллов) Решите уравнение:

$$\max(x; 2 - x) = \min(3x; 1 + 2x).$$

(*Напомним, что* $\max(a; b)$ *— наибольшее, а* $\min(a; b)$ *— наименьшее из чисел* a *и* b.)

1.2. (6 баллов) Существует ли выпуклый четырехугольник, у которого серединный перпендикуляр к каждой стороне не пересекает противолежащую сторону?

1.3. (6 баллов) Существует ли такое натуральное n, при котором сумма $1 + 2 + \dots + n$ оканчивается цифрой 7?

1.4. (6 баллов) Квадрат размером 4×4 клетки вырезан из белой бумаги, и его клетки покрашены с одной стороны в черный цвет. Можно ли, сгибая вырезанный квадрат какое-то количество раз (не обязательно по линиям сетки), добиться того, чтобы образовался квадрат размером 3×3 клетки, у которого восемь черных клеток и одна белая?

Второй тур

2.1. (7 баллов) Известно, что для натуральных чисел x, y и z выполняются два равенства: $7x^2-3y^2+4z^2=8$ и $16x^2-7y^2+9z^2=-3$. Найдите значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

2.2. (7 баллов) В треугольнике ABC с углом B, равным $120°$, проведена биссектриса BL. На ее продолжении за точку B отложен отрезок BD длиной 4 см. Оказалось, что угол ADC равен $60°$. Найдите площадь треугольника ABC.

2.3. (7 баллов) Могут ли числа $\overline{РАБ}$ и $\overline{БРА}$ одновременно делиться на 49?

2.4. (7 баллов) В таблице 10×10 выписаны по возрастанию все натуральные числа от 1 до 100 по строкам (в первой строке — выписаны слева направо числа от 1 до 10, во второй строке — аналогично выписаны числа от 11 до 20, и так далее). Перед некоторыми из чисел поставлен знак минус так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было ровно по пять минусов. Чему может быть равна сумма всех чисел таблицы?

Третий тур

3.1. (8 баллов) Докажите, что любой действительный корень уравнения $x^3 + px + q = 0$ удовлетворяет неравенству $4qx \leqslant p^2$.

3.2. (8 баллов) На окружности, вписанной в равносторонний треугольник ABC, взята точка P. Отрезок AP еще раз пересекает окружность в точке Q так, что $AQ = QP$. Найдите угол BPC.

3.3. (8 баллов) Натуральное число называется «хорошим», если в его разложение на простые множители каждый множитель входит в нечетной степени. (Например, «хорошими» являются числа $13 = 13^1$ и $54 = 2\cdot 3^3$.) Какое наибольшее количество «хороших» чисел может стоять подряд в ряду последовательных натуральных чисел?

3.4. (8 баллов) Улитка движется по поверхности куба с ребром 1, переползая от вершины к вершине по ребру либо по диагонали грани. Найдите протяженность самого длинного маршрута из одной вершины куба в противоположную (наиболее удаленную) вершину, если запрещается пересекать свою траекторию движения и проползать через одну вершину дважды.

1.2. Командная олимпиада

В квадратных скобках указаны номера классов, для которых предлагалась задача.

1. [7] p, q, r — простые числа. $p^2-q^2-r^2$ — натуральное число, делящееся на 10. Найдите $q+r$.

В. Сендеров

2. [7] Есть клетчатая рамка 10×10 толщиной в одну клетку (см. рис. 3). Ее разрезали по границам клеток на попарно различные части и сложили из них квадрат 6×6. Каково наибольшее число частей?

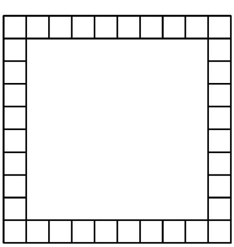


Рис. 3

А. Шаповалов

3. [7] Вася разделил некоторое число на 666 и обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 200. Петя разделил то же самое число на 121 и также обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 200. Найдите исходное число.

В. Каскевич, Е. Чернышева

4. [7] Даны два треугольника. Сумма двух углов первого равна некоторому углу второго. Сумма другой пары углов первого также равна некоторому углу второго. Докажите, что первый треугольник — равнобедренный.

Б. Френкин

5. [7] В бане дети набирают полные шайки воды. Сначала они включают горячий кран, потом его выключают и включают холодный. Известно, что если выключить горячий кран ровно в тот момент, когда он загудит, соотношение горячей и холодной воды в шайке будет оптимальным. Володя выключил горячий кран на 9 секунд позже, и в итоге в его шайке оказалось горячей воды ровно в два раза больше, чем холодной. Сеня выключил горячий кран на 9 секунд раньше, и в его шайке оказалось горячей и холодной воды поровну. Через сколько секунд после того, как открыли горячий кран, он загудит?

Е. Чернышева

6. [7] В треугольнике ABC угол C прямой, точка M — середина AB. Пусть точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на биссектрису угла B, а точка Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на биссектрису угла A. Найдите углы треугольника PMQ.

Д. Калинин

7. [7-8] Три жулика, каждый с двумя чемоданами, хотят переправиться через реку. Есть трехместная лодка, каждое место в которой может быть занято человеком или чемоданом. Никто из жуликов не доверит свой чемодан спутникам в свое отсутствие, но готов оставить чемоданы на безлюдном берегу. Смогут ли они переправиться? (Лодку, приставшую к берегу, считаем частью берега.)

А. Шаповалов

8. [7-8] На числовой прямой отмечены все целые точки. Точки x и y соединяются дугой, если $|x - y|$ — простое число. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить все целые точки, чтобы любые две соединенные точки были разного цвета?

Фольклор

9. [8] В треугольнике ABC на сторонах BC, AC и AB соответственно отмечены точки A_1, B_1 и C_1 так, что

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{B_1C}{B_1A} = \alpha,$$

где $\alpha \in (0;1)$. На сторонах B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ отмечены точки A_2, B_2, C_2 так, что

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{C_2A_1}{C_2B_1} = \frac{B_2C_1}{B_2A_1} = \frac{1}{\alpha}.$$

Докажите, что треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику ABC.

И. Рудаков

10. [8] x и y — неотрицательные числа, сумма которых не превосходит 1. Докажите, что $x^2 + 8x^2y^2 + y^2 \leqslant 1$.

В. Сендеров

11. [8] Докажите, что существует бесконечно много приведенных квадратных уравнений с целыми коэффициентами, у которых один из корней равен дискриминанту.

А. Хачатурян

12. [8] Бумажный треугольник со сторонами a, b, c перегнули по прямой так, что вершина, противолежащая стороне длины c, попала на эту сторону. Известно, что в получившемся четырехугольнике равны два угла, примыкающих к линии сгиба. Найдите длины отрезков, на которые делит сторону c попавшая туда вершина.

А. Шаповалов

13. [8] $S(n)$ — сумма делителей числа n. Найдите все такие натуральные n, что $3S(n) = 4n + 79$.

В. Трушков

14. [8] Некоторые из сторон и диагоналей выпуклого n-угольника ($n > 3$) покрасили в красный или синий цвет. Известно, что синие отрезки не пересекаются и между любыми вершинами есть единственный синий путь. То же верно для красных отрезков. Найдите (для каждого n) наименьшее количество пересечений между красными и синими отрезками. (Никакие три диагонали не пересекаются в одной точке.)

Б. Френкин

1.3. Математические бои

1.3.0. Нулевой тур

9 класс

1. $S(n)$ — сумма делителей числа n. Найдите все такие натуральные n, что $3S(n) = 4n + 79$.

В. Трушков

2. Квадрат разрезан на равные треугольники. Обязательно ли у любых двух треугольников найдутся параллельные стороны?

А. Шаповалов

3. Некоторые из сторон и диагоналей выпуклого n-угольника ($n > 3$) покрасили в красный или синий цвет. Известно, что синие отрезки не пересекаются и между любыми вершинами есть единственный синий путь. То же верно для красных отрезков. Найдите (для каждого n) наименьшее количество пересечений между красными и синими отрезками. (Никакие три диагонали не пересекаются в одной точке.)

Б. Френкин

4. Докажите, что существует бесконечно много приведенных квадратных уравнений с целыми коэффициентами, у которых один из корней равен дискриминанту.

А. Хачатурян

5. Дан треугольник ABC. Рассматриваются все точки P внутри него, и для каждой из них строятся точки P_1, P_2 и P_3, симметричные ей относительно середин сторон. Найти ГМТ центров окружностей, описанных около треугольников $P_1P_2P_3$.

И. Наумкин

6. На числовой прямой отмечены все целые точки. Точки x и y соединены дугой, если $|x-y|$ — простое число. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить все целые точки, чтобы любые две соединенные точки были разного цвета?

Фольклор

7. Докажите неравенство:

$$|x+y|^3 + |x-y|^3 \geqslant 2(|x|^3 + |y|^3).$$

В. Сендеров

8. Три жулика, каждый с двумя чемоданами, хотят переправиться через реку. Есть трехместная лодка, каждое место в которой может быть занято человеком или чемоданом. Никто из жуликов не доверит свой чемодан спутникам в свое отсутствие, но готов оставить чемоданы на безлюдном берегу. Смогут ли они переправиться? (Лодку, приставшую к берегу, считаем частью берега.)

А. Шаповалов

1.3.1. Первый тур

7 класс

1. Члены жюри предложили для олимпиады по одинаковому числу задач. После этого каждый из них вычеркнул из получившегося списка по 4 задачи (никакую задачу не вычеркивали дважды). В результате в списке осталось 5 задач. Сколько всего могло быть членов жюри?

Д. Калинин

2. Найдите углы треугольника, если одна из его вершин является центром окружности, содержащей середины сторон этого треугольника.

А. Блинков

3. Какие натуральные числа представимы в виде суммы трех натуральных чисел, все цифры которых нечетны?

А. Спивак

4. На столе в ряд лежат шесть монет. Среди первых четырех есть ровно одна фальшивая монета, среди последних двух — тоже одна фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые монеты весят одинаково и легче настоящих. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить обе фальшивые монеты?

Предложил В. Трушков

5. Для чисел a, b, c, d вычислили их попарные произведения ab, bc, cd, da, db, ac. Сколько различных чисел могло при этом получиться? (Найдите все варианты).

Б. Френкин

6. На окружности отмечены десять точек. Каждые две из них соединены отрезком. Сеня покрасил точки в два цвета. Какое наибольшее количество отрезков с концами в точках разного цвета могло получиться?

Фольклор

7. Из шахматной доски 8×8 вырезали центральный квадрат 2×2 (поля d4, e4, d5, e5). Можно ли оставшуюся часть разрезать на фигурки в виде буквы Г (состоящие из четырех квадратиков)? Фигурки разрешается поворачивать и переворачивать.

В. Шарич

8. Есть три кучки камней, в первой лежит 2005, во второй — 2006, в третьей — 2007 камней. Двое играют в игру. За ход можно взять два камня, по одному из каких-нибудь двух кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Д. Калинин

7–8 классы

1. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах AB, BC и CA отмечены точки C_1, A_1, B_1 соответственно, так что

$$BC_1 = C_1A_1 = A_1B_1 = B_1C.$$

Вырежем треугольники BC_1A_1, $C_1A_1B_1$, A_1B_1C и выстроим их последовательно так, чтобы основания лежали на одной прямой, причем второй треугольник при этом перевернем, чтобы его вершина A_1 также смотрела вверх. Докажите, что вершины этих трех равнобедренных треугольников лежат на одной прямой.

А. Мякишев

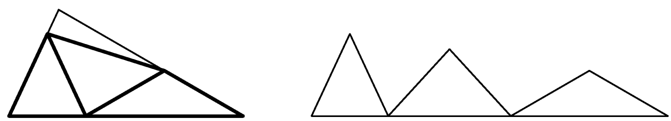


Рис. 4

2. Дан произвольный треугольник. На каждой стороне треугольника отмечено 14 точек. Каждая вершина треугольника соединена отрезками со всеми отмеченными точками противолежащей стороны. На какое наибольшее число частей отрезки могли разделить треугольник?

По мотивам В. Брагина

3. Какие натуральные числа представимы в виде суммы трех натуральных чисел, все цифры которых нечетны?

А. Спивак

4. На столе в ряд лежат шесть монет. Среди первых четырех есть ровно одна фальшивая монета, и среди последних двух — тоже одна фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые монеты весят одинаково и легче настоящих. Импортные чашечные весы сообщают результат взвешивания на следующий день. Можно ли сегодня провести такие два взвешивания, чтобы завтра по полученным результатам наверняка определить обе фальшивые монеты?

Предложил В. Трушков

5. Двое играли в следующую игру. На бумаге нарисовано несколько точек, и некоторые из них соединены непересекающимися отрезками так, что из каждой точки в каждую можно пройти единственным образом. Игроки по очереди красят точки — один в красный цвет, другой в синий. Красить можно только непокрашенные точки, и, начиная со второго хода, требуется, чтобы какая-то из соседних точек уже была покрашена в тот же цвет.

Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Оба игрока всегда играют наилучшим возможным образом. В итоге победил второй. После этого на том же рисунке они стали играть по тем же правилам, но крася отрезки, а не точки. (Соседние точки — точки, соединенные отрезком. Соседние отрезки — отрезки, имеющие общий конец.) Кто победит на этот раз?

Б. Френкин

6. Найдите 100 первых цифр числа:

$$3+\frac{4}{9}+\frac{5}{9\cdot 11}+\frac{6}{9\cdot 11\cdot 13}+\dots+ \\ +\frac{1002}{9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2005}+\frac{1003}{9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2005\cdot 2007}$$

Израильская олимпиада 2006 г.

7. Из шахматной доски 8×8 вырезали центральный квадрат 2×2 (поля d4, e4, d5, e5). Можно ли оставшуюся часть разрезать на фигурки в виде буквы Г (состоящие из четырех квадратиков)? Фигурки разрешается поворачивать и переворачивать.

В. Шарич

8. Выступления танцоров оценивались семью судьями. Каждый из судей выставлял оценку (целое число от 0 до 10), худшая и лучшая оценки отбрасывались и выводилось среднее арифметическое. По окончании соревнований председатель жюри подсчитал, что если бы средняя оценка выводилась по всем семи оценкам, то все участники расположились бы строго в обратном порядке. Какое наибольшее количество танцоров могло участвовать в соревновании?

А. Блинков

8 класс, первая лига

1. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах AB, BC и CA отмечены точки C_1, A_1, B_1 соответственно, так что

$$BC_1 = C_1A_1 = A_1B_1 = B_1C.$$

Вырежем треугольники BC_1A_1, $C_1A_1B_1$, A_1B_1C и выстроим их последовательно так, чтобы основания лежали на одной прямой, причем второй треугольник при этом перевернем, чтобы его вершина A_1 также смотрела вверх. Докажите, что вершины этих трех равнобедренных треугольников лежат на одной прямой (см. рис. 4).

А. Мякишев

2. Найдите углы треугольника, если одна из его вершин является центром окружности, содержащей середины сторон этого треугольника.

А. Блинков

3. Какие натуральные числа представимы в виде суммы трех натуральных чисел, все цифры которых нечетны?

А. Спивак

4. На столе в ряд лежат шесть монет. Среди первых четырех есть ровно одна фальшивая монета, среди последних двух — тоже одна фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые монеты весят одинаково и легче настоящих. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить обе фальшивые монеты?

Предложил В. Трушков

5. Для чисел a, b, c, d вычислили их попарные произведения ab, bc, cd, da, db, ac. Сколько различных чисел могло при этом получиться? (Найдите все варианты).

Б. Френкин

6. В одном из судиславских городских автобусов недавно была введена новая форма оплаты проезда. Пассажиры приобретают талон, имеющий форму круга, разбитого на 13 равных секторов. Одна сторона талона покрашена в синий цвет, а другая — в желтый. При входе в автобус они вставляют талон в электронный компостер синей стороной вверх, и компостер пробивает несколько секторов, предварительно проверяя, что эти секторы не были пробиты ранее. Какое наименьшее количество секторов должен пробивать компостер, чтобы один и тот же талон нельзя было использовать дважды?

А. Акопян

7. Из шахматной доски 8×8 вырезали центральный квадрат 2×2 (поля d4, e4, d5, e5). Можно ли оставшуюся часть разрезать на фигурки в виде буквы Г (состоящие из четырех квадратиков)? Фигурки разрешается поворачивать и переворачивать.

В. Шарич

8. Есть три кучки камней, в первой лежит 2005, во второй — 2006, в третьей — 2007 камней. Двое играют в игру. За ход можно взять 2 камня, по одному из каких-нибудь двух кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Д. Калинин

8 класс, высшая лига

1. На сторонах AB и BC прямоугольника $ABCD$ внешним образом построили подобные прямоугольные треугольники EAB и FCB ($\angle EAB = \angle FCB = 90^\circ$, $\angle ABE = \angle CBF$). Отразив точку B относительно середины отрезка EF, получили точку G. Докажите, что углы BDC и ADG равны.

А. Акопян

2. Дан произвольный треугольник. На каждой стороне треугольника отмечено 14 точек. Каждая вершина треугольника соединена отрезками со всеми отмеченными точками противолежащей стороны. На какое наибольшее число частей отрезки могли разделить треугольник?

По мотивам В. Брагина

3. Какие натуральные числа представимы в виде суммы трех натуральных чисел, все цифры которых нечетны?

А. Спивак

4. В одном из судиславских городских автобусов недавно была введена новая форма оплаты проезда. Пассажиры приобретают талон, имеющий форму круга, разбитого на 13 равных секторов. Одна сторона талона покрашена в синий цвет, а другая — в желтый. При входе в автобус они вставляют талон в электронный компостер синей стороной вверх, и компостер пробивает несколько секторов, предварительно проверяя, что эти секторы не были пробиты ранее. Какое наименьшее количество секторов должен пробивать компостер, чтобы один и тот же талон нельзя было использовать дважды?

А. Акопян

5. Двое играли в следующую игру. На бумаге нарисовано несколько точек, и некоторые из них соединены непересекающимися отрезками так, что из каждой точки в каждую можно пройти единственным образом. Игроки по очереди красят точки — один в красный цвет, другой в синий. Красить можно только непокрашенные точки, и, начиная со второго хода, требуется, чтобы какая-то из соседних точек уже была покрашена в тот же цвет.

Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Оба игрока всегда играют наилучшим возможным образом. В итоге победил второй. После этого на том же рисунке они стали играть по тем же правилам, но крася отрезки, а не точки. (Соседние точки — точки, соединенные отрезком. Соседние отрезки — отрезки, имеющие общий конец.) Кто победит на этот раз?

Б. Френкин

6. Найдите 100 первых цифр числа:

$$3+\frac{4}{9}+\frac{5}{9\cdot 11}+\frac{6}{9\cdot 11\cdot 13}+\dots+$$
$$+\frac{1002}{9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2005}+\frac{1003}{9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2005\cdot 2007}.$$

Израильская олимпиада 2006 г.

7. Клетки доски $m\times n$ раскрашены в шахматном порядке в черный и белый цвет. Разрешается выбрать любые две соседние по стороне клетки и перекрасить их: белые клетки — в черный цвет, черные — в красный, а красные — в белый. При каких m

и n можно добиться того, чтобы все белые клетки доски были покрашены в черный цвет, а черные — в белый?

М. Ахмеджанова, К. Кохась

8. Выступления танцоров оценивались семью судьями. Каждый из судей выставлял оценку (целое число от 0 до 10), худшая и лучшая оценки отбрасывались и выводилось среднее арифметическое. По окончании соревнований председатель жюри подсчитал, что если бы средняя оценка выводилась по всем семи оценкам, то все участники расположились бы строго в обратном порядке. Какое наибольшее количество танцоров могло участвовать в соревновании?

А. Блинков

9 класс

1. На сторонах AB и BC прямоугольника $ABCD$ внешним образом построили подобные прямоугольные треугольники EAB и FCB ($\angle EAB = \angle FCB = 90°$, $\angle ABE = \angle CBF$). Отразив точку B относительно середины отрезка EF, получили точку G. Докажите, что углы BDC и ADG равны.

А. Акопян

2. Дан произвольный треугольник. На каждой стороне треугольника отмечено 14 точек, делящих ее на 15 равных отрезков. Каждая вершина треугольника соединена отрезками со всеми отмеченными точками противолежащей стороны. На сколько частей отрезки разделили треугольник?

В. Брагин

3. Каких чисел больше в первой тысяче: представимых или не представимых в виде $x^3 - y!$, где $x,\ y \in \mathbb{N}$?

В. Сендеров, Н. Агаханов

4. CD — биссектриса треугольника ABC. Окружность, проходящая через точку A и касающаяся биссектрисы в точке D, пересекает AC в точке A_1. Окружность, проходящая через точку B и касающаяся биссектрисы в точке D, пересекает BC в точке B_1.

Докажите, что окружность, симметричная описанной около треугольника A_1B_1C относительно CD, касается стороны AB.

Д. Калинин

5. Двое играли в следующую игру. На бумаге нарисовано несколько точек и некоторые из них соединены непересекающимися отрезками так, что из каждой точки в каждую можно пройти единственным образом. Игроки по очереди красят точки — один в красный цвет, другой в синий. Красить можно только непокрашенные точки, и, начиная со второго хода, требуется, чтобы какая-то из соседних точек уже была покрашена в тот же цвет.

Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Оба игрока всегда играют наилучшим возможным образом. В итоге победил второй. После этого на том же рисунке они стали играть по тем же правилам, но крася отрезки, а не точки. (Соседние точки — точки, соединенные отрезком. Соседние отрезки — отрезки, имеющие общий конец.) Кто победит на этот раз?

Б. Френкин

6. Найдите 100 первых цифр числа:

$$3+\frac{4}{9}+\frac{5}{9\cdot 11}+\frac{6}{9\cdot 11\cdot 13}+\dots+$$
$$+\frac{1002}{9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2005}+\frac{1003}{9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2005\cdot 2007}.$$

Израильская олимпиада 2006 г.

7. Клетки доски $m\times n$ раскрашены в шахматном порядке в черный и белый цвет. Разрешается выбрать любые две соседние по стороне клетки и перекрасить их: белые клетки — в черный цвет, черные — в красный, а красные — в белый. При каких m и n можно добиться того, чтобы все белые клетки доски были покрашены в черный цвет, а черные — в белый?

М. Ахмеджанова, К. Кохась

8. Выступления танцоров оценивались семью судьями. Каждый из судей выставлял оценку (целое число от 0 до 10), худшая и лучшая оценки отбрасывались и выводилось среднее арифметическое. По окончании соревнований председатель жюри подсчитал, что если бы средняя оценка выводилась по всем семи оценкам, то все участники расположились бы строго в обратном порядке. Какое наибольшее количество танцоров могло участвовать в соревновании?

А. Блинков

1.3.2. Второй тур

7 класс

1. В группе детского сада мальчиков на три человека больше, чем девочек. На прогулке дети стали прыгать через лужу. Когда воспитательница это обнаружила, успешно прыгнувших детей оказалось на восемь больше, чем промочивших ноги. Все ли дети успели прыгнуть?

И. Раскина

2. На ужин в столовой давали шоколадки с разным содержанием миндаля, фундука и арахиса. Даня выбрал себе одну. Он согласен поменяться шоколадкой с любым своим одноклассником при условии, что содержание хотя бы двух видов орехов в полученной шоколадке будет больше, чем в отданной. Может ли после нескольких обменов у него оказаться шоколадка с меньшим содержанием каждого вида орехов, чем в первоначальной?

Фольклор

3. Турнир матбоев в один круг закончился тем, что наибольшее количество очков набрала команда, которая одержала меньше побед, чем любая другая. При каком наименьшем числе команд-участниц это возможно? (За победу начислялось два очка, за ничью — одно, за поражение — ноль.)

Фольклор

4. Галя вышивает крестиком узор на квадрате 10×10. Она считает узор красивым, если:

1) он центрально-симметричен;

2) любые два крестика одного цвета соединены цепочкой крестиков того же цвета с общими сторонами.

Какое наибольшее число цветов сможет использовать Галя?

А. Артемьев, И. Раскина

5. Даны окружности с радиусами 6 см и 8 см. Расстояние между их центрами O_1 и O_2 равно 11 см. Через середину отрезка O_1O_2 проведена прямая, пересекающая одну окружность в точке A, а другую — в точке B. Какую наибольшую длину может иметь отрезок AB?

В. Сендеров

6. Можно ли в клетках таблицы 12×12 расставить натуральные числа от 1 до 144 так, чтобы суммы чисел во всех вертикалях, всех горизонталях и обеих диагоналях были нечетными?

В. Берник, И. Акулич

7. На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку A отмечена точка A_1, а за точку B — B_1. На продолжении стороны AC за точку A отмечена точка A_2, а за точку C — C_1. На продолжении стороны CB за точку C отмечена точка C_2, а за точку B — B_2. При этом $AA_1 = AA_2 = BC$, $BB_1 = BB_2 = AC$, $CC_1 = CC_2 = AB$. Докажите, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности.

Дж. Конвей

8. Папа с сыном пошли в тир. Папа попадал в цель в четырех выстрелах из пяти, а сын — вдвое реже. Всего у них получилось в два раза больше попаданий, чем промахов. Кто сделал больше выстрелов и во сколько раз?

И. Раскина

7–8 классы

1. После окончания чемпионата мира по футболу для каждой команды посчитали отношение числа голов, забитых ею с пенальти, к числу пробивавшихся пенальти и отношение числа голов, пропущенных с пенальти, к числу пенальти, пробитых в ее ворота. Может ли у всех команд первый показатель быть меньше второго?

А. Заславский

2. Существует ли такое натуральное число n, что число n^2 представимо в виде суммы квадратов трех попарно взаимно простых натуральных чисел?

В. Сендеров

3. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На стороне AB выбирается точка K, а на стороне BC — точка L так, что $AK + CL = \frac{1}{2}AB$. Найдите геометрическое место середин отрезков KL.

Д. Калинин

4. В однокруговом футбольном турнире участвовало 20 команд. Оказалось, что если какие-то две команды сыграли между собой вничью, то хотя бы одна из них завершила вничью всего не больше трех игр. Каково наибольшее возможное число ничьих в таком турнире?

И. Акулич

5. Существуют ли различные натуральные числа x, y и z, удовлетворяющие уравнению $x^3 + y^3 = z^{2006}$?

В. Сендеров

6. Каким наибольшим может быть число сторон у многоугольника, полученного пересечением четырехугольника и пятиугольника?

А. Шаповалов

7. На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку A отмечена точка A_1, а за точку B — B_1. На продолжении стороны AC за точку A отмечена точка A_2, а за точку C — C_1. На продолжении стороны CB за точку C отмечена точка C_2, а за точку B — B_2. При этом $AA_1 = AA_2 = BC$, $BB_1 = BB_2 = AC$, $CC_1 = CC_2 = AB$. Докажите, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности.

Дж. Конвей

8. Можно ли в клетках таблицы 100×100 расставить натуральные числа от 1 до 10000 так, чтобы суммы чисел во всех вертикалях, всех горизонталях и обеих диагоналях были нечетными?

В. Берник, И. Акулич

8 класс, первая лига

1. Существуют ли положительные числа x, y, z и t, удовлетворяющие равенствам

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3 \quad \text{и} \quad \frac{1}{x^5} + \frac{1}{y^5} + \frac{1}{z^5} = \frac{1}{t^5}?$$

В. Сендеров

2. Пусть a, b, c, x, y и z — целые числа, причем

$$a + b + c = x + y + z = 0.$$

Докажите, что произведение

$$(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}+\sqrt{c^2+z^2})(-\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}+\sqrt{c^2+z^2})\times$$
$$\times(\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{b^2+y^2}+\sqrt{c^2+z^2})(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}-\sqrt{c^2+z^2})$$

является квадратом целого числа.

С. Токарев

3. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на 4 треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Докажите равенство сумм квадратов противоположных сторон четырехугольника с вершинами в центрах этих окружностей.

А. Акопян

4. В однокруговом футбольном турнире участвовало 20 команд. Оказалось, что если какие-то две команды сыграли между собой вничью, то хотя бы одна из них завершила вничью всего не больше трех игр. Каково наибольшее возможное число ничьих в таком турнире?

И. Акулич

5. Существуют ли различные натуральные числа x, y и z, удовлетворяющие уравнению $x^3 + y^3 = z^{2006}$?

В. Сендеров

6. Каким наибольшим может быть число сторон у многоугольника, полученного пересечением четырехугольника и пятиугольника?

А. Шаповалов

7. В квадрате $ABCD$ на стороне AB выбрана точка P, на стороне BC — точки Q и R, и на стороне AD — точка S. Вычислите $\angle BSQ + \angle BRP + \angle SPD - \angle RPC$, если известно, что $3BP = 3BQ = 3CR = 3DS = AD$.

О. Крижановский

8. Можно ли в клетках таблицы 12×12 расставить натуральные числа от 1 до 144 так, чтобы суммы чисел во всех вертикалях, всех горизонталях и обеих диагоналях были нечетными?

В. Берник, И. Акулич

8 класс, высшая лига

1. Существуют ли положительные числа x, y, z и t, удовлетворяющие равенствам

$$x^5 + y^5 + z^5 = t^5 \quad \text{и} \quad \frac{1}{x^7} + \frac{1}{y^7} + \frac{1}{z^7} = \frac{1}{t^7}?$$

В. Сендеров

2. Пусть a, b, c, x, y и z — целые числа, причем

$$a + b + c = x + y + z = 0.$$

Докажите, что произведение

$$(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}+\sqrt{c^2+z^2})(-\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}+\sqrt{c^2+z^2})\times$$
$$\times(\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{b^2+y^2}+\sqrt{c^2+z^2})(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}-\sqrt{c^2+z^2})$$

является квадратом целого числа.

С. Токарев

3. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на 4 треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Докажите равенство сумм квадратов противоположных сторон четырехугольника с вершинами в центрах этих окружностей.

А. Акопян

4. В однокруговом футбольном турнире участвовало 20 команд. Оказалось, что если какие-то две команды сыграли между собой вничью, то хотя бы одна из них завершила вничью всего не больше трех игр. Каково наибольшее возможное число ничьих в таком турнире?

И. Акулич

5. Существуют ли различные натуральные числа x, y и z, удовлетворяющие уравнению $x^3 + y^3 = z^{2006}$?

В. Сендеров

6. Каким наибольшим может быть число сторон у многоугольника, полученного пересечением четырехугольника и пятиугольника?

А. Шаповалов

7. На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку A отмечена точка A_1, а за точку B — B_1. На продолжении стороны AC за точку A отмечена точка A_2, а за точку C — C_1. На продолжении стороны CB за точку C отмечена точка C_2, а за точку B — B_2. При этом $AA_1 = AA_2 = BC$, $BB_1 = BB_2 = AC$, $CC_1 = CC_2 = AB$.

Докажите, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности.

Дж. Конвей

8. Можно ли в клетках таблицы 100×100 расставить натуральные числа от 1 до 10000 так, чтобы суммы чисел во всех вертикалях, всех горизонталях и обеих диагоналях были нечетными?

В. Берник, И. Акулич

9 класс

1. Существуют ли положительные числа x, y, z и t, удовлетворяющие равенствам

$$x^{2005}+y^{2005}+z^{2005}=t^{2005} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x^{2007}}+\frac{1}{y^{2007}}+\frac{1}{z^{2007}}=\frac{1}{t^{2007}}?$$

В. Сендеров

2. Пусть P — произведение некоторых восьми последовательных натуральных чисел, а Q — наименьший точный квадрат, для которого $Q > P$. Докажите, что разность $Q - P$ является точным квадратом.

С. Токарев

3. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, M — середина его стороны BC, а E — точка пересечения прямых MO и AD. Докажите равенство

$$S_{\triangle ABO} : S_{\triangle CDO} = AE : ED.$$

М. Волчкевич

4. В однокруговом футбольном турнире участвовало 20 команд. Оказалось, что если какие-то две команды сыграли между собой вничью, то хотя бы одна из них завершила вничью всего не больше трех игр. Каково наибольшее возможное число ничьих в таком турнире?

И. Акулич

5. Решите в натуральных числах x, y и z уравнение $x^6+3^y=z^2$.

В. Сендеров

6. Докажите, что при пересечении m-угольника и n-угольника не может получиться многоугольник более чем с $2m+2n-6$ сторонами.

А. Шаповалов

7. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) описана окружность. Пусть BD — диаметр этой окружности, K —

произвольная точка меньшей из дуг BC, а K' и K'' — точки, симметричные K относительно прямых AC и BC соответственно. Докажите, что прямые AC, DK и $K'K''$ имеют общую точку.

А. Акопян

8. Можно ли в клетках таблицы 100×100 расставить натуральные числа от 1 до 10000 так, чтобы суммы чисел во всех вертикалях, всех горизонталях и обеих диагоналях были нечетными?

В. Берник, И. Акулич

1.3.3. Третий тур

7 класс

1. Турнир Солнечного города по шахматам проходил в один круг. В турнире принимали участие 100 коротышек. После турнира Незнайка неожиданно узнал, что за ничью давалось не $1/2$ очка, как он думал, а 0 очков, а за поражение — не 0 очков, а -1, ну а за победу, как он считал и раньше, действительно начисляли 1 очко. В результате Незнайка набрал в два раза меньше очков, чем ему казалось. Сколько очков набрал Незнайка?

Д. Калинин, С. Токарев

2. Решите ребус РОТОР : СОКОЛ $= 3 : 1$.

А. Хачатурян

3. Можно ли в таблице 3×3 расставить числа от 1 до 9 так, чтобы сумма чисел в любых трех клетках, никакие две из которых не лежат на одной вертикали или горизонтали, равнялась 15?

Д. Калинин

4. В прямоугольнике $ABCD$ соединили вершину C с серединой K стороны AD. Оказалось, что $CK \perp BD$. Пусть H — точка пересечения BD и CK. Докажите, что треугольник AHB — равнобедренный.

Д. Калинин

5. Художник-абстракционист хочет раскрасить клетки доски 8×8 в три цвета так, чтобы выполнялось условие: если одинаково окрашенные клетки A и B граничат с клеткой C, то с C граничат еще две клетки, окрашенные одинаково, причем в цвет, отличный от цвета A и B. (Граничащими называем клетки, имеющие общую сторону.) Сможет ли он это сделать?

Е. Барабанов, И. Акулич

6. Из клетчатой бумаги по линиям сетки вырезали многоугольник. Всегда ли можно вырезать (тоже по линиям сетки) содержащий его прямоугольник того же периметра?

В. Сендеров

7. На доске написали квадрат, куб, четвертую и пятую степени каких-то натуральных чисел. Одно из этих чисел разделили на два, другое — на три, третье — на четыре, четвертое — на пять. Могли ли снова получиться квадрат, куб, четвертая и пятая степени каких-нибудь натуральных чисел?

Д. Калинин

8. У Сени с Гришей есть пять монет, из которых три настоящие одного веса, одна фальшивая (легче настоящей на 1 г) и одна поддельная (тяжелее настоящей на 1 г). Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без стрелок и гирек определить фальшивую и поддельную монеты?

Жюри турнира

7–8 классы

1. Решите ребус РОТОР : СОКОЛ $= 3 : 1$.

А. Хачатурян

2. В прямоугольнике $ABCD$ соединили вершину C с серединой K стороны AD. Оказалось, что $CK \perp BD$. Пусть H — точка пересечения BD и CK. Докажите, что треугольник AHB — равнобедренный.

Д. Калинин

3. В некоторой компании любые два человека с общим знакомым имеют разное количество знакомых. Доказать, что в этой компании есть человек только с одним знакомым. (Все знакомства симметричны, у каждого человека есть хотя бы один знакомый.)

С. Конягин

4. В ряд записаны несколько различных натуральных чисел. Назовем пару рядом стоящих чисел плохой, если они одной четности и левое больше правого, либо они разной четности и левое меньше правого. Каждую минуту числа какой-нибудь из плохих пар меняются местами. Докажите, что рано или поздно такие перестановки прекратятся.

А. Шаповалов

5. Художник-абстракционист хочет раскрасить клетки доски 8×8 в $m > 1$ цветов так, чтобы выполнялось условие: если одинаково окрашенные клетки A и B граничат с клеткой C, то с C граничат еще две клетки, окрашенные одинаково, причем в цвет, отличный от цвета A и B. (Граничащими называем клетки, имеющие общую сторону.) При каких m он сможет это сделать?

Е. Барабанов, И. Акулич

6. Турнир Солнечного города по шахматам проходил в один круг. В турнире принимали участие 100 коротышек. После турнира Незнайка неожиданно узнал, что за ничью давалось не 1/2 очка, как он думал, а 0 очков, а за поражение — не 0 очков, а -1, ну а за победу, как он считал и раньше, действительно начисляли 1 очко. В результате Незнайка набрал в два раза меньше очков, чем ему казалось. Сколько очков набрал Незнайка?

Д. Калинин, С. Токарев

7. Найти все тройки простых чисел, удовлетворяющие равенству $x^3 + y^3 = 2z^3$.

В. Сендеров

8. Из клетчатой бумаги по линиям сетки вырезали многоугольник. Всегда ли можно вырезать (тоже по линиям сетки) содержащий его прямоугольник того же периметра?

В. Сендеров

8 класс, первая лига

1. Пусть d — наибольшее из положительных чисел a, b, c, d. Доказать неравенство

$$a(d-b)+b(d-c)+c(d-a) \leqslant d^2.$$

Сербская олимпиада 1995 г.

2. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает второй раз гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC в точке E. Окружность, проходящая через точки B и C, пересекает второй раз AB в точке F. Сами окружности пересекаются второй раз в точке D. Найти угол EDF.

Д. Калинин

3. Художник-абстракционист хочет раскрасить клетки доски 8×8 в $m > 1$ цветов так, чтобы выполнялось условие: если одинаково окрашенные клетки A и B граничат с клеткой C, то с C граничат еще две клетки, окрашенные одинаково, причем в цвет, отличный от цвета A и B. (Граничащими называем клетки, имеющие общую сторону.) При каких m он сможет это сделать?

Е. Барабанов, И. Акулич

4. Решите ребус РОТОР : СОКОЛ $= 3 : 1$.

А. Хачатурян

5. В ряд записаны несколько различных натуральных чисел. Назовем пару рядом стоящих чисел плохой, если они одной четности и левое больше правого, либо они разной четности и левое меньше правого. Каждую минуту числа какой-нибудь из плохих пар меняются местами. Докажите, что рано или поздно такие перестановки прекратятся.

А. Шаповалов

6. Турнир Солнечного города по шахматам проходил в один круг. В турнире принимали участие 100 коротышек. После турнира Незнайка неожиданно узнал, что за ничью давалось не $1/2$ очка, как он думал, а 0 очков, а за поражение — не 0 очков, а -1, ну а за победу, как он считал и раньше, действительно начисляли 1 очко. В результате Незнайка набрал в два раза меньше очков, чем ему казалось. Сколько очков набрал Незнайка?

Д. Калинин, С. Токарев

7. Найти все тройки простых чисел, удовлетворяющие равенству $x^3 + y^3 = 2z^3$.

В. Сендеров

8. Из клетчатой бумаги по линиям сетки вырезали многоугольник. Всегда ли можно вырезать (тоже по линиям сетки) содержащий его прямоугольник того же периметра?

В. Сендеров

8 класс, высшая лига

1. Многочлены с целыми коэффициентами $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ таковы, что $P(x) = Q(x)R(x)$. Про $P(x)$ известно, что он имеет степень четыре и все его коэффициенты по модулю не превосходят единицы. Найти наибольшее возможное значение наибольшего из коэффициентов многочленов Q и R.

В. Сендеров

2. Дан плоский выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Через a_k обозначим длину стороны $A_{k-1}A_k$ ($A_0 = A_n$), а через d_k — длину проекции многоугольника на прямую, содержащую сторону $A_{k-1}A_k$. Доказать неравенство

$$\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \cdots + \frac{a_n}{d_n} > 2.$$

Д. Фомин

3. Пусть d — наибольшее из положительных чисел a, b, c, d. Доказать неравенство

$$a(d-b) + b(d-c) + c(d-a) \leqslant d^2.$$

Сербская олимпиада 1995 г.

4. Точка M принадлежит короткой дуге AB окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC. Точки P, Q симметричны M относительно сторон CA и CB. Прямая ℓ симметрична CM относительно биссектрисы угла $\angle ACB$. Доказать, что $\ell \perp PQ$.

Д. Калинин

5. В некоторой компании любые два человека с общим знакомым имеют разное количество знакомых. Доказать, что в этой компании есть человек только с одним знакомым. (Все знакомства симметричны, у каждого человека есть хотя бы один знакомый.)

С. Конягин

6. У натурального числа есть ровно десять простых делителей. Доказать, что найдется несколько делителей этого числа, сумма которых делится на 1024.

Д. Калинин

7. Художник-абстракционист хочет раскрасить клетки доски 8×8 в $m > 1$ цветов так, чтобы выполнялось условие: если одинаково окрашенные клетки A и B граничат с клеткой C, то с C граничат еще две клетки, окрашенные одинаково, причем в цвет, отличный от цвета A и B. (Граничащими называем клетки, имеющие общую сторону.) При каких m он сможет это сделать?

Е. Барабанов, И. Акулич

8. В ряд записаны несколько различных натуральных чисел. Назовем пару рядом стоящих чисел плохой, если они одной четности и левое больше правого, либо они разной четности и левое меньше правого. Каждую минуту числа какой-нибудь из плохих пар меняются местами. Докажите, что рано или поздно такие перестановки прекратятся.

А. Шаповалов

9 класс

1. Многочлены с целыми коэффициентами $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ таковы, что $P(x) = Q(x)R(x)$. Про $P(x)$ известно, что он имеет степень четыре и все его коэффициенты по модулю не превосходят единицы. Найти наибольшее возможное значение наибольшего из коэффициентов многочленов Q и R.

В. Сендеров

2. Найти все натуральные m, при каждом из которых $3^m + 4^m$ делится на $1^m + 2^m$ и $1^m + 2^m$ простое.

В. Шарич

3. Сумма неотрицательных чисел x, y, z равна 1. Доказать неравенство

$$\frac{1}{1+4x^2} + \frac{1}{1+4y^2} + \frac{1}{1+4z^2} \geqslant 2.$$

В. Сендеров, В. Шарич

4. Точка M принадлежит короткой дуге AB окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC. Точки P, Q симметричны M относительно сторон CA и CB. Прямая ℓ симметрична CM относительно биссектрисы угла $\angle ACB$. Доказать, что $\ell \perp PQ$.

Д. Калинин

5. В некоторой компании любые два человека с общим знакомым имеют разное количество знакомых. Доказать, что в этой компании есть человек только с одним знакомым. (Все знакомства симметричны, у каждого человека есть хотя бы один знакомый.)

С. Конягин

6. Художник-абстракционист хочет раскрасить клетки доски 8×8 в $m > 1$ цветов так, чтобы выполнялось условие: если одинаково окрашенные клетки A и B граничат с клеткой C, то с C граничат еще две клетки, окрашенные одинаково, причем в цвет, отличный от цвета A и B. (Граничащими называем клетки, имеющие общую сторону.) При каких m он сможет это сделать?

Е. Барабанов, И. Акулич

7. Дан плоский выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Через a_k обозначим длину стороны $A_{k-1}A_k$ ($A_0 = A_n$), а через d_k — длину проекции многоугольника на прямую, содержащую сторону

$A_{k-1}A_k$. Доказать неравенство

$$\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \dots + \frac{a_n}{d_n} > 2.$$

Д. Фомин

8. Углы B и C треугольника ABC равны 50° и 30° соответственно. Внутри треугольника выбрана точка M так, что $\angle MBC = 20^\circ$, $\angle MCB = 10^\circ$. Доказать, что $AM \perp BC$.

Сербская олимпиада 1995 г.

1.3.4. Финал

7 класс, финальный бой за 3 и 5 места

1. На доске выписаны все целые числа от 1 до n. Сеня посчитал, сколько всего цифр выписано. Оказалось, что это двузначное число, которое записывается теми же цифрами, что и n, но в обратном порядке. Найдите n.

А. Шаповалов

2. Шестиугольник $ABCDEF$ — правильный (то есть все его стороны равны, а все углы 120°). M — середина диагонали AC, а N — середина стороны DE. Докажите, что треугольник FNM — равносторонний.

Сербская олимпиада 1994 г.

3. Нарисуйте фигуру, которую можно разрезать как на три равных треугольника, так и на четыре равных (совпадающих при наложении) четырехугольника.

