

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ЕГЭ

И. С. Слонимская, Л. И. Слонимский

МАТЕМАТИКА

**ЭКСПРЕСС-
РЕПЕТИТОР**

**ДЛЯ ПОДГОТОВКИ
К ЕГЭ**

**«ВЫРАЖЕНИЯ
И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ»**

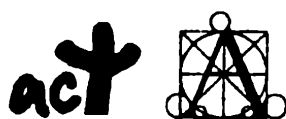
Единый государственный экзамен

И.С. СЛОНИМСКАЯ,
Л.И. СЛОНИМСКИЙ

МАТЕМАТИКА

Экспресс-репетитор
для подготовки к ЕГЭ

«ВЫРАЖЕНИЯ
И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ»



АСТ • Астрель

Москва

ВКМ

Владимир

УДК 