А. Шаповалов

4. Почти прямоугольным будем называть треугольник, где есть угол, который отличается от прямого не более чем на 15°. Почти равнобедренным будем называть треугольник, где есть два угла, которые отличаются не более чем на 15°. Докажите, что любой остроугольный треугольник почти равнобедренный или почти прямоугольный.

В. Гуровиц

5. У Сени есть 5 альбомов с фотографиями. Как-то, рассматривая фотографии, он заметил, что суммарное число фотографий в любых двух альбомах принимает только три значения: 75, 88 и 101. Сколько фотографий в каждом альбоме?

Е. Барабанов

6. Можно ли в кружочки на рис. 5 вписать по натуральному числу так, чтобы в каждой паре кружочков, соединенных отрезком, одно число делилось на другое, а в несоединенных парах такого не было?

А. Шаповалов

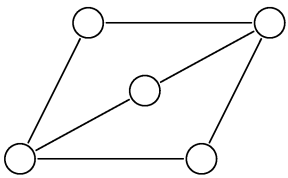


Рис. 5

7. Квадратная клетчатая таблица 4×4 заполнена числами так, что в любом квадрате 3×3 и в любом квадрате 2×2 сумма чисел равна нулю. Докажите, что суммы чисел в противоположных углах квадрата равны нулю.

А. Шаповалов

8. Фома и Ерема делят сыр. Изначально у них есть 3 куска сыра. Сперва Фома, если хочет, выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску, первый Ерема. Точно так же они делят и сыр со второй тарелки, только первым выбирает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

А. Шаповалов

7–8 классы, финальный бой за 7 место в 8 классе и за 1 место в 7 классе

1. Фома и Ерема делят сыр. Изначально у них есть 3 куска сыра. Сперва Фома выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску, первый Ерема. Точно так же они делят и сыр со второй тарелки, только первым выбирает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

А. Шаповалов

2. Шестиугольник $ABCDEF$ — правильный (то есть все его стороны равны, а все углы $120°$). M — середина диагонали AC, а N — середина стороны DE. Докажите, что треугольник FNM — равносторонний.

Сербская олимпиада 1994 г.

3. Квадратная клетчатая таблица 7×7 заполнена числами так, что в любом квадрате 3×3 и в любом квадрате 2×2 сумма чисел равна нулю. Докажите, что числа в угловых клетках равны.

А. Шаповалов

4. Почти прямоугольным будем называть треугольник, где есть угол, который отличается от прямого не более чем на $15°$. Почти равнобедренным будем называть треугольник, где есть два угла, которые отличаются не более чем на $15°$. Докажите, что любой остроугольный треугольник почти равнобедренный или почти прямоугольный.

В. Гуровиц

5. На доске выписаны все целые числа от 1 до n. Сеня посчитал, сколько всего цифр выписано. Оказалось, что это трехзначное число, которое записывается теми же цифрами, что и n, но в обратном порядке. Найдите n.

А. Шаповалов

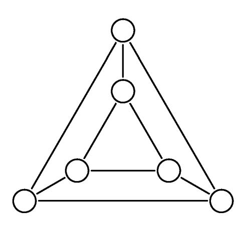


Рис. 6

6. Можно ли в кружочки на рис. 6 вписать по натуральному числу так, чтобы в каждой паре кружочков, соединенных отрезком, одно число делилось на другое, а в несоединенных парах такого не было?

А. Шаповалов

7. За одну операцию разрешается в треугольнике изменить длину одной из сторон (но так, чтобы он остался треугольником). Докажите, что за 3 операции треугольник можно превратить в любой другой треугольник того же периметра.

А. Шаповалов

8. По круговому треку соревновались два велосипедиста, стартовавшие с одной линии, но в разные стороны. Их третья встреча произошла на линии старта. Известно, что первый тратил на один круг на 45 секунд меньше второго и при этом проезжал круг не быстрее чем за 30 секунд. Через какое время после старта произошла первая встреча?

Фольклор

7–8 класс, финальный бой за 1, 3, 5 места

1. Фома и Ерема делят сыр. Изначально у них есть 3 куска сыра. Сперва Фома выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску, первый Ерема. Точно так же они делят и сыр со второй тарелки, только первым выбирает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

А. Шаповалов

2. Шестиугольник $ABCDEF$ — правильный (то есть все его стороны равны, а все углы $120°$). M — середина диагонали AC, а N — середина стороны DE. Докажите, что треугольник FNM — равносторонний.

Сербская олимпиада 1994 г.

3. Есть обычный комплект из 28 домино. Каждая доминошка в точности накрывает две клетки шахматной доски. Можно ли уложить весь комплект так, чтобы доминошки соприкасались только половинками с одинаковыми цифрами? (Комплект домино — это набор прямоугольников 1×2, в каждой клетке которых написана одна из цифр от 0 до 6, причем каждая пара цифр встречается ровно на одной доминошке.)

А. Шаповалов

4. По круговому треку соревновались два велосипедиста, стартовавшие с одной линии, но в разные стороны. Их седьмая встреча произошла на линии старта. За сколько секунд каждый из них проезжал круг трека, если известно, что первый тратил на него на 12 секунд меньше второго и при этом проезжал круг не быстрее 31 секунды?

Фольклор

5. На доске выписаны все целые числа от 1 до n. Сеня посчитал, сколько всего цифр выписано. Оказалось, что это трехзначное число, которое записывается теми же цифрами, что и n, но в обратном порядке. Найдите n.

А. Шаповалов

6. Можно ли в кружочки на рис. 7 вписать по натуральному числу так, чтобы в каждой паре кружочков, соединенных отрезком, одно число делилось на другое, а в несоединенных парах такого не было?

А. Шаповалов

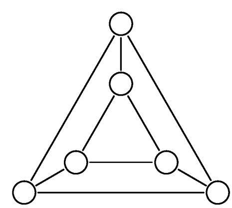


Рис. 7

7. За одну операцию разрешается в треугольнике изменить длину одной из сторон (но так, чтобы он остался треугольником). Докажите, что за 3 операции треугольник можно превратить в любой другой треугольник того же периметра.

А. Шаповалов

8. Гирьки весом 1, 2, 3, ..., 40 г разложили на две чашки весов так, что весы оказались в равновесии. Докажите, что можно убрать с чаш три гирьки так, чтобы равновесие не нарушилось.

А. Шаповалов

8 класс, тренировочный бой (первая лига)

1. Можно ли в кружочки на рис. 7 вписать по натуральному числу так, чтобы в каждой паре кружочков, соединенных отрезком, одно число делилось на другое, а в несоединенных парах такого не было?

А. Шаповалов

2. Шестиугольник $ABCDEF$ — правильный (то есть все его стороны равны, а все углы 120°). M — середина диагонали AC, а N — середина стороны DE. Докажите, что треугольник FNM — равносторонний.

Сербская олимпиада 1994 г.

3. Квадратная клетчатая таблица 7×7 заполнена числами так, что в любом квадрате 3×3 и в любом квадрате 2×2 сумма чисел равна нулю. Докажите, что числа в угловых клетках равны.

А. Шаповалов

4. На доске выписаны все целые числа от 1 до n. Сеня посчитал, сколько всего цифр выписано. Оказалось, что это трехзначное число, которое записывается теми же цифрами, что и n, но в обратном порядке. Найдите n.

А. Шаповалов

5. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого число $10n$ делится на все натуральные числа, меньше n.

И. Акулич

6. Нарисуйте фигуру, которую можно разрезать как на три равных треугольника, так и на четыре равных (совпадающих при наложении) четырехугольника.

А. Шаповалов

7. За одну операцию разрешается в треугольнике изменить длину одной из сторон (но так, чтобы он остался треугольником). Докажите, что за 12 операций можно из правильного треугольника со стороной 1 сделать правильный треугольник со стороной 40.

А. Шаповалов

8. Фома и Ерема делят сыр. Изначально у них есть 3 куска сыра. Сперва Фома выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску, первый Ерема. Точно так же они делят и сыр со второй тарелки, только первым выбирает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

А. Шаповалов

8 класс, высшая лига

1. Фома и Ерема делят кучу из кусков сыра. Сперва Фома, если хочет, выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску, первый Ерема. Точно так же они делят и сыр со второй тарелки, только первым выбирает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

А. Шаповалов

2. На сторонах AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$ выбраны точки P, M, N, Q так, что $\angle MAN = 45^\circ$, $PM \parallel AN$, $AM \parallel NQ$. Докажите, что точки A, P, M, N, Q лежат на одной окружности.

В. Произволов

3. Есть обычный комплект из 28 домино. Каждая доминошка в точности накрывает две клетки шахматной доски. Можно ли уложить весь комплект так, чтобы доминошки соприкасались только половинками с одинаковыми цифрами? (Комплект домино — это набор прямоугольников 1×2, в каждой клетке которых написана одна из цифр от 0 до 6, причем каждая пара цифр встречается ровно на одной доминошке.)

А. Шаповалов

4. По круговому треку соревновались два велосипедиста, стартовавшие с одной линии, но в разные стороны. Их восьмая встреча произошла на линии старта. За сколько секунд каждый из них проезжал круг трека, если известно, что первый тратил на него на 14 секунд больше второго и при этом проезжал круг не быстрее 31 секунды?

Фольклор

5. Найдите наибольшее натуральное число n, которое делится на все натуральные числа, не превосходящие $n/10$.

И. Акулич

6. Решите уравнение $y^2 = 3p^n + 1$, где y и n натуральные, p — простое.

В. Сендеров

7. За одну операцию разрешается в треугольнике изменить длину одной из сторон (но так, чтобы он остался треугольником). За какое наименьшее число операций можно из правильного треугольника со стороной 100 сделать правильный треугольник со стороной 1?

А. Шаповалов

8. Гирьки весом 1, 2, 3, $\ldots$, n г ($n > 4$) разложили на две чашки весов так, что весы оказались в равновесии. Докажите, что можно убрать с чаш три гирьки так, чтобы равновесие не нарушилось.

А. Шаповалов

9 класс

1. Фома и Ерема делят кучу из кусков сыра. Сперва Фома, если хочет, выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает сыр на две тарелки. После этого Ерема выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску, первый Ерема. Точно так же они делят и сыр со второй тарелки, только первым выбирает Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

А. Шаповалов

2. На сторонах AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$ выбраны точки P, M, N, Q так, что $\angle MAN = 45^\circ$, $PM \parallel AN$, $AM \parallel NQ$. Отрезок PQ пересекает AM и AN в точках F и G соответственно. Докажите равенство площадей: $S_{\triangle AFG} = S_{\triangle PMF} + S_{\triangle GNQ}$.

В. Произволов

3. Есть обычный комплект из 28 домино. Каждая доминошка в точности накрывает две клетки шахматной доски. Можно ли уложить весь комплект так, чтобы доминошки соприкасались только половинками с одинаковыми цифрами? (Комплект домино — это набор прямоугольников 1×2, в каждой клетке которых написана одна из цифр от 0 до 6, причем каждая пара цифр встречается ровно на одной доминошке.)

А. Шаповалов

4. В треугольнике h_1, h_2, h_3 — высоты, d_1, d_2, d_3 — расстояния от некоторой внутренней точки до сторон треугольника. Докажите неравенство: $(h_1^4 + h_2^4 + h_3^4)^3 \geqslant 3^{15}(d_1 d_2 d_3)^4$.

В. Сендеров

5. Найдите наибольшее натуральное число n, которое делится на все натуральные числа, не превосходящие $n/10$.

И. Акулич

6. Решите уравнение $y^2 = 3p^n + 1$, где y и n натуральные, p — простое.

В. Сендеров

7. Назовем треугольники сходными, если у них равны как минимум две из трех сторон. Докажите, что найдется квадрат, который можно разбить на треугольники, сходные данному остроугольному треугольнику.

А. Шаповалов

8. Гирьки весом 1, 2, 3, ..., n г ($n > 4$) разложили на две чашки весов так, что весы оказались в равновесии. Докажите, что можно убрать с чаш три гирьки так, чтобы равновесие не нарушилось.

А. Шаповалов

1.4. Личная олимпиада

1.4.1. 6–7 классы

1. Три человека со стиральной машиной хотят переправиться через реку. Катер вмещает либо двух человек и стиральную машину, либо трех человек. Беда в том, что стиральная машина тяжелая, поэтому погрузить ее в катер или вытащить из него можно только втроем. Смогут ли они переправиться?

А. Шаповалов

2. Есть некоторое количество одинаковых квадратных столов. Их можно расставить для банкета либо буквой «П», либо буквой «Т» («толщина» каждой буквы — один стол). В каком случае можно будет посадить больше гостей (периметр образовавшегося банкетного стола будет больше)?

А. Блинков

3. Мартышка, Попугай, Удав и Слоненок устроили концерт по случаю приезда бабушки Удава. На концерте было исполнено 7 номеров, причем каждый номер представлял собой либо пение вдвоем, либо танец втроем. Никакие два номера не исполнялись одним и тем же составом. Удав участвовал в исполнении одной песни и двух танцев. Мартышка исполнила больше номеров, чем Слоненок. Сколько номеров исполнил Слоненок?

Е. Барабанов

4. Миллионзначное натуральное число назовем кошачьим, если оно делится на произведение своих цифр. Сколько последовательных натуральных чисел могут быть кошачьими?

В. Сендеров

5. Кеша вырезал из бумаги треугольник ABC с наибольшей стороной AB и перегнул его по прямой так, что вершина C попала на сторону AB и образовался четырехугольник. Укажите множество точек на стороне AB, куда могла попасть вершина C.

А. Шаповалов, В. Гуровиц

6. Клетчатая таблица 3×3 называется магическим квадратом, если все числа в ней различны и суммы чисел во всех строках и столбцах одинаковы, например

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Существует ли магический квадрат 3×3, заполненный числами, обратными натуральным?

А. Шаповалов

7. Каждому из трех логиков написали на лбу натуральное число, причем одно из этих чисел являлось суммой двух других, и сообщили им об этом. Логик не видит, что написано у него на лбу, но видит, что написано у других. Первый логик сказал, что не может догадаться, какое число написано у него на лбу. После этого то же самое сказал второй логик, а затем и третий. Тогда первый сказал: «Я знаю, что у меня на лбу написано число 50». Какие числа написаны у двух остальных?

Предложил В. Трушков

1.4.2. 8–9 классы

1. Найдите все положительные числа x, для которых число $\{x\}(x + [x])$ целое. ($[x]$ — целая часть, а $\{x\}$ — дробная часть числа x).

Л. Радзивиловский

2. Известно, что p и q — простые числа, причем $p^2 + q$ и $p^2 - q$ также простые. Найдите p и q.

Б. Френкин

3. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что $BC_1 = C_1A_1 = A_1B_1 = B_1C$. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $C_1A_1B_1$ лежит на биссектрисе угла A.

А. Мякишев

4. Можно ли расположить в ряд все числа от 1 до 2006, взятые по два раза, так, чтобы для каждого числа разница между позициями, на которых оно встречается, была равна этому числу? Например, для чисел от 1 до 4 такое возможно: 2 3 2 4 3 1 1 4.

В. Гуровиц

5. На доске записаны числа 1, 2, 4, 8, ..., 512. Разрешается стереть любые два числа и записать вместо них частное от деления их произведения на их сумму. Докажите, что число на доске после девяти операций не зависит от порядка выбора чисел, и найдите это число.

А. Шаповалов

6. Петя и Вася играют в следующую игру. Имеется куча из 2006! камней. За один ход из кучи разрешается взять не более, чем 1/2006 часть оставшихся в ней камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Ходят поочередно, начинает Петя. Кто выигрывает при правильной игре?

А. Гусаков

7. При каких N можно любой треугольник разбить на N треугольников, имеющих по равной медиане?

А. Шаповалов

2. Решения задач

2.1. Математическая регата

2.1.1. 6–7 классы

Первый тур

1.1. Ответ: нет, нельзя.

Решение. Если первый километр бежать со скоростью 30 км/ч, то время движения будет равно $\frac{1}{30}$ ч $= 2$ мин. Таким образом, поезд уйдет в тот момент, когда останется бежать еще километр.

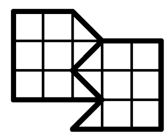


Рис. 8

1.2. Ответ: см. рис. 8.

1.3. Ответ: нет, не может.

Решение. Действительно, последняя цифра суммы зависит только от последних цифр слагаемых. Каждая сумма чисел, стоящих в скобках, оканчивается нулем, то есть делится на 10. Так как каждое из чисел, стоящих вне скобок, делится на 5, то каждое слагаемое данной суммы делится на 50. Следовательно, при любом количестве слагаемых данная сумма делится на 50, поэтому ее значение может оканчиваться либо на $\overline{50}$, либо на $\overline{00}$.

1.4. Ответ: наверняка было названо число 1.

Решение. Заметим, что среди жителей острова не могло быть более одного рыцаря, так как в этом случае рыцари назвали бы одинаковые числа, что противоречит условию задачи.

Если же на острове — один рыцарь, то он обязательно назвал число 1, а лжецы назвали любые 99 различных чисел, возможно, и большие ста. Таким образом, число 1 обязательно было названо, а любое другое число могло быть и не названо.

Второй тур

2.1. Ответ: 5 кг.

Решение. Заметим, что если утром крокозябра весит m кг, то, съев $2m$ кг бананов, она к вечеру весит $3m$ кг, а утром следующего дня — m кг, и так далее. Таким образом, за 4 дня крокозябра съест $8m$ кг бананов, что по условию составляет 40 кг. Следовательно, ее вес до отъезда Алисы — 5 кг.

2.2. Ответ: 45°.

Решение. Пусть $\angle A=2\alpha$, $\angle B=2\beta$ (см. рис. 9). Прямоугольные треугольники ACP и AEP равны по гипотенузе и острому углу, следовательно, $CP = E$.

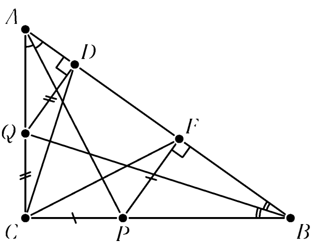


Рис. 9

Аналогично, из равенства прямоугольных треугольников BQC и BQD получим, что $CQ = DQ$.

Следовательно, треугольники CPE и CQD — равнобедренные, поэтому по свойству внешнего угла треугольника $\angle PCE = \angle PEC = \frac{1}{2}\angle BPE = \frac{90^\circ - 2\beta}{2}$ и $\angle QCD = \angle QDC = \frac{1}{2}\angle QD = \frac{90^\circ - 2\alpha}{2}$. Таким образом, $\angle DCE = 90^\circ - (\angle PCE + \angle QCD) = \alpha + \beta = 45^\circ$.

2.3. Ответ: нет, не имеет.

Решение. Заметим, что $\overline{\text{МАМА}} = \overline{\text{МА}} \cdot 101$. Так как 101 — простое число и на него делится произведение чисел $\overline{\text{ДО}}$ и $\overline{\text{ЧЬ}}$, то одно из этих чисел должно делится на 101. Но двузначное число не может делиться на трехзначное. Поэтому данный ребус не имеет решений.

2.4. Ответ: 4 звена.

Решение. Пример такой ломаной приведен на рис. 10. Докажем, что меньше четырех звеньев быть не может. Заметим, что любое звено ломаной может пересекать не более двух сторон большого квадрата, причем каждую из них только один раз. Значит, каждое звено ломаной может пересекать не более двух сторон маленьких квадратов, лежащих на сторонах большого. Так как таких сторон восемь, то ломаная должна иметь не меньше, чем 8:2=4 звена.

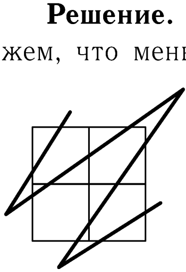


Рис. 10

Третий тур

3.1. Ответ: 239 и 1767.

Решение. Пусть Вовочка должен был сложить числа a и b, а фактически сложил числа $10a$ и b, тогда $a+b=2006$ и $10a+b=4157$. Вычтем из второго уравнения первое, получим: $9a = 2151$, то есть $a = 239$. Тогда $b = 2006 - 239 = 1767$.

3.2. Ответ: периметр четырехугольника $AMOK$ равен p.

Первое решение. Пусть L — середина стороны данного треугольника, тогда BL является его высотой и биссектрисой и периметр треугольника ABL равен периметру треугольника ACD (см. рис. 11).

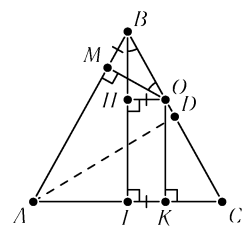


Рис. 11

Проведем перпендикуляр OH к прямой BL. Так как $\angle OBH = \frac{1}{2}\angle ABC = 30°$, $\angle BOM = 90° - \angle ABC = 30°$ и гипотенуза BO у прямоугольных треугольников BOM и BOH — общая, то эти треугольники равны. Следовательно, $OH = BM$ и $BH = OM$. Кроме того, поскольку $LHOK$ — прямоугольник, то $OH = LK$ и $OK = HL$. Таким образом,

$$P_K = AM + MO + OK + KA =$$
$$= AM + BH + HL + BM + AL = AB + BL + AL = p.$$

Второе решение. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием BC. Тогда сумма расстояний от точки O, лежащей на BC, до боковых сторон равна высоте BL, проведенной к боковой стороне (см. рис. 12).

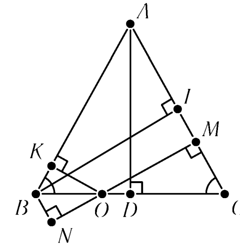


Рис. 12

Действительно, продолжим отрезок MO за точку O и проведем к прямой MO перпендикуляр BN. Так как

$$\angle BOK = 90° - \angle ABC =$$
$$= 90° - \angle ACB = \angle COM = \angle BON,$$

то прямоугольные треугольники BOK и BON, имеющие общую гипотенузу BO, равны. Следовательно, $OK = ON$, тогда $OK+OM=NM=BL$, поскольку прямые BN и AC параллельны.

По условию, треугольник ABC — равносторонний. Пусть его сторона равна a, а высота h, тогда $P_D = 1,5a + h$. Кроме того, $\angle BOK = \angle COM = 30^\circ$, поэтому $BK = \frac{1}{2}BO$ и $M = \frac{1}{2}CO$. Следовательно,

$$P_K = OK + OM + AK + AM =$$
$$= BL + AB + AC - (BK + CM) = h + 2a - 0,5a = 1,5a + h = p.$$

3.3. Ответ: да, существует.

Решение. Например, можно взять числа

$$2^{19} \cdot 3^{10};\ 2^{18} \cdot 3^{11};\ \ldots;\ 2^{10} \cdot 3^{19}.$$

Каждое из этих чисел не делится ни на одно из остальных, так как в его разложение либо множитель 2, либо множитель 3 входит с меньшим показателем степени. Если возвести любое из выбранных чисел в квадрат, то и двойка, и тройка войдут в его разложение с показателем степени не меньшим, чем 20, поэтому квадрат любого такого числа делится на каждое из остальных чисел.

3.4. Ответ: черный.

Решение. Судя по виду сверху, верхняя шашка в передней правой стопке — белая, поэтому все три черные шашки правого столбца на виде спереди принадлежат дальней стопке, то есть в передней правой стопке всего одна шашка, и она — белая.

Аналогично, на виде слева все три черные шашки левого столбца принадлежат дальней стопке, то есть в задней левой стопке также всего одна белая шашка. Это означает, что все четыре шашки левого столбца на виде спереди и правого столбца на виде слева принадлежат передней левой стопке.

Таким образом, в передней левой стопке — три белых и одна черная шашка, по одной белой шашке — в передней правой и задней левой стопках, три черных шашки — в задней правой стопке, и в этой же стопке — одна (нижняя) шашка неизвестного цвета (см. рис. 13).

Всего: пять белых шашек, четыре черных и одна шашка неизвестного цвета. Поскольку черных и белых шашек должно быть поровну, то цвет этой шашки — черный.

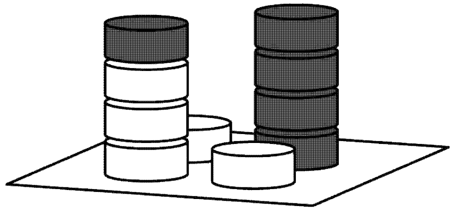


Рис. 13

2.1.2. 8–9 классы

1.1. Ответ: 0,5.

Первое решение. Так как $x \geqslant 2 - x \Leftrightarrow x \geqslant 1$, то

$$\max(x; 2-x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 1, \\ 2-x, & x < 1. \end{cases}$$

Аналогично, $3x \geqslant 1 + 2x \Leftrightarrow x \geqslant 1$, поэтому

$$\min(3x; 1+2x) = \begin{cases} 1+2x, & x \geqslant 1, \\ 3x, & x < 1. \end{cases}$$

Следовательно:
1) если $x \geqslant 1$, то исходное уравнение примет вид: $x = 1 + 2x$, откуда $x = -1$, что невозможно;
2) если $x < 1$, то исходное уравнение примет вид: $2 - x = 3x$, откуда $x = 0,5$.

Второе решение. Рассмотрим графики функций

$$f(x) = \max(x; 2-x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 1, \\ 2-x, & x < 1, \end{cases}$$

$$g(x) = \min(3x; 1+2x) = \begin{cases} 1+2x, & x \geqslant 1, \\ 3x, & x < 1 \end{cases}$$

(см. рис. 14). Эти ломаные имеют единственную общую точку, абсцисса которой $x = 0,5$ находится из графиков и проверяется подстановкой.

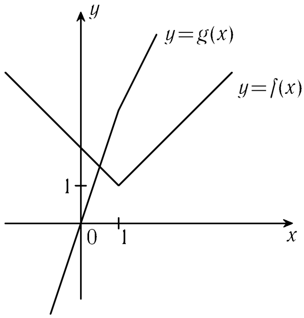


Рис. 14

Более общий способ решения уравнений вида $\max(a;b) = \min(a;b)$ *основан на применении формул*

$$\max(a;b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$$

и

$$\min(a;b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

В нашем случае

$$\max(x;2-x) = \frac{2+|2-2x|}{2}; \quad \min(3x;1+2x) = \frac{5x+1-|x-1|}{2}.$$

Исходное уравнение примет вид: $3|x-1| = 5x-1$. *Решив это уравнение, получим, что* $x = 0,5$.

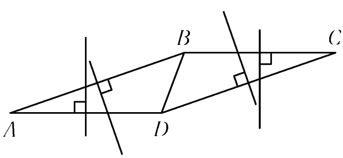


Рис. 15

1.2. Ответ: да, существует. Например, параллелограмм $ABCD$, у которого диагональ BD меньше любой из сторон (см. рис. 15).

1.3. Ответ: нет, не существует.

Решение. Указанная сумма равна $\frac{n(n+1)}{2}$. Предположим, что ее значение оканчивается цифрой 7, тогда число $n(n+1)$ должно оканчиваться цифрой 4. Перебором последних цифр убеждаемся, что произведение соседних натуральных чисел может оканчиваться только цифрами 0, 2 или 6, то есть цифрой 4 оканчиваться не может.

Перебор можно сократить, если использовать, что число, оканчивающееся на 4, дает остаток 4 при делении на 5. Тогда достаточно проверить все возможные остатки от деления n *на* 5.

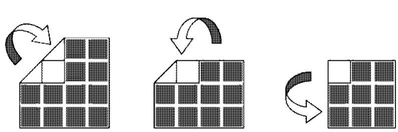


Рис. 16

1.4. Ответ: да, можно. См. рис. 16.

Второй тур

2.1. Ответ: 165.

Решение. Умножим первое равенство на 7, а второе равенство на -3 и сложим полученные равенства. Получим, что $x^2+z^2=65$. Учитывая, что x и z — натуральные числа, перебором находим, что

$$\begin{cases} x=1 \\ z=8 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x=8 \\ z=1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x=4 \\ z=7 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x=7 \\ z=4 \end{cases}.$$

Подставим полученные результаты в любое из данных равенств.
1) Если $x=1,\ z=8$, то $y^2=85$, следовательно, $y\notin N$.
2) Если $x=8,\ z=1$, то $y^2=148$, следовательно, $y\notin N$.
3) Если $x=4,\ z=7$, то $y^2=100$, следовательно, $y=10$. В этом случае $x^2+y^2+z^2=165$.
4) Если $x=7,\ z=4$, то $y^2=133$, следовательно, $y\notin N$.

2.2. Ответ: $4\sqrt{3}$ см^2.

Решение. Из условия следует, что угол ABL — внешний для треугольника ABD и $\angle ABL=60^\circ$ (см. рис. 17).

Пусть $\angle ADB=\alpha$, тогда

$$\angle DAB=60^\circ-\alpha=\angle BDC.$$

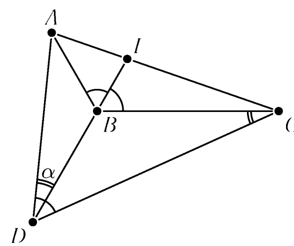


Рис. 17

Кроме того, $\angle ABD=\angle CBD=120^\circ$, поэтому треугольники ABD и DBC подобны (по двум углам). Следовательно, $\frac{AB}{DB}=\frac{BD}{BC}\Leftrightarrow AB\cdot BC=BD^2$. Тогда

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=\frac{1}{2}BD^2\cdot\sin 120^\circ=4\sqrt{3}(\text{ см}^2).$$

2.3. Ответ: нет, не могут.

Решение. Рассмотрим число

$$\overline{БРАБ}=1000Б+\overline{РАБ}=10\cdot\overline{БРА}+Б.$$

Тогда $10\cdot\overline{БРА}-\overline{РАБ}=999Б$. Пусть оба данных числа делятся на 49, тогда левая часть полученного равенства делится на 49, поэтому и $999Б$ делится на 49. Так как числа $999=3^3\cdot 37$ и

$49 = 7^2$ взаимно просты, то $Б$ должно делиться на 49. Но $Б$ — однозначное число, отличное от 0 (так как с цифры $Б$ начинается число $\overline{БРА}$), поэтому оно не может делиться на 49. Полученное противоречие показывает, что на 49 данные числа одновременно делиться не могут.

Можно также непосредственно выписать все трехзначные числа, делящиеся на 49. Таких чисел 18, и, сравнивая их попарно, можно убедиться, что среди них нет пары чисел указанного вида.

2.4. Ответ: сумма всех чисел такой таблицы равна нулю.

Решение. Представим каждое из чисел от 1 до 100 в виде суммы двух слагаемых, первое из которых делится на десять нацело, а второе не больше десяти.

0+1	0+2	0+3	0+4	0+5	0+6	0+7	0+8	0+9	0+10
10+1	10+2	10+3	10+4	10+5	10+6	10+7	10+8	10+9	10+10
20+1	20+2	20+3	20+4	20+5	20+6	20+7	20+8	20+9	20+10
30+1	30+2	30+3	30+4	30+5	30+6	30+7	30+8	30+9	30+10
40+1	40+2	40+3	40+4	40+5	40+6	40+7	40+8	40+9	40+10
50+1	50+2	50+3	50+4	50+5	50+6	50+7	50+8	50+9	50+10
60+1	60+2	60+3	60+4	60+5	60+6	60+7	60+8	60+9	60+10
70+1	70+2	70+3	70+4	70+5	70+6	70+7	70+8	70+9	70+10
80+1	80+2	80+3	80+4	80+5	80+6	80+7	80+8	80+9	80+10
90+1	90+2	90+3	90+4	90+5	90+6	90+7	90+8	90+9	90+10

Заметим, что в каждой строке равны первые слагаемые, а в каждом столбце равны вторые слагаемые. Так как в каждой строке исходной таблицы положительных и отрицательных чисел поровну, то при сложении всех чисел таблицы все первые слагаемые взаимно уничтожатся, а поскольку в каждом столбце положительных и отрицательных чисел также поровну, то взаимно уничтожатся и все вторые слагаемые. Следовательно, сумма всех чисел таблицы равна нулю.

Третий тур

3.1. Решение. Пусть x — корень данного уравнения. Если $x = 0$, то $q = 0$, и требуемое неравенство выполняется при любых значениях p.

Если $x \neq 0$, то

$$x^3+px+q=0 \Leftrightarrow 4x^4+4px^2+4qx=0 \Leftrightarrow 4x^4+4px^2+p^2=p^2-4qx.$$

Так как $4x^4+4px^2+p^2=(2x^2+p)^2 \geqslant 0$, то $p^2-4qx \geqslant 0 \Leftrightarrow 4qx \leqslant p^2$, что и требовалось доказать.

3.2. Ответ: 120°.

Решение. Пусть данная окружность с центром O касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и K соответственно (см. рис. 18). Так как M является серединой отрезка AB, а Q является серединой отрезка AP, то отрезок MQ является средней линией треугольника ABP, параллельной стороне BP. Аналогично, KQ — средняя линия треугольника ACP, параллельная CP. Следовательно, $\angle BPC = \angle MQK$, так как это углы с соответственно сонаправленными сторонами. Так как $\triangle ABC$ — равносторонний, то $\angle MOK = 120^\circ$. По свойству углов, вписанных в окружность, получим, что $\angle MQK = 180^\circ - \dfrac{1}{2}\angle MOK = 120^\circ$.

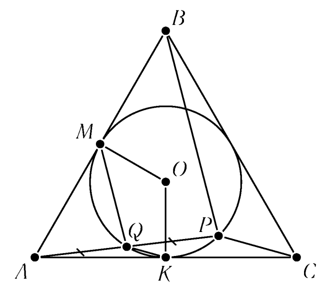


Рис. 18

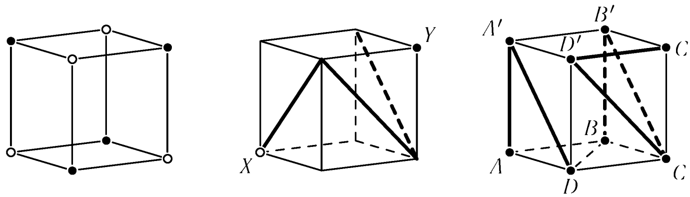
3.3. Ответ: семь.

Решение. Например: $29=29^1$, $30=2\cdot3\cdot5$, $31=31^1$, $32=2^5$, $33=3\cdot11$, $34=2\cdot17$, $35=5\cdot7$. Большее количество «хороших» чисел подряд идти не может. Действительно, среди восьми последовательных натуральных чисел всегда имеется число, которое дает остаток 4 при делении на 8. В его разложении множитель 2 содержится во второй степени.

3.4. Ответ: $3+4\sqrt{2}$.

Решение. Так как у куба восемь вершин, то путь содержит не более семи отрезков. Пусть из них a отрезков длины 1 и b отрезков длины $\sqrt{2}$. Тогда весь путь имеет длину $a+b\sqrt{2}$. Раскрасим вершины куба в шахматном порядке (см. рис. 19а).

Поскольку начало и конец пути окрашены в разные цвета, то на протяжении маршрута цвет вершин меняется нечетное количество



а б в

Рис. 19

раз. Заметим также, что движение по ребру меняет цвет очередной вершины, а движение по диагонали — нет. Следовательно, a — нечетное число.

Докажем, что $a \neq 1$. Рассмотрим маршрут длины $1 + 6\sqrt{2}$. Так как в таком маршруте шесть диагоналей, то он должен начинаться или заканчиваться тремя подряд идущими диагоналями. Отметим также, что если маршрут содержит четыре подряд идущих диагонали, то возникает самопересечение. Следовательно, этот маршрут имеет вид: три диагонали, затем — ребро, затем еще три диагонали. Из произвольной вершины X можно (с точностью до симметрии) единственным образом провести путь из трех диагоналей без самопересечений (см. рис. 19б). Но тогда аналогичный путь из противоположной вершины определяется однозначно, и концы полученных путей не соединены ребром.

Пример маршрута длины $3 + 4\sqrt{2}$ приведен на рис. 19в. Ясно, что этот маршрут длиннее, чем любой маршрут из семи отрезков с $a > 3$. При этом он длиннее, чем самый длинный маршрут из шести отрезков, так как $3 + 4\sqrt{2} > 1 + 5\sqrt{2}$.

2.2. Командная олимпиада

1. Решение. Если q и r нечетны, то p четно, откуда $p = 2$, что невозможно. Значит, хотя бы одно из чисел q и r (например, r) четно и потому равно 2. Поэтому число $p^2 - r^2$ оканчивается на 4. С другой стороны, каждое из нечетных чисел p^2 и r^2 оканчивается на одну из цифр $1, 5, 9$. Следовательно, одно из этих двух чисел оканчивается на 5, откуда $p = 5$ либо $r = 5$. Первый случай невозможен, второй — возможен (например, $7^2 - 2^2 - 5^2 = 20$, $13^2 - 2^2 - 5^2 = 140$). Таким образом, $q + r = 7$.

Или:

Заметим, что если все числа p, q и r — нечетные, то выражение $p^2 - q^2 - r^2$ тоже нечетно, а значит, не делится на 10. Единственное простое четное число — двойка. p не может быть равно двум, поэтому одно из чисел q и r (например, q) равно двум. Значит, разность $p^2 - r^2$ оканчивается на четыре.

С другой стороны, квадрат нечетного числа может оканчиваться на одну из цифр 1, 5, 9. Следовательно, одно из этих двух чисел должно оканчиваться на 5. Поэтому либо $p = 5$, либо $r = 5$.

Если $p = 5$, то $p^2 - q^2 = 25 - 4 = 21$. Нельзя подобрать такое простое r, чтобы $(21 - r^2)$ делилось на десять. А число r может быть равно пяти, например, $7^2 - 2^2 - 5^2 = 20$, $13^2 - 2^2 - 5^2 = 140$. Таким образом, $q + r = 7$.

2. Решение. Из рамки можно вырезать прямоугольники $1 \times n$ и уголки. Рассмотрим 10 различных фигурок возможно меньшей площади (9 из них показано на рис. 20, а десятая фигурка имеет площадь, равную шести).

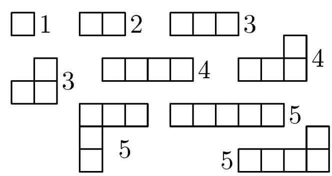


Рис. 20

Сумма их площадей равна $1+2+3+3+4+4+5+5+5+6 = 38$ клеток, что больше площади рамки. Значит, частей не более 9. Пример с 9 частями показан на рис. 21.

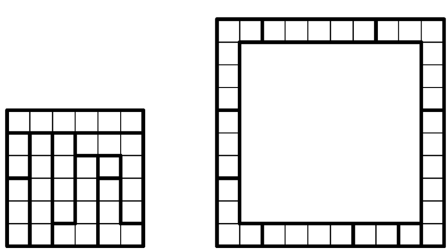


Рис. 21

3. Ответ: 16160.

Решение. Искомое число можно представить в виде $666q_1+r_1$, где q_1 — неполное частное, а r_1 — остаток при делении на 666, а также в виде $121q_2+r_2$, где q_2 — неполное частное, а r_2 — остаток при делении на 121. Поскольку

$$q_1+r_1=q_2+r_2=200,$$

то из равенства

$$666q_1+r_1=121q_2+r_2$$

можно получить равенство $665q_1=120q_2$, или $133q_1=24q_2$. Поскольку числа 133 и 24 взаимно просты, q_2 делится на 133. При этом q_2 не может быть равно нулю, так как в этом случае $r_2=200$, что невозможно. Поскольку $q_2 \leqslant 200$, то $q_2=133$. Значит, $r_2=67$, и искомое число $121\cdot 133+67=16160$.

4. Решение. Пусть углы первого треугольника равны α, β, γ и пусть $\alpha+\beta$ и $\alpha+\gamma$ равны углам второго треугольника. Сумма этих двух величин равна

$$2\alpha+\beta+\gamma>\alpha+\beta+\gamma=\pi,$$

тогда как сумма любых двух углов второго треугольника меньше π. Значит, $\alpha+\beta$ и $\alpha+\gamma$ равны одному и тому же углу второго треугольника, откуда $\beta=\gamma$, т. е. первый треугольник равнобедренный.

5. Ответ: 63 секунды.

Решение. Первый способ. В Володину шайку было налито $\frac{2}{3}$ горячей воды, а в шайку Арсения — $\frac{1}{2}$. Значит, у Володи получилось на $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ шайки больше горячей воды, чем у Арсения, и эта вода наливалась 18 секунд. Поэтому $\frac{1}{2}$ шайки наливается за $18\cdot\frac{1}{2}:\frac{1}{6}=54$ секунды. А оптимальное количество набирается на 9 секунд дольше, то есть за $54+9=63$ секунды.

Второй способ. Пусть кран начинает гудеть через x секунд. Тогда Володя за $x+9$ секунд набрал $\frac{2}{3}$ шайки воды, поэтому вода течет со скоростью $\frac{2}{3}:(x+9)$. С другой стороны, Арсений за $x-9$ секунд набрал $\frac{1}{2}$ шайки, то есть вода течет со скоростью $\frac{1}{2}:(x-9)$. Решив уравнение $\dfrac{2}{3(x+9)}=\dfrac{1}{2(x-9)}$, получим, что $x=63$.

6. Решение. Треугольник APB — прямоугольный. PM — медиана, проведенная к гипотенузе. Значит, $PM = \frac{AB}{2}$. Аналогично $QM = \frac{AB}{2}$. Значит, $QM = PM$ и треугольник PMQ равнобедренный. Так как $PM = AB/2 = BM$, треугольник PMB — равнобедренный и $\angle MPB = \angle MBP$. Значит,

$$\angle AMP = \angle MBP + \angle MPB = 2\angle MBP = \angle ABC,$$

откуда MP параллельно BC. Аналогично MQ параллельно AC. Следовательно, MP перпендикулярно MQ и треугольник PMQ — прямоугольный.

7. См. решение задачи 8 Нулевого тура Математических боев 9 класса.

8. См. решение задачи 6 Нулевого тура Математических боев 9 класса.

9. Решение. Опустим на прямую AC перпендикуляры BX, A_1Y, C_2Z, A_2T. Из подобия треугольников CA_1Y и CBX следует, что

$$\frac{A_1Y}{BX} = \frac{A_1C}{BC} = \frac{A_1C}{BA_1 + A_1C} = \frac{1}{1+\alpha}.$$

Аналогично $\dfrac{C_2Z}{A_1Y} = \dfrac{\alpha}{1+\alpha}$. Значит, $\dfrac{C_2Z}{BX} = \dfrac{1}{(1+\alpha)^2}$. Аналогично $\dfrac{A_2T}{BX} = \dfrac{1}{(1+\alpha)^2}$. Значит, $A_2T = C_2Z$ и $A_2C_2 \parallel AC$. Аналогично $A_2B_2 \parallel AB$ и $B_2C_2 \parallel BC$. Следовательно, $\triangle A_2B_2C_2$ подобен $\triangle ABC$, что и требовалось доказать.

10. Решение. Поскольку $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$, то $(x+y)^2 \geqslant 4xy$. Из этого неравенства и условия задачи следует, что

$$1 \geqslant x + y \geqslant (x+y)^2 \geqslant 4xy.$$

Таким образом, $1 - 4xy \geqslant 0$, откуда $xy(1 - 4xy) \geqslant 0$, и следовательно, $2xy \geqslant 8x^2y^2$.

Воспользовавшись этим неравенством и условием задачи, получим требуемое:

$$x^2 + 8x^2y^2 + y^2 \leqslant x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \leqslant x + y \leqslant 1.$$

11. См. решение задачи 4 Нулевого тура Математических боев, 9 класс.

12. Решение. Обозначим вершины треугольника A, B, C так, что $AC=b$, $AB=c$ и $BC=a$. Пусть сгиб прошел по отрезку A_1B_1, а после сгиба точка C попала в точку C_1 (см. рис. 22). Поскольку $\angle BA_1B_1 = \angle A_1B_1A$, то $\angle CA_1B_1 = \angle CB_1A_1$, поэтому треугольник A_1CB_1 — равнобедренный. Так как $CC_1 \perp B_1A_1$, то в треугольнике ACB отрезок CC_1 является биссектрисой. По свойству биссектрисы $\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{b}{a}$. Кроме того, $AC_1 + C_1B = c$. Из последних двух соотношений находим $AC_1 = \dfrac{bc}{a+b}$, $C_1B = \dfrac{ac}{a+b}$.

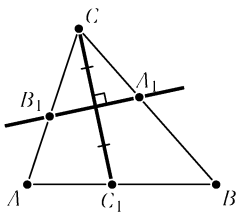


Рис. 22

13. См. решение задачи 1 Нулевого тура Математических боев, 9 класс.

14. См. решение задачи 3 Нулевого тура Математических боев, 9 класс.

2.3. Математические бои

2.3.0. Нулевой тур

9 класс

1. Решение. Из условия следует, что сумма $S(n)$ нечетна. Подумаем, какие условия это налагает на само число n. Пусть n разлагается на простые множители следующим образом:

$$n = 2^a p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k},$$

где p_i — различные нечетные простые делители числа n. Тогда сумма делителей числа n равна

$$(1+2+\ldots+2^a)(1+p_1+\ldots+p_1^{a_1}) \cdot \ldots \cdot (1+p_k+\ldots+p_k^{a_k}).$$

(Этот стандартный факт можно доказывать, например, индукцией по числу k.) Значит, для того чтобы сумма делителей числа n была нечетной, нам необходимо, чтобы все числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ были четными. Если и a четно, то $n = m^2$, где m — натуральное число, равное $2^{a/2} \cdot p_1^{a_1/2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k/2}$. А если a нечетно, то $n = 2m^2$ для некоторого натурального m. Но по условию $4n + 79$ делится на 3, значит, n дает остаток 2 при делении на 3. Значит, n не может быть полным квадратом. Следовательно, $n = 2m^2$. Поскольку n и $n/2$ — делители числа n, то $S(n) \geqslant n + n/2$. Значит, $4n + 79 = 3S(n) \geqslant 4,5n$. Получаем, что $n \leqslant 158$. Осталось перебрать значения n, равные 2, 8, 18, 32, 50, 72, 98, 128. Из них 18 и 72 не подходят, т. к. делятся на 3, а из оставшихся подходит только $n = 50$. Приведем этот перебор.

n	**S(n)**	**3S(n)**	**4n + 79**
2	3	9	87
8	15	45	111
32	63	189	207
50	$3 \cdot 31 = 93$	279	279
98	$3 \cdot 57 = 171$	513	471
128	255	765	591

2. Решение. Не обязательно. Впишем в квадрат меньший квадрат так, чтобы стороны отсеченных прямоугольных треугольников были соизмеримы. Тогда катеты и гипотенуза некоторого достаточно маленького треугольника, подобного отсеченным, укладываются целое число раз в стороне меньшего квадрата. Именно на такие треугольники и будем резать. Для определенности: большой квадрат 84×84, меньший — со стороной 60, отсекаются треугольники с катетами 36 и 48, режем на треугольники с катетами 3 и 4.

Проведем в меньшем квадрате сетку разрезов параллельно сторонам, а в угловых треугольниках — параллельно катетам так, чтобы все разбилось на прямоугольники 3×4 и прямоугольные треугольники с катетами 3 и 4. Разобьем прямоугольники в углу большего квадрата и в углу меньшего диагональю, как показано на рисунке, а остальные прямоугольники разобьем диагоналями произвольно. Тогда ясно, что два окрашенных прямоугольника в углах большего и меньшего квадратов (см. рис. 23) не имеют параллельных сторон.

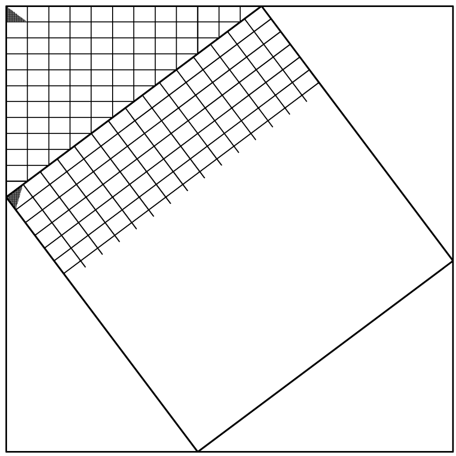


Рис. 23

3. Ответ: одно пересечение.

Решение. Действительно, окрашенных отрезков в совокупности $2(n-1)$. Если они не пересекаются внутри n-угольника, то их можно дополнить до триангуляции n-угольника. Но такая триангуляция содержит $2n-3 < 2(n-1)$ отрезков — противоречие.

Приведем пример, когда пересечение ровно одно. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — последовательные вершины n-угольника. Окрасим в красный цвет отрезки A_1A_2, A_1A_3 и A_3A_4, A_4A_5, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$. В синий цвет окрасим A_2A_3, A_2A_4 и отрезки, соединяющие A_1 с $A_4, \ldots, A_n$. Условия задачи выполнены. Пересекаются A_1A_3 и A_2A_4.

4. Решение. Пусть x, y — корни квадратного уравнения. Тогда $(x-y)^2 = D$, где D — дискриминант. Если один из корней равен D, то получаем $(D-y)^2 = D$. Обозначим $n = D - y$. Тогда $D = n^2$, $y = n^2 - n$. Следовательно, уравнение $(x-n^2)(x-n^2+n) = 0$ удовлетворяет условию задачи.

5. Решение. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины соответствующих сторон треугольника ABC. Треугольник $P_1P_2P_3$ гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ с центром в точке P и коэффициентом 2. Следовательно, его центр описанной окружности центрально симметричен точке P относительно центра окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ (окружности девяти точек), который мы обозначим через S. Так как точка P — произвольная, то ответом является образ внутренности треугольника ABC при центральной симметрии относительно S.

Комментарий. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC; пусть A_2, B_2, C_2 — середины отрезков AH, BH, CH соответственно. Тогда, как известно, отрезки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 являются диаметрами окружности девяти точек, т. е. точки A_2 и A_1 симметричны относительно S и т. д. Следовательно, искомый треугольник — это треугольник, стороны которого параллельны сторонам исходного треугольника и проходят через середины отрезков, соединяющих соответствующие вершины с ортоцентром (т. е. через точки A_2, B_2, C_2).

6. Решение. Все целые точки можно покрасить в четыре цвета, например: 1 — красный, 2 — синий, 3 — желтый, 4 — зеленый, далее периодически повторяя эту цветовую последовательность. Тогда разность двух чисел, покрашенных одинаково, будет делиться на 4. Меньшим количеством цветов обойтись невозможно: числа 0, 2, 5, 7 надо окрасить по-разному, так как их попарные разности — простые числа.

7. Решение. Без ограничения общности будем считать $|x| \geqslant |y|$.

Первый способ. Без ограничения общности можно считать $x \geqslant 0$ (в случае $x < 0$ замена $z = -x$ приводит к доказываемому неравенству для z и y). Таким образом, $|x \pm y| = x \pm y$, и неравенство преобразуется к виду $(x+y)^3 + (x-y)^3 \geqslant 2(x^3 + |y|^3)$, $2x^3 + 6xy^2 \geqslant 2(x^3 + |y|^3)$, $3xy^2 \geqslant |y|^3$. Последнее неравенство очевидно в силу $|x| \geqslant |y|$.

Второй способ. Выполнено равенство

$$|x+y|^3 + |x-y|^3 = (|x+y| + |x-y|)(|x+y|^2 + |x-y|^2 - |x^2-y^2|).$$

Заметим, что

$$|x+y|+|x-y| \geqslant |(x+y)+(x-y)| = 2|x|,$$
$$|x+y|^2+|x-y|^2 = 2(x^2+y^2),$$
$$|x^2-y^2| = x^2-y^2.$$

Таким образом, достаточно доказать неравенство

$$2|x|(x^2+3y^2) \geqslant 2(|x^3|+|y^3|)$$

или $3|x|y^2 \geqslant |y|^3$. Последнее неравенство очевидно в силу $|x| \geqslant |y|$.

8. Решение. Обозначим жуликов буквами A, B, C, а их чемоданы соответствующими маленькими буквами. Тогда схема переправы может быть такой:

a b c a b c A B C	b c b c B C	b c b c A B C	b c b c	b c b c B C	c c C	c c A B C	c c	c c C	
	A a a	a a	A B C a a	A a a	A B a b a b	a b a b	A B C a b a b	A B a b a b	A B C a b c a b c

2.3.1. Первый тур

7 класс

1. Ответ: 5.

Решение. Пусть n — количество членов жюри. Тогда всего задач $4n+5$. Это число делится на n, поскольку каждый член жюри предложил одинаковое количество задач. Но тогда и 5 делится на n, т. е. n равно 1 или 5. Так как в жюри заведомо более одного человека, то $n=5$.

2. См. решение задачи 2 Первого тура, 8 класс, первая лига.

3. См. решение задачи 3 Первого тура, 8 класс, высшая лига.

4. См. решение задачи 4 Первого тура, 8 класс, первая лига.

5. См. решение задачи 5 Первого тура, 8 класс, первая лига.

6. Ответ: 25.

Решение. Пусть x — количество точек первого цвета, обозначим $y = x - 5$. Тогда $x = 5 + y$, а количество точек второго цвета равно $10 - x = 5 - y$. Количество отрезков с концами разного цвета равно $(5 + y)(5 - y) = 25 - y^2$. Это количество не превосходит 25. Равенство достигается при $y = 0$, т. е. когда имеется 5 точек каждого цвета.

7. См. решение задачи 7 Первого тура, 8 класс, первая лига.

8. См. решение задачи 8 Первого тура, 8 класс, первая лига.

7–8 классы

1. См. решение задачи 1 Первого тура, 8 класс, первая лига.

2. См. решение задачи 2 Первого тура, 8 класс, высшая лига.

3. См. решение задачи 3 Первого тура, 8 класс, высшая лига.

4. Решение. Первые 4 монеты обозначим буквами A_1,A_2, A_3, A_4, а последние две B_1 и B_2.

Первое взвешивание: A1, A2 и A3, B1.

Второе взвешивание: A1, A3 и A4, B2.

Пусть первое взвешивание дало $>$. Тогда три варианта для фальшивых:

B2, A3 — в этом случае второе взвешивание дает $=$.

B1, A3 — в этом случае второе взвешивание дает $<$.

B1, A4 — в этом случае второе взвешивание дает $>$.

Пусть первое взвешивание дало $=$. Тогда три варианта для фальшивых:

B1, A1 — в этом случае второе взвешивание дает $<$.

B1, A2 — в этом случае второе взвешивание дает $=$.

B2, A4 — в этом случае второе взвешивание дает $>$.

Пусть первое взвешивание дало $<$. Тогда два варианта для фальшивых:

B2, A1 — в этом случае второе взвешивание дает $=$.

B2, A2 — в этом случае второе взвешивание дает $>$.

5. См. решение задачи 5 Первого тура, 9 класс.

6. См. решение задачи 6 Первого тура, 9 класс.

7. См. решение задачи 7 Первого тура, 8 класс, первая лига.

8. См. решение задачи 8 Первого тура, 9 класс.

8 класс, первая лига

1. Решение.

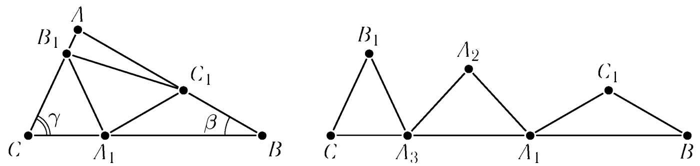


Рис. 24

Пусть $\angle ABC=\beta, \angle ACB=\gamma$. Тогда $\angle BA_1C_1=\beta$, $\angle CA_1B_1=\gamma$, $\angle C_1A_1B_1=\pi-\beta-\gamma$, $\angle A_1B_1C_1=(\beta+\gamma)/2$. Пусть теперь треугольники выстроены в линию. Обозначим их BC_1A_1, $A_1A_2A_3$, A_3B_1C (порядок вершин согласован с условием задачи). Тогда $\angle C_1A_1A_2=\pi-\beta-(\beta+\gamma)/2$.

Так как $A_1C_1=A_1A_2$, то $\angle A_1A_2C_1=(\beta+(\beta+\gamma)/2)/2=\dfrac{3}{4}\beta+\dfrac{1}{4}\gamma$.

Аналогично, $\angle A_3A_2B_1=\dfrac{1}{4}\beta+\dfrac{3}{4}\gamma$. Так как $\angle A_1A_2A_3=\pi-\beta-\gamma$, то $\angle C_1A_2B_1=\pi$, т. е. точки C_1, A_2, B_1 лежат на одной прямой.

2. Ответ: $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$.

Решение. Пусть вершина A — центр указанной окружности, B и C — остальные две вершины, D, E, F — середины сторон AB, BC, AC соответственно. Тогда $AD=AE=AF$. Так как $DE=\frac{1}{2}AC=AF=AE=AD$, то $\triangle ADE$ равносторонний. Аналогично, $\triangle AEF$ равносторонний. Отсюда $\angle BAC=120^\circ$. Так как $AD=AF$, то $AB=AC$ и $\angle ABC=\angle ACB=30^\circ$.

3. См. решение задачи 3 Первого тура, 8 класс, высшая лига.

4. Ответ: да.

Решение. Назовем кучу из четырех монет громким именем А, а кучу из двух монет — менее громким именем Б.

Первое взвешивание. Положим на одну чашу весов две монеты из кучи А (назовем их А1 и А2), а на другую — одну монету из кучи А (А3) и одну из кучи Б (Б1).

1) Если перевесила вторая куча, то фальшивая Б2 и одна из монет А1, А2. Вторым взвешиванием сравниваем А1 и А2 и находим вторую фальшивую монету.

2) Пусть перевесила первая куча. Тогда монеты А1 и А2 заведомо настоящие, а во второй куче одна или две фальшивых. Взвесим их. Если они равны, то они обе фальшивые. Если Б1 тяжелее, то фальшивые А3 и Б2. Если А3 тяжелее, то фальшивые А4 и Б1.

3) Пусть кучи равны. Тогда либо в них все монеты настоящие, либо в них по одной фальшивой. Взвесим А1 и А2. Если равенство, то взвешенные в первый раз монеты настоящие, а монеты А4 и Б2 — фальшивые. Если какая-то из монет А1, А2 перевесила, то легкая монета фальшивая. Но тогда А3 настоящая, а Б1 фальшивая.

5. Ответ: могло получиться любое количество различных чисел от 1 до 6.

Примеры. Чтобы получилось 1 число (т. е. все произведения были равны), можно взять $a = b = c = d$ — любое. Для 2: $a = b = c = 1$, $d = 2$. Для 3: $a = b = 1$, $c = d = 2$. Для 4: $a = 1$, $b = c = 2$, $d = 3$. Для 5: $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 6$. Для 6: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$.

6. См. решение задачи 4 Первого тура, 8 класс, высшая лига.

7. Ответ: нет.

Решение. Покрасим горизонтали доски поочередно в красный и синий цвет. В каждой Г-образной фигурке, независимо от ее расположения, разность между количеством клеток красного и синего цвета равна ± 2. Поскольку сумма этих разностей по всем фигуркам равна 0 (на оставшейся части доски поровну красных и синих клеток), то общее количество фигурок должно быть четно. Но в оставшейся части доски помещается $(64 - 4) : 4 = 15$ фигурок.

8. Решение. Выигрывает первый игрок. Он берет из 1-й и 3-й кучки по одному камню и оставляет после своего хода три кучки с четным числом камней: 2004, 2006, 2006. А далее после любого хода второго образуются две нечетные кучки, и первый берет камни из них же, снова превращая их в четные.

8 класс, высшая лига

1. См. решение задачи 1 Первого тура, 9 класс.

2. Ответ: 631.

Решение. Докажем, что не может получиться больше частей. Будем проводить отрезки последовательно из вершин A, B, C и следить за изменением количества частей. Вначале, пока отрезков нет, у нас ровно одна часть — сам треугольник. Проведем все отрезки из вершины A. Ясно, что получится 15 частей. Каждый отрезок, проведенный из вершины B, будет пересекать 15 частей, то есть увеличивать их количество на 15. Поэтому после проведения всех этих 14 отрезков получаем $15 + 14 \cdot 15 = 225$ частей.

Теперь осталось провести отрезки из вершины C. Каждый такой отрезок пересекается со всеми отрезками, проведенными из вершин A и B. Значит, число пересечений не более 28 (и ровно 28, если никакие три отрезка не пересекаются в одной точке). Следовательно, каждый такой отрезок пересекает не более чем 29 частей, то есть его проведение увеличивает количество частей не более чем на 29. Итого получаем не более $225+14\cdot 29 = 631$ части.

Ровно 631 часть получится, если никакие три отрезка не будут пересекаться в одной точке. Этого несложно добиться, если при проведении отрезков из точки C не проводить их ни через одну из уже имеющихся $14 \cdot 15 = 210$ точек пересечения отрезков из вершин A и B (это можно будет сделать, так как точек пересечения конечное число, а направлений из вершины C — бесконечное).

3. Ответ: все нечетные числа, большие чем 1.

Решение. Сумма трех нечетных чисел нечетна, поэтому четное число непредставимо таким образом. Докажем, что любое нечетное число, кроме 1, представимо.

Очевидно, что все однозначные нечетные, кроме 1, получить таким образом можно, а 1 нельзя представить в виде суммы трех слагаемых. Пусть $N = \overline{n_k \ldots n_2 n_1}$ — произвольное нечетное число, большее 10. Будем подбирать цифры слагаемых с конца. Чтобы на конце суммы получилась цифра n_1, сумма последних цифр трех слагаемых может быть равна n_1, $10 + n_1$ или $20 + n_1$ (больше быть не может, т.к. сумма трех цифр не превосходит 27). В первом случае переноса в следующий разряд не будет, во втором мы переносим 1, в третьем 2. Если $n_1 \neq 1, 9$, то мы можем получить любой перенос: 0, 1, или 2 — на свой выбор. Если $n_1 = 1$, то мы можем получить перенос 1 или 2, а если $n_1 = 9$, то 0 или 1. Но в любом случае мы можем организовать либо нечетный, либо четный перенос в следующий разряд на свой выбор. Эту возможность мы используем так: если в следующем разряде суммы нужно получить четную цифру, то сделаем перенос 1, а если нужна нечетная, то 0 или 2. По тому же правилу будем подбирать цифры слагаемых, чтобы получить n_2 и т. д., и будем придерживаться этого правила до тех пор, пока нам не нужно будет подбирать слагаемые, чтобы получить вторую с начала цифру n_{k-1}. Для нее выберем слагаемые так, чтобы перенос был равен либо 0, либо 1 (но не 2). Теперь нам нужно получить первую цифру — n_k. Если $n_k = 1$ и у нас был перенос, то ничего складывать нам не нужно, число N уже получено как сумма $k-1$-значных слагаемых. Если переноса не было, то в одном из слагаемых в k-м разряде пишем 1, а два других оставляем $k-1$-значными. Аналогично, если $n_k = 2$ — в зависимости от того, был или нет перенос, одно или два слагаемых оставляем $k-1$-значными, а у остальных пишем 1 в k-м разряде. Вообще, любое значение n_k первой цифры (или $n_k - 1$, если был перенос) всегда можно получить как сумму двух, трех, одной или ни одной нечетных цифр.

4. Ответ: 4 сектора.

Решение. Докажем, что нельзя обойтись 3 секторами. Для этого достаточно увидеть, что как бы ни были пробиты 3 сектора из 13, можно так повернуть талон, чтобы пробитые секторы стали на место не пробитых. Повернуть можно на 1, 2, 3, 4, 5, 6 секторов по часовой стрелке или на 1, 2, 3, 4, 5, 6 секторов против часовой стрелки. При любом повороте найдется пробитый сектор, который станет на место другого пробитого. Следовательно, есть пробитые секторы на расстояниях 1, 2, 3, 4, 5, 6 (мы считаем соседние секторы находящимися на расстоянии 1). Если пробито не более трех секторов, то попарных расстояний между ними не более трех, а нам надо 6. А четыре сектора уже можно пробить так, чтобы между ними возникали все 6 расстояний. А именно, занумеруем все секторы по часовой стрелке числами 1, 2, 3, ..., 13 и пробьем секторы с номерами 1, 5, 6, 8. Тогда расстояние 1 — между секторами 5 и 6. Расстояние 2 — между секторами 6 и 8. И т. д., расстояние 6 — между секторами 8 и 1 (расстояние меряется по кратчайшей дуге). А, значит, при любом повороте круглого талона найдется пробитый сектор, который встанет на место пробиваемого. Следовательно, компостер не примет один и тот же талон второй раз.

5. См. решение задачи 5 Первого тура, 9 класс.

6. См. решение задачи 6 Первого тура, 9 класс.

7. См. решение задачи 7 Первого тура, 9 класс.

8. См. решение задачи 8 Первого тура, 9 класс.

9 класс

1. Решение. Так как в четырехугольнике $BFGE$ диагонали в точке пересечения делятся пополам, то он параллелограмм. Значит, отрезки GE и BF равны и параллельны. Опустим из точки G на сторону AD перпендикуляр GH. Треугольники EHG и BCF равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $GH = FC$ и $EH = BC = AD$, откуда $HD = EA$. Значит, $GH : HD = FC : EA$.

Так как треугольники EAB и FCB подобны, то

$$FC : EA = BC : AB = BC : CD.$$

Таким образом, $GH : HD = BC : CD$, откуда $\angle ADG = \angle BDC$.

2. Решение. Рассмотрим произвольный $\triangle ABC$. Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 принадлежат множеству проведенных отрезков и пересекаются в одной точке.

Обозначим

$$CA_1 : A_1B = p : q; \quad BC_1 : C_1A = m : n; \quad AB_1 : B_1C = s : t,$$

где натуральные p, q, m, n, s, t удовлетворяют равенствам

$$p + q = m + n = s + t = 15.$$

По теореме Чевы имеем:

$$1 = \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{s}{t}.$$

Перебором нетрудно показать, что единственной комбинацией (с точностью до перестановки сомножителей и «переворота» всех дробей), удовлетворяющей последнему равенству, является $\frac{3}{12} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{10}{5}$.

Следовательно, имеется ровно 6 точек, в каждой из которых пересекаются ровно 3 проведенных отрезка. По одной точке лежит на отрезках CC_1, если $BC_1 : C_1A = m : n = 3 : 12$ или $12 : 3$, и по две точки, если $BC_1 : C_1A = m : n = 5 : 10$ или $10 : 5$. Назовем эти четыре отрезка, выходящие из точки C, *особенными*.

Теперь подсчитаем количество частей, на которые разделится $\triangle ABC$ после того, как проведены все отрезки. Будем проводить их последовательно из вершин A, B, C и следить за изменением количества частей. Сначала проведем все отрезки из вершины A. Ясно, что получится 15 частей. Каждый отрезок, проведенный из вершины B, будет пересекать 15 частей, то есть увеличивать их количество на 15. Поэтому после проведения всех этих 14 отрезков получаем $15 + 14 \cdot 15 = 225$ частей.

Теперь осталось провести отрезки из вершины C. Подсчитаем число точек пересечения отрезка CC_1 с отрезками, проведенными из вершин A и B. Если отрезок CC_1 не является особенным, то он пересекает все такие отрезки в различных точках, то есть число пересечений равно $14 + 14 = 28$. Если отрезок CC_1 особенный, то число точек пересечения у двух отрезков будет 27, а у других двух — 26. Ясно, что число частей, которые добавляет каждый отрезок CC_1, на 1 больше, чем точек пересечения. Поэтому окончательно получаем количество частей $225 + 10 \cdot 29 + 2 \cdot 28 + 2 \cdot 27 = 625$.

3. Ответ: непредставимых чисел больше.

Решение. При $y > 5$ все числа $y!$ делятся на 9, а числа x^3 при делении на 9 дают лишь третью часть возможных остатков: $0, 1, 8$. Поэтому при $y > 5$ чисел $x^3 - y!$ среди первой тысячи не более $333 + 1$.

Если $y \leqslant 5$, то $x^3 \leqslant 1000 + 5!$, т.е. $x \leqslant 10$. Поэтому каждый $y \leqslant 5$ дает не более 10 представимых чисел, т.е. всего представимых чисел с $y \leqslant 5$ существует не более 50.

Итак, всех представимых чисел не более $334+50 = 384$.

4. Решение. Пусть углы при вершинах A, B, C равны соответственно α, β, γ. Проведем через точку D перпендикуляр к CD. На нем лежат центры P и Q окружностей AA_1D и BB_1D. Без ограничения общности можно считать $\angle ADC \geqslant 90^\circ$. Тогда

$$\angle ADP = \angle ADC - \angle PDC = (180^\circ - \alpha - \gamma/2) - 90^\circ = 90^\circ - \alpha - \gamma/2;$$

$$\angle APD = 180^\circ - 2\angle ADP = 2\alpha + \gamma;$$

$$\angle AA_1D = \frac{1}{2}\angle APD = \alpha + \gamma/2;$$

$$\angle CA_1D = 180^\circ - \angle AA_1D = \beta + \gamma/2.$$

Равнобедренные треугольники APD и BQD подобны, так как углы при их основаниях — вертикальные; поэтому

$$\angle BQD = \angle APD = 2\alpha + \gamma.$$

Тогда, если B_1 лежит между B и C,

$$\angle CB_1D = 180^\circ - \angle BB_1D = 180^\circ - (180^\circ - \frac{1}{2}\angle BQD) = \frac{1}{2}\angle BQD,$$

а если B лежит между B_1 и C,

$$\angle CB_1D = \angle BB_1D = \frac{1}{2}\angle BQD.$$

И в том, и в другом случае $\angle CB_1D = \frac{1}{2}BQD = \alpha + \gamma/2$.

Так как $\angle CA_1D + \angle CB_1D = (\alpha + \gamma/2) + (\beta + \gamma/2) = 180^\circ$, точка D лежит на окружности, описанной около $\triangle A_1B_1C$, а значит и на окружности, симметричной ей относительно CD.

Отметим еще, что

$$\angle CDB_1 = 180^\circ - \angle CB_1D - \angle B_1CD = 180^\circ - \alpha - \gamma/2 - \gamma/2 = \beta.$$

Пусть точки A_2 и B_2 симметричны A_1 и B_1 относительно CD и ω — окружность, описанная около треугольника A_2CB_2.

Так как $\angle DCB_2 = \gamma/2$ вписан в ω, то угол между касательной к ω в точке D и DB_2 равен $\gamma/2$. Таким образом, достаточно показать, что $\angle B_2DA = \gamma/2$. Так как $\angle CDB_2 = \angle CDB_1 = \beta$, а $\angle CDA = \beta + \gamma/2 > \beta$, то $\angle B_2DA = \gamma/2$.

5. Ответ: победит первый.

Решение. Рисунку соответствует граф, вершинами которого являются точки, а ребрами — отрезки.

Рассмотрим вначале первую игру (покраску вершин). Пусть первый игрок своим первым ходом красит некоторую вершину V. Если она не висячая (т. е. из нее выходит более одного ребра), то она разбивает дерево на две или более связных компонент. В противном случае остается одна компонента. Второй игрок должен покрасить вершину какой-то связной компоненты и в дальнейшем сможет красить вершины лишь этой компоненты. Поскольку в действительности он победил (сделал последний ход), то при любом выборе вершины V одна из полученных компонент (назовем ее *максимальной V-компонентой*) содержит более половины оставшихся вершин, а тогда не менее половины вершин исходного дерева.

Выберем теперь произвольную вершину V_1. Пусть V_2 — ближайшая к ней вершина максимальной V_1-компоненты. Если максимальная V_2-компонента содержится в максимальной V_1-компоненте, то пусть V_3 — ближайшая вершина максимальной V_2-компоненты, и т. д. Так как размер максимальной компоненты убывает, то процесс остановится. Это означает, что при некотором k максимальная V_k-компонента состоит в точности из тех вершин, которые не принадлежат максимальной V_{k-1}-компоненте. Так как каждая из этих компонент содержит не менее половины всех вершин дерева (иначе первый игрок мог бы выиграть, сходив в соответствующую точку), то она содержит ровно половину вершин. Ребро, соединяющее эти две компоненты (V_{k-1} и V_k), назовем *центральным.* С каждой стороны от него находится одинаковое количество вершин и ребер.

Пусть во второй игре (покраска ребер) первый игрок первым ходом красит центральное ребро. Второй игрок всегда будет оставаться с одной стороны от центрального ребра. Но и с другой стороны находится такое же количество ребер. Поэтому первый игрок всегда сможет ответить на ход второго и, следовательно, выиграет.

6. Ответ: $3,4\underbrace{99\ldots99}_{98\text{ девяток}}$.

Решение. Вычтем из нашего числа 3 и удвоим оставшееся выражение:

$$\frac{8}{9}+\frac{10}{9\cdot 11}+\frac{12}{9\cdot 11\cdot 13}+\ldots+\frac{2004}{9\cdot 11\cdot\ldots\cdot 2005}+\frac{2006}{9\cdot 11\cdot\ldots\cdot 2005\cdot 2007}.$$

Заметим, что $\frac{8}{9}=1-\frac{1}{9}$, $\quad \frac{10}{9\cdot 11}=\frac{1}{9}-\frac{1}{9\cdot 11}$,

$$\frac{12}{9\cdot 11\cdot 13}=\frac{1}{9\cdot 11}-\frac{1}{9\cdot 11\cdot 13},\ldots,\frac{2004}{9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2005}=$$

$$=\frac{1}{9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2003}-\frac{1}{9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2003\cdot 2005},$$

$$\frac{2006}{9\cdot 11\cdot\ldots\cdot 2005\cdot 2007}=\frac{1}{9\cdot 11\cdot\ldots\cdot 2005}-\frac{1}{9\cdot 11\cdot\ldots\cdot 2005\cdot 2007}.$$

Поэтому

$$\frac{8}{9}+\frac{10}{9\cdot 11}+\frac{12}{9\cdot 11\cdot 13}+\ldots+\frac{2004}{9\cdot 11\cdot\ldots\cdot 2005}+\frac{2006}{9\cdot 11\cdot\ldots\cdot 2005\cdot 2007}=$$

$$=1-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9\cdot 11}+\frac{1}{9\cdot 11}-\ldots-\frac{1}{9\cdot 11\cdot\ldots\cdot 2005}+\frac{1}{9\cdot 11\cdot\ldots\cdot 2005}-$$

$$-\frac{1}{9\cdot 11\cdot\ldots\cdot 2005\cdot 2007}=1-\frac{1}{9\cdot 11\cdot\ldots\cdot 2005\cdot 2007}.$$

Значит, искомое выражение равно

$$3+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2005\cdot 2007}=3,5-\frac{1}{18\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2005\cdot 2007}.$$

Числитель вычитаемой дроби равен единице, а в знаменателе стоит произведение 1000 натуральных чисел, больших десяти. Следовательно, эта дробь меньше, чем $\underbrace{0,00\ldots00}_{1000\text{ нулей}}1$. Значит, в этом выражении первая цифра после запятой — четверка, а после нее более 98 девяток.

7. Ответ: при mn делящемся на 3.

Решение. Докажем, что при mn делящемся на 3 можно перекрасить. Если mn делится на 3, то доску $m \times n$ можно разбить на доски 3×1. Поэтому достаточно доказать, что доску 3×1 можно перекрасить.

Для перекрашивания доски 3×1 с двумя черными клетками (ЧБЧ) нужно по два раза перекрасить «правую» и «левую» доминошки, для перекрашивания доски БЧБ перекрасим их по одному разу.

Докажем, что если можно перекрасить, то mn делится на 3. На каждом шаге будем ставить числа 0, 1 и 2 соответственно в белые, красные и черные клетки.

Обозначим через a сумму чисел, стоящих в *изначально* белых клетках. Обозначим через b сумму чисел, стоящих в *изначально* черных клетках. Остаток от деления на 3 числа $a - b$ не меняется при каждом перекрашивании.

Пусть на исходной доске было x белых и y черных клеток ($x + y = mn$). Тогда вначале $a - b = 0 \cdot x - 2 \cdot y = -2y$, а в итоге $a - b = 2 \cdot x - 0 \cdot y = 2x$. Так как $-2y \equiv 2x \pmod 3$, то $2x + 2y$ делится на 3, т. е. $x + y$ делится на 3. Так как $x + y$ равно числу клеток на доске, то mn делится на 3.

Таким образом, если mn не делится на 3, то значения остатка величины $a - b$ для начальной и для обратной к начальной раскрасок разные. Поэтому перекрасить доску нужным образом в этом случае нельзя.

8. Ответ: 5.

Решение. Пример:

самая низкая оценка	промежуточные оценки					самая высокая оценка	среднее без учета крайних оценок	среднее по всем оценкам
0	0	1	1	1	1	2	4/5	6/7
0	0	0	1	1	1	4	3/5	7/7
0	0	0	0	1	1	6	2/5	8/7
0	0	0	0	0	1	8	1/5	9/7
0	0	0	0	0	0	10	0	10/7

Докажем, что больше пяти танцоров быть не может. Пусть всего было n танцоров. Первый танцор занял первое место, ..., n-й занял n-ое место. Обозначим среднее арифметическое оценок первого танцора (когда учитывались только 5 оценок) через S_1, а n-го — S_n.

Теперь включим в результаты самую высокую и самую низкую оценку каждого танцора. Общая сумма очков каждого танцора при этом увеличится. Пусть сумма очков первого танцора увеличилась на x. Тогда сумма очков второго танцора увеличилась хотя бы на $x + 2$ (раз он обогнал первого), ..., сумма очков n-го танцора увеличилась хотя бы на $x + 2(n - 1)$.

Тогда $x \geqslant S_1$ (максимальная оценка для первого танцора не хуже, чем среднее других оценок), а $x + 2(n-1) \leqslant S_n + 10$ (минимальная оценка для n-го танцора не выше среднего других оценок, а максимальная не выше 10). Также известно, что $S_1 > S_n$. Складывая эти три неравенства, получим $2(n - 1) < 10$, т. е. $n < 6$.

2.3.2. Второй тур

7 класс

1. Ответ: не все.

Решение. Количество детей в группе равно удвоенному числу девочек плюс три. Значит, оно нечетно. Количество прыгнувших детей равно удвоенному числу промочивших ноги плюс восемь. Значит, оно четно и потому не равно количеству всех детей.

2. Ответ: да.

Пример. Пусть было 4 шоколадки; в первой 4 г миндаля, 3 г фундука, 2 г арахиса; во второй соответственно 1 г, 4 г, 3 г; в третьей 2 г, 1 г, 4 г; в четвертой 3 г, 2 г, 1 г; и Даня поменял первую на вторую, вторую — на третью, третью — на четвертую. Тогда при первом обмене увеличивается содержание фундука и арахиса, при втором — миндаля и арахиса, при третьем — миндаля и фундука, но в четвертой шоколадке содержание каждого вида орехов ниже, чем в первой.

3. Ответ: при шести.

Решение. Команда-чемпион набрала больше среднего количества очков и потому одержала хотя бы одну победу (если во всех поединках у нее ничьи, то она набирает как раз среднее количество). Значит, остальные команды имеют хотя бы по две победы. Чтобы у чемпиона было больше очков, у него должно быть еще хотя бы три ничейных матча. Таким образом, чемпион провел не менее 4 поединков, и значит всего было не меньше 5 команд. Но если их пять, то 3 ничьих и $2\times4+1=9$ побед дают 12 поединков, тогда как их всего $(5\cdot4)/2=10$.

Пример для 6 команд: расположим 5 из них по кругу, и пусть каждая выигрывает у двух следующих за ней по часовой стрелке и проигрывает двум остальным. Шестая команда выигрывает у одной из этих пяти и играет вничью с остальными. Тогда у нее 6 очков, у проигравшей ей — 4 очка, у остальных по 5. При этом у чемпиона одна победа, а у остальных — по две.

4. Ответ: 5 цветов.

Решение. *Замечание.* В задаче предполагалось, что каждый крестик занимает ровно одну клетку и в каждой клетке есть крестик.

Будем говорить, что клетка квадрата покрашена в некоторый цвет, если на ней вышит крестик этого цвета. Пусть O — центр квадрата. Рассмотрим все клетки какого-нибудь одного цвета (назовем этот цвет синим). Так как синие клетки образуют центрально-симметричную фигуру относительно O и эта фигура связная, а O лежит на диагонали квадрата, то хотя бы одна клетка на диагонали — синяя.

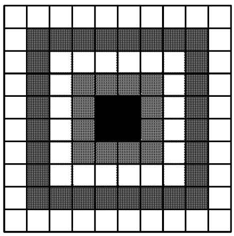


Рис. 25

Таким образом, всего цветов не больше, чем разноцветных клеток на диагонали. В силу симметрии узора, симметричные относительно O клетки диагонали должны быть одинакового цвета. А поскольку диагональ квадрата состоит из 10 клеток, то разноцветных клеток на ней не более $10/2 = 5$.

Пример узора для пяти цветов приведен на рис. 25.

5. Ответ: 25 см.

Решение. Пусть M — середина отрезка O_1O_2. Очевидно, что $AB \leqslant AM + MB$. Пусть C_1 — точка пересечения прямой O_1O_2 с первой окружностью, дальняя от точки O_2, а C_2 — точка пересечения прямой O_1O_2 со второй окружностью, дальняя от точки O_1. Тогда

$$AM \leqslant AO_1 + O_1M = C_1O_1 + O_1M, \quad BM \leqslant BO_2 + O_2M = C_2O_2 + O_2M,$$

откуда $AB \leqslant C_1O_1 + O_1O_2 + C_2O_2 = 25$.

Заметим, что равенство достигается только если O_1 и O_2 лежат соответственно на отрезках AM и MB, т. е. если прямая AB совпадает с прямой O_1O_2.

6. См. решение задачи 8 Второго тура, 9 класс.

7. См. решение задачи 7 Второго тура, 8 класс, высшая лига.

8. Решение. Пусть папа сделал x выстрелов, а сын y. Тогда папа попал в цель $\frac{4}{5}x$ раз, а сын $\frac{2}{5}y$ раз. Папа промахнулся $\frac{1}{5}x$ раз, а сын $\frac{3}{5}y$ раз. При этом $\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y = 2(\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y)$. Отсюда $\frac{2}{5}x = \frac{4}{5}y$, т.е. $x = 2y$. Таким образом, папа сделал вдвое больше выстрелов.

7–8 классы

1. Ответ: да, может.

Решение. Приведем пример такого турнира для четырех команд A, B, C, D. Команда A пробивала команде B одно пенальти и его не забила. Команда B пробивала команде C одно пенальти и его не забила. Команда C пробивала команде D три пенальти и забила одно. Команда D пробивала командам A и B по 6 пенальти, из которых забила по одному, а команде C пробивала и забила одно пенальти. Эти результаты пробивания пенальти отображены в таблице. Первое число в клетке означает количество забитых пенальти, а второе — количество пробивавшихся.

	команда A	команда B	команда C	команда D	сумма
команда A		0 1	0 0	0 0	0 1
команда B	0 0		0 1	0 0	0 1
команда C	0 0	0 0		1 3	1 3
команда D	1 6	1 6	1 1		3 13
сумма	1 6	1 7	1 2	1 3	

Как мы видим, для команды A отношение числа голов, забитых ею с пенальти, к числу пробивавшихся пенальти равно $\frac{0}{1}$, а отношение числа голов, пропущенных с пенальти, к числу пенальти, пробитых в ее ворота, равно $\frac{1}{6}$. Для команды B эти показатели равны, соответственно, $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{7}$, для команды C $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$, для команды D $\frac{3}{13}$ и $\frac{1}{3}$. У всех команд второй показатель больше первого, значит, наш пример удовлетворяет условию.

2. Ответ: нет.

Решение. Квадрат целого числа при делении на 4 дает остаток 0 или 1. Так как среди наших чисел не более одного четного, то остатки могут быть 0, 1, 1 или 1, 1, 1, то есть в сумме получится число, дающее остаток 2 или 3 при делении на 4, а значит это не точный квадрат.

3. Ответ: отрезок, концы которого — середины медиан, проведенных из точек A и C.

Решение. Пусть D и E — середины сторон AB и BC, а F и G — середины отрезков AE и CD. Пусть H, M, N — основания перпендикуляров, опущенных на AC из точек D, K, L. Так как треугольники ADH, AKM, CLN подобны и $AK+CL=AD$, то $KM+LN=DH$. Если P — середина KL, то длина перпендикуляра из P на AC равна $\frac{1}{2}(KM+LN)=\frac{1}{2}DH$, поэтому P лежит на прямой FG. Когда точка K перемещается от A к D, точка L перемещается от E к C. Если считать, что отрезок AC

горизонтален и C справа от A, то K и L движутся вправо. Поэтому и P перемещается вправо по прямой FG, причем проходит отрезок FG.

4. См. решение задачи 4 Второго тура, 9 класс.

5. См. решение задачи 5 Второго тура, 8 класс, высшая лига.

6. См. решение задачи 6 Второго тура, 8 класс, высшая лига.

7. См. решение задачи 7 Второго тура, 8 класс, высшая лига.

8. См. решение задачи 8 Второго тура, 9 класс.

8 класс, первая лига

1. Ответ: нет.

Решение. Так как $x, y, z, t > 0$, то из первого равенства следует, что $x < t$, а из второго — что $x > t$. Получили противоречие.

2. См. решение задачи 2 Второго тура, 8 класс, высшая лига.

3. См. решение задачи 3 Второго тура, 8 класс, высшая лига.

4. См. решение задачи 4 Второго тура, 9 класс.

5. См. решение задачи 5 Второго тура, 8 класс, высшая лига.

6. См. решение задачи 6 Второго тура, 8 класс, высшая лига.

7. Ответ: 45°.

Решение. Так как $\triangle PSD = \triangle SPB$, то $\angle SPD = \angle BSP$. По свойству внешнего угла треугольника $\angle BCP = \angle BRP - \angle RPC$.

Таким образом, искомая величина равна

$$\angle BSQ + \angle BSP + \angle BCP = \angle PSQ + \angle BCP.$$

Так как $\triangle QRS = \triangle PBC$, то $\angle RSQ = \angle BCP$, поэтому

$$\angle PSQ + \angle BCP = \angle PSR.$$

Так как $AP = AS$, а $SR || AP$, то $\angle PSR = 45^\circ$.

8. См. решение задачи 8 Второго тура, 9 класс.

8 класс, высшая лига

1. Ответ: нет.

Решение. Так как $x, y, z, t > 0$, то из первого равенства следует, что $x < t$, а из второго — что $x > t$. Получили противоречие.

2. Решение. Так как сумма целочисленных векторов (a, x), (b, y) и (c, z) равна нулю, то из них можно составить треугольник. Величины $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{b^2 + y^2}$, $\sqrt{c^2 + z^2}$ равны длинам его сторон, и произведение из условия задачи по формуле Герона равно $16S^2$, где S — площадь треугольника. Но, как легко показать, площадь треугольника с вершинами в целочисленных точках — полуцелое либо целое число. Поэтому $16S^2$ — квадрат целого (в действительности четного) числа.

3. Решение. Пусть радиусы окружностей равны r_1, r_2, r_3, r_4, а центры их — точки O_1, O_2, O_3, O_4 соответственно, причем они образуют выпуклый четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$. Пусть S — точка пересечения диагоналей.

Найдем расстояние между центрами O_1 и O_2. Поскольку SO_1 и SO_2 — биссектрисы смежных углов, они перпендикулярны, и по теореме Пифагора получаем, что $O_1O_2^2 = SO_1^2 + SO_2^2$.

Если провести аналогичные рассуждения для оставшихся трех сторон четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$, получим четыре соотношения:

$$\begin{cases} O_1O_2^2 = SO_1^2 + SO_2^2, \\ O_2O_3^2 = SO_2^2 + SO_3^2, \\ O_3O_4^2 = SO_3^2 + SO_4^2, \\ O_4O_1^2 = SO_4^2 + SO_1^2, \end{cases}$$

Складывая первое с третьим равенствами, убеждаемся, что их сумма равна сумме второго и четвертого равенств, что и требовалось доказать.

4. См. решение задачи 4 Второго тура, 9 класс.

5. Ответ: да, существуют.

Решение. Действительно,

$$1 + 2^3 = 3^2,$$

$$3^{2004} + 2^3 \cdot 3^{2004} = 3^{2006},$$

$$(3^{668})^3 + (2 \cdot 3^{668})^3 = 3^{2006}.$$

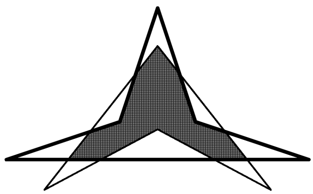


Рис. 26

6. Ответ: 12 (см. рис. 26).

Решение. Оценка следует из задачи 6 Второго тура, 9 класс.

7. Решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, r — ее радиус, p — периметр $\triangle ABC$, H — основание перпендикуляра из I на AB. Тогда $AH = \dfrac{AB+AC-BC}{2}$, $A_1H = AA_1 + AH = \dfrac{p}{2}$ и по теореме Пифагора $A_1I = \sqrt{r^2+p^2/4}$.

Аналогично, расстояния от остальных пяти точек до I равны $\sqrt{r^2+p^2/4}$. Таким образом, все шесть точек лежат на окружности с центром I и радиусом $\sqrt{r^2+p^2/4}$.

8. См. решение задачи 8 Второго тура, 9 класс.

9 класс

1. Ответ: нет.

Решение. Так как $x, y, z, t > 0$, то из первого равенства следует, что $x < t$, а из второго — что $x > t$. Получили противоречие.

2. Решение. Пусть $P = n(n+1)(n+2)\ldots(n+7)$, где $n > 3$. Обозначим $m = n(n+7)$, тогда

$$P=[n(n+7)]\cdot[(n+1)(n+6)]\cdot[(n+2)(n+5)]\cdot[(n+3)(n+4)]=$$
$$=m(m+6)(m+10)(m+12)=m^4+28m^3+252m^2+720m.$$

Несложно проверить, что при условии $m > 30$ (которое выполнено при $n > 3$) ближайшим к P и большим P точным квадратом служит число $Q = (m^2+14m+28)^2$, что больше P на $64m+784 = [4\cdot(2n+7)]^2$ — точный квадрат.

Осталось проверить утверждение задачи для $n = 1,\ 2,\ 3$. В этих случаях разность будет равняться соответственно $81 = 9^2$, $729 = 27^2$, $9 = 3^2$.

3. Решение. Опустим из точки E перпендикуляры EF и EK на прямые AC и BD, а из точки M — перпендикуляры MH и MG на эти же прямые. Так как $BM = MC$, то $S_{\triangle BMO} = S_{\triangle CMO}$, откуда $MG : MH = CO : BO$. Из подобия треугольников MGO и

EKO, MHO и EFO получаем: $EF : EK = MH : MG = BO : CO$. Тогда

$$S_{\triangle ABO} : S_{\triangle CDO} = (AO \cdot BO) : (DO \cdot CO) = (AO \cdot EF) : (DO \cdot EK) = \\ = S_{\triangle AEO} : S_{\triangle DEO} = AE : ED,$$

что и требовалось.

4. Ответ: наибольшее возможное число ничьих равно 51.

Решение. Построим пример турнира с 51 ничьей. Пусть каждая из первых семнадцати команд сыграла вничью с каждой из последних трех, а остальные матчи закончились не вничью. Этот турнир удовлетворяет условию.

Докажем, что более 51 ничьей быть не может. Назовем команду *мирной*, если она завершила вничью более трех игр, и *боевой* в противном случае. Тогда по условию мирные команды между собой не могли сыграть вничью. Поэтому в каждой ничьей участвовала боевая команда. Значит, если боевых команд меньше 18, то утверждение доказано.

Пусть боевых команд 18. В их столбцах турнирной таблицы присутствуют все ничьи. Рассмотрим эти 18 столбцов. В каждом из них встречается не более 3 ничьих, итого ничьи стоят не более чем в 54 клетках, из них ничьих в строчках с мирными командами максимум 36, а ничья между боевыми командами присутствует в столбцах обоих этих команд, т. е. считается дважды. Итого ничьих не более $36 + 18 : 2 = 45$. Случаи, когда не мирных команд 19 и 20, рассматриваются аналогично.

5. Ответ: $(3^t; 6t + 1; 2 \cdot 27^t)$, где $t \geqslant 0$.

Решение. Так как $(z - x^3)(z + x^3) = 3^y$, то

$$z - x^3 = 3^\alpha, \quad z + x^3 = 3^\beta,$$

где $\beta > \alpha \geqslant 0$. Вычтем из второго равенства первое: $2x^3 = 3^\beta - 3^\alpha$. Сократив на максимальную возможную степень тройки, приходим к равенству

$$2u^3 = 3^v - 1, \qquad (*)$$

где u, v — натуральные числа.

Число u^3 сравнимо с 0, +1 или -1 по модулю 9. Значит, при $v > 1$ левая часть $(*)$ сравнима с 0, 2 либо -2, а правая с -1 по модулю 9. Следовательно, $v = 1$, $u = 1$. Отсюда $x = 3^t$, где t — целое неотрицательное число. Имеем $3^{6t} + 3^y = z^2$. Таким образом, $3^\gamma(1 + 3^\tau) = z^2$, где γ, τ — целые неотрицательные числа. 3^γ и $(1 + 3^\tau)$ взаимно просты, поэтому 3^γ и $(1 + 3^\tau)$ — квадраты, $3^\tau = n^2 - 1$ и, значит, оба числа $n - 1$ и $n + 1$ — степени тройки.

Следовательно, $n = 2$, $\tau = 1$, т. е. либо $y = 6t + 1$, где $t \geqslant 0$, либо $y = 6t - 1$, где $t \geqslant 1$. В первом случае $z = 2 \cdot 3^{3t}$. Второй случай невозможен, т. к. тогда $\gamma = 6t - 1$ — нечетное число и 3^γ не является квадратом.

6. Решение. При пересечении может образоваться несколько многоугольников. Мы рассматриваем любой из них.

Покрасим границу m-угольника красным, а n-угольника — синим. При обходе границы пересечения по часовой стрелке красные участки будут чередоваться с синими, а внутренность будет лежать справа. Значит, и участки каждого цвета проходятся на своем многоугольнике по часовой стрелке. Отсюда следует, что участки одного цвета проходятся в том же порядке, в каком лежат на своем многоугольнике (иначе граница самопересекается).

Если два или несколько красных участков являются частями одной и той же стороны красного многоугольника, то они отделяются синими участками со сверхтупыми (больше 180°) углами на каждом.

Действительно, пусть закончился красный участок границы и начался синий. Через первое ребро синего участка проведем прямую. Пока мы идем по границе синего многоугольника и углы меньше 180°, мы остаемся справа от этой прямой (относительно направления движения по первому ребру). Но продолжение стороны красного многоугольника, куда мы в итоге попадем, находится слева, поэтому встретится сверхтупой угол.

То же верно для синих участков. Таким образом, число сторон пересечения может быть больше суммарного числа сторон двух исходных многоугольников не более чем на суммарное число сверхтупых углов. Поскольку сумма углов n-угольника равна

$180°(n-2)$, в нем не может быть больше $n-3$ сверхтупых углов. Отсюда оценка: искомое число сторон не превосходит

$$m+n+(m-3)+(n-3)=2m+2n-6.$$

7. Решение. Пусть точка L симметрична K'' относительно AC. Прямые KL и $K'K''$ симметричны относительно AC, поэтому точка их пересечения принадлежит AC. Утверждение задачи равносильно тому, что D принадлежит прямой KL, т. е. что $\angle BKL=90°$.

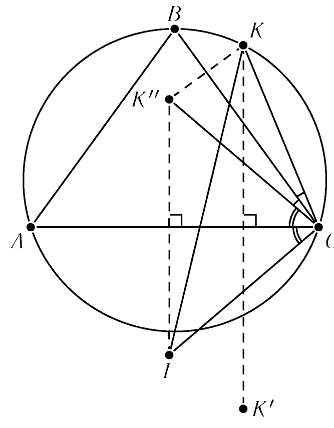


Рис. 27

Положим $\alpha=\angle ACB$. Так как

$$\angle BCK=\angle BCK'' \text{ и } \angle ACK''=\angle ACL,$$

то $\angle KCL=2\alpha$.

Так как $CK=CK''=CL$, то

$$\angle CKL=(180°-\angle KCL)/2=90°-\alpha.$$

С другой стороны,

$$\angle BKC=180°-\angle BAC=180°-\alpha.$$

Поэтому $\angle BKL=\angle BKC-\angle CKL=90°$, что и требовалось.

8. Решение. Покажем, как задачу можно решить для доски $4n\times4n$. Пусть i обозначает номер строки, j — номер столбца. Поставим нечетные числа в клетки, для которых или $j\geqslant 2n+1+|i-2n|$, или $j\leqslant 2n-|i-2n-1|$ (см. рис. 28).

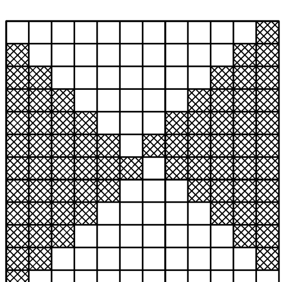


Рис. 28

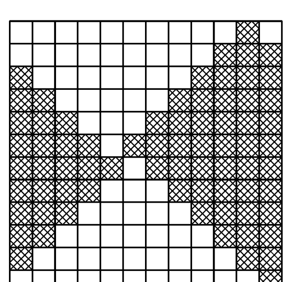


Рис. 29

После этого переместим крайний левый столбец на крайнее правое место (см. рис. 29). Легко проверить, что полученная таблица удовлетворяет условию задачи. В частности, на одной диагонали стоят $2n+1$ нечетных чисел, на другой $2n-1$.

2.3.3. Третий тур

7 класс

1. Ответ: 33 очка.

Решение. Пусть Незнайка выиграл a партий, вничью сыграл b партий, а проиграл c партий. Тогда $a+b+c=99$.

При первом способе подсчета Незнайка набрал $a+b/2$ очков, а при втором $a-c$ очков. По условию $a-c=(a+b/2)/2$. Из последнего соотношения выражаем количество побед: $a=b/2+2c$. Отсюда и из первого уравнения получаем, что $b=66-2c$. Следовательно, $a=33+c$, и Незнайка набрал $a-c=33$ очка.

2. Решение. Пусть буква О заменяет цифру x. При умножении цифры десятков x на 3 и прибавления переноса из разряда единиц (который может принимать значения 0, 1, 2 — это цифра десятков в числе 3Л, а $3 \leqslant$ 3Л $\leqslant 27$) на конце получается снова цифра x. Это означает, что x удовлетворяет одному из следующих уравнений:

$$\begin{array}{rrr} 3x=x; & 3x=x+10; & 3x=x+20; \\ 3x+1=x; & 3x+1=x+10; & 3x+1=x+20; \\ 3x+2=x; & 3x+2=x+10; & 3x+2=x+20. \end{array}$$

Решая эти уравнения, получаем $x \in \{0,4,5,9\}$.

Случай $x=0$ невозможен, т. к. в этом случае переноса из разряда единиц не может быть, откуда 3Л=Р, 3С=Р, но Л≠С.

Аналогично, если $x=5$, то 3Л=Р, 3С+1=Р, т. е. Р одновременно делится и не делится на 3.

Пусть $x=4$. Тогда 3Л⩾20, Л$\in\{7,8,9\}$. Л не может быть семеркой, т. к. Р не может быть единицей: число РОТОР не меньше 30000. Л не может быть восьмеркой, т. к. Р не может быть четверкой: по предположению, буква О заменяет четверку, а разные буквы соответствуют разным цифрам. Следовательно, Л может быть только девяткой. Тогда Р=7, а значит, С=2. Перенос из разряда сотен в разряд тысяч здесь таков же, как из разряда единиц в разряд десятков, т. е. 2. Отсюда К=8, Т=5. Получаем (как впоследствии выяснится — единственное) решение 74547 : 24849 = 3 : 1.

Рассмотрим случай $x = 9$. Тогда Л равно либо 7, либо 8. Случай Л=7 невозможен, т. к. Р не может быть равно 1. Следовательно, Л=8. Тогда Р=4 (как цифра единиц в числе 3Л), откуда С=1 (потому что иначе 3С больше Р). Но тогда СОКОЛ не меньше 19000, а значит, РОТОР не меньше 57000, т. е. Р больше 4. Противоречие.

3. Ответ: можно.

Решение. См. таблицу.

7	8	9
4	5	6
1	2	3

4. Решение. Продлим отрезок CK до пересечения с прямой BA и обозначим полученную точку через E. Треугольники EAK и CDK равны, следовательно, $AE = AB$. Так как треугольник EHB прямоугольный, то $AH = \frac{1}{2}BE = AB$, что и требовалось доказать.

5. Ответ: нет, не сможет. См. решение задачи 5, Третий тур, 7–8 классы.

6. Ответ: всегда можно.

Решение. Рассмотрим самую нижнюю (A), самую верхнюю (B), самую левую (C) и самую правую (D) точки данной фигуры (некоторые из них могут совпадать). Если обойти весь периметр фигуры один раз, то будет сделано четное число горизонтальных ходов (переходов в соседний узел сетки) и четное число вертикальных ходов (потому что количество ходов «туда» должно равняться количеству ходов «обратно»).

Проведем по линиям сетки четыре прямые, две горизонтальные (содержащие точки A и B) и две вертикальные (содержащие точки

C и D). Четыре прямые ограничивают прямоугольник, и построить больший прямоугольник, периметр которого будет *равен* периметру фигуры, будет легко, если мы докажем, что его периметр *не превосходит* периметра исходного многоугольника. Но это утверждение очевидно: вертикальных ходов от точки A до точки B не меньше, чем расстояние между двумя горизонтальными прямыми, что равно одной из сторон прямоугольника. Аналогичное верно для горизонтальных ходов.

7. Ответ: да, могли.

Решение. Например, если рассмотреть числа 2^2, 4^3, 3^4, 5^5, а затем разделить их на $4, 2, 3, 5$ соответственно, то получатся 1^2, 2^5, 3^3 и 5^4.

8. Ответ: да, можно.

Решение. Занумеруем все монеты от 1 до 5. Ниже приведена таблица взвешиваний. Ее строки соответствуют взвешиваниям. Слева указаны номера монет на левой и правой чашках, наверху — номера фальшивой и поддельной монет, в таблице — исходы взвешиваний ($>$ — перевесила левая чашка, $<$ — правая, $=$ — равенство). Нетрудно убедиться, что все столбцы различны: для этого удобно вначале сравнить столбцы, в которых в первой строке стоит $=$, затем столбцы с $>$ и, наконец, с $<$.

	$1\uparrow, 2\downarrow$	$1\uparrow, 3\downarrow$	$1\uparrow, 4\downarrow$	$1\uparrow, 5\downarrow$	$2\uparrow, 3\downarrow$	$2\uparrow, 4\downarrow$	$2\uparrow, 5\downarrow$	$3\uparrow, 4\downarrow$	$3\uparrow, 5\downarrow$	$4\uparrow, 5\downarrow$
$1, 2 \vee 3, 4$	$=$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$=$	$>$	$>$
$1, 3 \vee 2, 4$	$<$	$=$	$<$	$<$	$>$	$=$	$>$	$<$	$<$	$>$
$1, 4 \vee 3, 5$	$<$	$<$	$=$	$<$	$<$	$>$	$>$	$>$	$=$	$<$

	$2\uparrow, 1\downarrow$	$3\uparrow, 1\downarrow$	$4\uparrow, 1\downarrow$	$5\uparrow, 1\downarrow$	$3\uparrow, 2\downarrow$	$4\uparrow, 2\downarrow$	$5\uparrow, 2\downarrow$	$4\uparrow, 3\downarrow$	$5\uparrow, 3\downarrow$	$5\uparrow, 4\downarrow$
$1, 2 \vee 3, 4$	$=$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$=$	$<$	$<$
$1, 3 \vee 2, 4$	$>$	$=$	$>$	$>$	$<$	$=$	$<$	$>$	$>$	$<$
$1, 4 \vee 3, 5$	$>$	$>$	$=$	$>$	$>$	$<$	$<$	$<$	$=$	$>$

7–8 классы

1. См. решение задачи 2 Третьего тура, 7 класс.

2. См. решение задачи 4 Третьего тура, 7 класс.

3. Решение. Применим принцип крайнего: выберем человека с наибольшим количеством знакомых. Пусть знакомых у него n, тогда у его знакомых может быть от 1 до n знакомых. Так как все эти числа различны, то найдется человек с ровно одним знакомым.

Условие задачи осуществимо. Рис. 30 иллюстрирует ситуацию, когда компания состоит из 8 человек.

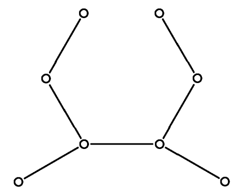


Рис. 30

4. Решение. Применим определение плохой пары и к парам несоседних чисел. При перестановке плохой пары соседних чисел эта пара перестает быть плохой, а другие пары не меняются. Процесс закончится, так как число перестановок не может быть больше общего числа плохих (соседних и не соседних) пар.

5. Ответ: сможет при любом $4 \leqslant m \leqslant 64$, не сможет при всех остальных.

Решение. Для случая $m = 4$ пример приведен на рис. 31. При такой раскраске все соседи любой клетки имеют разные цвета, и она, очевидно, удовлетворяет условию.

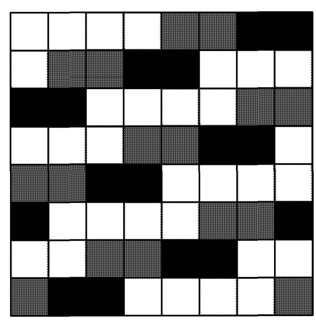


Рис. 31

Убедимся, что то же верно и при любом $m > 4$ (но не больше 64 — иначе не хватит клеток). В самом деле, в указанной раскраске выберем произвольно $m - 4$ клеток и раскрасим их по одной в другие цвета. Тогда все соседи каждой клетки по-прежнему будут иметь разные цвета, и потому такая раскраска будет удовлетворять условию.

Пусть теперь $m = 3$. Предположим, что требуемая раскраска существует. Тогда каждая угловая клетка имеет двух соседей разного цвета; каждая клетка, прилегающая к границе, но не угловая — трех соседей разного цвета; каждая «внутренняя» клетка — двух соседей одного цвета и двух соседей другого цвета (поскольку всего цветов три, то четырех разноцветных соседей быть не может).

Применим «шахматную» нумерацию. Соседи клетки c1 должны иметь разные цвета, обозначим их 1, 2 и 3 (по часовой стрелке). Соседи клетки a1 тоже имеют разные цвета, поэтому цвет клетки a2 либо 2, либо 3. Но цвет 3 невозможен, поскольку у b2 должны быть две пары одноцветных соседей. Поэтому клетка a2 имеет цвет 2, а b3 — цвет 1. Далее, клетка e2, будучи соседом внутренней клетки d2, должна иметь цвет 2 или 3. Но если она имеет цвет 3, то тогда у граничной клетки e1 есть два соседа одинакового цвета 3, что недопустимо. Поэтому клетка e2 имеет цвет 2, а клетка d3 — цвет 3. Итого получается, что соседи клетки c3 имеют три различных цвета — противоречие. Итак, при $m = 3$ раскраска невозможна. Понятно, что тем более она невозможна при $m = 2$.

6. См. решение задачи 1 Третьего тура, 7 класс.

7. Ответ: (p, p, p), где p — любое простое число.

Решение. Числа x^3 и y^3 — одной четности. Поэтому $x + y$ четно, и из равенства $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 2z^3$ следует, что либо $x + y = 2z^3$, либо $x + y = 2z^2$, либо $x + y = 2z$.

Если $x, y > 2$ и $x \neq y$, то $xy > x+y$, откуда $x^2 - xy + y^2 > x + y$. Тогда $x + y = 2z$, $x^2 - xy + y^2 = z^2$. Любой общий делитель $x + y$ и $x^2 - xy + y^2$ делит $(x + y)^2 - (x^2 - xy + y^2) = 3xy$ и потому равен 1 или 3. Отсюда z равно 1 или 3, но тогда искомых x, y не существует. Следовательно, $x = y$, откуда получаем ответ.

8. См. решение задачи 6 Третьего тура, 7 класс.

8 класс, первая лига

1. Решение. Разделим все неравенство на d^2 и сделаем замену переменных $x = a/d$, $y = b/d$, $z = b/d$, $x, y, z \leqslant 1$. Неравенство преобразуется в такое: $x(1 - y) + y(1 - z) + z(1 - x) \leqslant 1$. Это равносильно неравенству

$$1 - x - y - z + xy + yz + zx \geqslant 0.$$

Так как $x, y, z > 0$, то

$$1 - x - y - z + xy + yz + zx > 1 - x - y - z + xy + yz + zx - xyz =$$

$$= (1 - x)(1 - y)(1 - z) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство верно, так как числа x, y, z не превосходят единицы.

2. Ответ: 90°.

Решение. Если точка D лежит на дуге первой окружности CE, не содержашей A, то она находится внутри $\triangle ABC$. Тогда $\angle AED = 180^\circ - \angle ACD$, $\angle BFD = 180^\circ - \angle BCD$, и так как сумма углов треугольника EDF равна 180°, то $\angle EDF = 90^\circ$. Аналогичное верно, если D лежит на дуге второй окружности CF, не содержашей B. Если же ни то, ни другое не имеет места, то $\angle AED = \angle ACD$, $\angle BFD = \angle BCD$, следовательно, $\angle EDF = 90^\circ$.

3. См. решение задачи 5 Третьего тура, 7–8 классы.

4. См. решение задачи 2 Третьего тура, 7 класс.

5. См. решение задачи 4 Третьего тура, 7–8 классы.

6. См. решение задачи 1 Третьего тура, 7 класс.

7. См. решение задачи 7 Третьего тура, 7–8 классы.

8. См. решение задачи 6 Третьего тура, 7 класс.

8 класс, высшая лига

1. Ответ: 2.

Пример: $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x = (x^2 + 2x + 1)(x^2 - x)$.

Будем искать наибольший *по модулю* коэффициент среди всех коэффициентов многочленов Q и R. Будем также предполагать, что коэффициенты при наибольших степенях переменной во всех трех многочленах равны 1. Ясно, что со сделанными допущениями задача равносильна исходной.

Первый случай: $P(x) = x^4 + \ldots = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$. Тогда коэффициенты многочлена $P(x)$ равны $a + c$, $ac + b + d$, $ad + bc$, bd. Все эти числа по модулю не должны превосходить 1. Так как $|a + c| \leqslant 1$, то $|a|$ и $|c|$ различаются не больше чем на 1. Пусть $b = 0$ (случай $d = 0$ аналогичен). Тогда $|ad|, |ac + d| \leqslant 1$. Значит, если $a = 0$, то $|d| \leqslant 1$, и ввиду сказанного выше $|c| \leqslant 1$. Если же $a \neq 0$, то $|d| \leqslant 1$ (поскольку $|ad| \leqslant 1$), откуда $|ac| \leqslant 2$ и $|c| \leqslant 2$. При $c \neq 0$ получаем $|a| \leqslant 2$, а при $c = 0$ имеем $|a| \leqslant |c| + 1 = 1$.

Пусть теперь $bd \neq 0$. Тогда $|b|, |d| = 1$, откуда $|ac| \leqslant 2$. Если $ac \neq 0$, то $|a|, |c| \leqslant 2$. Если же одно из чисел a, c равно 0, то модуль второго не превосходит 1, поскольку отличается от модуля первого не больше чем на 1.

Второй случай: $P(x) = x^4 + \ldots = (x+a)(x^3+bx^2+cx+d)$. Тогда коэффициенты многочлена $P(x)$ равны $a+b$, $ab+c$, $ac+d$, ad. Если $d=0$, то этот случай сводится к предыдущему:

$$P(x) = (x^2+ax)(x^2+bx+c).$$

Если $a=0$, то коэффициенты b, c, d — это коэффициенты многочлена P, а потому не превосходят 2 по модулю.

Если же $ad \neq 0$, то $|a|, |d| = 1$. Отсюда и из неравенств $|a+b| \leqslant 1$, $|ac+d| \leqslant 1$ следует, что $|b|, |c| \leqslant 2$.

2. Решение. Проекция многоугольника на прямую p_i, содержащую сторону a_i, представляет собой отрезок, концы которого — проекции некоторых вершин X и Y многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$.

Для диагонали (или стороны!) XY справедливо неравенство $2XY < P$, где P — периметр многоугольника.

Действительно, если обойти многоугольник от X к Y, то пройденное расстояние будет не меньше длины отрезка XY. Если в том же направлении пройти обратно от Y к X, то этот кусок периметра тоже не меньше, чем XY. При этом хотя бы в одном случае неравенство строгое (нестрогое оно только в случае, если X и Y — соседние вершины).

С другой стороны, $XY \geqslant d_i$. Следовательно, при любом i справедливо неравенство $a_i/d_i > 2 \cdot a_i/P$. Складывая такие неравенства для всех i, получаем требуемое. Заметим, что мы нигде не пользовались выпуклостью многоугольника!

3. См. решение задачи 1 Третьего тура, 8 класс, первая лига.

4. Решение. Пусть L — точка пересечения ℓ с AB. Тогда

$$\angle LCP = \angle LCA + \angle ACP = \angle MCB + \angle MCA = \angle ACB.$$

Аналогично, $\angle LCQ = \angle ACB$, т. е. ℓ является биссектрисой в треугольнике PQC. Так как $CP = CM = CQ$, то ℓ является и высотой.

Отметим, что в действительности аналогичный факт верен для любого треугольника при любом расположении точки M.

5. См. решение задачи 3 Третьего тура, 7–8 классы.

6. Решение. Рассмотрим два случая.

1) Данное число n делится на нечетные простые числа p_1, p_2, $\ldots$, p_{10}, а значит, оно делится на их произведение. Тогда рассмотрим все делители числа $p_1p_2\cdots p_{10}$. Их сумма равна $(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_{10})$ и делится на 2^{10}.

2) Данное число n делится на 2 и нечетные простые числа $p_1,\ldots,p_9$. Тогда рассмотрим четные делители числа $2p_1\cdots p_9$. Их сумма вдвое больше, чем сумма нечетных делителей, и равна $2(1+p_1)(1+p_2)\cdots(1+p_9)$, а значит, делится на 2^{10}.

7. См. решение задачи 5 Третьего тура, 7–8 классы.

8. См. решение задачи 4 Третьего тура, 7–8 классы.

9 класс

1. См. решение задачи 1 Третьего тура, 8 класс, высшая лига.

2. Ответ: $m=2$.

Решение. При нечетном m число $1+2^m$ делится на 3. Очевидно, что 3^m+4^m на 3 не делится, поэтому m четное, $m=2n$.

Заметим, что если $3^{2n}+4^{2n}$ делится на $1+2^{2n}$, то на $1+2^{2n}$ делится также число

$$3^{2n}+4^{2n}-2^{2n}(1+2^{2n})=3^{2n}-2^{2n}=(3^n-2^n)(3^n+2^n).$$

Из простоты числа $1+2^{2n}=1+4^n$ следует, что $3^n-2^n \,\vdots\, 1+4^n$ или $3^n+2^n \,\vdots\, 1+4^n$. Очевидно, что $3^n-2^n<1+4^n$. Менее очевидно, что $3^n+2^n<4^n<1+4^n$ при $n>1$. Докажем это:

$$\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n\leqslant\left(\frac{2}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2<1.$$

Следовательно, единственный вариант — это $n=1$, $m=2$. Нетрудно проверить, что он подходит.

3. Решение. Первый способ. Легко доказать, что
$$\frac{1}{1+4x^2} \geqslant 1-x \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$
Действительно, $1 \geqslant (1-x)(1+4x^2) = 1 - x(2x-1)^2$. Следовательно,
$$\frac{1}{1+4x^2} + \frac{1}{1+4y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geqslant 3 - x - y - z = 2.$$

Второй способ. Так как $4x^2 - 4x + 1 = (1-2x)^2 \geqslant 0$, то $1 + 4x^2 \geqslant 4x$.

Отсюда $x(1+4x^2) \geqslant 4x^2$, поскольку $x \geqslant 0$. Значит, $x \geqslant \dfrac{4x^2}{1+4x^2}$. Аналогично,

$y \geqslant \dfrac{4y^2}{1+4y^2}$, $z \geqslant \dfrac{4z^2}{1+4z^2}$. Сложив эти три неравенства, получаем (поскольку $x+y+z=1$):
$$1 \geqslant \frac{4x^2}{1+4x^2} + \dots = \frac{(1+4x^2)-1}{1+4x^2} + \dots =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{1+4x^2}\right) + \dots = 3 - \frac{1}{1+4x^2} - \frac{1}{1+4y^2} - \frac{1}{1+4z^2},$$
откуда вытекает доказываемое неравенство.

Заметим, что равенство достигается тогда и только тогда, когда одно из чисел равно нулю, а оставшиеся два равны 1/2.

4. См. решение задачи 4 Третьего тура, 8 класс, высшая лига.

5. См. решение задачи 3 Третьего тура, 7–8 классы.

6. См. решение задачи 5 Третьего тура, 7–8 классы.

7. См. решение задачи 2 Третьего тура, 8 класс, высшая лига.

8. Решение. Построим точку D, симметричную вершине A относительно BC. Очевидно, треугольник ADC равносторонний. Пусть E — пересечение прямой CM с биссектрисой угла между стороной AB и продолжением стороны AC. Углы AEC и ACE равны, следовательно, $AE = AC$. Так как $AD = AC = AE$, то $\angle EDA = 50^\circ$.

Пусть M' — пересечение прямых AD и CE. Если $\angle CBM' = 20^\circ$ то точки M и M' совпадают, а значит, $AM \perp BC$.

Заметим, что
$$\angle EAM' = \angle EM'A = 80^\circ,$$
следовательно, $EA = EM'$. Но тогда треугольники $EM'D$ и CAB равны ($EM' = AE = AC$ и углы попарно равны).

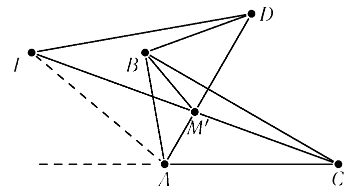


Рис. 32

Из равенства треугольников следует, что $DM' = AB = DB$, т. е. треугольник BDM' равнобедренный. Поскольку $\angle BDM' = 40^\circ$, получаем, что $\angle DBM' = 70^\circ$, откуда $\angle CBM' = 20^\circ$, что и требовалось.

2.3.4. Финал

7 класс, финальный бой за 3 и 5 места

1. Ответ: 36.

Решение. Пусть $\overline{XY}$ — запись числа n. Из чисел от 1 до n ровно 9 однозначных, остальные — двузначные, поэтому всего выписано $9 + 2(n - 9) = 2n - 9 = \overline{YX}$ цифр. Итак, $n = 10X + Y$, $2n - 9 = 10Y + X$.

Вычитая равенства почленно, получаем: $n-9 = 9Y-9X$, откуда $10X+Y-9 = 9Y-9X$, $19X = 8Y+9$. Число 19 дает остаток 3 при делении на 8, а при умножении на однозначное X дает остаток 1. Непосредственно проверяется, что подходит лишь $X = 3$. Тогда $Y = 6$, т. е. $n = 36$.

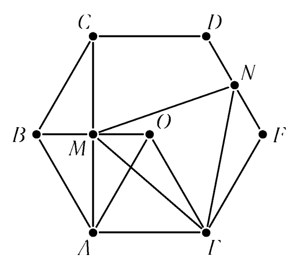


Рис. 33

2. Решение. Пусть сторона шестиугольника равна a, и пусть K — середина стороны AF (см. рис. 33). Так как $\angle BAC = \angle ACB = 30^\circ$, то $BM||AF$ и $BM = a/2 = KF$. Тогда $BMFK$ — параллелограмм, и потому $MF = BK$. Треугольники ABK и EFN равны, откуда $NF = BK = MF$. Пусть теперь L — середина диагонали CE. Тогда $DL = a/2 = DN$, $\angle LDN = 60^\circ$, откуда $\angle DNL = 60^\circ$, $NL||BM$ и $NL = a/2 = BM$.

Значит, $BMNL$ — параллелограмм, поэтому $MN = BL$. Но из симметрии шестиугольника следует, что $BL = FM$, откуда $FM = MN$.

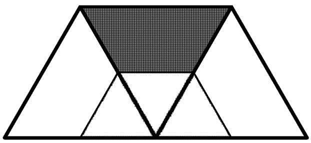


Рис. 34

3. Решение. См. рис. 34. Трапеция составлена из трех равных равносторонних треугольников. Разрезание проходит через середины сторон этих треугольников.

4. Решение. Если остроугольный треугольник не является почти прямоугольным, то его наибольший угол меньше $75°$. Если при этом он не является почти равнобедренным, то следующий по величине угол меньше $60°$, а наименьший угол меньше $45°$. Но тогда сумма углов треугольника меньше $75° + 60° + 45° = 180°$, что невозможно.

5. Ответ: 31, 44, 44, 44 и 57 фотографий.

Решение. В любой четверке альбомов найдутся как минимум два с одинаковым числом фотографий (иначе, комбинируя каждый из них с пятым альбомом, получим четыре различных суммы). Два одинаковых числа в сумме дают четное, а оно у нас только одно — число 88. Значит, все одинаковые количества фотографий равны 44. Убрав одно из них, получим еще одно совпадение, значит, альбомов с 44 фотографиями как минимум три. Четыре таких альбома быть не может, так как тогда есть только две разные суммы. Итак, бывают альбомы с x, y и 44 фото, причем числа x, y, 44 различны. Тогда суммы $x + 44$, $44 + 44$ и $y + 44$ различны, откуда $x = 75 - 44 = 31$, $y = 101 - 44 = 57$ или $x = 57$, $y = 31$. Эти значения подходят, поскольку $31 + 57 = 88$.

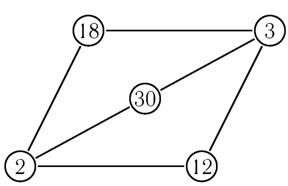


Рис. 35

6. Решение. Можно. Например, поставим в центральном кружочке число 30, в соединенных с ним 2 и 3, а в оставшихся двух 12 и 18.

7. Решение. Пусть S_1 — сумма чисел в полоске, состоящей из верхней строки и крайнего правого столбца; S_2 — в полоске, состоящей из нижней строки и крайнего левого столбца; S_0 — в полоске, состоящей из всех граничных клеток таблицы; S — в левом верхнем и правом нижнем углах квадрата. Таблицу можно разрезать на квадраты $2{\times}2$, поэтому сумма всех чисел в таблице равна 0. В квадрате $3{\times}3$, занимающем левый нижний угол, сумма также равна 0. Поэтому $S_1 = 0$. Аналогично, $S_2 = 0$. В центральном квадрате 2×2 сумма чисел равна 0, поэтому $S_0 = 0$. Отсюда $S = S_1 + S_2 - S_0 = 0$. Для двух других углов квадрата доказательство аналогичное.

8. См. решение для кучи из кусков сыра (задача 1, Финал, 8 класс, высшая лига).

7–8 классы, финальный бой за 7 место в 8 классе и за 1 место в 7 классе

1. См. решение для кучи из кусков сыра (задача 1, Финал, 8 класс, высшая лига).

2. См. решение задачи 2, 7 класс, Финальный бой за 3 и 5 места.

3. Решение. Пусть a, b, c — три верхних числа в первом столбце, а d, e, f — в последнем. В трех верхних строках стоят числа a, b, c и два квадрата 3×3, поэтому сумма чисел в этих строках равна $a + b + c$. Но аналогично она равна и $d + e + f$, поэтому $a + b + c = d + e + f$. Во второй и третьей строках стоят числа b, c и три квадрата 2×2, поэтому сумма чисел в этих строках равна $b + c$. Аналогично, она равна $e + f$, откуда $b + c = e + f$. Сравнив с предыдущим равенством, видим, что $a = d$, т. е. равны числа в двух верхних углах. Аналогичное верно и для любой пары соседних углов.

4. См. решение задачи 4, 7 класс, Финальный бой за 3 и 5 места.

5. Ответ: 153.

Решение. Пусть XYZ — запись числа n. Из чисел от 1 до n ровно 9 однозначных, 90 двузначных, остальные — трехзначные, поэтому всего выписано $9+2{\cdot}90+3(n-99) = 3n-108 = ZYX$ цифр.

Это число больше n (цифр больше, чем чисел), поэтому $Z > X$. Итак, $n = 100X + 10Y + Z$, $3n - 108 = 100Z + 10Y + X$. Вычитая равенства почленно, получаем: $2n - 108 = 99Z - 99X$. Значит, $2n - 108$ делится на 2 и на 99, то есть кратно 198. Поскольку $3n - 108 \leqslant 999$, то $n \leqslant 369$ и $2n - 108 \leqslant 630$. Осталось проверить 3 случая:

1) $2n - 108 = 198$, $n = 153$, $3n - 108 = 351$ — все сходится.

2) $2n-108 = 2\cdot 198$, $n = 252$ — не подходит (первая и последняя цифры равны).

3) $2n - 108 = 3 \cdot 198$, $n = 351$ — не подходит (первая цифра больше последней).

6. Решение. Нельзя. Предположим противное: такие числа нашлись. Расставим на отрезках стрелки от делимого к делителю. Рассмотрим три стрелки на сторонах внешнего треугольника.

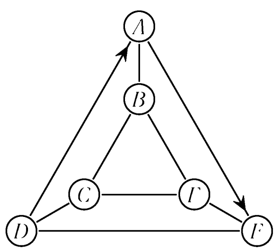


Рис. 36

Найдется вершина (назовем ее A), куда одна стрелка (DA) входит, другая (AE) — выходит (см. рис. 36).

Пусть B — вершина, ближайшая к A. Рассмотрим стрелку на отрезке AB. Если она входит в A, то B делится на A, а значит, и на E — противоречие. Если же стрелка AB из A выходит, то A (а значит, и D) делится на B — снова противоречие.

7. Решение. Пусть мы хотим превратить треугольник

$$T = T(a, b, c) \text{ в } T' = T(a', b', c'),$$

где $a \leqslant b \leqslant c$, $a' \leqslant b' \leqslant c'$, $a+b+c = a'+b'+c' = p$. Подойдет такая цепочка: $T(a, b, c) \to T(c', b, c) \to T(c', b', c) \to T(a', b', c')$. Проверим, что промежуточные ступени — действительно треугольники. Пусть для определенности $c \geqslant c'$. Заметим еще, что $c' \geqslant a$ (иначе $a' \leqslant b' \leqslant c' < a \leqslant b \leqslant c$ и $a' + b' + c' < a + b + c$). Неравенство треугольника достаточно проверить для стороны c — она наибольшая. В первом промежуточном треугольнике $c' + b \geqslant a + b > c$, во втором $c' + b' > p/2 > c$.

8. Решение. Пусть первый велосипедист проезжает круг за x сек. Рассуждая как в задаче 4, Финал, 7–8 класс, бой за 1, 3, 5 места, получаем, что $3x$ делится на $2x+45$. Так как $3x < 2(2x+45)$, то $3x = 2x+45$, откуда $x = 45$, $x+45 = 90$, и первая встреча велосипедистов произошла через $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x+45}} = 30$ секунд после старта.

7–8 класс, финальный бой за 1, 3, 5 места

1. См. решение для кучи из кусков сыра (задача 1, Финал, 8 класс, высшая лига).

2. См. решение задачи 2, 7 класс, Финальный бой за 3 и 5 места.

3. Решение. Нет. В комплект входят 7 дублей и 21 недубль. Они покрывают 56 клеток, значит, пустых клеток 8. Пусть все условия выполнены. Докажем, что к каждой доминошке D примыкает по стороне хотя бы одна пустая клетка. У D хотя бы одна длинная сторона не примыкает к краю доски. Две доминошки не примыкают друг к другу длинными сторонами: обе половинки одновременно совпадать не могут. Поэтому пара клеток, примыкающих к длинной стороне D, не может быть покрыта одной доминошкой. Если одна из этих клеток пуста, то все доказано. Пусть эти клетки покрыты двумя доминошками: A и B. Они соприкасаются между собой по половинкам с одинаковыми числами, следовательно, D — дубль. Длинные стороны A и B не могут обе быть перпендикулярны длинной стороне D — тогда бы A и B примыкали друг к другу длинными сторонами. Значит, одна из доминошек (скажем, B) и D соприкасаются половинками длинных сторон, и некоторая клетка K примыкает к B и короткой стороне D (см. рис. 37).

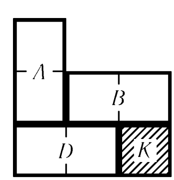


Рис. 37

Но B — недубль (иначе B и D совпадали бы), поэтому K примыкает к половинкам с разными числами. Значит, K пуста.

Разобьем пустые клетки диагоналями на 4 треугольника, всего их 32. Треугольник может примыкать максимум к одной доминошке. Назовем его тенью этой доминошки. У нас есть как минимум 28 теней, но если недубль не примыкает длинной стороной к краю доски, то, как видно из предыдущего, у него есть тени с двух сторон. А так как на краю 28 клеток, то к краю могут примыкать максимум 14 недублей. Значит, есть минимум 7 доминошек с двумя тенями. Итого минимум 35 теней, т. е. $\frac{35}{4} > 8$ пустых клеток — противоречие.

4. Решение. Пусть первый велосипедист проезжает круг за x сек., тогда второй — за $x + 12$ сек. Примем длину круга за 1. Тогда скорость второго велосипедиста относительно первого равна $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+12}$, и время между их последовательными встречами составляет $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+12}} = \frac{x(x+12)}{2x+12}$. Так как к моменту седьмой встречи велосипедисты проехали несколько полных кругов, то $7\frac{x(x+12)}{2x+12}$ делится на x и потому $7(x+12)$ делится на $2x+12$. Поскольку $6x+36$ также делится на $2x+12$, то на это число делится и $(7x+84)-(6x+36) = x+48$. Значит, $x+48 \geqslant 2x+12$, откуда $x \leqslant 36$. По условию $x \geqslant 31$, поэтому $x+48 < 3x < 2(2x+12)$. Значит, $x+48 = 2x+12$, откуда $x = 36$, т. е. первый велосипедист проезжает круг за 36 сек., а второй за 48 сек.

5. См. решение задачи 5, Финальный бой за 7 место в 8 классе и 1 место в 7 классе.

6. См. решение задачи 6, Финальный бой за 7 место в 8 классе и 1 место в 7 классе.

7. См. решение задачи 7, Финальный бой за 7 место в 8 классе и 1 место в 7 классе.

8. См. решение задачи 8, Финал, 8 класс, высшая лига.

8 класс, тренировочный бой (первая лига)

1. См. решение задачи 6, Финальный бой за 7 место в 8 классе и 1 место в 7 классе.

2. См. решение задачи 2, 7 класс, Финальный бой за 3 и 5 места.

3. См. решение задачи 3, Финальный бой за 7 место в 8 классе и 1 место в 7 классе.

4. См. решение задачи 5, Финальный бой за 7 место в 8 классе и 1 место в 7 классе.

5. Ответ: 6. (Ср. задачу 5, Финал, 9 класс.)

Решение. Это число подходит; предположим, что подходит еще некоторое число $n > 6$. Тогда $10n$ делится на $n-1$. Но $10(n-1) = 10n - 10$, поэтому 10 делится на $n-1$, откуда $n \leqslant 11$, $10n \leqslant 110$. С другой стороны, $10n$ делится на $3\cdot4\cdot5 = 60$ и поэтому $10n \geqslant 120$ — противоречие.

6. См. решение задачи 3, 7 класс, Финальный бой за 3 и 5 места.

7. См. решение задачи 7, Финал, 8 класс, высшая лига.

8. См. решение для кучи из кусков сыра (задача 1, Финал, 8 класс, высшая лига).

8 класс, высшая лига

1. Решение. Разберемся сперва, кто и сколько выигрывает при дележе одной тарелки. Пусть она состоит из кусков веса $a, b, c, d, e, \ldots$, где $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e \geqslant \ldots$. Ясно, что выгоден жадный алгоритм: брать всегда самый большой из оставшихся кусков. Тогда разница R между весами у первого и у второго будет равна $a - b + c - d + e - \cdots \geqslant 0$, так как все разности $a-b, c-d, \ldots$ неотрицательны. Назовем R прибылью от тарелки. (Если от жадного алгоритма отклонится первый, прибыль будет меньше R, если второй — больше R). Ясно еще, что $R = a-(b-c+d-e+\ldots) \leqslant a$, поскольку сумма разностей в скобках тоже неотрицательна.

Вернемся к полной игре. Пусть Фома отложит самый большой кусок a, а все остальные куски положит на первую тарелку. Прибыль R от этой тарелки не превосходит самого большого куска на ней, тем более $R \leqslant a$. Фома может сделать так, чтобы и прибыль от второй тарелки стала равна R: если $R = a$, то отложенный кусок он кладет на нее целиком; если $R < a$, то он режет отложенный кусок a на две части веса $(a+R)/2$ и $(a-R)/2$ (их разность равна R) и кладет их на вторую тарелку. Теперь какую бы тарелку Ерема ни выбрал, при ее дележке он выиграет не более R, а Фома на второй тарелке выиграет не менее R, то есть получит в сумме не менее половины сыра.

2. Первое решение. Образы точек P и Q при симметрии относительно прямых AM и AN соответственно совпадают (см. решение задачи 2, Финал, 9 класс).

Отсюда следует, что $AP = AQ$, то есть треугольник APQ — равнобедренный. Так как $\angle AMP = \angle AQP = 45^\circ$, точки A, P, M и Q лежат на одной окружности. Аналогично для точек A, P, Q и N. Значит, все пять точек лежат на одной окружности.

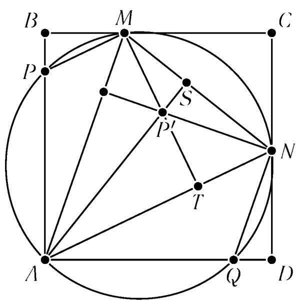


Рис. 38

Второе решение. Так как

$$\angle BAM = \angle DNQ, \text{ то } \frac{BM}{AB} = \frac{DQ}{DN}.$$

Так как

$$\angle BMP = \angle DAN, \text{ то } \frac{BP}{BM} = \frac{DN}{AD}.$$

Отсюда

$$\frac{BP}{AB} = \frac{BP}{BM} \cdot \frac{BM}{AB} = \frac{DN}{AD} \cdot \frac{DQ}{DN} = \frac{DQ}{AD}.$$

Так как $AB = AD$, то $BP = DQ$ и $AP = AQ$, откуда

$$\angle APQ = \angle AQP = 45^\circ.$$

Но $\angle AMP = 45^\circ = \angle AQP$, поэтому точка M лежит на окружности AQP. Так как $\angle ANQ = 45^\circ = \angle APQ$, точка N также лежит на этой окружности.

3. См. решение задачи 3, 7–8 класс, Финальный бой за 1, 3, 5 места.

4. Решение. Пусть первый велосипедист проезжает круг за x сек. Рассуждая как в задаче 4, Финал, 7–8 класс, бой за 1, 3, 5 места, получаем, что $8x$ делится на $2x-14$. Так как $8x-56$ также делится на $2x-14$, то и 56 делится на $2x-14$. По условию $x \geqslant 31$, поэтому $2(2x-14)>56$. Значит, $2x-14=56$, откуда $x=35$, т. е. первый велосипедист проезжал круг за 35 сек., а второй за 21 сек.

5. Ответ: 60.

Решение. Если число $n>60$ обладает нужным свойством, то оно делится на $3\cdot4\cdot5=60$. Поэтому $n/10$ — целое число. Обозначим его m. Тогда n делится на $m-1$. Но $10(m-1)=n-10$, поэтому 10 делится на $m-1$, откуда $m\leqslant11$, $n\leqslant110$. С другой стороны, $n>60$ и n делится на 60 — противоречие.

6. Ответ: $y=4$, $p=5$, $n=1$; $y=5$, $p=2$, $n=3$; $y=7$, $p=2$, $n=4$.

Решение. Уравнение равносильно следующему:

$$(y-1)(y+1)=3p^n.$$

Так как значение $y=2$ не подходит, обе скобки в левой части больше 1. Если одна из скобок равна 3, то либо $y=2$ (что не подходит), либо $y=4$, и тогда $p=5$, $n=1$. Если же обе скобки кратны p, то так как они отличаются на 2, то $p=2$ и одна из скобок содержит p в первой степени. Эта скобка равна либо 2, либо $2\cdot3=6$, поэтому либо $y=2\pm1$, либо $y=6\pm1$. Значения $y=1,3$ не подходят. При $y=5$ получаем $n=3$, а при $y=7$ получаем $n=4$.

7. Решение. Треугольник со сторонами a, b, c будем обозначать $T(a,b,c)$. Оценим наименьшее число шагов (операций) для обратного превращения $T(1,1,1)$ в $T(100,100,100)$ — ответ, очевидно, будет тот же. Ясно также, что если мы за один шаг превратили $T(a,b,c)$ в $T(k,l,m)$ (где $a\leqslant b\leqslant c$ и $k\leqslant l\leqslant m$), то $k\leqslant b$, $l\leqslant c$, $m<b+c$ (действительно, две стороны не изменятся, а третья меньше их суммы).

Поэтому после первого шага стороны будут не больше соответственно 1,1,2, после второго — не больше 1,2,3, ..., после i-го — не больше трех последовательных членов f_i, f_{i+1}, f_{i+2} ряда Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ... В частности, после 11 шага наименьшая сторона не превзойдет 89, то есть $T(100,100,100)$ не получится. А за 12 шагов справиться можно: пусть после i-го шага стороны равны последовательным членам

g_i, g_{i+1}, g_{i+2} следующего ряда (некоторые члены нам удобнее записать как разности): 1; 1; $2-0,001$; $3-0,002$; $5-0,004$; $8-0,008$; $13-0,016$; $21-0,032$; $34-0,064$; $55-0,128$; $89-0,256$; 100; 100; 100 (неравенства треугольника выполнены, поскольку очередное число Фибоначчи уменьшается на такую величину, которая превосходит сумму уменьшений двух предыдущих сторон).

8. Решение. Будем вместо «гирька веса m г» писать просто «гирька m». Покрасим гирьку 1 и все гирьки на той же чашке в красный, а на другой — в синий цвет, снимем все гирьки с обеих чашек и расположим их по возрастанию весов. Гирьки разобьются на отрезки подряд идущих гирек одного цвета. Есть хотя бы один стык, где красный цвет сменяется синим. Отметим пары гирек на таких стыках: красную k и синюю $k+1$. Нам нужна такая пара с $k>1$ — добавив к ней гирьку 1, получим искомую тройку.

Разберем несколько случаев.

1) Есть всего два отрезка. Пара (1,2) не может быть отмечена, т. к. тогда все гирьки, начиная с 2, — синие, и гирька 1 их не уравновесит. Значит, отмечена нужная пара.

2) Есть не менее четырех отрезков. Тогда пара на стыке третьего отрезка с четвертым — нужная.

3) Есть ровно три отрезка. Если пара на стыке первого со вторым — нужная, то все хорошо. Если нет, то это пара (1, 2), и синие гирьки образуют отрезок $2, 3, \ldots, m$ (при $n>4$ в нем минимум 3 гирьки). Если в правом красном отрезке — минимум две гирьки, то гирька $m+2$ — красная, и искомая тройка — $2, m, m+2$. Если же там всего одна гирька n, то красные гирьки 1 и n в сумме легче синих $2, 3, n-1$ — противоречие.

9 класс

1. См. решение задачи 1, Финал, 8 класс, высшая лига.

2. Решение. Докажем вспомогательное утверждение: образы точек B и D при симметрии относительно прямых AM и AN соответственно совпадают с основанием высоты S треугольника AMN, проведенной из точки A.

Пусть B переходит в B', D — в D'. Так как

$$\angle BAM + \angle DAN = \angle MAN,$$

то прямые AB' и AD' совпадают. Учитывая, что $AB = AD$, получаем, что B' совпадает с D'. Так как

$$\angle AB'M = \angle ABM = \angle ADN = \angle AD'N = 90^\circ,$$

точки M, N и B' лежат на одной прямой, то есть B' совпадает с S.

Пусть теперь P' — образ точки P при этой симметрии. Тогда P' принадлежит отрезку AS и $\angle P'MA = \angle PMA = \angle MAN = 45^\circ$, что означает перпендикулярность прямых MP' и AN. Так как $AS \perp MN$, то P' — ортоцентр $\triangle AMN$. Аналогичное верно для точки Q, т. е. образы точек P и Q при указанных симметриях совпадают. Отсюда следует, что $AP = AQ$, то есть треугольник APQ — равнобедренный.

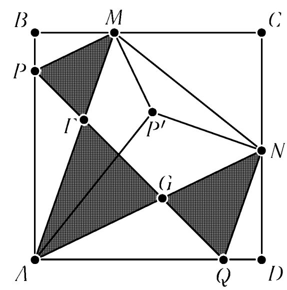


Рис. 39

Рассмотрим невыпуклый четырехугольник $AMP'N$, у которого три угла равны 45°. Докажем, что в таком четырехугольнике диагонали равны. Пусть T — основание высоты треугольника AMN, проведенной из вершины M. Тогда $P'T = TN$. При повороте на 90° с центром в точке T имеем $N \to P'$, $M \to A$, то есть $AP' = MN$.

Теперь докажем утверждение задачи. Заметим, что достаточно доказать, что $S_{APM} + S_{AQN} = S_{PAQ}$. Так как образы точек P и Q совпали и $AP' = MN$, то

$$S_{APM} + S_{AQN} = S_{APM} + S_{AP'N} = S_{AMP'N} = \frac{1}{2}AP'^2 = S_{PAQ},$$

что и требовалось.

3. См. решение задачи 3, 7–8 класс, Финальный бой за 1, 3, 5 места.

4. Решение. Найдем $\max(d_1, d_2, d_3)$ по всем внутренним точкам D треугольника. Пусть a, b, c — длины сторон, а S_1, S_2, S_3 —

площади треугольников, образовавшихся при соединении D с вершинами A, B, C.

Тогда

$$d_1 d_2 d_3 = \frac{2S_1}{a}\frac{2S_2}{b}\frac{2S_3}{c}.$$

Но

$$S_1 S_2 S_3 \leqslant \left(\frac{S_1 + S_2 + S_3}{3}\right)^3 = \left(\frac{S}{3}\right)^3,$$

где S — площадь треугольника ABC, причем равенство достигается только при $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{S}{3}$. Последние равенства означают, что D — точка пересечения медиан, и в этом случае

$$d_i = \frac{h_i}{3} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Осталось применить к числам h_1^4, h_2^4, h_3^4 неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

5. См. решение задачи 5, Финал, 8 класс, высшая лига.

6. См. решение задачи 6, Финал, 8 класс, высшая лига.

7. Решение. Если дан равнобедренный треугольник с боковой стороной a, то нарисуем квадрат со стороной a и разобьем его диагональю. Пусть стороны данного треугольника $a < b < c$. Разобьем для начала квадрат $PQRS$ со стороной c на две половинки диагональю PR (см. рис. 40).

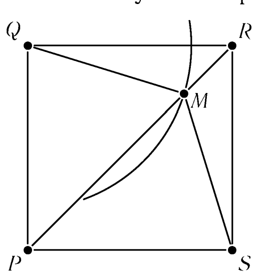


Рис. 40

Поскольку треугольник остроугольный, то $c^2 < a^2 + b^2 < 2b^2$, то есть $\frac{c}{\sqrt{2}} < b < c$. Значит, центр квадрата лежит внутри окружности радиуса b с центром Q, а вершины P и R — снаружи, то есть окружность пересекает диагональ в некоторой точке M. Треугольники PQM и RQM (а также симметричные им PSM и RSM), очевидно, сходны с данным.

8. См. решение задачи 8, Финал, 8 класс, высшая лига.

2.4. Личная олимпиада

2.4.1. 6–7 классы

1. Ответ: да, смогут.

Решение. Можно поступить так: сначала переправляются два человека и стиральная машина, один человек остается на другой стороне реки, а второй (вместе со стиральной машиной) возвращается за третьим. Затем второй и третий переправляются вместе с машиной.

2. Ответ: в обоих случаях периметр банкетного стола одинаков.

Решение. Предположим, что у нас есть x столов размером $a \times a$. Тогда периметр полученного банкетного стола будет равен a, умноженному на количество свободных сторон квадратных столов.

Пусть банкетный стол имеет форму буквы П. Тогда у квадратных столов, стоящих в конце ножек буквы П, имеется по 3 свободных стороны, а у остальных — по 2 (у угловых — это две соседние стороны, а у прочих — две противоположные). Следовательно, периметр банкетного стола равен $2 \cdot 3a + (x-2) \cdot 2a = 2xa + 2a$.

Пусть теперь банкетный стол имеет форму буквы Т. Тогда три квадратных стола (на концах перекладины и ножки) имеют по 3 свободных стороны. Стол на пересечении перекладины и ножки имеет 1 свободную сторону, а остальные — по 2. Значит, периметр банкетного стола равен $3 \cdot 3a + a + (x-4) \cdot 2a = 2xa + 2a$, как и в первом случае.

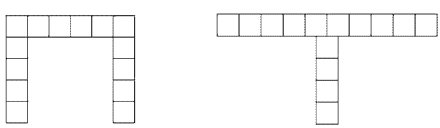


Рис. 41

Заметим, что и в случае буквы П, и в случае буквы Т оказалось, что периметр зависит от количества столов и не зависит от соотношения между высотой и шириной буквы.

3. Ответ: Слоненок исполнил 4 номера.

Решение. Рассмотрим те номера, в которых не принимал участия Удав. Поскольку из трех зверей можно составить три различных коллектива из двух участников и ровно один — из трех, то без Удава исполнялись три песни и один танец (как Слоненок, так и Мартышка приняли участие в трех из них).

Рассмотрим номера с участием Удава. Так как среди них было два танца, то хотя бы в одном из них принимал участие Слоненок. С другой стороны, в обоих танцах он участвовать не мог, так как в этом случае Мартышка также могла участвовать не более чем в двух номерах. По той же причине Слоненок не мог петь с Удавом. Следовательно, Слоненок исполнил 4 номера.

4. Ответ: одно, два или три числа.

Решение. Приведем пример трех таких чисел: $1\ldots1$ — делится на 1; $1\ldots12$ — делится на 2; $1\ldots13$ — делится на 3. Докажем, что не существует четырех подряд идущих кошачьих чисел.

Заметим, что среди любых четырех подряд идущих чисел есть два четных, одно из которых делится на 4, а другое — нет. Рассмотрим то из них, которое на четыре не делится (среди четырех подряд идущих кошачьих чисел). Докажем, что произведение его цифр делится на 4.

Если последняя цифра этого числа 4 или 8, то все доказано. Последней цифры 0 в кошачьем числе быть не может. Рассмотрим случай, когда последняя цифра 2 или 6. Тогда предпоследняя цифра этого числа — четная. Действительно, число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, составленное из двух его последних цифр, делится на 4. Поэтому, перебрав все двузначные числа, оканчивающиеся на 2 или 6 и не делящиеся на 4, получим требуемое.

Таким образом, произведение цифр рассматриваемого кошачьего числа делится на 4. Значит, само число делится на 4. Пришли к противоречию, поэтому всего существует не более трех подряд идущих кошачьих чисел.

5. Ответ: внутренние точки отрезка C_1C_2, где C_1 и C_2 — точки, симметричные C относительно биссектрис углов A и B соответственно (см. рис. 42).

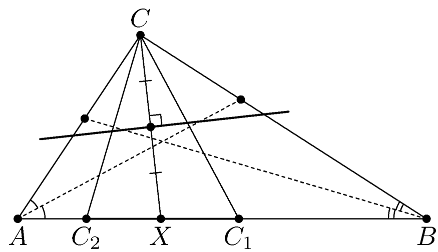


Рис. 42

Решение. Пусть точки C_1 и C_2 симметричны точке C относительно биссектрис углов A и B соответственно. Поскольку сторона AB — наибольшая, эти точки лежат на стороне AB, а не на ее продолжении. При этом C_2 ближе к A, а C_1 ближе к B (в силу неравенства треугольника). Возьмем любую точку X, лежащую внутри отрезка C_1C_2. Покажем, что серединный перпендикуляр к отрезку CX пересекает стороны AC и BC. Действительно, $AC = AC_1$ и $AC_1 > AX$. Очевидно, что серединный перпендикуляр к любой из сторон треугольника пересекает наибольшую из двух оставшихся, а значит, этот серединный перпендикуляр пересечет сторону AC. Аналогичное рассуждение можно провести для стороны BC.

Значит, если мы согнем треугольник по серединному перпендикуляру к отрезку CX, то получим четырехугольник. Таким же образом можно показать, что для любой точки X, лежащей на AC_2, серединный перпендикуляр к XC пересекает сторону AB (см. рис. 43). Обозначим эту точку пересечения через K, а точку пе-

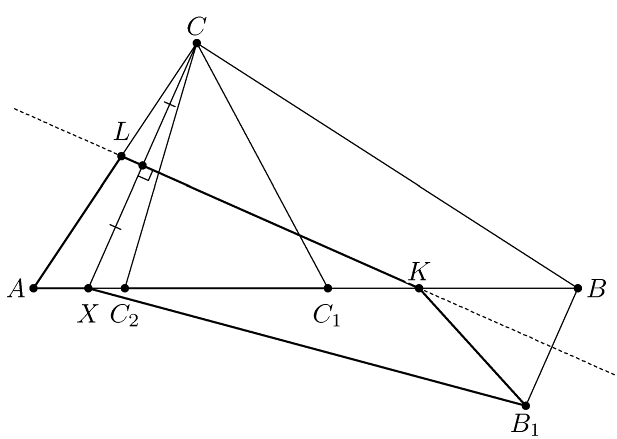


Рис. 43

ресечения с AC через L. Пусть B_1 — точка, симметричная B относительно KL, тогда после сгиба по прямой KL треугольник перейдет в пятиугольник $ALKB_1X$, а значит, точка X не удовлетворяет условию. Аналогично для любой точки, лежащей на отрезке C_1B. Следовательно, искомое множество составляют все внутренние точки отрезка C_1C_2.

6. Ответ: да, существует.

Решение. Рассмотрим магический квадрат, приведенный в условии задачи. Поделим каждое из чисел этой таблицы на произведение всех чисел таблицы. Тогда в клеточках таблицы получим числа

$$\frac{8}{8\cdot1\cdot6\cdot3\cdot5\cdot7\cdot4\cdot9\cdot2}=\frac{1}{1\cdot6\cdot3\cdot5\cdot7\cdot4\cdot9\cdot2}=\frac{1}{45360},$$
$$\frac{1}{8\cdot1\cdot6\cdot3\cdot5\cdot7\cdot4\cdot9\cdot2}=\frac{1}{362880},$$
$$\frac{6}{8\cdot1\cdot6\cdot3\cdot5\cdot7\cdot4\cdot9\cdot2}=\frac{1}{8\cdot1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot4\cdot9\cdot2}=\frac{1}{60480},$$

и так далее, то есть числа вида $\frac{1}{n}$. Заметим, что суммы этих дробей отличаются от сумм соответствующих им первоначальных чисел ровно в $8\cdot1\cdot6\cdot3\cdot5\cdot7\cdot4\cdot9\cdot2=362880$ раз, поэтому, если первоначально суммы по столбцам, строкам и диагоналям были равны между собой, то новые суммы тоже будут равны между собой, то есть мы получили магический квадрат, удовлетворяющий условию задачи.

Отметим, что можно делить все числа исходного квадрата не только на их произведение, а на любое общее кратное, в частности, наименьшее.

7. Ответ: у второго 20, у третьего 30.

Решение. Пусть x, y, z — числа, написанные на лбу первого, второго и третьего логика, соответственно.

Вначале с точки зрения первого логика возможны варианты $x=y+z$ и $x=|y-z|$. Поэтому первый логик сможет догадаться, какое у него число, только если $y=z$. Значит, после первого высказывания все знают, что $y\neq z$.

Теперь с точки зрения второго логика возможны такие варианты: $y = x + z$ и $y = |x - z|$, причем $y \neq z$. Поэтому второй логик сможет догадаться, какое у него число, только если $x = z$ или $x = 2z$. Значит, после второго высказывания все знают, что $x \neq z$ и $x \neq 2z$.

Тогда с точки зрения третьего логика возможны такие варианты: $z = x + y$ и $z = |x - y|$, причем $z \notin \{y, x, x/2\}$. Поэтому третий логик сможет догадаться, какое у него число, только если $x \in \{y,\ 2y,\ \frac{y}{2},\ \frac{2}{3}y\}$. Значит, после третьего высказывания все знают, что $x \notin \{y,\ 2y,\ \frac{y}{2},\ \frac{2}{3}y\}$.

Теперь с точки зрения первого логика возможны варианты $x = y+z$ и $x = |y-z|$. При этом известно, что $x \notin \{y, 2y, \frac{y}{2}, \frac{2}{3}y, z, 2z\}$ и $y \neq z$. Поэтому первый логик сможет догадаться, какое у него число, только если $y + z$ или $|y - z|$ равно одному из чисел y, $2y$, $\frac{y}{2}$, $\frac{2}{3}y$, z, $2z$ и $y \neq z$. Это возможно, только если $y - z$ равно одному из чисел $\frac{y}{2}$, $\frac{2}{3}y$, z, $2z$, $-y$, $-2y$, $-\frac{y}{2}$, $-\frac{2}{3}y$. В этих случаях x равно $y + z$ и равно $\frac{3}{2}y$, $\frac{4}{3}y$, $3z$, $4z$, $3y$, $4y$, $\frac{5}{2}y$, $\frac{8}{3}y$ соответственно. Поскольку 50 не делится ни на 3, ни на 4, то имеет место случай $x = \frac{5}{2}y$. Тогда $y = 20$, $z = 30$.

2.4.2. 8–9 классы

1. Ответ: x — корень из натурального числа.

Решение. Поскольку $\{x\} = x - [x]$, то

$$\{x\}(x + [x]) = (x - [x])(x + [x]) = x^2 - [x]^2.$$

Полученное число должно быть целым, кроме того $[x]^2$ — также целое число. Следовательно, x^2 — целое число, откуда следует, что x — корень из целого числа. Ясно, что для таких x условие задачи выполняется.

2. Ответ: $p = 3$, $q = 2$.

Решение. Числа p^2+q и p^2-q одинаковой четности. Поскольку четное простое число единственно, они должны быть оба нечетны. Значит, числа p и q — разной четности. Поэтому одно из них равно двум. Если $p = 2$, то числа $4 - q$ и q должны быть одновременно простыми, что невозможно. Значит, $q = 2$. Заметим, что числа

$p^2 - 2$, p^2 и $p^2 + 2$ дают разные остатки при делении на 3. Значит, одно из этих чисел кратно трем. Если p^2 делится на 3, то $p = 3$, поскольку p простое. Поэтому $p^2 - q = 7$ и $p^2 + q = 11$, что удовлетворяет условию задачи. Если же p^2 не делится на 3, то одно из двух простых чисел $p^2 - 2$ или $p^2 + 2$ должно быть равно трем. Тогда либо $p^2 = 5$, либо $p^2 = 1$, что противоречит условию задачи.

3. Решение. Поскольку треугольники BC_1A_1 и CB_1A_1 — равнобедренные, то $\angle C_1A_1B_1 = \angle C_1AB_1$. Пусть H — точка пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$ (см. рис. 44).

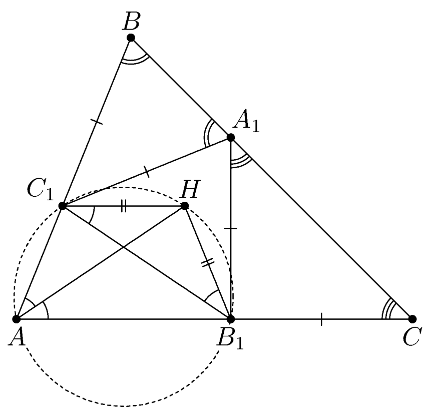


Рис. 44

Тогда $\angle C_1HB_1 = 180^\circ - \angle C_1A_1B_1 = 180^\circ - \angle C_1AB_1$. Следовательно, четырехугольник C_1AB_1H — вписанный. Поскольку треугольник $A_1B_1C_1$ — равнобедренный, то $C_1H = B_1H$, то есть $\angle HAB_1 = \angle HC_1B_1 = \angle HB_1C_1 = \angle C_1AH$, следовательно, AH — биссектриса угла CAB.

4. Ответ: нет, нельзя.

Решение. Предположим, что нам удалось расположить данные числа указанным образом. Найдем сумму номеров позиций этих чисел двумя способами. С одной стороны, она равна

$$1 + 2 + \dots + 4012 = \frac{4013 \cdot 4012}{2} = 2006 \cdot 4013$$

и является четным числом. С другой стороны, мы можем рассмотреть пару одинаковых чисел x и x. Если номер позиции первого числа x равен n, то номер позиции второго равен $n+x$, следовательно, сумма номеров обеих позиций равна $2n+x$. Значит, сумма номеров позиций всех чисел равна $2A + (1+2+\cdots+2006) = 2A + 2007\cdot 1003$ и является нечетным числом. Пришли к противоречию.

5. Решение. Запишем на другой доске числа, обратные данным. При замене пары x и y на число $a = \dfrac{xy}{x+y}$ на исходной доске, стираем $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{y}$ на второй доске и пишем вместо них $\dfrac{1}{a}$. Поскольку $\dfrac{1}{a} = \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, при выполнении такой операции два числа на второй доске заменяются на их сумму. Поэтому после девяти операций на второй доске окажется записана сумма обратных величин, а на исходной — число, обратное к этой сумме. В частности, для данных в задаче чисел получим, что оставшееся число $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^9}} = \dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2^9}} = \dfrac{2^9}{2^{10}-1} = \dfrac{512}{1023}$.

6. Решение. Покажем, что выигрывает Петя. Рассмотрим игру по тем же правилам, но когда изначально в куче лежит $2006!-1$ камень. Мы не знаем, выигрывает ли в этой ситуации первый или второй игрок, поэтому изучим оба случая. *Заметим, что в конечной игре без ничьих у одного из игроков обязательно есть выигрышная стратегия.*

Первый случай: в игре $2006!-1$ *выигрывает второй.* Тогда в нашей игре Петя первым ходом должен взять один камень и свести игру к ситуации $2006!-1$, которая для него выигрышна, поскольку в ней он оказываетя вторым.

Второй случай: в игре $2006!-1$ *выигрывает первый.* Пусть первым ходом в этой игре он должен взять x камней.

Тогда по условию задачи $x \leqslant \dfrac{2006!-1}{2006} = 2005! - \dfrac{1}{2006}$, откуда $x+1 \leqslant 2005! + \dfrac{2005}{2006}$. Поскольку x — натуральное число, то

$x + 1 \leqslant 2005! = \dfrac{2006!}{2006}$. Это значит, что в игре 2006! Петя имеет право взять $x+1$ камень. Тогда он попадет в ситуацию после выигрышного хода первого игрока в игре $2006! - 1$. Действуя далее как этот игрок, он выиграет.

7. Ответ: при любых N.

Решение. На рис. 45 приведен пример для $N = 3$.

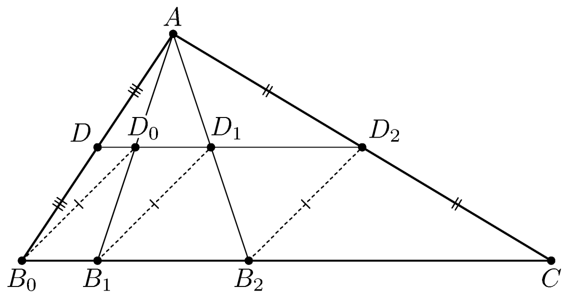


Рис. 45

Треугольник AB_0C разбит на треугольники AB_0B_1, AB_1B_2 и AB_2C такие, что $B_0B_1 : B_1B_2 : B_2C = 1 : 2 : 4$. Точки D_0 и D_1 лежат на пересечении средней линии DD_2 с отрезками AB_1 и AB_2, поэтому B_0D_0, B_1D_1 и B_2D_2 — медианы треугольников разбиения. Средняя линия параллельна основанию и вдвое меньше его. Значит, она разбивается в том же отношении $1 : 2 : 4$, $D_0D_1 = B_0B_1$ и $D_1D_2 = B_1B_2$. Следовательно, $B_0D_0D_1B_1$ и $B_1D_1D_2B_2$ — параллелограммы, и потому все медианы параллельны и равны.

В общем случае точки B_1, B_2, $\ldots$, B_{N-1} делят сторону B_0C в отношении $1 : 2 : 2^2 : \cdots : 2^{N-1}$, остальные рассуждения аналогичны.

3. Приложение

Призеры награждены дипломами и призами, предоставленными журналом *Квант*, а также Фондом математического образования и просвещения. Остальные команды получили дипломы за участие. Подробные итоги турнира представлены на сайте www.lmsh.ru.

3.1. Призеры турнира математических боев

7 класс

Гимназия 1543, 7 Б, Москва, рук. М. М. Букина
Гимназия 1543, 7 А, Москва, рук. Б. П. Гейдман
«Квантик», Москва, рук. И. А. Николаева
ФМШ 2007, 7 кл., Москва, рук. В. В. Ховрина
Школа 936, Москва, рук. Т. П. Зорина

7–8 класс

Школа 17, Москва, рук. Д. А. Коробицын
ФМЛ, 7 кл., Киров, рук. Л. А. Смирнова
«Большая перемена», 7 кл., Кострома, рук. Д. А. Калинин
МОУ СОШ N5, Магнитогорск, рук. Н. С. Никифорова, А. В. Устинов
«Эврика», 7 кл., Харьков, рук. Е. Л. Аринкина, А. Л. Берштейн

8 класс, первая лига

МОУ СОШ N5, Магнитогорск, рук. А. В. Христева, А. С. Великих
Гимназия 1543, 8 А, г. Москва, рук. Т. С. Гейдер

8 класс, высшая лига

«Эврика», 8 кл., Харьков, рук. Е. Л. Аринкина
Московский городской дворец детского (юношеского) творчества, рук. С. Е. Дубов
Школа 82, 8 кл., Черноголовка, рук. Л.Н. Головко
Школа 9 им. А. С. Пушкина, Пермь, рук. О. Н. Вязьмина
Гимназия 1543, 8 Б, Москва, рук. А. В. Спивак

9 класс

Гимназия 1543, 9 кл., 9–3, Москва, рук. А. В. Спивак
Гимназия 1543, 9 кл., 9–1, Москва, рук. И. В. Раскина
Гимназия 1543, 9 кл., 9–2, Москва, рук. А. В. Спивак
«Большая перемена», 9 кл., Кострома, рук. Д. А. Калинин

3.2. Призеры личной олимпиады

6 класс

Кадец Борис — Харьков, ХУВК 45 «Академическая гимназия»
Матвеевский Дмитрий — Харьков, ХФМЛ 27 (5 класс)
Лисичкин Сергей — Харьков, гимназия 47
Коротов Денис — Москва, школа 936

7 класс

Ивлев Федор — Москва, гимназия 1543
Деревицкий Иван — Магнитогорск, МОУ СОШ N5
Малых Софья — Киров, физ.-мат. лицей
Николаев Семен — Москва, школа 1189 (кружок «Квантик»)
Садовников Сергей — Волгореченск, школа 2
Южанин Денис — Киров, физ.-мат. лицей
Артемьева Галина — Москва, гимназия 1543
Баева Светлана — Киров, физ.-мат. лицей
Голицын Владимир — Харьков, ХФМЛ 27
Дудкин Александр — Харьков, ХФМЛ 27
Криволапов Владислав — Иваново, лицей 67
Макаров Николай — Москва, школа 179
Ноздрин Михаил — Магнитогорск, МОУ СОШ N5
Панфилов Данила — Москва, ФМШ 2007
Пожарский Богдан — Харьков, ХФМЛ 27
Редега Владимир — Москва, гимназия 1543
Тарасов Артем — Киров, физ.-мат. лицей
Троицкий Алексей — Москва, школа 1189

8 класс

Соболев Евгений — Харьков, гимназия 47
Маянцев Кирилл — Кострома, Волгореченск, школа 3
Бочкарев Михаил — Пермь, МОУ СОШ N9 им. А. С. Пушкина
Ефремов Дмитрий — Магнитогорск, МОУ СОШ N5
Таранникова Екатерина — Москва, ФМШ 2007
Турбина Наталья — Ангарск Иркутской обл., школа 10
Паламарчук Игорь — Москва, лицей «Вторая школа»
Акопян Эмма — Москва, гимназия 1543
Соболев Дмитрий — Харьков, гимназия 47
Смирнова Алена — Москва, лицей «Вторая школа»
Гавричев Егор — Москва, лицей «Вторая школа»

9 класс

Андреев Михаил — Москва, школа 57
Кисловская Анна — Кострома, лицей 32
Ромаскевич Елена — Москва, гимназия 1543
Бакаев Егор — Кострома, лицей 32
Погребнов Алексей — Москва, гимназия 1543
Марченко Евгений — Москва, гимназия 1543

Оглавление

Редакторы *Т Караваева*, *Б Френкин*, *А Хачатурян*, *А Чеботарев*
Обложка *М Вельтищев*

Издательство Московского Центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер , 11

Лицензия ИД № 01335 от 24 03 2000 г Подписано к печати 01 03 2007 г
Формат 60 × 90/16 Печать офсетная Печ л 7,5 Тираж 1000 экз Заказ №

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы»

Департамент образования Администрации Ярославской области
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Центр образования школьников «Олимп»

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ БОИ

МАТЕРИАЛЫ XIV ОБЛАСТНОГО ТУРНИРА

Юниорский турнир

Методическое пособие

Ярославль
2008

Книга подготовлена по материалам XIV турнира математических боев, проводившегося в Ярославской области в 2007–2008 учебном году.

Приведены правила математических боев и условия всех задач, предлагавшихся в рамках основного и юниорского турниров. Все задачи снабжены указаниями к решению, которые специально отделены от условий, чтобы читатель мог самостоятельно порешать понравившиеся ему задачи.

Книга предназначена для школьников 7–9 класса, учителей математики и руководителей математических кружков и факультативов. Она может быть использована при подготовке к любым математическим соревнованиям.

Содержание

Введение

Ежегодно в течение учебного года в Ярославской области проходит областной турнир математических боев. В 2007/08 году это мероприятие проводилось в четырнадцатый раз и вновь собрало десятки команд и сотни школьников.

Математический бой (матбой) — командное соревнование школьников. Схема матбоя достаточно проста: две команды получают одинаковые комплекты задач, решают их изолированно друг от друга и от посторонних, после чего в некотором порядке обсуждают решения. В ходе боя игроки выступают в роли докладчиков, излагающих решения задач, а также оппонентов, задачей которых является аргументированная критика предложенных решений с поиском в них ошибок. Таким образом, для достижения успеха командам требуется не только справиться с достаточно сложными заданиями (как, например, на математической олимпиаде), но и грамотно оценить решения соперника, убедительно обосновать корректность своего решения в ходе обсуждения с оппонентом и жюри, а также оперативно закрыть пробелы в собственных рассуждениях, если таковые обнаружились. При этом происходит непосредственное общение игроков команд друг с другом, что отличает математический бой от многих других командных предметных соревнований, где участники зачастую взаимодействуют только с жюри.

В этом году областной турнир математических боев прошел по новой схеме. От использовавшейся предыдущие тринадцать сезонов олимпийской системы, когда проигравшая команда, порой так и не успев в должной степени оценить саму игру, выбывала из турнира, было решено отказаться. По итогам квалификации, проведенной в форме математической регаты, команды были разбиты в соответствии со своим уровнем на несколько лиг, каждая из которых разделена на две группы (по 3-4 команды). Каждая команда провела бои со всеми командами в своей подгруппе, затем победители групп играли финал за титул победителя в своей лиге (победитель первой лиги объявлялся победителем турнира).

С учетом того обстоятельства, что участвующие в областном турнире команды ожидаемо предпочитают включать в состав старшеклассников, для задействования в турнире более младших школьников в 2007/08 учебном году в четвертый раз был проведен юниорский турнир математических боев, в котором принимали участие команды, составленные из школьников не старше 9 класса. Юниорский турнир в этот раз также проходил по описанной выше схеме.

Подобная схема используется сейчас на крупных турнирах математических боев всероссийского уровня (в частности, на традиционном Уральском турнире юных математиков и Кубке памяти А.Н. Колмогорова), однако в рамках областного турнира ранее не применялась. Безусловно, данная система розыгрыша требует от организаторов проведения большего количества математических боев, однако ее применение в областном турнире дает ощутимые преимущества:

- Разбиение команд на лиги и группы с помощью квалификации предполагает, что команде предстоят игры с сопоставимыми по силе соперниками. Это делает проводимые математические бои более зрелищными, увлекательными, непредсказуемыми, в отличие от встреч значительно отличающихся по силе команд, когда однообразный бой с подавляющим преимуществом одного из соперников не приносит удовольствия более слабой команде и пользы — более сильной. Ранее подобного эффекта приходилось добиваться с помощью сложной системы «посева» (более сильные команды изначально помещались в более высокую стадию турнира, проводимого на выбывание), что приводило к увеличению количества стадий турнира и способствовало значительному затягиванию его во времени.

- Круговой принцип проведения турнира в группах дает каждой команде возможность принять участие в нескольких боях. В предыдущих розыгрышах областного турнира проигравшая в первой же игре команда автоматически выбывала из турнира и, таким образом, лишалась возможности попробовать свои силы во встречах с другими соперниками. Соответственно, в турнире 2007/08 года каждой команде вне зависимости от результата предстояло поучаствовать в нескольких математических боях, совершенствуя свое мастерство, знание правил, развивая навыки ведения научной дискуссии.

- Турнир на выбывание не позволял сравнить между собой команды, закончившие борьбу на ранних стадиях турнира. Большая часть команд участвовала в турнире без надежды на общую победу или призовое место, что не лучшим образом сказывалось и на спортивной составляющей турнира. В то же время в рамках XIV турнира команды, разбитые на лиги, имели более реальные возможности бороться за высокие места, пусть даже и лишь в своей лиге или группе. Наиболее сильные команды, попавшие в первую лигу, как и ранее разыгрывали звание победителя областного турнира.

В основном турнире в этом году принимали участие ярославские гимназии №1, №2 и №3, лицей №86, Провинциального колледжа, школы №1, №2, №36, №43 и №49, команды лицея №2 и гимназии №8 г. Рыбинска, физико-математического лицея г. Углича, лицея №1 г. Тутаева, ростовской гимназии им.Кекина, сборные г. Переславля-Залесского, Кузнечихинской школы Ярославского района, две команды традиционно выставила ярославская школа №33. В юниорском турнире боролись между собой команды гимназии №2, школы №2, №4, №33, №36, №42, №43, №49, №52, №58 и №76, лицея №86 г. Ярославля, команды лицея №2 и гимназии №8 г. Рыбинска, гимназия им.Кекина г.Ростова, сборные г. Переславля-Залесского и ЦОШ «Олимп». Для некоторых команд это был первый опыт участия в областном турнире. Так, впервые приняли участие школы №2 и №4, а также Кузнечихинская школа, игроки которой ранее входили в сборную Ярославского района.

Задачи на математический бой подбираются в соответствие с уровнем участников: на математический бой в более сильной лиге обычно предлагаются и более сложные задачи. В каждом бою команды получают по 8 разнообразных по тематике задач различной сложности, при этом встречаются как такие задачи, при решении которых не испытывает проблем ни одна из принимающих участие в бою команд, так и достаточно сложные задачи, справиться с которыми бывает весьма тяжело (и решение таких задач значительно увеличивает шансы команды на победу).

Как уже отмечалось выше, на математическом бою мало просто решить какое-то количество задач — нужно также получить возможность их рассказать и грамотно этой возможностью воспользоваться. По этой причине порой малое количество набранных командой баллов вовсе еще не означает, что команда ничего не сделала, — не исключен вариант, что право на то, чтобы изложить свои результаты у доски, предоставлялось ей не так уж и часто (хотя нельзя отрицать, что причиной такой ситуации зачастую являются умелые тактические действия команды-соперника). Следует понимать, что на математическом бою основным соперником является не другая команда и не жюри, а предложенные задачи, и сам процесс решения зачастую непростых заданий приносит безусловную пользу. Как из побед, так и из поражений можно выделить что-то полезное для себя, предложенная на матбою задача может оказаться толчком к более интенсивной работе над собой, а с опытом участия в математических боях придет и тактическое мастерство, и уверенность, и результат. Поэтому, строго говоря, проигравших в областном турнире матбоев не бывает.

Прошедший областной турнир подарил нам много интересных боев. В финале в девятый раз за всю историю турнира вновь встретились команды школы №33 и рыбинского лицея №2. В этом турнире, как и год назад, упорный бой закончился победой первой команды школы №33, которая и была объявлена победителем турнира. Рыбинские школьники оказались на втором месте, третье место за лучшие результаты в групповом этапе присуждено второй команде школы №33.

В финальном бою второй лиги команды школы №58 и угличского физико-математического лицея, выигравшие все бои в своих группах встретились между собой. Победа, а вместе с ней и звание победителя второй лиги досталась команде ярославской школы №58. Угличская команда заняла второе место в лиге, третье место поделили команды школы №1 и ростовской гимназии. В третьей лиге победителем стала вернувшаяся в областной турнир команда ярославской гимназии №1, уверенно обыгравшая соперников в группе и одолевшая в финальном бою команду школы №49, оставшуюся лишь второй. Третье место разделили рыбинская гимназия №8 и ярославская школа №43.

Не менее интересные бои были и в юниорском турнире. Отдавшая всего 10 баллов в трех боях соперникам по группе команда школы №58 заняла лишь второе место, практически не оказав в финальном бою сопротивления мощной команде школы №33, вновь завоевавшей звание победителя юниорского турнира и в третий раз подряд оформившая своеобразный «дубль» (победа и в основном, и в юниорском турнире). Третье место поделили команда лицея №86 и сборная команда г.Переславля-Залесского.

Весьма упорной оказалась борьба и во второй юниорской лиге. С трудом вышедшая в финал команда школы №36 оказалась сильнее соперников из ФМЛ г.Углича и заняла первое место. Угличане остались на втором месте, а третье место поделили одержавшие по одной победе в своих группах команды школы №42 и гимназии №2. Наконец, в третьей лиге более высокий результат квалификации позволил школе №43 стать победителем, опередив команды школы №49 и школы №76. занявшие второе и третье место соответственно.

Сборник содержит материалы XIV ярославского областного турнира матбоев. Приводятся условия всех предложенных задач и краткие указания к их решению. В подборе задач и судействе принимали участие:

- Богомолов Юрий Викторович, старший преподаватель кафедры дискретного анализа ЯрГУ им. П.Г. Демидова,

- Кащенко Илья Сергеевич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического моделирования ЯрГУ им. П.Г. Демидова,

- Преображенский Игорь Евгеньевич, аспирант математического факультета ЯрГУ им. П.Г. Демидова,
- Ахременко Александра Андреевна, студентка 1 курса математического факультета ЯрГУ им. П.Г. Демидова,
- Быкова Надежда Дмитриевна, студентка 1 курса математического факультета ЯрГУ им. П.Г. Демидова,
- Дунаева Ольга Александровна, студентка 5 курса факультета ИВТ ЯрГУ им. П.Г. Демидова,
- Янишевский Виталий Валериевич, выпускник аспирантуры математического факультета ЯрГУ им. П.Г. Демидова.

Правила математического боя

Общие положения. Математический бой — это соревнование двух команд в решении математических задач. Он состоит из двух частей. Сначала команды получают условия задач и определенное время на их решение (подготовительная часть). При решении задач (во время подготовительной части матбоя) команда может использовать любую заранее принесенную с собой литературу и непрограммируемые вычислительные устройства, но не имеет права общаться ни с кем, кроме жюри. По истечении этого времени начинается собственно бой (зрелищная часть), когда команды в соответствии с правилами рассказывают друг другу решения задач. Если одна команда рассказывает решение, то другая оппонирует его, т.е. ищет в нем ошибки (недостатки), и, если решения нет, то, возможно, приводит свое. При этом выступления оппонента и докладчика оцениваются жюри в баллах (за решение и за оппонирование). Если команды, обсудив предложенное решение, все-таки до конца задачу не решили или не обнаружили допущенные ошибки, то часть баллов (или даже все баллы) может забрать себе жюри боя. Если по окончании боя результаты команд отличаются не более чем на 3 балла, то считается, что бой закончился вничью. В противном случае побеждает команда, которая по окончании боя набирает больше баллов. Если же по условиям боя он не может закончиться вничью, то жюри до боя объявляет это командам и оглашает процедуру определения победителя.

Капитаны команд имеют право попросить жюри о предоставлении перерыва в ходе боя на 5–10 минут (примерно через каждые полтора часа). Перерыв может предоставляться только между обсуждением двух различных задач (между раундами). При этом команда, которая должна сделать вызов, делает его в письменной форме (без оглашения) непосредственно перед началом перерыва и сдает жюри, которое оглашает этот вызов сразу после окончания перерыва.

Вызовы. Бой состоит из нескольких раундов. В начале каждого раунда (если не происходит отказ от вызова — см. ниже пункт «Окончание боя») одна из команд вызывает другую на одну из задач, решения которых еще не рассказывались (например: «Мы вызываем команду соперников на задачу номер 8»). После этого вызванная команда сообщает, принимает ли она вызов, т.е. согласна ли рассказывать решение задачи, на которую была вызвана (ответ можно обдумывать, но не более 1 минуты). Если да, то она выставляет докладчика, который должен рассказать решение, а вызвавшая команда выставляет оппонента, обязанность которого — искать в решении ошибки. Если нет, то докладчика обязана выставить команда, которая вызывала, а отказавшаяся отвечать команда выставляет оппонента. Команда, желающая сохранить выходы к доске, может отказаться выставлять оппонента. Тогда она в этом раунде не участвует (и изменить своего решения уже не может).

Ход раунда. Доклад. В начале раунда докладчик рассказывает решение. Доклад должен содержать ответы на все поставленные в задаче вопросы и доказательство правильности и полноты полученных ответов. В частности, докладчик обязан доказать каждое сформулированное им промежуточное утверждение либо сослаться на него, как на общеизвестное. Докладчик должен стремиться к ясности изложения, в частности, он обязан повторить по просьбе оппонента или жюри любую часть своего доклада. Время на доклад ограничивается 10 минутами, после чего жюри решает, разрешать ли докладчику рассказывать дальше.

Докладчик может иметь бумагу с чертежами и (с отдельного разрешения жюри) вычислениями. Но он не имеет права брать с собой текст решения. В любом случае конспекты предъявляются жюри и допускаются к использованию во время доклада только с его разрешения. Докладчик имеет право:
- до начала выступления вынести на доску всю необходимую начальную информацию (чертежи, вычисления и т.п.);
- не отвечать на вопросы оппонента, заданные до начала обсуждения;
- просить оппонента уточнить свой вопрос (в частности, докладчик может предложить свою версию вопроса: «Правильно ли я понимаю, что вы спросили о том-то и том-то?»);
- отказаться отвечать на вопрос, сказав, что: (а) он не имеет ответа на этот вопрос; (б) он уже ответил на этот вопрос (объяснив, когда и как); (в) вопрос некорректен или выходит за рамки научной дискуссии по поставленной задаче. В случае несогласия оппонента с основаниями (б) и (в) арбитром выступает жюри.

Докладчик не обязан:
- излагать способ получения ответа, если он может доказать правильность и полноту ответа другим путем;
- сравнивать свой метод решения с другими возможными методами, в том числе с точки зрения краткости, оптимальности, красоты и пригодности для решения других задач.

Докладчик обязан рассказывать решение в вежливой, корректной форме, критикуя действия оппонента, не допускать критики его личности, обращаться к оппоненту только на «Вы».

Оппонирование. Пока доклад не окончен, оппонент может задавать вопросы только с согласия докладчика, но имеет право просить повторения части решения и разрешать докладчику не доказывать какие-либо очевидные с точки зрения оппонента факты. После окончания доклада оппонент имеет право задавать вопросы докладчику. Если в течение минуты оппонент не задал ни одного вопроса, то считается, что у него нет вопросов. Если докладчик в течение минуты не начинает отвечать на вопрос, то считается, что у него нет ответа.

В качестве вопроса оппонент может:
- потребовать у докладчика повторить любую часть доклада;
- попросить уточнения любого из высказываний докладчика, в том числе: (а) попросить дать определение любого термина («Что Вы понимаете под ...»); (б) переформулировать утверждение докладчика своими словами и попросить подтверждения («Правильно ли я понимаю, что Вы утверждаете следующее: ...»);
- попросить докладчика доказать сформулированное тем неочевидное необщеизвестное утверждение (в спорных случаях вопрос об известности или очевидности решает жюри; во всяком случае, известными считаются факты, изучающиеся в общеобразовательной школе);
- после ответа на вопрос выразить удовлетворенность или мотивированную неудовлетворенность ответом.

Если оппонент считает, что докладчик тянет время, придумывая решение у доски, или что существенная часть доклада не является изложением решения обсуждаемой задачи, он имеет право (но не ранее, чем через 10 минут после начала доклада) попросить докладчика предъявить ответ (если таковой в задаче подразумевается) или план дальнейших рассуждений.

Оппонент обязан:
- формулировать свои вопросы в вежливой, корректной форме, обращаться к докладчику только на «Вы»;
- критикуя доклад, не допускать критики докладчика;
- повторять и уточнять свои вопросы по просьбе докладчика или жюри.

По итогам доклада и ответов на вопросы оппонент высказывает свою оценку докладу и обсуждению в одной из следующих форм: (а) признать решение правильным; (б) признать решение (ответ) в основном правильным, но имеющим недостатки и/или пробелы с обязательным их указанием; (в) признать решение (ответ) неправильным с указанием ошибок в обоснованиях ключевых утверждений доклада или контрпримеров к ним (или ответу), или указанием существенных пробелов в обоснованиях или плане решения. Если оппонент согласился с решением, он и его команда в этом раунде больше не участвуют.

Если оппонент имеет контрпример, опровергающий решение докладчика в целом, и этот контрпример сам является решением задачи (такое бывает, например, в случаях, когда вопрос задачи звучит как «Можно ли ...?», «Верно ли, что ...?» и т.п.), то оппонент имеет право заявить: «Я с решением не согласен, у меня есть контрпример», но сам контрпример пока докладчику не предъявлять (хотя жюри имеет право потребовать от оппонента предъявления контрпримера в письменном виде, чтобы убедиться в корректности заявления оппонента). В этом случае, если докладчик не изменит своего решения в течение минуты или после взятого командой перерыва, оппонент получает право предъявить докладчику упомянутый контрпример, причем докладчик и его команда уже не имеют права менять решение или ответ. Аналогично, если решение требует перебора случаев, оппонент имеет право заявить «Я с решением не согласен, рассмотрены не все случаи», не указывая пока докладчику явно, какой именно случай не рассмотрен. Дальнейшие действия докладчика, жюри и оппонента такие же, как в ситуации с контрпримером.

Участие жюри в обсуждении. После окончания диалога докладчика и оппонента жюри задает свои вопросы. При необходимости оно может вмешиваться и раньше.*Выступающие и команда.* Команда (через капитана)

имеет право в любой момент доклада взять полуминутный перерыв для консультации со своим находящимся у доски представителем (докладчиком или оппонентом), при этом соперники тоже могут пользоваться этим временем. Также в любой момент доклада команда может осуществить замену своего представителя у доски ценой минуты (двух полуминутных перерывов). Каждая команда имеет в распоряжении в течение одного боя 6 полуминутных перерывов (см. также ниже пункт «Число выходов к доске»), которые может использовать для консультаций и замен.

Перемена ролей. Некорректный вызов. Порядок вызовов. Если оппонент доказал, что у докладчика нет решения (вопрос о том, доказал ли он это, решает жюри — см. ниже пункт «Начисление баллов») и ранее не произошел отказ от вызова, то возможны два варианта. Если вызов на этот раунд был принят, то оппонент получает право (но не обязан) рассказать свое решение. Если оппонент взялся рассказывать свое решение, то происходит полная перемена ролей: бывший докладчик становится оппонентом и может зарабатывать баллы за оппонирование. Если же вызов на этот раунд не был принят, то говорят, что вызов был некорректным. В этом случае перемены ролей не происходит, а команда, вызывавшая некорректно, должна снова вызывать соперника в следующем раунде. Во всех остальных случаях в следующем раунде вызывает та команда, которая была вызвана в текущем раунде. Принятый вызов всегда считается корректным!

Если же оппонент не доказал, что у докладчика нет решения, но выявил в предложенном решении некоторые конкретные недостатки, то, если ранее не произошел отказ от вызова и вызов на этот раунд был принят, оппонент получает право (но не обязан) устранить все (или некоторые) из этих недостатков («залатать дыры»). Такое же право оппонент получает, если он доказал, что у докладчика нет решения, но отказался рассказывать собственное решение. Если оппонент взялся «залатывать дыры», то происходит частичная перемена ролей: оппонент обязан сформулировать предварительно, что именно он будет делать (например, разбирать такой-то неразобранный докладчиком случай, доказывать такое-то недоказанное докладчиком утверждение или что-либо еще), а бывший докладчик становится оппонентом и может зарабатывать баллы за оппонирование сформулированных утверждений. Обратной перемены ролей ни в каком случае не происходит!

Число выходов к доске. Каждый член команды имеет право выйти к доске в качестве докладчика или оппонента не более двух раз за бой. Команда имеет право не более трех раз за бой заменять докладчика или оппонента, причем каждый раз выход засчитывается как тому, кого заменили, так и тому, кто вышел на замену. Кроме того, при замене время, отведенное команде на перерывы, уменьшается на 1 минуту (эту минуту можно использовать непосредственно перед заменой, а можно и не использовать — в последнем случае команда соперников тоже не имеет права пользоваться ею).

Отказ от вызова. Окончание боя. В любой момент боя команда, которая должна вызывать, может отказаться делать это (обычно это происходит, когда у команды больше нет решенных задач, а делать вызов, который может оказаться некорректным, она не рискует). Тогда другая команда получает право (но не обязана) рассказывать решения оставшихся задач. При этом команда, отказавшаяся делать вызов, может выставлять оппонентов и получать баллы только за оппонирование, но рассказывать решения она уже не имеет права, даже если они у нее и появятся (то есть после отказа от вызова не происходит ни полной, ни частичной перемены ролей).

Бой заканчивается, когда не остается необсужденных задач либо когда одна из команд отказалась от вызова, а другая команда отказалась рассказывать решения оставшихся задач.

Первый вызов. Конкурс капитанов. Кто будет делать первый вызов, определяет команда, победившая в конкурсе капитанов. Он проводится в начале боя. Капитанам предлагается задача. Капитан, первым сообщивший жюри о своем желании отвечать, получает такое право. Если он рассказывает правильное решение, то он победил, а если неправильное — победил его соперник. При этом что понимается под «правильным решением»: просто верный ответ, ответ с объяснением или что-либо еще — жюри при необходимости уточняет перед началом конкурса капитанов.

На решение задачи конкурса капитанов жюри отводит определенное время. Если за это время ни один из капитанов не высказал желания отвечать, жюри может заменить задачу или выявить победителя жребием. Вместо задачи жюри может предложить капитанам сыграть в игру. В этом случае победителем считается тот, кто выигрывает игру.

Возможны и другие схемы проведения конкурса капитанов. Жюри боя заранее определяет способ проведения конкурса капитанов и сообщает о нем командам перед началом боя.

Начисление баллов. Каждая задача оценивается в 12 баллов, которые по итогам раунда распределяются между докладчиком, оппонентом и жюри. Если докладчик рассказал правильное и полное решение, все 12 баллов достаются ему. Если оппонент сумел найти в решении более или менее существенные ошибки, жюри прежде всего решает вопрос о том, удалось ли оппоненту доказать, что докладчик не дал решения задачи. Если это оппоненту не удалось, то он, тем не менее, может получить за оппонирование баллы в зависимости от серьезности указанных недостатков и от того, насколько докладчику (или оппоненту, если произошла частичная перемена ролей) удалось их исправить. Как правило, оппонент получает при этом за нахождение недостатков половину «стоимости» «незалатанных» докладчиком «дыр» в решении (принцип половины), но если докладчик сумел изложить полное решение только после существенных наводящих вопросов оппонента и/или жюри («грязь» в решении), то жюри и за это может отобрать у докладчика баллы (как правило, не более двух) и передать их оппоненту или оставить себе. Если же произошла частичная перемена ролей, то бывший оппонент получает дополнительно баллы за доказательство сформулированных им предварительно утверждений, а бывший докладчик — за их оппонирование (при этом жюри определяет, если это не вытекает из предыдущего, стоимость рассматриваемых утверждений, а распределение баллов происходит так же, как при оппонировании полного решения — с учетом принципа половины и «грязи» в рассуждениях). Остальные баллы распределяются между докладчиком и жюри, и раунд заканчивается. Если же оппонент сумел доказать, что решения у докладчика нет, он получает баллы за оппонирование (с учетом принципа половины) и, если вызов был принят, право с разрешения жюри рассказать свое решение (см. выше пункт «Перемена ролей»). Если при этом происходит полная или частичная перемена ролей, то начисление баллов происходит по схеме, изложенной выше.

Если ошибки или пробелы в докладе указаны самим докладчиком и не устранены его командой, то оппонент получает за них баллы так, как если бы он нашел эти недостатки сам. В частности, если, получив отказ от вызова, капитан вызывающей команды сразу признается, что у его команды нет решения, команда соперников получает 6 баллов за оппонирование (которое в этом случае может состоять из одной фразы: «У Вас нет решения»), а вызов признается некорректным. Докладчик и оппонент в этом случае не назначаются и выходы к доске не засчитываются.

Капитан. Во время боя только капитан может от имени команды обращаться к жюри и соперникам: сообщать о вызове или отказе, просить перерыв и т.д. Он имеет право в любой момент прекратить доклад или оппонирование представителя своей команды. Если капитан у доски, он оставляет за себя заместителя, исполняющего в это время обязанности капитана. Имена капитана и заместителя сообщаются жюри до начала решения задач.

Во время решения задач главная обязанность капитана — координировать действия членов команды так, чтобы имеющимися силами решить как можно больше задач. Для этого капитан с учетом пожеланий членов команды распределяет между ними задачи для решения, следит, чтобы каждая задача кем-то решалась, организует проверку найденных решений. Капитан заранее выясняет, кто будет докладчиком или оппонентом по той или иной задаче, определяет тактику команды на предстоящем бое.

Жюри. Жюри является верховным толкователем правил боя. В случаях, не предусмотренных правилами, оно принимает решение по своему усмотрению. Решения жюри являются обязательными для команд.

Во время решения командами задач всякое существенное разъяснение условий задач, данное одной из команд, должно быть в кратчайшее время сообщено жюри всем остальным командам. Жюри может снять вопрос оппонента (например, если он не по существу), прекратить доклад или оппонирование, если они затягиваются. Если жюри не может быстро разобраться в решении, оно может выделить своего представителя, который продолжит обсуждение задачи совместно с докладчиком и оппонентом в другом помещении. При этом бой продолжается по другим задачам, а очки по этой задаче начисляются позже.

Жюри ведет протокол боя. Если одна из команд не согласна с принятым жюри решением по задаче, она имеет право немедленно потребовать перерыв на несколько минут для разбора ситуации с участием Председателя жюри. После начала следующего раунда счет предыдущего раунда изменен быть не может.

Жюри следит за порядком. Оно может оштрафовать команду за шум, некорректное поведение, общение со своим представителем, находящимся у доски и прочие нарушения правил математического боя.

Жюри обязано мотивировать свои решения, не вытекающие непосредственно из правил боя.

Условия задач юниорского турнира

Группа Ю1А

Лицей №86 — Школа №33. 24 октября 2007 г.

1. По дороге из пункта А в пункт Б и обратно ходят пять автобусов. Они идут без остановок с постоянными скоростями, и каждый из них, дойдя до конца маршрута, разворачивается и идет обратно. Однажды Вася, не застав автобуса в пункте А, отправился в пункт Б пешком. При этом он 20 раз встретил автобус, идущий ему навстречу. Сколько раз автобусы обгоняли Васю, если, придя в пункт Б, Вася не застал там ни одного автобуса?

2. В однокруговом чемпионате по матбоям участвовали 16 команд из 16 разных школ. Каждый бой проходил в одной из школ-участниц. Могло ли по окончании чемпионата случиться, что каждая команда сыграла во всех школах, кроме своей?

3. Найдите все пары целых чисел (x, y), для которых $2x^2+y^2 = 2xy+4x$.

4. В треугольнике ABC сторона BC в два раза больше AC, а D — такая точка на стороне BC, что $\angle DAC = \angle ABC$. Прямая AD пересекает биссектрису внешнего угла при вершине C в точке M. Докажите, что $AM = AB$.

5. Дима покрасил в красный цвет несколько клеток шахматной доски (8×8 клеток), причем сделал это так, что как бы Игорь не вырезал из этой доски квадрат 3×3, в нем обязательно будет ровно одна красная клетка. Сколько клеток мог отметить Дима?

6. Найдутся ли три различных натуральных числа, сумма квадратов любых двух из которых, увеличенная на 1, делится на квадрат третьего?

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с прямым углом C на стороне CD взята такая точка P, что $\angle APD = \angle BPC$ и $\angle BAP = \angle ABC$. Докажите, что $BC = (AP + BP)/2$.

8. Квадратный материк разделен на 19 стран в форме выпуклых многоугольников, причем нет точек, в которых сходились бы границы четырех или больше стран. Из всяких же трех границ, сходящихся в одной

точке, одна закрыта, а две открыты для проезда. Докажите, что невозможно объехать все эти страны, побывав в каждой по одному разу и вернуться в исходную страну.

Бой завершился победой **Школы №33** со счетом *21–63*.

«Олимп» — Школа №33. 5 февраля 2008 г.

9. Найдите наименьшее натуральное n такое, что при всех целых $m > n$ найдутся целые положительные x и y, для которых имеет место равенство $17x + 23y = m$.

10. На единичном отрезке расположено несколько непересекающихся отрезков красного цвета, общая длина которых больше 0,5. Обязательно ли найдутся две красные точки на расстоянии $\frac{1}{99}$?

11. Угол A в треугольнике ABC равен $75°$. Окружность, проходящая через A и B и касающаяся BC, пересекает медиану к стороне BC (или ее продолжение) в точке M, отличной от A. Найдите угол BMC.

12. В квадрате 3×3 расставлены числа так, что суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и на каждой большой диагонали равны 0. Известно, что сумма квадратов чисел верхней строки равна n. Чему может быть равна сумма квадратов чисел нижней строки?

13. Известно, что в любом пятиугольнике можно выбрать три диагонали, из которых можно составить треугольник. Найдется ли пятиугольник в котором такие диагонали можно выбрать единственным способом?

14. Островное государство расположено на 2008 островах, соединенных мостами, причем некоторые острова соединены мостом и с материком. Известно, что с каждого острова можно проехать на каждый (возможно, через другие острова). В целях повышения безопасности движения на всех мостах было введено одностороннее движение. Оказалось, что с каждого острова можно уехать только по одному мосту, и что хотя бы с одного из островов можно уехать на материк. Докажите, что с каждого острова можно доехать до материка, причем по единственному маршруту.

15. Круг разделен на 6 секторов и в них по часовой стрелке расставлены числа: 1, 0, 1, 0, 0, 0. Разрешается прибавить по единице к числам в любых двух соседних секторах. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы все числа в секторах были одинаковыми?

16. Из шоколадки 9×12 Петя выкусывает квадратики 1×1, а Вася — уголки, состоящие из пяти квадратиков 1×1. Первым ходит Петя, ходы делаются поочередно. Когда Вася не может сделать ход, Петя съедает всё оставшееся. Докажите, что Вася может играть так, чтобы съесть хотя бы на 12 квадратиков больше, чем Петя.

Бой завершился победой **Школы №33** со счетом *0–83*.

Лицей №86 — «Олимп». 26 апреля 2008 года.

17. Сколько корней имеет уравнение:

$$\sqrt{2008 - 2009x} + \sqrt{2010x - 2009} = 1?$$

18. Джон и Мэри живут в небоскребе, на каждом этаже которого 10 квартир. Номер этажа Джона равен номеру квартиры Мэри, а сумма номеров их квартир равна 239. В какой квартире живет Джон?

19. Отрезки AC и BD пересекаются в точке M, причем $AB = CD$ и $\angle ACD = 90^\circ$. Докажите, что $MD \geqslant MA$.

20. Докажите, что $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} + \ldots + \dfrac{1}{98} - \dfrac{1}{99} + \dfrac{1}{100} > \dfrac{1}{5}$.

21. В селе Ивановском живут $n > 100$ человек. Житель села называется общительным, если у него не менее 100 знакомых среди односельчан. Докажите, что в Ивановском найдутся либо два знакомых между собой общительных жителя, либо два незнакомых между собой необщительных жителя.

22. Один из углов трапеции равен 60°. Найдите отношение её оснований, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность и около этой трапеции можно описать окружность.

23. Из квадрата со стороной 5 клеток вырезали одну клетку, после чего его разрезали на 8 одинаковых прямоугольников размером 3×1. Какую клетку изначально вырезали из квадрата?

24. Корни уравнения $x^2 + ax + 1 = b$ — целые, отличные от нуля числа. Докажите, что число $a^2 + b^2$ является составным.

Бой завершился победой **Лицея №86** со счетом *50–33*.

Группа Ю1Б

Школа №52 — Школа №58. 1 декабря 2007 г.

25. В компании из 10 человек произошло 14 попарных ссор. Докажите, что все равно можно составить компанию из трех друзей.

26. Из города в одном направлении выехало три автомобиля: второй — через 10 минут после первого, третий — через 20 минут после второго. Через 30 минут после своего выезда третий автомобиль догнал второй, а еще через 10 минут — первый. Через сколько минут после своего выезда из города второй автомобиль догнал первый?

27. Докажите, что куб наибольшего из трех последовательных натуральных чисел не может быть равен сумме кубов двух других чисел.

28. Докажите, что если p — целое число, большее 1, то $3^p + 1$ не может делиться на 2^p.

29. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, биссектриса CE пересекается с отрезком BD в точке O, причем $EO = DO$ и угол $EOD = 120°$. Найдите угол BAC.

30. N цифр — единицы и двойки — расположены по кругу. Изображенным назовем число, образуемое несколькими цифрами, расположенными подряд(по часовой стрелке или против часовой стрелки). При каком наименьшем значении N все четырехзначные числа, запись которых содержит только цифры 1 и 2, могут оказаться среди изображенных?

31. Все стороны выпуклого пятиугольника равны, а все углы различны. Докажите, что максимальный и минимальный углы прилегают к одной стороне пятиугольника.

32. Произведение положительных чисел x, y, z равно 1. Докажите, что если $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geqslant x + y + z$, то для любого натурального k выполнено неравенство $\dfrac{1}{x^k} + \dfrac{1}{y^k} + \dfrac{1}{z^k} \geqslant x^k + y^k + z^k$.

Бой завершился победой **Школы №58** со счетом *6–43*.

Школа №2 — Переславль-Залесский. 1 декабря 2007 г.

33. Докажите, что если a и b — два целых нечетных числа, то $a^3 - b^3$ делится на 2^n тогда и только тогда, когда $a - b$ делится на 2^n.

34. Двадцать городов соединены 172 авиалиниями. Докажите, что, используя эти авиалинии, можно из любого города перелететь в любой другой (быть может, делая пересадки).

35. Докажите, что куб наибольшего из трех последовательных натуральных чисел не может быть равен сумме кубов двух других чисел.

36. У Алены есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 часов разговора или 210 часов ожидания. Когда Алена садилась в поезд, телефон был полностью заряжен, а когда она выходила из поезда, телефон разрядился. Сколько времени она ехала на поезде, если известно, что Алена говорила по телефону ровно половину времени поездки?

37. Точки K и L — середины сторон AB и BC четырехугольника $ABCD$. На стороне CD выбрана такая точка M, что $CM : MD = 2 : 1$. Известно, что DK параллельна BM и AL параллельна CD. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

38. N цифр — единицы и двойки — расположены по кругу. Изображенным назовем число, образуемое несколькими цифрами, расположенными подряд(по часовой стрелке или против часовой стрелки). При каком наименьшем значении N все четырехзначные числа, запись которых содержит только цифры 1 и 2, могут оказаться среди изображенных?

39. Произведение положительных чисел x, y, z равно 1. Докажите, что если $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geqslant x + y + z$, то для любого натурального k выполнено неравенство $\dfrac{1}{x^k} + \dfrac{1}{y^k} + \dfrac{1}{z^k} \geqslant x^k + y^k + z^k$.

40. В выпуклом пятиугольнике выбраны две точки. Докажите, что можно выбрать четырехугольник с вершинами в вершинах пятиугольника так, что в него попадут обе выбранные точки.

Бой завершился победой **Переславля-Залесского** со счетом *23–57*.

Школа №2 — Школа №52. 7 декабря 2007 г.

41. В трамвае ехало 60 человек: контролеры, кондукторы, лжекондукторы (граждане, выдававшие себя за кондукторов), лжеконтролеры (граждане, выдававшие себя за контролеров), и, возможно, обычные пассажиры. Общее количество лжеконтролеров и лжекондукторов в 4 раза меньше количества настоящих кондукторов и контролеров. Общее количество контролеров и лжеконтролеров в 7 раз больше общего количества кондукторов и лжекондукторов. Сколько в трамвае обычных пассажиров?

42. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC соответственно отмечены точки D и E так, что $AD : BD = BE : EC = 2$ и $\angle ACB = 2\angle BED$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

43. Некто написал 5 писем пяти различным людям и заготовил 5 конвертов с их адресами. Сколькими способами можно вложить письма в конверты, чтобы ни одно письмо не попало тому лицу, которому оно адресовано?

44. Докажите, что $a + b + c \leqslant \dfrac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}$ для положительных a, b, c.

45. На плоскости размещено $n \geqslant 3$ отрезков так, что любые 3 из них имеют общую точку. Докажите, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам.

46. В группе из 100 человек каждый имеет не более 10 знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать 10 человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.

47. Докажите, что ни при каком натуральном n число $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ не может заканчиваться ни одной из цифр $2, 4, 7, 9$.

48. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе $AB = 10$ проведена высота CH. Точка K — середина BC. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CHK.

Бой завершился победой **Школы №52** со счетом *18–33*.

Школа №58 — Школа №2. 25 февраля 2008 г.

49. Каждый сотрудник компании «Кока-кола» имеющий четное число знакомых среди сотрудников, послал им по письму, а каждый из остальных сотрудников послал по письму всем незнакомым. Тедди получил 99 писем. Докажите, что он получит еще хотя бы одно письмо.

50. Докажите, что девятизначное число, в записи которого участвуют все цифры, кроме нуля, и которое оканчивается цифрой 5, не может быть полным квадратом целого числа.

51. Внутри треугольника ABC и на биссектрисе его угла B выбрана такая точка M, что $AM = AC$ и $\angle BCM = 30^\circ$. Докажите, что $\angle AMB = 150^\circ$.

52. У Гарри есть мышонок и много лягушат. Гарри может превращать лягушат в мышат и наоборот по следующему правилу: если мышат и лягушат не поровну, то количество тех животных, которых было меньше половины, удваивается. После того, как Гарри сумел проделать эту операцию 17 раз подряд, мышат впервые оказалось в два раза больше, чем лягушат. Сколько животных было у Гарри?

53. Даны три квадратных трехчлена с попарно различными старшими коэффициентами. Графики любых двух из них имеют ровно одну общую точку. Докажите, что все три графика имеют ровно одну общую точку.

54. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах AC и AB отметили такие точки K и L соответственно, что прямая KL параллельна BC и при этом $KL = KC$. На стороне BC выбрана точка M так, что $\angle KMB = \angle BAC$. Докажите, что $KM = AL$.

55. Сколько десятизначных чисел можно составить так, чтобы любые две соседние цифры отличались на единицу, если в их десятичной записи можно использовать только цифры 1, 2 и 3?

56. На столе расставлены в один ряд N стаканов, перевернутые вверх дном. Разрешается одновременно переворачивать два стакана, стоящие через один. При каких значениях N можно добиться того, чтобы все стаканы стояли дном вниз?

Бой завершился победой **Школы №58** со счетом *46–4*.

Школа №52 — Переславль-Залесский. 11 марта 2008 г.

57. Положительное число x таково, что $[x] \cdot \{x\} = 100$. Чему может равняться число $[x^2] - [x]^2$?

58. Может ли сумма попарных расстояний между вершинами 25 - вершинного дерева быть равна 1225?

59. Можно ли числа $1, 2, \ldots, 10$ расставить в ряд в некотором порядке так, чтобы каждое из них, начиная со второго, отличалось от предыдущего на целое число процентов?

60. Через центр вписанной окружности четырехугольника $ABCD$ проведена прямая. Она пересекает сторону AB в точке X и сторону CD в точке Y; углы $\angle AXY$ и $\angle DYX$ равны. Докажите, что $AX/BX = CY/DY$.

61. В каждой клетке таблицы 37×5 (37 строк, 5 столбцов) стоит число от 1 до 10. В каждой строке числа упорядочены слева на право в неубывающем порядке. На любой диагональной линии направления вправо-вниз все числа равны. Докажите, что в таблице есть строка, содержащая 5 одинаковых чисел.

62. Хорда CD окружности с центром O перпендикулярна ее диаметру AB, а хорда AE делит пополам радиус OC. Докажите, что хорда DE делит пополам хорду BC.

63. Сколько десятизначных чисел можно составить так, чтобы любые две соседние цифры отличались на единицу, если в их десятичной записи можно использовать только цифры 1, 2 и 3?

64. Автобус со школьниками, отправившись из Переславля в x часов y минут, прибыл в Ярославль в y часов z минут. Время в пути составило z часов x минут. Найдите все возможные значения x.

Бой завершился победой **Переславля-Залесского** со счетом *42–52*.

Школа №58 — Переславль-Залесский. 23 марта 2008 г.

65. Какую наименьшую сумму цифр может иметь число вида $3n^2 + n + 1$ при натуральном n?

66. На доске написано число 123456789. На каждом шагу разрешается выбирать его цифры a и b одинаковой четности и заменять каждую из них на $\dfrac{a+b}{2}$. Возможно ли такими заменами получить число, большее чем 800000000?

67. В квадрате со стороной 1 расположено 2008 равносторонних треугольников, сумма периметров которых равна 300. Докажите, что хотя бы три из них имеют общую точку.

68. Пусть $x, y > 0$ и $xy \geqslant 1$. Докажите, что $x^3+y^3+4xy \geqslant x^2+y^2+x+y+2$.

69. Найдите все целые значения x такие, что $2x^2 - x - 36$ является квадратом простого числа.

70. На плоскости закреплены три круглых диска, одинакового радиуса R, которые охватывает натянутый резиновый шнур. Докажите, что из дуг, в которых шнур соприкасается с дисками, можно составить окружность радиуса R.

71. В начале игры на столе лежит кучка из 15 спичек. Играют двое, ходят по очереди. За один ход можно разделить любую из имеющихся кучек на две, но так, чтобы после этого все имеющиеся кучки состояли из различного числа спичек (например, если на столе кучки из 6 и 2 спичек, то ход $6 \to 5+1$ возможен, а ходы $6 \to 3+3$ и $6 \to 4+2$ — нет). Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода без нарушения правил. Кто выиграет при правильной игре?

72. В прямоугольный треугольник вписаны два квадрата так, что у одного квадрата две стороны лежат на катетах, а у другого квадрата одна сторона лежит на гипотенузе. Какой из квадратов больше?

Бой завершился победой **Школы №58** со счетом *74–0*.

Финал 1 лиги

Школа 58 — Школа 33. 4 мая 2008 г.

73. Три прямоугольника с соответственно параллельными сторонами полностью покрывают стороны данного треугольника. Докажите, что они покрывают и сам треугольник.

74. В стране 2007 городов. Из некоторых городов имеются прямые авиарейсы в другие города (каждый рейс — односторонний). Оказалось, что для любых двух городов A и B хотя бы из одного из них можно добраться в другой на самолете (возможно, с пересадками). Докажите, что есть город, из которого можно добраться по крайней мере в 1003 других и в который можно добраться по крайней мере из 1003 других.

75. Пусть $x \leqslant y \leqslant z$ — вещественные числа такие, что $xy + yz + zx = 1$. Докажите, что $xz < 1/2$.

76. На стороне AD выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $\angle A = \angle D$, выбраны точки P и Q таким образом, что $\angle QBP + \angle ABQ = \angle DCP + \angle PCQ = 180°$, а отрезки BQ и CP пересекаются и перпендикулярны. Докажите, что $AB + BP = DC + CQ$.

77. Найдите все натуральные n, которые можно представить в виде $n = \text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) + \text{НОК}(c, a)$ с натуральными a, b, c.

78. В остроугольном треугольнике ABC с углом $\angle A > 60°$ проведены биссектриса AL, медиана BM и высота CH. Докажите, что $LM + MA > LH + HA$.

79. На шахматной доске 8×8 расставлено несколько фишек. Докажите, что можно выбрать 4 строки и 4 столбца таким образом, чтобы число фишек, стоящих на 16 клетках, образующихся при их пересечениях, делилось на 4.

80. Дано множество $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$. Сколькими способами можно из этого множества выбрать подмножество B такое, что если сумма каких-то двух различных чисел из A — степень двойки, то ровно одно из этих чисел лежит в B?

Бой завершился победой **Школы №33** со счетом *2–94*.

Группа Ю2А

Гимназия №2 — Ростовская Гимназия. 21 ноября 2007 г.

81. Первый вторник месяца Митя провел в Смоленске, а первый вторник после первого понедельника — в Вологде. В следующем месяце Митя первый вторник провел во Пскове, а первый вторник после первого

понедельника — во Владимире. Определите, какого числа и какого месяца Митя был в каждом из городов?

82. Вася задумал натуральное число, умножил его на 13, зачеркнул последнюю цифру результата, полученное число умножил на 7, снова зачеркнул последнюю цифру результата и получил число 21. Какое число задумал Вася?

83. В треугольнике ABC угол C в три раза больше угла A. На стороне AB взята такая точка D, что $BD = BC$. Найдите CD, если $AD = 4$.

84. На столе лежат семь карточек. За один ход разрешается перевернуть любые пять карточек. Какое наименьшее число ходов необходимо совершить, чтобы перевернуть все карточки?

85. Саша и Федя написали на карточках все целые числа от 0 до 999, после чего разделили карточки между собой. Каждый из них выложил все свои карточки в ряд и получил длинное число. Могли ли длинные числа у Саши и Феди совпасть?

86. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с прямым углом C на стороне CD взята такая точка P, что $\angle APD = \angle BPC$ и $\angle BAP = \angle ABC$. Докажите, что $BC = (AP + BP)/2$.

87. Три двузначных числа таковы, что сумма любых двух из них равна числу, отличающемуся от третьего лишь порядком цифр. Какой может быть сумма всех трех чисел?

88. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым две партии: одну белыми фигурами, другую — черными. По окончании турнира оказалось, что все набрали одинаковое количество очков (за победу дается 1 очко, за ничью — $1/2$ очка, за поражение 0 очков). Докажите, что найдутся два участника, выигравшие одинаковое число партий белыми.

Бой завершился победой **Гимназии №2** со счетом *53–19*.

Ростовская гимназия — Школа №36. 15 декабря 2007 г.

89. На столе лежат в ряд четыре фигуры: треугольник, круг, прямоугольник и ромб. Они окрашены в разные цвета: красный, синий, желтый,

зеленый. Известно, что красная фигура лежит между синей и зеленой; справа от желтой фигуры лежит ромб; круг лежит правее и треугольника и ромба; треугольник лежит не с краю; синяя и желтая фигуры лежат не рядом. Определите, в каком порядке лежат фигуры и какого они цвета.

90. Расшифруйте числовой ребус (разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым - одинаковые):
$$\begin{cases} \text{МА} \cdot \text{МА} = \text{МИР}, \\ \text{АМ} \cdot \text{АМ} = \text{РИМ}. \end{cases}$$

91. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки D, E, F соответственно так, что $EF||AB$ и $ED||AC$. Прямые DF и BC пересекаются в точке K. Оказалось, что $DF = FK$. Найдите отношение $BE : EC$.

92. Рыбак поймал несколько рыб. Три самые большие рыбины (35% веса всего улова) он положил в холодильник, три самые маленькие (5/13 веса всех оставшихся) отдал коту, а остальные съел сам. Сколько рыб он поймал?

93. Найдите наибольшее натуральное число, любые две последовательные цифры которого образуют точный квадрат.

94. В некоторой компании 25 акционеров, причем любые 15 из них владеют не менее, чем 50% акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер?

95. Могут ли длины трех высот треугольника равняться 1, 2 и 3?

96. В группе из 100 человек каждый имеет не более 10 знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать 10 человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.

Бой завершился вничью со счетом *36–37*.

Школа №36 — Гимназия №2. 1 марта 2008 г.

97. Заплатив 100 рублей, покупатель получил столько рублей сдачи, сколько он купил тетрадей. Сколько тетрадей мог купить покупатель, если известно, что тетрадь стоит четное число рублей?

98. Некоторые из клеток таблицы 5×5 окрашены в синий цвет, а остальные — в красный. Докажите, что можно найти четыре клетки, окрашенные в один цвет, которые находятся на пересечении двух строк и двух столбцов.

99. В волейбольном турнире участвовали несколько команд седьмых и шестых классов (каждые две команды сыграли ровно один матч, ничьих в волейболе не бывает). Команд семиклассников было в пять раз меньше, чем команд шестиклассников, а побед семиклассники одержали в два раза меньше, чем шестиклассники. Сколько всего команд участвовало в турнире?

100. Числа от 1 до 50 разбили на десять пятерок и в каждой пятерке выбрали среднее по величине число. Какое наибольшее значение может принимать сумма выбранных чисел?

101. На стороне CD прямоугольника $ABCD$ взяли точку E. Когда точку C отразили относительно отрезка BE, она попала на среднюю линию прямоугольника, параллельную стороне AB. Найдите угол BED.

102. Найдите наименьшее натуральное число, у которого есть делители, оканчивающиеся всеми цифрами (делитель, оканчивающийся на 0, делитель, оканчивающийся на 1, ..., делитель, оканчивающийся на 9).

103. У каждого из пяти толстяков есть сестра. Каждая из этих сестер вышла замуж за какого-то другого из толстяков. За год каждый толстяк потолстел на вдвое большее число килограммов, чем похудела его сестра и при этом на восемь килограммов больше, чем похудела его жена. На какое наибольшее число килограммов могла похудеть какая-то из сестер толстяков?

104. В центральной клетке квадрата 17×17 стоит фишка. Два игрока по очереди передвигают эту фишку на соседнюю по стороне клетку. Первый может продвинуть фишку прямо (в том же направлении, в котором был сделан предыдущий ход), или сделать ход влево, а второй — сходить фишкой прямо или вправо. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу?

Бой завершился победой **Школы №36** со счетом *34–28*.

Группа Ю2Б

Школа №42 — ФМЛ г. Углича. 19 декабря 2007 г.

105. На столе лежат в ряд четыре фигуры: треугольник, круг, прямоугольник и ромб. Они окрашены в разные цвета: красный, синий, желтый, зеленый. Известно, что красная фигура лежит между синей и зеленой; справа от желтой фигуры лежит ромб; круг лежит правее и треугольника и ромба; треугольник лежит не с краю; синяя и желтая фигуры лежат не рядом. Определите, в каком порядке лежат фигуры и какого они цвета.

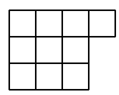
106. Расшифруйте числовой ребус (разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым - одинаковые):
$$\begin{cases} \text{МА} \cdot \text{МА} = \text{МИР}, \\ \text{АМ} \cdot \text{АМ} = \text{РИМ}. \end{cases}$$

107. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки D, E, F соответственно так, что $EF||AB$ и $ED||AC$. Прямые DF и BC пересекаются в точке K. Оказалось, что $DF = FK$. Найдите отношение $BE : EC$.

108. Рыбак поймал несколько рыб. Три самые большие рыбины (35% веса всего улова) он положил в холодильник, три самые маленькие (5/13 веса всех оставшихся) отдал коту, а остальные съел сам. Сколько рыб он поймал?

109. Найдите наибольшее натуральное число, любые две последовательные цифры которого образуют точный квадрат.

110. Двое играют в крестики-нолики на доске, изображенной на рисунке. Кто выиграет при правильной игре?



111. Могут ли длины трех высот треугольника равняться 1, 2 и 3?

112. В группе из 100 человек каждый имеет не более 10 знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать 10 человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.

Бой завершился победой **ФМЛ г. Углича** со счетом *36–51.*

Школа №42 — Гимназия №8 г. Рыбинска. 16 февраля 2008 г.

113. Предложил черт лодырю: «Всякий раз, как перейдешь этот волшебный мост, твои деньги удвоятся. За это ты, перейдя мост, должен будешь отдать мне 24 копейки». Трижды перешел лодырь мост — и остался совсем без денег. (То есть отдал в третий раз черту точно те 24 копейки, что оказались у него к этому моменту.) Сколько денег было у него первоначально?

114. В трамвае ехало 60 человек: контролеры, кондукторы, лжекондукторы (граждане, выдававшие себя за кондукторов), лжеконтролеры (граждане, выдававшие себя за контролеров), и, возможно, обычные пассажиры. Общее количество лжеконтролеров и лжекондукторов в 4 раза меньше количества настоящих кондукторов и контролеров. Общее количество контрролеров и лжеконтролеров в 7 раз больше общего количества кондукторов и лжекондукторов. Сколько в трамвае обычных пассажиров?

115. Какое наименьшее число соединений требуется для организации проводной сети связи из 10 узлов, чтобы при выходе из строя любых двух узлов связи сохранялась возможность передачи информации между любыми двумя оставшимися (хотя бы по цепочке через другие узлы)?

116. В прямоугольном треугольнике ABC точка O — середина гипотенузы AC. На отрезке AB взята точка M, а на отрезке BC — точка N так, что угол MON — прямой. Докажите, что $AM^2 + CN^2 = MN^2$.

117. Сколько существует трехзначных чисел, сумма цифр которых делится на 13?

118. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC соответственно отмечены точки D и E так, что $AD : BD = BE : EC = 2$ и $\angle ACB = 2\angle BED$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

119. На столе лежат семь карточек. За один ход разрешается перевернуть любые пять карточек. Какое наименьшее число ходов необходимо совершить, чтобы перевернуть все карточки?

120. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым две партии: одну белыми фигурами, другую — черными. По окончании турнира оказалось, что все набрали одинаковое количество очков (за победу

дается 1 очко, за ничью — 1/2 очка, за поражение 0 очков). Докажите, что найдутся два участника, выигравшие одинаковое число партий белыми.

Бой завершился победой **Школы №42** со счетом *36–28*.

Гимназия №8 г. Рыбинска — ФМЛ г. Углича. 26 апреля 2008 г.

121. Решить в натуральных числах уравнение: $a^3 + b^3 + c^3 = 2008$.

122. В ряд выложили несколько апельсинов, мандаринов, яблок и груш. Известно, что рядом с фруктом каждого вида можно найти фрукт любого другого вида. Какое наименьшее количество фруктов могло быть выложено.

123. В треугольнике ABC точка D — середина AB, а точка E на стороне BC такова, что $BE = 2EC$ и $\angle ADC = \angle BAE$. Найдите $\angle BAC$.

124. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора $\{1, 2, 3, \ldots, 40\}$ так, чтобы никакие два из выбранных чисел при перемножении не давали точного квадрата?

125. В селе Ивановском живут $n > 100$ человек. Житель села называется общительным, если у него не менее 100 знакомых среди односельчан. Докажите, что в Ивановском найдутся либо два знакомых между собой общительных жителя, либо два незнакомых между собой необщительных жителя.

126. Муха сидит в вершине X деревянного куба. Как ей переползти в противоположную вершину куба Y, двигаясь по самому короткому пути?

127. У трех членов жюри спросили: «Сколько команд будет участвовать в соревнованиях?». Один сказал: «Меньше семидесяти двух», другой: «Меньше семидесяти одной», а третий: «Меньше семидесяти трех». Сколько команд участвовало в регате, если правы были в точности двое членов жюри?

128. Из квадрата со стороной 5 клеток вырезали одну клетку, после чего его разрезали на 8 одинаковых прямоугольников размером 3×1. Какую клетку изначально вырезали из квадрата?

Бой завершился победой **ФМЛ г. Углича** со счетом *13–38*.

Финал 2 лиги

Школа №36 — ФМЛ г. Углича. 14 мая 2008 г.

129. Требуется расставить на шахматной доске ладьи четырех различных цветов, так чтобы ладей всех цветов было поровну, и никакие ладьи разного цвета не били друг друга. Найдите наибольшее число ладей, при котором это возможно.

130. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, а на стороне AD выбрана точка K такая, что $AK = 2$, $KD = 1$. Оказалось, что $ACK = 30°$. Чему может быть равен отрезок OK?

131. В королевстве n городов. Король выписал n натуральных чисел a_1, a_2, $\ldots$, a_n с суммой $2n - 2$ и постановил, чтобы дороги между городами были проложены таким образом, что из первого города выходит a_1 дорог, из второго — a_2 дорог, и так далее, из n-го города — a_n дорог. Докажите, что такое постановление короля всегда можно выполнить.

132. Каждая точка плоскости покрашена в красный или синий цвет. Может ли оказаться, что на каждой окружности радиуса 1 находится ровно одна синяя точка?

133. Назовем пару натуральных чисел квадратной, если и их сумма, и их произведение являются точными квадратами. Докажите, что число 11 не входит ни в одну квадратную пару.

134. $a > b > c > d$ — натуральные числа, $a + b + c + d = 10000$, $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 10000$. Какое наименьшее значение может иметь a?

135. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ диагонали AC и BD пересекаются в точке K, BD и CE — в точке L, CE и DA — в точке M, DA и EB — в точке N, EB и AC — в точке O. Площадь невыпуклой фигуры $AOBKCLDMEN$ равна 1. Найдите площадь четырехугольника $ACLN$.

136. Квадрат со стороной 2 разбит вертикальными и горизонтальными прямыми на прямоугольники, раскрашенные в черный и белый цвета в шахматном порядке. Докажите, что если суммарные площади черных и белых прямоугольников равны, то из черных прямоугольников можно составить прямоугольник 1×2.

Бой завершился победой **Школы №36** со счетом *37–13*.

Группа ЮЗА

Школа №4 — Школа №49. 7 декабря 2007 г.

137. В трамвае ехало 60 человек: контролеры, кондукторы, лжекондукторы (граждане, выдававшие себя за кондукторов), лжеконтролеры (граждане, выдававшие себя за контролеров), и, возможно, обычные пассажиры. Общее количество лжеконтролеров и лжекондукторов в 4 раза меньше количества настоящих кондукторов и контролеров. Общее количество контролеров и лжеконтролеров в 7 раз больше общего количества кондукторов и лжекондукторов. Сколько в трамвае обычных пассажиров?

138. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC соответственно отмечены точки D и E так, что $AD : BD = BE : EC = 2$ и $\angle ACB = 2\angle BED$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

139. Сколько существует трехзначных чисел, сумма цифр которых делится на 13?

140. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$

141. Числа от 1 до 10 разбили на две группы по 5 чисел в каждой так, что произведение чисел из групп делится на произведение чисел в другой. Какое наименьшее значение может быть у частного?

142. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника. Площади трех из них равны 1, 2 и 3. Найдите площадь четырехугольника.

143. Какое наименьшее число соединений требуется для организации проводной сети связи из 10 узлов, чтобы при выходе из строя любых двух узлов связи сохранялась возможность передачи информации между любыми двумя оставшимися (хотя бы по цепочке через другие узлы)?

144. Первый вторник месяца Митя провел в Смоленске, а первый вторник после первого понедельника — в Вологде. В следующем месяце Митя первый вторник провел во Пскове, а первый вторник после первого понедельника — во Владимире. Определите, какого числа и какого месяца Митя был в каждом из городов?

Бой завершился победой **Школы №49** со счетом *0–46*.

Группа ЮЗБ

Школа №43 — Кузнечихинская СОШ. 24 ноября 2007 г.

145. Найдите все натуральные числа, которые в 10 раз больше суммы своих цифр.

146. Первый вторник месяца Митя провел в Смоленске, а первый вторник после первого понедельника — в Вологде. В следующем месяце Митя первый вторник провел во Пскове, а первый вторник после первого понедельника — во Владимире. Определите, какого числа и какого месяца Митя был в каждом из городов?

147. В треугольнике ABC угол C в три раза больше угла A. На стороне AB взята такая точка D, что $BD = BC$. Найдите CD, если $AD = 4$.

148. На столе лежат семь карточек. За один ход разрешается перевернуть любые пять карточек. Какое наименьшее число ходов необходимо совершить, чтобы перевернуть все карточки?

149. После того, как учительница Марьиванна пересадила Вовочку с первого ряда на второй, Ванечку — со второго ряда на третий, а Машеньку — с третьего ряда на первый, средний возраст учеников, сидящих в первом ряду, увеличился на неделю, сидящих во втором ряду — увеличился на две недели, а сидящих на третьем ряду — уменьшился на четыре недели. Известно, что на первом и на втором ряду сидят по 12 человек. Сколько человек сидит на третьем ряду?

150. Вася задумал натуральное число, умножил его на 13, зачеркнул последнюю цифру результата, полученное число умножил на 7, снова зачеркнул последнюю цифру результата и получил число 21. Какое число задумал Вася?

151. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с прямым углом C на стороне CD взята такая точка P, что $\angle APD = \angle BPC$ и $\angle BAP = \angle ABC$. Докажите, что $BC = (AP + BP)/2$.

152. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым две партии: одну белыми фигурами, другую — черными. По окончании турнира оказалось, что все набрали одинаковое количество очков (за победу дается 1 очко, за ничью — 1/2 очка, за поражение 0 очков). Докажите,

что найдутся два участника, выигравшие одинаковое число партий белыми.

Бой завершился победой **Школы №43** со счетом *42–14*.

Школа №76 — Школа №43. 6 февраля 2008 г.

153. Мальчик по четвергам и пятницам всегда говорит правду, а по вторникам всегда лжет. Однажды его 7 дней подряд спрашивали, как его зовут. Шесть первых дней он давал такие ответы: Андрей, Борис, Андрей, Борис, Виктор, Борис. Какой ответ он дал на седьмой день?

154. В наборе из пяти палочек ни из каких трех палочек нельзя составить треугольник. Может ли оказаться так, что, разломав одну из палочек на две, мы получим шесть палочек, из которых можно составить два равнобедренных треугольника?

155. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана такая точка K, что отрезок AK пересекает медиану BM в точке N, причем $AN = BC$. Докажите, что $BK = KN$.

156. В турнире участвовало 10 шахматистов, и каждый сыграл с каждым по одной партии. Могли ли какие-то три участника вместе набрать на 4 очка больше, чем остальные семеро? За победу в шахматах дают 1 очко, за ничью — $1/2$ очка, за поражение — 0 очков.

157. В коробке лежат 5 мандаринов. Известно, что любые три из них весят в сумме больше 300 г, но меньше 600 г. Докажите, что найдется мандарин, весящий от 100 до 200 г.

158. Круг разделен на 6 секторов и в них по часовой стрелке расставлены числа: 1, 0, 1, 0, 0, 0. Разрешается прибавить по единице к числам в любых двух соседних секторах. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы все числа в секторах были одинаковыми?

159. У Винни-Пуха есть несколько белых палочек, а у Пятачка — некоторое количество черных палочек, причем общая длина белых палочек равна общей длине черных. Докажите, что можно разрезать некоторые палочки на части так, чтобы получившиеся палочки можно было разбить на пары, в каждой из которой палочки одинаковой длины и разного цвета.

160. При каком наименьшем n на шахматную доску можно поставить n ладей и n слонов так, чтобы любая ладья била хотя бы двух слонов, а любой слон бил хотя бы две ладьи?

Бой завершился вничью со счетом *20–21*.

Школа №76 — Кузнечихинская СОШ. 23 апреля 2008 г.

161. Вася задумал число и прибавил к этому числу сумму его цифр. Петя также задумал число и тоже прибавил к нему его сумму цифр. В результате сложения у Васи и Пети получились одинаковые числа. Верно ли, что они задумывали одинаковые числа?

162. Отрезки AC и BD пересекаются в точке M, причем $AB = CD$ и $\angle ACD = 90°$. Докажите, что $MD \geqslant MA$.

163. Сколько корней имеет уравнение:
$$\sqrt{2008 - 2009x} + \sqrt{2010x - 2009} = 1?$$

164. В ряд выложили несколько апельсинов, мандаринов, яблок и груш. Известно, что рядом с фруктом каждого вида можно найти фрукт любого другого вида. Какое наименьшее количество фруктов могло быть выложено?

165. Докажите, что $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} + \ldots + \dfrac{1}{98} - \dfrac{1}{99} + \dfrac{1}{100} > \dfrac{1}{5}$.

166. У трёх членов жюри спросили: «Сколько команд будет участвовать в соревнованиях?». Один сказал: «Меньше семидесяти двух». Другой: «Меньше семидесяти одной», а третий: «Меньше семидесяти трех». Сколько команд участвовало в регате, если правы были в точности двое членов жюри?

167. Один из углов трапеции равен $60°$. Найдите отношение ее оснований, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность и около этой трапеции можно описать окружность.

168. Из квадрата со стороной 5 клеток вырезали одну клетку, после чего его разрезали на 8 одинаковых прямоугольников размером 3×1. Какую клетку изначально вырезали из квадрата?

Бой завершился победой **Школы №76** со счетом *35–8*.

Указания к решению задач

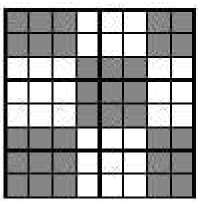
1. Возьмем любой из автобусов. Моменты, когда он попадался Васе навстречу и когда он обгонял Васю, чередовались. При этом первым и последним из них были моменты, когда автобус шел Васе навстречу: иначе бы Вася застал бы автобус в пункте А или в пункте Б. Поэтому каждый автобус попался Васе навстречу на один раз больше, чем обогнал его. Значит, автобусы обгоняли Васю 15 раз.

2. Не могло. Каждая команда сыграла 15 боев. Чтобы поиграть во всех школах, кроме своей, она должна была сыграть в каждой из них по одному разу. Но это значит, что в любой данной школе за время чемпионата должны были сыграть по одному разу 15 команд (все, кроме своей). Но в каждом бое участвуют две команды, поэтому общее число команд, игравших в данной школе, должно быть четным.

3. Исходное уравнение преобразуется к такому виду: $(x-2)^2+(x-y)^2 = 4$. Если сумма двух квадратов целых чисел равна 4, то один из квадратов равен 4, а другой — 0. Несложный перебор дает ответ: (2,0), (2,4), (0,0), (4,4).

4. Пусть N — середина BC. Тогда $AC = CN = BN$. Так как $\angle ACM = \angle ACN + \angle MCN = \angle ACN + (90^\circ - \angle ACN/2) = 90^\circ + \angle ACN/2$, то $\angle ANB = 180^\circ - \angle ANC = 180^\circ - (90^\circ - \angle ACN/2) = 90^\circ + \angle ACN/2 = \angle ACM$. Тогда $\triangle ANB = \triangle MCA$ и $AB = AM$.

5. Ответ: 4, 5, 6, 7, 8, 9. Разобьем доску на такие области:



Если красных клеток будет меньше четырех, то в каком-то из четырех выделенных квадратов 3×3 не будет красной клетки, Игорь может вырезать его и условие задачи выполняться не будет. А если красных клеток будет больше 9, то в какой-то из областей красных клеток будет не меньше двух, а Игорь сможет вырезать квадрат 3×3, содержащий такую область и условие снова не будет выполняться. Значит, красных клеток не меньше 4 и не больше 9. Для каждого числа от 4 до 9 легко подобрать существует пример выбора красных клеток.

6. Пусть такие числа существуют. Обозначим их в порядке убывания $a > b > c$. По условию $b^2 + c^2 + 1 = ka^2$, где $k \in \mathbb{Z}$. Так как $a^2 \geqslant b^2 + 1$

и $a^2 \geqslant c^2 + 1$, $2a^2 \geqslant b^2 + c^2 + 2 > b^2 + c^2 + 1$. Поэтому $k = 1$, то есть $b^2 + c^2 + 1 = a^2$. Так как квадраты четных чисел делятся на 4, а квадраты нечетных дают при делении на 4 остаток 1, то равенство $b^2 + c^2 + 1 = a^2$ возможно лишь тогда, когда числа b и c четны, а число a нечетно. Но в этом случае число $a^2 + c^2 + 1$ дает при делении на 4 остаток 2, и потому не может делиться на число b^2, кратное 4. Таким образом, чисел, удовлетворяющих условию задачи, нет.

7. Продолжим AP до пересечения с прямой BC в точке M. Треугольник AMB по условию — равнобедренный, а прямоугольные треугольники MCP и BCP равны по общему катету CP и острому углу ($\angle MPC = \angle APD = \angle BPC$). Отсюда $2BC = BM = MA = AP + PM = AP + BP$, откуда $BC = (AP + BP)/2$.

8. Назовем вершиной точку, где сходятся границы трех стран. По условию из каждой вершины выходит ровно одна закрытая граница. Допустим, объехать страны можно. Поскольку соответствующий замкнутый маршрут не пересекает закрытых границ, каждая из них либо целиком лежит внутри него, либо целиком снаружи. Поэтому все вершины, находящиеся внутри маршрута, разбиваются на пары вершин, связанных закрытыми границами, то есть этих «внутренних» вершин — четное число k. Мысленно заменим участки границ, соединяющие вершины, нитями и разрежем каждую пополам. Тогда из «внутренних» вершин будет выходить $3k$, то есть четное число половинок нитей. Из них 19 половинок ведут наружу. Значит, от разрезания нитей, целиком лежащих внутри маршрута, получилось $3k - 19$ половинок — нечетное число. Противоречие.

9. Легко показать, что уравнение $17x + 23y = 17 \cdot 23$ не имеет решений в целых положительных числах. Следовательно $n \geqslant 391$. Докажем, что для любого $m > 391$ уравнение $17x + 23y = m$ имеет натуральные корни. Представим $m = 391 + p$, тогда получаем $17x = 391 + p - 23y$. Перебрав остатки можно увидеть, что при любом натуральном p найдется $1 \leqslant y \leqslant 17$, такое что $p - 23y$ делится на 17. Значит при таком y значение x будет целым. А так как $391 + p - 23y > 391 - 23y \geqslant 0$ при y от 1 до 17, то x еще и положителен. Ответ: 391.

10. Не обязательно. Например, если 50 красных отрезков длиной $\dfrac{2}{199} < \dfrac{1}{99}$ располагаются на расстоянии $\dfrac{99}{199 \cdot 49} > \dfrac{1}{99}$ между соседними, то расстояние между любыми двумя красными точками не может быть $\dfrac{1}{99}$.

11. Пусть K — середина BC. $\angle BAM = \angle MBK$, как угол между хордой и касательной. Треугольники ABK и BMK подобны по двум углам ($\angle K$ общий и есть пара равных), значит выполняется соотношение $\dfrac{MK}{BK} = \dfrac{BK}{AK}$. Так как $BK = CK$, то верно и $\dfrac{MK}{CK} = \dfrac{CK}{AK}$, откуда следует подобие треугольников ACK и CMK ($\angle K$ общий и две стороны пропорциональны). Значит $\angle MCK = \angle CAK$. Получаем $\angle BMC = 180^\circ - \angle MBC - \angle MCB = 180^\circ - \angle BAK - \angle CAK = 180^\circ - \angle A = 135^\circ$. Ответ: $\angle BMC = 135^\circ$.

12. Обозначим числа в верхней строке (слева направо): a, b, c; в средней строке: d, e, f; в нижней: g, h, j. Из условия $a+e+j = c+e+g = b+e+h = 0$, значит $a+j = c+g = b+h = -e$. Так же из условия $a+b+c = 0$ и $g+h+j = 0$; сложим эти равенства: $3e = 0$, то есть $e = 0$. Это значит, что $a = -j$, $b = -h$, $c = -g$, откуда $g^2+h^2+j^2 = a^2+b^2+c^2 = n$. Ответ: n.

13. Такой пятиугольник существует. В качестве примера рассмотрим выпуклый пятиугольник $ABCDE$ в котором $AC = CD = AD = 1$, $BE = 6$, $2{,}5 < BD < 3$, $CE = 4$. Перебрав варианты легко убедиться, что треугольник из диагоналей можно сложить единственным образом — использовав диагонали BD, CE BE.

14. Заметим, что теперь с каждого острова можно уехать только по одному мосту. Поэтому, если маршрут на материк существует, то он единственный. Рассмотрим произвольный остров A_1. Докажем, что с него можно проехать на материк. Как известно, есть остров с которого на материк ведет мост, обозначим этот остров B. До введения одностороннего движения существовал пусть из A_1 в B. Пусть этот пусть последовательно проходил по островам A_1, A_2, ..., A_n, B. Так как по мосту, ведущего с B на материк, движение направлено от острова B, то на мосту A_nB движение направленно в сторону B. Аналогично на мосту $A_{n-1}A_n$ движение направленно в сторону A_n и т.д. Наконец, на мосту A_1A_2 движение направленно в сторону A_2. Итак, существует путь с A_1 ведущий на материк через острова A_1, A_2, ..., A_n, B. Как показано в начале этот путь единственный.

15. Раскрасим сектора через один в черный и белый цвета. Сумма чисел в черных секторах равна двум, а в белых нулю. Каждая операция затрагивает один черный и один белый сектор, значит после каждой операции суммы чисел в белых и черных секторах увеличиваются на 1. Таким образом, в черных секторах сумма чисел всегда будет на 2 боль-

ше. Но если числа станут равными, то равны будут и суммы чисел в черных и белых секторах. Ответ: нельзя.

16. Васе нужно мысленно разделить шоколадку на 12 квадратов 3×3. Когда Петя «сходит» в какой-нибудь из таких квадратов, Вася съест уголок из него (очевидно, он всегда сможет это сделать). Поэтом Вася съест не менее $5 \cdot 12 = 60$ квадратиков, следовательно Петя не более $9 \cdot 12 - 60 = 48$, что на 12 меньше.

17. Заметим, что должны одновременно выполняться два неравенства $x \geqslant \dfrac{2009}{2010}$ и $x \leqslant \dfrac{2008}{2009}$, что невозможно. Ответ: корней нет.

18. Пусть x — номер квартиры Джона. Тогда номер его этажа равен $239 - x$. Частное от деления с остатком номера квартиры на 10 равно номеру предыдущего этажа, поэтому: $x = 10(238-x)+r$, где $0 \leqslant r < 9$, $11x = 2380 + r$, $x = 216 + \dfrac{4+r}{11}$. Поскольку x является натуральным числом, то $r = 7$, то $x = 217$. Ответ: 217.

19. Построим треугольник ADB_1, равный треугольнику DAB так, чтобы $\angle BAD = \angle B_1DA$ и $AB = DB_1$ (этот треугольник получается из треугольника ABD отражением относительно серединного перпендикуляра к отрезку AD). Заметим, что точки B_1 и D лежат в одной полуплоскости по отношению к прямой AC. Действительно, если бы это было не так, то отрезок B_1D пересекал бы прямую AC во внутренней точке следовательно, его длина была бы больше длины перпендикуляра, опущенного на прямую AC из точки D, т.е. больше длины отрезка CD. Таким образом, $\angle CAD > \angle B_1AD = \angle BDA$. Т.е. в треугольнике AMD сторона DM не меньше стороны MA.

20. Достаточно посчитать, что $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} > \dfrac{1}{5}$.

21. Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда любые двое необщительных знакомы между собой, а любые двое общительных — незнакомы. Если все жители необщительные, то любой из них знаком со всеми остальными и имеет не более 99 знакомых, то есть всего жителей не больше 100, что противоречит условию. Значит, найдется хотя бы один общительный житель A. Рассмотрим всех его знакомых. Их не меньше 100, все они необщительные, и, следовательно, все они знакомы между собой. Значит, у каждого из них не меньше 100 знакомых (99 остальных и еще A). Поэтому все они общительные. Противоречие.

22. Рассмотрим трапецию $ABCD$ ($\angle BAD = 60°$). Опустим высоты BH

и CM на основание AD. Треугольник ABH — прямоугольный и $\angle BAH = 60°$, следовательно, $\angle ABH = 30°$. Значит, если $AH = x$, то $AB = 2x$. Так как вокруг трапеции можно описать окружность, то она равнобокая, т.е. $\angle CDM = 60°$ и $CD = AB = 2x$, по аналогии с треугольником ABH получаем, что $DM = x$. Пусть $BC = HM = a$ (равенство BC и HM следует из того, что $BCMH$ — прямоугольник). Так как в трапецию можно вписать окружность, то $AB + CD = AD + BC$, т.е. $2x + 2x = x + x + a + a$, следовательно, $x = a$. Значит $BC = x$, а $AD = 3x$. Ответ: $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{3}{1}$.

23. Вырезали центральную клетку. Чтобы показать, что другие варианты невозможны, необходимо раскрасить клетки квадрата в три цвета.

24. По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -a, x_1x_2 = 1 - b$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Значит, $a = -(x_1 + x_2), b = 1 - x_1x_2$. Следовательно, $a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (1 - x_1x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 1 + x_1^2x_2^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$. Полученное число является составным, так как, если x_1 и x_2 — целые отличные от нуля, то каждый из множителей принимает целое значение отличное от единицы.

25. Общее число способов выбрать компанию из 3 человек равно $C_{10}^3 = 120$. Каждая ссора разрушает не более 8 таких компаний, поэтому число разрушенных компаний не больше $8 \cdot 14 = 112$. Значит осталось по крайней мере 8 дружных компаний.

26. Так как третий автомобиль выехал через 20 минут после второго, а догнал его еще через 30 минут, то за 30 минут он проезжает такое же расстояние, какое второй проезжает за 50 минут. Следовательно, за 120 минут он проезжает столько же, сколько второй за 200 минут. Так как третий автомобиль выехал через 30 минут после первого, а догнал его еще через 40 минут, то за 40 минут он проезжает такое же расстояние, какое первый проезжает за 70 минут. Следовательно, за 120 минут он проезжает столько же, сколько второй за 210 минут. Второй автомобиль выехал через 10 минут после первого и за 200 минут проехал столько же, сколько первый за 210 минут. Значит, через 200 минут после выезда из города второй автомобиль догнал первый.

27. Пусть $(n + 1)^3 = n^3 + (n - 1)^2$. Преобразуя, получим: $n^3 - 6n^2 - 2 = 0$, откуда $n^2(n - 6) = 2$. Тогда n^2 — делитель числа 2, что возможно лишь при $n = 1$, но тогда 2 не делится на $n - 6$.

28. Так как 2^p делится на 4 при $p > 1$, то $3^p + 1$ тоже делится на 4,

что возможно лишь при нечетных p (смотрим по остаткам от деления 3^p на 4). Отсюда $p \geqslant 3$, а 2^p делится на 8. С другой стороны, $3^p + 1 = (3 + 1)(3^{p-1} - 3^{p-2} + 3^{p-3} - \ldots + 1)$. Чтобы это выражение делилось на 8, необходимо, чтобы второй множитель делился на 2, но $3^{p-1} - 3^{p-2} + 3^{p-3} - \ldots + 1$ — сумма нечетного количества нечетных слагаемых, поэтому нечетна.

29. Проведем биссектрису OM угла BOC (M лежит на BC). Тогда $\angle MOC = \angle BOC = \angle EOD = 60^\circ$ и $\angle DOC = 180^\circ - \angle EOD = 60^\circ$. Получим, что $\triangle DOC = \triangle MOC$ (OC — общая сторона; углы, прилежащие к этой стороне, соответственно равны). Следовательно, $DO = MO$. Тогда $\triangle EOB = \triangle MOB$ (OB — общая сторона; $EO = MO$; $EOB = 180^\circ - \angle EOD = 60^\circ = \angle MOB$). Следовательно, BO — биссектриса угла ABC, поэтому O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Так как $\angle BOC = 120^\circ$, то $\angle OBC + \angle OCB = 60^\circ$, тогда $\angle ABC + \angle ACB = 120^\circ$, следовательно, $\angle BAC = 60^\circ$.

30. Заметим, что среди записанных цифр должны встретиться комбинации 1111 и 2222 (уже 8 цифр). Также должна встретиться комбинация 22 между двумя единицами и 11 между двумя двойками (еще 4 цифры), а также 1 между двумя двойками и 2 между двумя единицами (еще две цифры). Отсюда следует, что N не меньше 14. Для 14 можно построить пример: 11112112212222.

31. Предположим противное. Рассмотрим пятиугольник $ABCDE$, удовлетворяющий условиям задачи. Не умаляя общности, можно считать, что угол A — наибольший, а угол D — наименьший. Заметим, что $\angle EAC = \angle A - \angle BAC = \angle A - \angle ACB > \angle C - \angle BCA = \angle ACD$. Предположим, что лучи AE и CD пересекаются в точке X. Тогда в треугольнике ACX сторона CX больше стороны AX (против нее лежит больший угол. Тогда $DX = CX - CD = CX - AE > AX - AE = EX$, поэтому $180^\circ - \angle E > 180^\circ - \angle D$, что противоречит минимальности угла D. Случай, когда прямые AE и CD пересекаются с другой стороны от ED, аналогичен. В случае $AE||CD$ легко прийти к противоречию следующим образом: заметим, что $ACDE$ — ромб, ABC — равносторонний, и тогда $\angle D < \angle E$, откуда $\angle A = 60^\circ + D < \angle C = 60^\circ + \angle E$.

32. Первое неравенство равносильно $(x-1)(y-1)(z-1) \leqslant 0$. Действительно, раскрывая скобки, получим: $xyz - (xy + yz + xz) + (x + y + z) - 1 \leqslant 0$, но $xyz = 1$, откуда $x + y + z \leqslant xy + yz + xz$. Разделим правую часть на

$xyz = 1$, получим равносильное неравенство: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \geqslant x+y+z$. Аналогично второе неравенство равносильно $(x^k-1)(y^k-1)(z^k-1) \leqslant 0$. Однако знак числа $x-1$ совпадает со знаком числа x^k-1, знак $y-1$ — со знаком y^k-1, знак $z-1$ — со знаком z^k-1, поэтому выражения $(x-1)(y-1)(z-1)$ и $(x^k-1)(y^k-1)(z^k-1)$ имеют одинаковый знак, и если первое из них не больше 0, то и второе не больше 0.

33. Так как $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, то из того, что $a-b$ делится на 2^n, следует, что a^3-b^3 делится на 2^n. Обратно: так как a и b нечетные, то a^2+ab+b^2 тоже нечетно и поэтому взаимно просто с 2^n. Значит, если произведение $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ делится на 2^n, то на 2^n должен делиться первый множитель.

34. Пусть из города A нельзя добраться до города B. Тогда пусть из города A можно добраться до n городов. В этом случае из города B можно добраться не более, чем до $18-n$ других городов. Поэтому общее число дорог не больше, чем $n(n+1)/2+(18-n)(19-n)/2$. Легко убедиться, что при $0 \leqslant n \leqslant 18$ это меньше 172.

35. См. задачу 27.

36. Обозначим заряд аккумулятора через x. Тогда скорость разрядки при разговоре равна $x/6$, в режиме ожидания — $x/210$. Пусть поезд ехал t часов. Тогда $x = (t/2)\cdot(x/6)+(t/2)\cdot(x/210)$, откуда $t = 35/3$. Отсюда ответ: поезд ехал 11 ч 40 мин.

37. Пусть F — середина CM, а AL пересекает DK и BM в точках G и H соответственно. Из условия следует, что $MDGH$ — параллелограмм, поэтому $GH = HL$. AL — средняя линия $\triangle MCB$ (проходит через середину BC и параллельна MC), поэтому $MH = HB$. Из того же треугольника: $HL = CM/2 = CF$, поэтому $CM = GL$ и параллельны, а $CFHL$ — параллелограмм, в котором $MG||CL$. В $\triangle HAB$ отрезок GK — средняя линия, откуда $AG = GH = MD$ и с учетом $AG||MD$ получим, что $MDAG$ — параллелограмм, $AD||MG$. Но $MG||CL$ (или $MG||BC$), из чего $AD||BC$. К тому же AB не параллельна CD (пересекается с $AL||CD$), поэтому $ABCD$ — трапеция.

38. См. задачу 30.

39. См. задачу 32.

40. Проведем прямую через эти точки. В одной из полуплоскостей лежит три вершины пятиугольника(из которых хотя бы две не лежат на этой прямой). Отрезаем этот треугольник и получаем нужное разбиение.

41. Общее количество лжеконтролеров и лжекондукторов в пять раз меньше количества необычных пассажиров (то есть контролеров, кондукторов, лжеконтролеров, лжекондукторов). Следовательно, количество необычных пассажиров кратно 5. Аналогично, количество кондукторов и лжекондукторов в восемь раз меньше количества необычных пассажиров, следовательно, количество необычных пассажиров кратно 8. Таким образом, количество необычных пассажиров кратно 40 и при этом не превосходит 60. Значит, всего имеется 40 необычных пассажиров, а остальные 20 пассажиров обычные. Ответ: 20.

42. Проведем CL — биссектрису угла C. Заметим, что она будет параллельна прямой DE, так как если угол $\angle BED = \alpha$, то угол $\angle ACB = 2\alpha$, следовательно $\angle LCB = \angle DEB = \alpha$. Из параллельности прямых следует подобие треугольников BDE и BLC, следовательно, $\dfrac{BD}{DL} = \dfrac{BE}{EC} = 2$. Пусть $BD = x$, тогда DL будет равно $\dfrac{x}{2}$ и $BL = BD + DL = x + \dfrac{x}{2} = \dfrac{3x}{2}$. Так как $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{1}{2}$, то $DA = 2x$, следовательно, $AB = 3x$, откуда $AL = AB - BL = 3x - \dfrac{3x}{2} = \dfrac{3x}{2}$, следовательно, $AL = BL$. Значит CL является биссектрисой и медианой, следовательно, треугольник равнобедренный.

43. Пусть $F(n)$ — число способов, которыми можно вложить n писем L_1, L_2, $\ldots$, L_n в n конвертов K_1, K_2, $\ldots$, K_n так, чтобы ни одно письмо L_i не попало в «свой» конверт K_i. Требуется вычислить $F(5)$. Предположим, что, перепутав письма и конверты, мы вложили письмо L_1 в конверт K_i $(i \neq 1)$. Возможны два случая. а) Письмо L_i попало в конверт K_1. Тогда остальные 3 письма (ошибочно) вложены в 3 остальных конверта, что можно сделать $F(3)$ способами. Поскольку K_i может быть любым из четырех конвертов K_2, K_3, K_4, K_5, то разложить пять писем по пяти конвертам так, чтобы письмо L_1 попало в конверт K_i $(i \neq 1)$, письмо L_i — в конверт K_1 и остальные письма так же остались в «чужих» конвертах, нам удастся $4 \cdot F(3)$ способами. б) Письмо L_i не попало в конверт K_1. Условимся на минуту считать, что письмо L_i должно быть отправлено в конверте K_1. Тогда ни одно из писем L_2, L_3, L_4, L_5 не попало в свой конверт. Разложить в полном беспорядке четыре письма по четырем конвертам можно $F(4)$ способами, а K_i, как и прежде, может быть любым из четырех конвертов. Следовательно, разложить пять писем по пяти конвертам так, чтобы письмо L_1 попало в конверт K_i $(i \neq 1)$, а письмо L_i не попало в кон-

верт K_1 и остальные письма так же оказались в «чужих» конвертах , нам удастся $4 \cdot F(4)$ способами. Поскольку случаи а) и б) исчерпывают все возможные варианты ошибочного распределения писем по конвертам, то $F(5) = 4F(4) + 4F(3)$. Аналогично $F(4) = 3F(3) + 3F(2)$ и $F(4) = 2F(2) + 2F(1)$. Поскольку ясно, что $F(1) = 0$ и $F(2) = 1$, то приведенные выше соотношения позволяют последовательно вычислить $F(3) = 2$, $F(4) = 9$, $F(5) = 44$.

44. $a^4+b^4 \geqslant 2a^2b^2$, поэтому $2(a^4+b^4)+17 \geqslant 4a^2b^2+17 > 4(a^2b^2+4) \geqslant 16ab$.

45. Предположим, что два из заданных отрезков $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (например, a_1 и a_2) не лежат на одной прямой и поэтому имеют лишь одну общую точку A. Если a_k — любой из остальных отрезков, то по условиям задачи тройка отрезков a_1, a_2, a_k имеет общую точку. Следовательно, отрезок a_k должен содержать точку A, то есть A — общая точка всех отрезков. Если рассмотренное предположение не выполняется (любые два отрезка лежат на одной прямой), то все заданные отрезки лежат на одной и той же прямой. Поскольку любые три из них имеют общую точку, то и любые два из них так же имеют общую точку. Чтобы доказать существование общей точки у всех отрезков, достаточно доказать следующее утверждение: если отрезки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geqslant 2$) лежат на одной прямой и любые два из них имеют общую точку, то существует точка принадлежащая всем отрезкам. Докажем это утверждение методом математической индукции: а) при $n = 2$ утверждение заведомо верно; б) предположим, что оно верно при $n = k \geqslant 2$; в) тогда оно должно выполняться и при $n = k + 1$. По предположению (б) отрезки $a_1, a_2, \ldots, a_k$ имеют общую точку P. Докажем, что существует точка, принадлежащая отрезкам $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. Пусть M и N — концы отрезка a_{k+1}. Рассмотрим возможные положения точки P относительно точек M и N. Если точка P лежит между точками M и N или совпадает с одной из них, то P — общая точка отрезков $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. Если точка M расположена между точками P и N, то M — общая точка отрезков $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. Действительно, каждый из отрезков a_1, a_2, $\ldots$, a_k содержит точку P, а так же (в силу предположения) некоторую точку Q отрезка MN и, следовательно, должен содержать целый отрезок PQ, а точка M принадлежит отрезку PQ. Наконец, как показывают аналогичные рассуждения, если точка N находится между M и P, то N — общая точка отрезков $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. Итак, из (а) и (б) следует, что утверждение выполняется при любом $n \geqslant 2$.

46. Поместим всех в одну комнату. Выберем любого человека A и удалим

из комнаты всех, кто с ним знаком. Останется не менее 89 человек (не считая A) и никто из них не знаком с A. Из них выберем человека B, после чего удалим из комнаты всех, кто с ним знаком. Останется не менее 78 человек, и все они не знакомы с A и B. Снова выберем из них человека (C), удалим из комнаты его знакомых, и так далее. Продолжая этот процесс, наберем 10 человек, никакие двое из которых не знакомы.

47. Сумма равна $n(n+1)/2$. Удвоенная сумма равна $n(n+1)$ и не может заканчиваться на 4 или 8 (перебор по последней цифре n).

48. Пусть M — середина AC. Тогда MK — средняя линия $\triangle ABC$, откуда $MK || AB$, $MK \perp CH$. Легко видеть, что MK разбивает CH на две равные части, а треугольники MCK и MHK симметричны относительно MK (отсюда $\triangle MHK$ — прямоугольный). Окружность, построенная на MK как на диаметре проходит в том числе через точки C, K, H (поэтому искомая), а ее радиус равен $MK/2 = AB/4 = 2,5$.

49. Рассмотрим всех сотрудников кроме Тедди; назовем их интересными. Заметим, что Тедди послали письма те, у кого нечетное число интересных знакомых. Но в любом коллективе количество людей с нечетным числом знакомых четно (так как сумма всех количеств знакомых вдвое больше общего количества знакомств). Поэтому Тедди получил четное число писем.

50. Отметим на луче CB такую точку N, что $\angle KNC = \angle KMB = \angle BAC$. Тогда $KN = KM$. Из параллельности прямых KL и BC следует равенство соответственных углов $\angle AKL = \angle NCK$. Так как суммы углов в треугольниках KNC и ALK равны, то выполняется равенство углов $\angle ALK = \angle NKC$. Таким образом, $\triangle ALK = \triangle KNC$ по второму признаку равенства треугольников. Тогда $AL = KN$ как соответствующие элементы в равных треугольниках. Вместе с доказанным выше это означает, что $AL = KM$.

51. Опустим из M перпендикуляры MK и ML на стороны AB и BC соответственно. Так как BM — биссектриса угла B, то $MK = ML$. Углы треугольника LMC равны $90°, 60°$ и $30°$, значит, его катет ML равен половине гипотенузы MC. Пусть N — середина MC, тогда $MN = ML = MK$. Отрезок AN — медиана, биссектриса и высота в равнобедренном треугольнике AMC, в частности $\angle ANM = 90°$. Теперь заметим, что AMK и AMN — прямоугольные треугольники с общей гипотенузой AM и равными катетами MK

и MN, значит, они равны. В частности $\angle MAK = \angle MAN$, откуда $\angle MAC = 2\angle MAN = 2\angle MAB$.

Теперь забудем все дополнительные построения и посчитаем углы. Пусть $\angle MAB = \alpha$, тогда $\angle MAC = 2\alpha, \angle MCA = 90^\circ - \alpha$. Значит сумма углов A и C треугольника ABC равна $\angle MAB + \angle MAC +$ $+\angle MCA + \angle MCB = \alpha + 2\alpha + (90^\circ - \alpha) + 30^\circ = 120^\circ + 2\alpha$. Отсюда $\angle B = 60^\circ - 2\alpha$, $\angle MBA = \frac{1}{2}\angle B = 30^\circ - \alpha$ и $\angle AMB = 180^\circ - \angle MAB -$ $-\angle MBA = 180^\circ - \alpha - (30^\circ - \alpha) = 150^\circ$.

52. Пусть у Гарри было n животных. Легко понять, что при каждой операции количество мышат удваивается по модулю n. Действительно, если у Гарри в какой-то момент было p мышат и q лягушат, то после применения операции у него будет $2p$ мышат, если $p < q$ (назовем такие превращения превращениями первого типа), и $p - q = p - (n - p) = 2p - n$ мышат, если $p < q$ (превращения второго типа). В обоих случаях остаток от деления количества мышат на n — удвоился. Значит, после семнадцати ходов количество мышат будет равно $2^{17} - nk$, где k — число превращений второго типа. Поскольку это вдвое больше, чем количество остальных животных, получаем уравнение $2^{17} - nk = 2(n - (2^{17} - nk))$, откуда $3 \cdot 2^{17} = n(3k + 2)$, поэтому $n = 3 \cdot 2^s, 0 \leqslant s \leqslant 16$. Ясно, что если $s < 16$, то мышат было вдвое больше, чем лягушат уже на $(s+1)$-м ходу, то есть раньше, чем сказано в условии. Значит, у Гарри было $3 \cdot 2^{16}$ животных.

53. Обозначим эти трехчлены $f(x), g(x)$ и $h(x)$, а их старшие коэффициенты — a, b и c. Можно считать, что $a > b > c$. Заметим, что трехчлен $f(x) - g(x)$ имеет ровно один корень и его старший коэффициент равен $a - b > 0$. Тогда $f(x) - g(x) = (a - b)(x - x_1)^2$, откуда $f(x) \geqslant g(x)$ для всех x. Аналогично, $g(x) \geqslant h(x)$. Таким образом, $f(x) \geqslant g(x) \geqslant h(x)$ для всех x. Но $f(x_0) = h(x_0)$ в некоторой точке x_0. Тогда значения всех трехчленов в точке x_0 совпадают.

54. Предположим противное. Тогда наше девятизначное число x представимо в виде $x = a^2$, где a так же оканчивается на 5, то есть $a = 10b + 5$, откуда $x = 100b(b + 1) + 25$, поэтому у числа x предпоследняя цифра 2. Далее простым перебором легко убедиться, что число вида $b(b+1)$ может оканчиваться лишь на 0, на 2 или на 6. Но 2 уже встретилось на предпоследнем месте, а нуля вообще быть не может. Значит, третья справа цифра в записи x есть 6. Отсюда $x = 1000c + 625$. Но тогда a делится на 25, откуда $a = 100d \pm 25$ и $x = 10000d^2 \pm 5000d + 625$. Зна-

чит, четвертая цифра в записи x или 0 или 5. И то и другое приводит к противоречию.

55. Рядом с цифрой 1 и цифрой 3 может стоять только цифра 2, поэтому в каждом из рассматриваемых десятизначных чисел каждая вторая цифра — двойка. На каждое из оставшихся пяти мест можно поставить либо единицу, либо тройку. Количество способов это сделать равно $2^5 = 32$. Кроме того, мы можем выбрать, будут ли двойки стоять на четных или нечетных местах. Поэтому полученное количество способов нужно удвоить. Ответ: 64 способа.

56. Стаканы, стоящие на четных местах, покрасим в красный цвет, а остальные — в белый. Каждая операция позволяет перевернуть два стакана одного цвета. Поэтому четность количества стаканов одного цвета, стоящих вниз дном, не изменяется. Вначале вниз дном не стоит ни одного стакана, значит, для того чтобы все стаканы оказались перевернутыми, необходимо, чтобы стаканов каждого цвета было четно, то есть N должно делится на 4. Если N делится на 4, то очевидно, что все стаканы можно перевернуть. Ответ: при N кратных 4.

57. Заметим, что $x^2 = ([x]+\{x\})^2 = [x^2]+2[x]\{x\}+\{x\}^2 = [x]^2+200+\{x\}^2$. Очевидно, $0 < \{x\}^2 < 1$. Учитывая, что 200 и $[x]^2$ — целые числа, получаем $[x^2] = [x]^2 + 200$ и следовательно $[x^2] - [x]^2 = 200$.

58. Очевидно, что вершины дерева можно раскрасить в два цвета так, чтобы соседние вершины были разных цветов. При этом расстояние между вершинами одинакового цвета четно, а между вершинами разного цвета — нечетно. Пусть у нас k вершин одного цвета, тогда количество вершин другого цвета равняется $25-k$, а количество нечетных расстояний между парами вершин дерева должно быть равно $k(25-k)$, то есть четному числу. Следовательно, вся сумма расстояний обязательно четна и не может быть равна 1225.

59. Пусть число l получается из числа n изменением на k процентов (n, l — натуральные, k — целое). В этом случае $l = n + \dfrac{n \cdot k}{100} = \dfrac{100n+nk}{100} = \dfrac{n(100+k)}{100}$. Тогда, если n и 100 взаимно просты, то l делится на n. Поэтому если $n = 7$, то следующее число l должно делится на 7, но больше среди чисел от 1 до 10 таких нет. Значит 7 может быть только последним. Аналогично, 9 может быть только последним, но на последнем месте может быть только одно число, поэтому требуемая расстановка невозможна.

60. Пусть I — центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$. Тогда I лежит на биссектрисах углов $\angle XAD$ и $\angle YDA$. Положим $\alpha = \angle XAI = \angle IAD$, $\beta = \angle YDI = \angle IDA$ и $\varphi = \angle AXY = \angle DYX$. Заметим, что $2\alpha+2\beta+2\varphi = 360^\circ$ (сумма углов $ADYX$). Следовательно, $\alpha+\beta+\varphi = 180^\circ$. Отсюда заключаем, что $\angle YID = \alpha$ и $\angle XIA = \beta$. Поэтому треугольники AXI и IYD подобны по трем углам. Значит, $AX/IY = IX/DY$, откуда $AX \cdot DY = IX \cdot IY$. Аналогично устанавливается, что $BX \cdot CY = IX \cdot IY$. Значит $AX \cdot DY = BX \cdot CY$ и $AX/BX = CY/DY$.

61. Последовательно выпишем в строку 41 число: пятое, четвертое, третье и второе число первой строки, а затем числа из первого столбца таблицы — e_1, d_1, c_1, b_1, a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{36}, a_{37}. Заметим, что выписанные числа идут в невозрастающем порядке. Действительно, для первых пяти чисел это выполнено по условию. Кроме того $a_k \geqslant a_{k+1}$, ибо $a_k = b_{k+1} \geqslant a_{k+1}$. По принципу Дирихле среди 41 числа от 1 до 10 найдется число, встречающееся хотя бы пять раз, а поскольку последовательность чисел не возрастает, то эти пять одинаковых чисел будут идти подряд. Пусть a_k — последнее число в этой пятерке, тогда в k-й строке все числа равны.

62. Пусть хорда AC пересекает радиус OC в точке M, а хорда DE хорду BC в точке N. Рассмотрим треугольники AOC и DBC. Они равнобедренные, следовательно, $\angle ACO = \angle CAB$ и $\angle DCB = \angle CDB$. Но $\angle CAB = \angle CDB$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Поэтому эти треугольники подобны, а так как $\angle CAM = \angle CDN$ (вписанные и опирающиеся на дугу CE), то точка M делит отрезок OC в том же отношении, что и точка N делит отрезок BC.

63. См. задачу 55.

64. Заметим, что число минут времени прибытия z равно либо $x+y$, либо $x+y-60$, а так как $x+y < 24+24 < 60$, то $z = x+y$. Пусть за время нахождения в пути новые сутки наступали k раз. Тогда число часов времени прибытия $y = x + z - 24k$. Из полученных равенств следует, что $x = 12k$, а так как $x < 24$, либо $x = 0$, либо $x = 12$. Такие значения x действительно возможны, что показывают следующие примеры: $x = 0$, $y = z = 15$ и $x = 12$, $y = 15$, $z = 27$. Ответ: $x = 0$ либо $x = 12$.

65. Докажем сначала, что не может быть сумма цифр 1. Действительно, число $3n^2 + n + 1$ всегда нечетное, значит сумма цифр 1 может быть только если $3n^2 + n + 1 = 1$, что не выполняется при натуральных n.

Докажем теперь, что сумма цифр не может быть 2. Предположим противное. Так как $3n^2+n+1$ нечетное, сумма цифр будет равна 2 только если $3n^2+n+1 = 100...01 = 10^k+1$. Откуда $n(3n+1) = 10^k$. Числа n и $3n+1$ взаимно просты, следовательно либо $n = 1$, либо $n = 2^k$, либо $n = 5^k$, либо $n = 10^k$. Очевидно, что первый и последний случаи невозможны. Если $n = 5^k$, то $3n+1 = 2^k$, но $3n+1 > n$, значит $2^k > 5^k$, чего быть не может. Если же $n = 2^k$, то получаем $3n + 1 = 3 \cdot 2^k + 1 = 5^k$. Перебрав остатки при делении на 3 и на 5 получим, что это равенство так же невозможно. Значит сумма цифр не может быть равна 2. Осталось заметить, что если $n = 8$, то $3n^2 + n + 1 = 201$ — число с суммой цифр 3. Ответ: 3.

66. Возможно. На каждом шаге достаточно заменять первую цифру и последовательно одну из последующих.

67. Предположим противное. Это значит, что каждая точка квадрата покрыта не более чем двумя треугольниками. Т.е. сумма их площадей не превосходит 2. Пусть стороны треугольников a_1, a_2, $\ldots$, a_{2008}. По условию $3(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2008}) = 300$. Сумма площадей треугольников тогда равна $\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_{2008}^2)$. По неравенству для среднего квадратичного и среднего арифметического имеем $a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_{2008}^2 \geqslant \dfrac{(a_1 + a_2 + \ldots a_{2008})^2}{2008} = \dfrac{100^2}{2008}$. Значит, сумма площадей треугольников не меньше чем $\dfrac{\sqrt{3} \cdot 100^2}{4 \cdot 2008} > 2$. Получили противоречие.

68. Преобразуем неравенство: $(x+1)(x-1)^2+(y+1)(y-1)^2+4(xy-1) \geqslant 0$. Из условий: все слагаемые неотрицательны, а неравенство верно.

69. Преобразовав квадратный трехчлен, получим равенство $(2x - 9)(x + 4) = p^2$. Так как p простое, то возможны лишь следующие ситуации: $x + 4 = \pm 1$, $x + 4 = 2x - 9 = \pm p$, $2x - 9 = \pm 1$. Осталось решить эти уравнения. Ответ: 5; 13.

70. Пусть центры дисков — это точки O_1, O_2, O_3. Дуги по которым шнур касается с дисками — A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 соответственно (дуги названы по часовой стрелке). Так как диски одинаковые, то нам достаточно доказать, что $\angle A_1O_1B_1 + \angle A_2O_2B_2 + \angle A_3O_3B_3 = 360°$. Очевидно, что $O_1B_1A_2O_2$ и $O_3B_3A_1O_1$ — прямоугольники, $\angle B_1O_1O_2 = \angle A_1O_1O_3 = 90°$. Значит $\angle A_1O_1B_1 = 180° - \angle O_3O_1O_2$. Аналогично $\angle A_1O_1B_1 + \angle A_2O_2B_2 + \angle A_3O_3B_3 = 3 \cdot 180° - (\angle O_3O_1O_2 + \angle O_1O_2O_3+$

$+\angle O_2O_3O_1) = 360^\circ$. Что и требовалось доказать.

71. Посмотрим, что осталось после последнего хода. Так как все кучки различны и в них всего 15 спичек, то кучек не может быть больше пяти. Так же перебором легко убедиться, что их не может быть меньше пяти. Следовательно после последнего хода останется 5 кучек, а так как при каждом ходе количество кучек увеличивается на одну, то выиграет второй игрок. Ответ: второй игрок.

72. Пусть катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза — c. Найдем стороны квадратов. Сторона квадрата, две стороны которого лежат на катетах, находится из соотношения $\dfrac{a}{a-x} = \dfrac{b}{x}$. Откуда $x = \dfrac{ab}{a+b}$. Сторона второго квадрата выражается из соотношения $\dfrac{y}{b} = \dfrac{a - ay/c}{c}$, то есть $y = \dfrac{abc}{c^2+ab}$. Сравним $y = \dfrac{abc}{c^2+ab}$ и $x = \dfrac{ab}{a+b}$. Знак неравенства здесь такой же, как и между $c(a+b)$ и c^2+ab. Составим разность $c^2+ab-c(a+b) = (c-a)(c-b)$. Оба множителя положительные, значит $c^2+ab > c(a+b)$, а следовательно $x > y$. Ответ: больше квадрат, стороны которого лежат на катетах.

73. Пусть какая-то точка A не покрыта. Проведем из нее две прямые, параллельные сторонам прямоугольников. Каждая из них пересекает стороны треугольника в двух точках (всего четыре). Какие-то две из них (пусть C и D) принадлежат одному прямоугольнику P. Если это две точки одной прямой, то все точки отрезка, соединяющего C и D, включая A, покрыты P. Если это точки разных прямых, то если точка A не покрыта P, то граница P проходила бы между точек A и C и тогда C и D лежали бы в разных полуплоскостях, и одна из них прямоугольнику P не принадлежала бы.

74. Возьмем 2007 точек (вершин), соответствующих городам. Две вершины a и b соединим ребром тогда и только тогда, когда есть путь из города a в город b. По условию в построенном графе между любыми двумя вершинами есть хотя бы одно ребро. Индукцией по числу вершин доказывается существование в нем пути, проходящего по всем вершинам. Пронумеруем вершины $a_1, \ldots, a_{2007}$ в том порядке, в котором они впервые появляются на пути. Легко видеть, что в a_{1004} можно попасть из $a_1, \ldots, a_{1003}$ и из a_{1004} можно попасть в $a_{1005}, \ldots, a_{2007}$, поэтому город, соответствующий a_{1004}, — искомый.

75. Очевидно, $x^2 \leqslant xy$ и $xz \leqslant yz$. Складывая эти неравенства, получаем

$x^2 + 2xz \leqslant 1$. Если $x \neq 0$, то $xz < 1/2$, а если $x = 0$, то $xz = 0$.

76. Прямая BQ — биссектриса внешнего угла треугольника ABP. Рассмотрим точку A', симметричную точке A относительно прямой BQ, она попадет на луч PB. Аналогично, точка D', симметричная D относительно прямой PC, попадет на луч QC. Так как $\angle A'QP + \angle D'PQ = 2\angle CPQ + 2\angle BQP = 180°$, то $PD'A'Q$ — трапеция. А так как $\angle BA'Q = \angle BAQ = \angle CDP = \angle CD'P$, то трапеция равнобедренная. Отсюда $AB + BP = A'P = D'Q = DC + CQ$.

77. Пусть $a = k$, $b = c = 1$. При этом $n = 2k + 1$. Таким образом, любые нечетные числа, большие 1, представляются в указанном виде. Умножим a, b и c на одно и то же четное число, при этом n умножится на это же число, поэтому в указанном виде представляются все числа, имеющие нечетный делитель. Докажем, что числа не имеющие нечетного делителя (это степени двойки) не представляются в указанном виде. Пусть n — наименьшая степень двойки, которая представляется в таком виде. Если среди a, b и c есть два четных числа, то их можно разделить на 2 и таким образом представить число $n/2$, что противоречит предположению. Если четных чисел нет или есть только одно, то n нечетно. Ответ: все числа, кроме степеней двойки.

78. Так как $\angle ACH > 30°$, $AH < AC/2 = AM$. Поэтому точка H', симметричная H относительно прямой AL, попадет на отрезок AM. Тогда $LM + MA > LH' + H'A = LH + HA$.

79. Выберем 4 первых столбца. Пусть $a_1, \ldots, a_8$ — количества фишек в пересечениях этих столбцов с первой, $\ldots$, восьмой строчками. Докажем, что сумма каких-то четырех из этих восьми чисел делится на 4. Действительно, из них можно выбрать не менее 3 пар чисел одной четности (останется не более одного четного и одного нечетного числа). Какие-то две суммы чисел в этих трех парах дают одинаковый четный остаток от деления на 4, тогда сумма этих четырех чисел будет делиться на 4.

80. Разобьем числа от 1 до $2n$ на $n + 1$ группу $G_0, \ldots, G_n$, где в группу G_k входят все числа делящиеся на 2^k, но не делящиеся на 2^{k+1}. Числа из разных групп в сумме не могут давать степень двойки, поэтому, мы можем независимо покрасить числа в каждой группе. Докажем, что каждую группу можно покрасить двумя способами (на примере G_0 — для остальных групп доказательство аналогично). Пусть число 1 синее. Докажем, что цвет 1 однозначно определяет цвета всех остальных

нечетных чисел. Пусть это верно для нечетных чисел, меньших 2^m (это очевидно для $m = 1$). Рассмотрим любое нечетное число t от 2^{m+1} до $2^{m+1} - 1$. Тогда $2^{m+1} - t$ — нечетное число, меньшее 2^m, цвет которого определен, следовательно, цвет t также однозначно задан — он отличается от цвета $2^{m+1} - t$. Итак, каждую из групп $G_0, \ldots, G_n$ мы можем покрасить двумя способами, покраски разных групп независимы, следовательно, всего есть 2^{n+1} вариантов покраски (и, соответственно, выбора подмножества).

81. Митя не мог провести один и тот же день и в Смоленске, и в Вологде, поэтому месяц начинался во вторник (иначе первый вторник и первый вторник после первого понедельника совпадут). Аналогично и второй месяц должен начинаться во вторник. Это возможно только в случае, когда один месяц — февраль, а другой — март, причём год не високосный. Отсюда уже легко получить, что в Смоленске Митя был 1 февраля, в Вологде — 8 февраля, во Пскове — 1 марта, во Владимире — 8 марта.

82. Перед последним зачеркиванием должно быть трехзначное число вида $21\star$, делящееся на 7. Это могло быть 210 или 217. Если это было 210, то перед умножением на 7 было записано число 30, и тогда первым зачеркиванием должно быть трехзначное число вида $30\star$, делящееся на 13, но таких чисел нет. Если перед последним зачеркиванием было число 217, то перед умножением на 7 было записано число 30, а первым зачеркиванием должно быть трехзначное число вида $31\star$, делящееся на 13. Такое число единственное — 312, а значит первоначальное число равно 24.

83. Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle C = 3\alpha$, $\angle ACD = \beta$. Тогда $\angle CDB = \alpha + \beta$, $\angle DCB = 3\alpha - \beta$. Из равнобедренности треугольника CBD следует, что $\alpha + \beta = 3\alpha - \beta$, откуда $\alpha = \beta$, треугольник ADC равнобедренный и $CD = AD = 4$.

84. Очевидно, что одного хода не хватит. После двух ходов найдутся по крайней мере три карточки, перевернутые по два раза, а значит, эти карточки будут в исходном положении. Приведем пример переворачивания всех карточек за три хода. Пронумеруем карточки цифрами от 1 до 7 и перевернем за первый ход карточки с номерами $1, 2, 3, 4, 5$, за второй ход — $1, 3, 4, 5, 6$, за третий ход — $1, 3, 4, 5, 7$. Ответ: 3 хода.

85. Не могли. У какого-то должно оказаться число 100. Эта комбинация цифр у другого может быть получена на стыке числа. оканчивающе-

гося на 10, и числа 0. Тогда рассмотрим число 200. Для того, чтобы такую комбинацию повторить во втором длинном числе, тоже требуется число 0, но оно уже задействовано.

86. См. задачу 7.

87. Пусть $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{ef}$ — данные числа. Пусть $S = \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef}$. Из условия несложно получить, что $S = \overline{ab}+\overline{ba} = \overline{cd}+\overline{dc} = \overline{ef}+\overline{fe}$. Так как $\overline{ba}$ при делении на 9 дает тот же остаток, что и $\overline{ab}$, то остатки от деления на 9 чисел S и $2\overline{ab}$ совпадают. Аналогично для остальных пар чисел, откуда легко получить, что $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{ef}$ дают одинаковые остатки от деления на 9. А так как при этом сумма двух чисел дает при делении на 9 тот же остаток, что и третье, то это возможно лишь когда все три числа делятся на 9. Тогда сумма цифр каждого двузначного числа равна 9, а сумма всех чисел $S = \overline{ab}+\overline{cd}+\overline{ef} = \overline{ab}+\overline{ba} = 11(a+b) = 99$. Пример на 99: 18, 27, 54.

88. Пусть в турнире участвовало n шахматистов. Тогда всего в турнире было сыграно $n(n-1)$ партий, и в каждой разыгрывалось 1 очко. Поэтому при равенстве всех результатов все участники набрали по $n-1$ очку. Каждый шахматист сыграл белыми фигурами $n-1$ партию, и количество выигранных ими партий белыми было равно одному из n чисел: $0, 1, \ldots, n-1$. Предположим, что утверждение задачи неверно: все выиграли разное число партий белыми. Тогда реализованы все возможные варианты от 0 да $n-1$. Рассмотрим двух участников турнира: A, выигравшего $n-1$ партию белыми фигурами, и B, не выигравшего ни одной такой партии. Игрок A набрал $n-1$ очко, играя белыми, так что все свои партии черными, в том числе и с B, он должен был проиграть. Но B не выиграл белыми ни одной партии, значит, не мог выиграть и эту. Пришли к противоречию.

89. Красная фигура лежит между синей и зеленой, желтая — не рядом с синей, поэтому есть два варианта расположения фигур по цвету: «синяя, красная, зеленая, желтая» или «желтая, зеленая, красная, синяя». Первый вариант неверен (желтая фигура не может лежать на правом крае), поэтому расположение цветов определяется однозначно. Далее последовательно определяем, что ромб зеленый (лежит справа от желтой фигуры), треугольник красный (не с краю осталось только одно место), круг синий (правее треугольника и ромба), желтая фигура теперь может быть только прямоугольником. Расположение фигур и их цвета теперь определены.

90. Из первого уравнения: М $=1$, из второго: А $\leqslant 3$, откуда А равно 2 или 3. Если М $=1$, А $=2$, то МА $\cdot$ МА $= 12 \cdot 12 = 144$, откуда И $=$ Р (противоречие). Тогда А $=3$, а система имеет вид: $13 \cdot 13 = 169$, $31 \cdot 31 = 961$.

91. В треугольнике BKD отрезок EF — средняя линия, поэтому $BE = EK$. Аналогично в треугольнике EKD отрезок CF — средняя линия, поэтому $EC = CK$. Отсюда $BE : EC = 2 : 1$.

92. В холодильник положили $35/100 = 7/20$ всей рыбы. Осталось $13/20$ всей рыбы. Коту отдали $5/13$ от $13/20$ — $5/20$ всей рыбы. Таким образом, рыбак съел $8/20$ всей рыбы. Это больше, чем 3 рыбы, потому что даже 3 самых тяжелых рыбы — это только $7/20$. Но это меньше, чем 5 рыб, потому что средний вес даже трех самых маленьких рыб равен $5/60$ общего веса рыбы, значит 5 рыб должны весить не меньше, чем $25/60$ общего веса рыбы, а это больше, чем $8/20$. Получается, что рыбак съел 4 рыбы, а всего рыб было $3+3+4 = 10$.

93. Ответ: 81649. Несложным перебором из двузначных квадратов (16, 25, 36, 49, 64, 81) выстраивается наиболее длинная цепочка.

94. Ответ: 20%. Пусть акционер X владеет наибольшим процентом акций. Если у него более 20% акций, то у остальных 24 человек — менее 80%, тогда по принципу Дирихле существуют 15 акционеров (с самыми наименьшими количествами акций), у которых менее $80\% \cdot 15/24 = 50\%$, что противоречит условию. Поэтому у X не больше 20% акций. Пример на 20%: у X 20% акций, у остальных поровну.

95. Не могут. Пусть площадь треугольника равна S. Тогда длины сторон равны $2S$, S, $2S/3$, что противоречит неравенству треугольника ($2S > S + 2S/3$).

96. См. задачу 46.

97. Пусть куплено m тетрадей по n рублей. Из условия следует, что $mn + m = 100$ или $m(n+1) = 100$. Таким образом, $n+1$ больше 1 и является нечетным делителем 100. У числа 100 два таких делителя (5 и 25), откуда получаем два ответа: $m = 20$ и $m = 4$.

98. По принципу Дирихле в первой строке есть хотя бы три клетки одного цвета. Без ограничения общности можно считать, что цвет этот синий, а указанные три синие клетки стоят в трех первых столбцах (иначе переставим столбцы так, чтоб это выполнялось). Если в квадрате нет четырех клеток синего цвета на пересечении двух строк и

двух столбцов, то в каждой из четырех оставшихся строк в первых трех столбцах должно быть хотя бы по две красные клетки. Но тогда легко видеть, что есть две строки, в которых эти две красные клетки стоят в одинаковых столбцах (и тогда эти красные клетки стоят на пересечении двух строк и двух столбцов).

99. Пусть команд семиклассников было n, тогда команд шестиклассников — $5n$. Шестиклассники сыграли $5n(5n-1)/2$ игр, поэтому одержали не менее $5n(5n-1)/2$ побед (уже в играх между собой). В свою очередь, семиклассники сыграли $n(n-1)/2$ игр между собой и $5n^2$ игр с семиклассниками, поэтому не могли одержать побед больше, чем данное количество игр. С учетом данных оценок и условия задачи легко получить неравенство: $5n(5n-1)/2 \leqslant 2\left(n(n-1)/2+5n^2\right)$, после преобразования которого получаем, что $n \leqslant 1$. Так как n натуральное, то $n = 1$, а в турнире участвовало 6 команд (пример удовлетворяющего условию турнира легко строится).

100. Упорядочим средние по величине числа в порядке убывания: $c_1 < < c_2 < c_3 < \ldots < c_{10}$. c_1 меньше, чем два наибольших числа его пятерки, откуда $c_1 \leqslant 48$. c_2 меньше c_1, два наибольших числа пятерки c_1 и два наибольших числа своей пятерки, откуда $c_2 \leqslant 45$. Аналогично $c_3 \leqslant 42$, …, $c_{10} \leqslant 21$, а сумма не может быть больше 48+45+42+…+21=345. Пример на 345: (1, 2, 48, 49, 50), (3, 4, 45, 46, 47), …, (19, 20, 21, 22, 23).

101. Пусть точка F симметрична точке C относительно прямой BE. Поскольку $BC = BF = CF$, а $BE \perp CF$, то $\angle BCE = 30°$, откуда $\angle BED = 180° - \angle BEC = 120°$.

102. Ответ: 270. Данное число должно делиться на 10, а полученное отбрасыванием последнего нуля число должно иметь делитель, оканчивающийся на 7. С учетом этих фактов минимальность данного числа показывается простым перебором.

103. Если каждая из сестер похудела на 8 кг, условие задачи выполнено. Другие значения невозможны, докажем это. Пусть какая-то из сестер похудела на $a < 8$ кг. Тогда жена ее брата похудела на $2a - 8 < a$ кг. Отметим каждую пару «толстяк-сестра» точкой, и из каждой пары проведем стрелку в ту, в которой состоит жена толстяка. Тогда, идя по стрелкам, мы когда-нибудь вернемся в исходную точку. Но по дороге величина похудания все время уменьшалась, и после возвращения она будет меньше исходной. Противоречие. Случай $a > 8$ кг разбирается

аналогично.

104. Выиграть может только тот игрок, который своим ходом поставит фишку в угол. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке. С каждым ходом цвет поля, на котором стоит фишка, меняется. Поскольку все угловые клетки доски с нечетной стороной того же цвета, что и центральная, поставить фишку в угол может только второй игрок.

105. См. задачу 89.

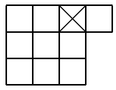
106. См. задачу 90.

107. См. задачу 91.

108. См. задачу 92.

109. См. задачу 93.

110. Выигрывает первый игрок. Для победы ему необходимо первым ходом поставить крестик в клетку, отмеченную на рисунке справа.



111. См. задачу 95.

112. См. задачу 46.

113. Заметим, что раз в конце у лодыря осталось 0 рублей, то до этого у него было 24, следовательно, до этого у него было 12. Продолжая и далее раскручивать задачу с конца мы придем к следующей цепочке: $24 \leftarrow 12 \leftarrow 36 \leftarrow 18 \leftarrow 42 \leftarrow 21$. Значит в начале у него был 21 рубль.

114. См. задачу 41.

115. Заметим, что каждый узел должен быть соединен не менее чем с тремя другими (иначе передача может оборваться), следовательно, соединений должно быть не меньше, чем $\dfrac{3 \cdot 10}{2} = 15$. Этот результат достигается, если соединить узлы следующим образом: 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-9, 9-10, 10-1, 1-6, 2-7, 3-8, 4-9, 5-10.

116. Обозначим через N_1 точку, симметричную точке N относительно точки O. Треугольники ONC и ON_1A равны по двум сторонам и углу между ними. Кроме того, угол $\angle N_1AM$ — прямой. Действительно, $\angle N_1AM = \angle N_1AO + \angle MAO = \angle ACB + \angle BAC = 90°$. Тогда, по теореме Пифагора $AM^2 + CN^2 = AM^2 + AN_1^2 = MN_1^2$. Значит, осталось доказать, что $MN_1 = MN$. Это следует из того, что прямоугольные треугольники N_1OM и NOM равны по двум катетам.

117. Заметим, если сумма цифр трехзначного числа делится на 13, то она равна либо 13, либо 26 (так так сумма цифр трехзначного числа не больше 27). Перебрав все возможные варианты получим, что таких чисел 72. Ответ: 72.

118. См. задачу 42.

119. См. задачу 84.

120. См. задачу 88.

121. Ответ: (10, 10, 2) и (12, 6, 4) с точностью до перестановок. Наибольшее из данных чисел не может быть больше 12 и меньше 9, дальше несложный перебор.

122. Рассмотрим какой-то фрукт в ряду, например апельсин. У него не более двух соседей. Следовательно, чтобы апельсины встречались в паре с тремя другими видами фруктов, необходимо не менее двух апельсинов. Аналогично для мандаринов, яблок груш. Значит, всего фруктов должно быть не менее восьми. Осталось привести пример для восьми фруктов: апельсин, мандарин, яблоко, груша, апельсин, яблоко, мандарин, груша. Ответ: 8.

123. Пусть K — середина BE, O — точка пересечения CD и AE. Тогда $KD||AE$ как средняя линия $\triangle EAB$. Но тогда по теореме Фалеса $CO = OD$. Из условия следует, что $\triangle AOD$ равнобедренный, поэтому $AO = OD = OC$. В треугольнике CAD медиана AO равна половине стороны, к которой она проведена, откуда следует, что этот треугольник прямоугольный и $\angle CAB = 90°$.

124. Можно выбрать не более одного из чисел $(1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2)$, не более одного из $(2{,}2 \cdot 2^2, 2 \cdot 3^2, 2 \cdot 4^2)$, не более одного из $(3, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 3^2)$, не более одного из каждой следующей пары: (5,20), (6,24), (7,28), (10,40). Уже необходимо отбросить не менее 14 чисел, поэтому больше 26 чисел выбрать нельзя. Пример для 26 чисел: 1, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40.

125. См. задачу 21.

126. Ответ: в любой из трех сходящихся в X граней по отрезку доползти до середины ребра, не содержащего вершины X, после чего по отрезку доползти в вершину Y. Идея решения: рассмотреть движение мухи по развертке куба на плоскости.

127. Второе утверждение не может быть верно, так как в этом случае верны и два других утверждения, что противоречит условию. Следовательно,

верными являются первое и третье утверждение, а второе — неверно. То есть, данное число меньше 72 и не меньше 71. Ответ: 71.

128. См. задачу 23.

129. Ответ: 16. Предположим, что удалось расставить по 5 ладей каждого цвета. Тогда не менее пяти горизонтальных и вертикальных рядов они держат под боем (легко проверить перебором). При этом ладьи разных цветов не могут пробивать один ряд. Но тогда после расстановки первых трех групп останется не более одного непробитого ряда, и четвертая группа будет пробивать ряды, пробитые ранее, тогда ладьи разного цвета будут друг друга. Противоречие. Пример для 4 ладей каждого цвета: одноцветные квадратики 2×2 вдоль диагонали.

130. Продолжим сторону CD за точку D на отрезок $DE = CD$. Отрезки AD и EO являются медианами треугольника $\triangle ACE$ и потому делятся точкой пересечения в отношении 2:1. Это означает, что отрезок EO проходит через точку K, через нее же проходит и третья медиана CF этого треугольника. Заметим, что $AE = AC$. Опустим из точки A перпендикуляр AG на CF. Поскольку $\angle ACG = 30°$, $AG = AC/2 = AE/2 = AF$, откуда $G = F$. В треугольнике ACE медианы AD и CF являются высотами, поэтому он равносторонний, откуда $KO = KD = 1$.

131. Какое-то из чисел равно 1 (иначе сумма всех чисел была бы не меньше $2n$). Соединим соответствующий город дорогой с одним из городов, помеченных числом, большим 1, после чего забудем про него, а число, соответствующее городу, с которым соединили город на данном шаге, уменьшим на 1. У нас осталось $n-1$ число с суммой чисел $2(n-2)$. Повторим с ними описанную операцию и т.д. В конце у нас останется два числа с суммой 2, то есть две единицы. Соединив соответствующие города, получим искомую систему дорог. Заметим, что нам никакие два числа нам не придется соединять дважды, потому что про один из двух только что соединенных городов мы тут же забываем.

132. Не может. Предположим противное, тогда возьмем произвольную окружность радиуса 1 и синюю точку A на ней. Проведем всевозможные окружности радиуса 1, проходящие через точку A, заметают на плоскости круг радиус 2 с центром в точке A. По условию он весь, кроме центра, должен быть выкрашен в красный цвет. Но тогда на окружности радиуса 1 с центром в точке A нет синих точек.

133. Пусть число n таково, что $11n = m^2$. Тогда в разложение чис-

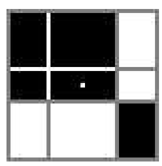
ла n на простые сомножители число 3 входит в нечетной степени, а все остальные простые числа — в четных степенях. Следовательно, $n = 11k^2$ для некоторого натурального k. Но тогда сумма $n + 11 = 11k^2 + 11 = 11(k^2 + 1)$ делится на 11, но не делится на 121 (потому что k^2 при делении на 11 не может давать остатка 10) и поэтому не может быть квадратом натурального числа.

134. Меньше, чем 2502, число a быть не может (иначе тогда $a+b+c+d \leqslant \leqslant 2501 + 2500 + 2499 + 2498 = 9998$). Для $a = 2502$ есть пример: $b = 2501$, $c = 2499$, $d = 2498$.

135. Поскольку вся картинка симметрична относительно перпендикуляра к отрезку DE, прямые LN и AC перпендикулярны к этому перпендикуляру и, следовательно, параллельны. Аналогично, $KN||CL$, поэтому $CLNK$ — параллелограмм. Тогда $2S_{ACLN} = 2S_{AON}+2S_{KON}+2S_{CKL}+ +2S_{KLN} = S_{AON} + S_{BKO} + S_{KON} + S_{LMN} + S_{CKL} + S_{LDM} + S_{KLN}+ +S_{MNE} = S_{AOBKCLDMEN} = 1$, откуда $S_{ACLN} = 1/2$.

136. Переставим столбцы так, чтобы все черные прямоугольники в первой строке шли подряд, начиная с левого края. Тогда при этом и во всех остальных строках черные прямоугольники будут идти подряд: в нечетных — с левого края, в четных — с правого. Также подряд будут идти во всех сроках и белые прямоугольники. Теперь переставим строки так, чтобы все бывшие нечетные шли подряд и все бывшие четные шли подряд. Тогда все черные прямоугольники сгруппируются в два (в левом верхнем и правом нижнем углу), и все белые — тоже (в правом верхнем и левом нижнем углу).

Докажем, что общая вершина двух черных прямоугольников при выполнении условия задачи лежит на одной из средних линий квадрата. Допустим, это не так. Пусть, например, центр квадрата — внутри черного прямоугольника. Разделим квадрат на 9 прямоугольников, как показано на рисунке справа (центр квадрата совпадает с центром центрального прямоугольника). Если убрать центральный черный прямоугольник, остальные черные будут равны соответствующим белым: два верхних — двум нижним, левый средний — правому среднему, правый нижний — левому нижнему.



Получается, что общая площадь черных прямоугольников больше общей площади белых на площадь центрального прямоугольника, а не равна ей, как должно быть по условию. Противоречие. Получили, что оба черных прямоугольника имеют сторону, равную 1, а сумма двух других сторон равна 2, откуда следует утверждение задачи. Аналогично для случая, когда центр квадрата лежит внутри белого прямоугольника.

137. См. задачу 41.

138. См. задачу 42.

139. См. задачу 117.

140. Из первого уравнения: $z = 3 - x - y$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим $x^2 + y^2 + 9 + x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2xy = 3$. Данное уравнение можно рассматривать как квадратное относительно x: $x^2 + (y - 3)x + (y^2 - 3y + 3) = 0$. Тогда его дискриминант $D = (y - 3)^2 - 4(y^2 - 3y + 3) = -3y^2 + 6y + 3 = -3(y - 1)^2 \leqslant 0$. Следовательно, уравнение имеет решение только если $D = 0$, то есть $y = 1$. Полученное квадратное уравнение имеет вид $x^2 - 2x + 1 = 0$, значит $x = 1$. Из первого уравнения системы получим, что и $z = 1$.

141. Получившееся число должно делиться на 7 (так как среди всех простых делителей 7 встречается один раз). Пример: $\dfrac{7 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 1} = 7$.

142. Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. По условию $S_{AOB} = 1$, $S_{BOC} = 2$, $S_{COD} = 3$. Очевидно, $AO : OC = S_{AOB} : S_{BOC} = 1 : 2$, но $AO : OC = S_{AOD} : S_{COD}$, откуда $S_{AOD} = 1,5$, а $S_{ABCD} = 7,5$.

143. См. задачу 115.

144. См. задачу 81.

145. Пусть число n удовлетворяет условию. Очевидно, что n заканчивается на 0, а при делении на 10 получится число, равное сумме цифр числа n и равное своей же сумме цифр, то есть однозначное (но не 0). Отсюда получаем ответ: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90.

146. См. задачу 81.

147. См. задачу 83.

148. См. задачу 84.

149. Пусть в третьем ряду сидит n человек. Так как средний возраст равен сумме возрастов, деленной на количество человек, то после пересаживания суммарный возраст детей на первом ряду увеличился на 12

недель, на втором ряду – увеличился на 24 недели, а на третьем ряду – – уменьшился на $4n$ недель. Поскольку сумма возрастов всех учеников изменится не могла, то $4n = 12 + 24$, откуда $n = 9$.

150. См. задачу 82.

151. См. задачу 7.

152. См. задачу 88.

153. Первые пять дней не могут быть четвергами, иначе мальчик дважды подряд дал бы одинаковые ответы. Если четвергом является шестой день, то мальчика зовут Борис, но тогда он и во вторник сказал бы «Борис», то есть правду. Поэтому четвергом является седьмой день. Тогда первый день является пятницей, в этот день он сказал правду, поэтому его зовут Андрей, этот же ответ он даст и на седьмой день.

154. Могло. Рассмотрим набор палочек (1, 2, 3, 5, 8). Разломав палочку длиной 8 на 5 и 3, мы сможем сделать наборы (1, 3, 3) и (2, 5, 5), удовлетворяющие условию.

155. Продолжим BM за точку M, отметим на данном луче точку F так, что $NM = MF$. В четырехугольнике $ANCF$ диагонали по построению точкой пересечения делятся пополам, поэтому $ANCF$ — параллелограмм, откуда $CF = AN = BC$, поэтому треугольник BCF равнобедренный. Из этого следует, что $\angle NBK = \angle CFB = \angle ANF = \angle BNK$. Таким образом, треугольник BKN равнобедренный.

156. Нет. 10 шахматистов играют $10 \cdot 9/2 = 45$ игр, суммарно набирают столько же очков. Из условия какие-то трое должны набрать 24,5 очков, остальные семеро — 20,5 очков, но они наберут $7 \cdot 6/2 = 21$ очко уже в играх между собой.

157. Предположим, что не найдется. Тогда у нас найдутся хотя бы три мандарина, тяжелее 200 г, либо хотя бы три мандарина, легче 100 г, но данные тройки мандаринов не подходят под условие.

158. См. задачу 15.

159. Состыкуем палочки Винни-Пуха так, чтобы получилась одна большая белая палочка. Аналогично из палочек Пятачка сделаем одну большую черную палочку. Расположим эти палочки одна под другой. Будем двигаться слева направо и каждый раз, как только на одной из большой палочек обнаружится стык, вторую разрежем в том же месте. В итоге большие палочки (черная и белая) будут разрезаны абсолютно

одинаково, и, разбив их снова на маленькие черные и белые палочки, мы легко разобьем их на требуемые пары.

160. Заметим, что если слон бьет ладью, то эта же ладья этого же слона бить не может. Аналогично наоборот: если ладья бьет слона, то этот слон не может бить эту же ладью. Рассмотрим любую ладью A. Она бьет какого-то слона, который бьет еще не меньше двух ладей, отличных от A. Значит, ладей (и слонов) не меньше 3. При $n = 3$ каждая ладья бьет не менее двух слонов, но тогда ее может бить не более одного слона; аналогично слона бьет не более одной ладьи. Тогда ладья не может бить двух слонов сразу, иначе на две оставшиеся ладьи останется единственный слон, а они тоже должны пробить не менее двух слонов. Поэтому случай $n = 3$ невозможен. Пример для $n = 4$ строится легко.

161. Нет. Например, если Вася задумал число 91, а Петя — число 100, то оба получили сумму 101.

162. См. задачу 19.

163. См. задачу 17.

164. См. задачу 122.

165. См. задачу 20.

166. См. задачу 127.

167. См. задачу 22.

168. См. задачу 23.

Условия задач квалификации

Математическая регата

Математическая регата — это командное соревнование по решению математических задач. В каждой команде участвует 4 человека. Регата проводится в несколько туров в каждом из которых каждой команде предоставляется список из 3–4 задач для коллективного письменного решения. Перед началом каждого тура командам сообщается время, отведенное для решения задач в данном туре, и стоимость задач в баллах.

Решения задач оформляются и сдаются для проверки жюри. Каждое решение сдается на отдельном листе, причем команда имеет право сдать только по одному варианту решения каждой из задач. Порядок оформления решений оглашается Жюри перед началом регаты.

Жюри проверяет предложенные командами решения и оценивает их в баллах, исходя из заявленной стоимости. Жюри имеет право оштрафовать команду (снятием баллов, лишением права на участие в данном туре, дисквалификацией игрока или команды) за шум или некорректное поведение.

Определение победителей и общее ранжирование команд производится исходя из общего количества набранных командами баллов. Порядок разрешения спорных ситуаций, возникающих при равенстве баллов у команд, сообщается командам до начала регаты.

Юниорский турнир

1.1 Грузовик едет со скоростью 65 км/ч, а за ним едет легковой автомобиль — со скоростью 80 км/ч. На каком расстоянии друг от друга эти автомобили будут через две минуты после того, как легковой автомобиль догонит грузовик?

1.2 Вася вырезал из картона треугольник, разрезал его на два треугольника и послал обе части Пете, который также сложил из них треугольник. Верно ли, что Петин треугольник обязательно равен Васиному?

1.3 В архипелаге каждый остров соединен мостом ровно с семью другими. Сколько в этом архипелаге островов, если мостов — 84?

2.1 Найдите наименьшее составное число, которое не делится ни на одно из натуральных чисел от двух до десяти.

2.2 Вася задумал число и прибавил к этому числу его сумму цифр. Петя также задумал число и тоже прибавил к нему его сумму цифр. В результате сложения у Васи и Пети получились одинаковые числа. Верно ли, что они задумывали одинаковые числа?

2.3 В шахматном турнире играли пять человек. Каждый из них сыграл с каждым по одному разу. Победитель партии получал 1 очко, проигравший — 0 очков, а если партия заканчивалась вничью, то каждый получал по 0,5 очка. Известно, что половина партий турнира закончилась вничью, а игрок, занявший последнее место, проиграл все партии. Какое место занял игрок, набравший 3 очка?

3.1 В остроугольном треугольнике ABC медиана AM равна высоте BH, причем равны углы MAB и HBA. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

3.2 В ряд выложили несколько апельсинов, мандаринов, яблок и груш. Известно, что рядом с фруктом каждого вида можно найти фрукт любого другого вида. Какое наименьшее количество фруктов могло быть выложено?

3.3 У Золотой рыбки записаны и перенумерованы подряд все знакомые. Половина из них — щуки, треть — окуни, а все знакомые с номерами, делящимися на 4, — караси. Сколько всего знакомых у Золотой рыбки?

4.1 Известно, что числа $2n + 1$ и $3n + 1$, где n — натуральное число, являются точными квадратами. Может ли число $5n + 3$ быть простым?

4.2 Квадрат со стороной 1 разрезали на прямоугольники периметра 2. Сколько прямоугольников могло получиться? (Укажите все возможные значения и обоснуйте.)

4.3 В равнобедренном треугольнике ABC угол B, противолежащий основанию, равен $20°$. На стороне AB отмечена точка D так, что $BD = AC$. Найдите угол ACD.

5.1 В некоторых клетках таблицы 100×100 стоят крестики. Каждый крестик является единственным либо в строке, либо в столбце. Какое наибольшее количество крестиков может стоять в таблице?

5.2 Назовем натуральное число «замечательным», если оно самое маленькое среди натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Чему равна сумма всех трехзначных замечательных чисел?

5.3 В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\angle ABD = \angle CDB = 60^\circ$, $\angle BCA = \angle CAD = 30^\circ$. Найдите BD, если $AB = 2$ см.

Условия задач межобластного турнира

Ярославль — Иваново. 6–7 класс. 12 марта 2008 года.

1 Точка K — середина стороны AD квадрата $ABCD$. На стороне AB отмечена точка L такая, что $LCK = KCD$. Найдите угол LKC.

2 Доску 8×8 раскрасили в три цвета «в шахматном порядке». Сколькими способами можно поставить на эту доску 8 ладей так, чтобы они не били друг друга, и все ладьи стояли на клетках одного цвета?

3 Петя считает счастливыми некоторые натуральные числа, причем из любых четырех чисел n, $2n$, $3n$ и $5n$ он считает счастливым ровно одно число. Известно, что 1 и 20 для Пети — счастливые числа. Считает ли он счастливым для себя число 25?

4 Найдите все тройки цифр x, y, z, для которых выполняется равенство $\dfrac{x+y}{z} = \overline{z,yx}$.

5 В зале 100 мест, расположенных в виде квадрата 10×10. Все цены на все места различны. Несколько зрителей сели на эти места, после чего каждый зритель спросил всех своих соседей по стороне или диагонали (всего не более 8 соседей), сколько они заплатили за свои места. Оказалось, что у каждого зрителя имеется не более одного соседа, заплатившего больше него. Какое наибольшее количество зрителей может сидеть в зале?

6 Каждая из четырех монет может быть настоящей (весом 10 г) или фальшивой (весом 9 г). Одночашечные весы точно показывают вес положенных на них монет. Можно ли за три взвешивания на одночашечных весах заведомо определить все фальшивые монеты?

7 Докажите, что сумма цифр числа, кратного 2008, может принимать любые значения от 10 до 99.

8 На плоскости расположены 20 красных точек и несколько синих. Известно, что на любом отрезке, соединяющем две одноцветные точки, всегда найдется точка другого цвета. Сколько может быть синих точек?

Бой закончился победой **сборной Ярославля** со счетом *62–5*.

Ярославль — Иваново. 8–9 класс. 12 марта 2008 года.

1 Автомат по разрезанию берет прямоугольник $n \times m$, где $n > m$, и отрезает от него квадраты $m \times m$, пока это возможно, после чего выключается. Для разрезания данного прямоугольника потребовалось три включения автомата, после чего получилось 5 квадратов, размер наименьшего из них равен 1×1. Найдите, чему может быть равен размер данного прямоугольника.

2 Решить в натуральных числах уравнение: $2^m + 2^n = k!$

3 На международную конференцию прибыло по два участника из 27 стран. Можно ли так рассадить всех участников за круглым столом, чтобы между каждыми двумя участниками из одной страны сидело ровно 9 других участников?

4 На стороне AC треугольника ABC нашлись точки K и L такие, что L — середина AK, а BK — биссектриса угла LBC. Оказалось, что $BC = 2BL$. Докажите, что $KC = AB$.

5 В стране 100 городов, некоторые из которых соединены дорогами (каждые два города может соединять только одна дорога). Маршрут по городам $P_1, P_2, \ldots, P_k$ назовем *веерным*, если для каждого i из города P_i выходит ровно i дорог. Какое наибольшее количество городов может быть в веерном маршруте?

6 Докажите, что если a, b, c, d — натуральные числа и $ad = b^2 + bc + c^2$, то число $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ составное.

7 На стороне AD выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $\angle A = \angle D$, выбраны точки P и Q таким образом, что $\angle QBP + \angle ABQ = \angle DCP + \angle PCQ = 180°$, а отрезки BQ и CP пересекаются и перпендикулярны. Докажите, что $AB + BP = DC + CQ$.

8 Клетки поверхности куба $100 \times 100 \times 100$ раскрашены в черный и белый цвета таким образом, что, как бы ни приложить к поверхности прямоугольник 1×4 (прямоугольник можно прикладывать только по клеточкам, возможно, перегибая вдоль ребра), количество черных клеток, покрытых прямоугольником, будет одним и тем же. Сколько существует таких раскрасок?

Бой закончился победой **сборной Ярославля** со счетом *71–19.*

Кострома — Ярославль. 6–7 класс. 8 апреля 2008 г.

1 В стране 30 городов. Любые два связаны железной дорогой. Каждую дорогу отдали одной из N компаний, причем дорогами любой компании можно добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками). При каком наибольшем N такое возможно?

2 Найдите наименьшее возможное значение выражения $КРАБ \times БАРК$. Каждой букве соответствует своя цифра. Число не может начинаться с нуля.

3 Сколькими способами на шахматной доске можно разместить 8 ладей, чтобы все клетки были биты?

4 При каких N число $N!$ является суммой двух целых степеней двойки?

5 Можно ли разрезать на равнобедренные треугольники произвольный многоугольник?

6 Можно ли из полосок 1×1, 1×2, 1×3, …, 1×999 сложить прямоугольник, каждая сторона которого больше 1?

7 Двое по очереди вписывают в клетки доски 8×8 числа от 1 до 64. Повторять числа нельзя. После того, как все числа вписаны, в каждой строке отмечают наименьшее число, и все отмеченные числа суммируются. Если сумма чётна, то выигрывает первый игрок, иначе — второй. Кто выиграет при правильной игре?

8 Отец и сын катаются по кругу на велосипеде и время от времени встречаются. После того, как сын стал ездить в другую сторону, они стали встречаться в пять раз чаще. Найдите отношение их скоростей.

Бой закончился победой **сборной Ярославля** со счетом *38–47.*

Кострома — Ярославль. 8–9 класс. 8 апреля 2008 г.

1 На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D такая, что $AB = 4AD$. Точка P на описанной около ABC окружности такова, что $\angle BDP = \angle BAC$. Докажите, что $BP = 2DP$.

2 Каждое из натуральных чисел от 1 до 10 покрашено в один из двух цветов — красный или синий (причем каждый из цветов присутствует). Известно, что число 5 покрашено в красный цвет. Также известно, что если числа M и N покрашены в разный цвет и $M+N \leqslant 10$, то $M+N$ синее, а если числа M и N покрашены в разный цвет и $MN \leqslant 10$, то MN красное. Как могли быть окрашены эти числа?

3 Действительные числа x, y и z удовлетворяют следующим условиям: $x < y < z$, $x + y + z = 6$, $xy + yz + zx = 9$. Докажите, что $0 < x < 1 < y < 3 < z < 4$.

4 Треугольник ABC таков, что $2AB = AC+BC$. Докажите, что центры вписанной и описанной окружностей этого треугольника и середины его сторон AC и BC лежат на одной окружности.

5 Учитель написал на доске приведенное квадратное уравнение x^2+ $+px + q = 0$ с целыми коэффициентами. Ученик Петя находит корни этого уравнения. Если оба корня окажутся целыми, то учитель составляет новое уравнение такого же типа, у которого вместо p и q стоят эти корни в том порядке, в каком захочет учитель. Если корни не целые или их нет вовсе, то Петя идёт домой. Учитель очень хочет, чтобы Петя не попал домой никогда. При каких значениях p и q ему это удастся?

6 Решить в натуральных числах: $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right) = 2.$

7 В государстве некоторые города связаны дорогами, причём есть замкнутый маршрут, состоящий из нечетного числа дорог. На всех дорогах ввели одностороннее движение так, что из любого города можно проехать в любой другой. Докажите, что и теперь найдется замкнутый маршрут, состоящий из нечетного числа дорог.

8 Какое наименьшее число слонов можно расставить на клетчатой доске $2N \times 2N$ так, чтобы каждое свободное поле было побито ровно одним слоном?

Бой закончился победой **Костромской области** со счетом *58–40*.

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ БОИ

МАТЕРИАЛЫ
XIV ОБЛАСТНОГО ТУРНИРА

Юниорский турнир

Методическое пособие

Компьютерный набор и верстка Ю.В. Богомолов, И.С. Кащенко

Отпечатано

Отпечатано в ЦОШ «Олимп»
150000, Ярославль, Мукомольный пер., 4а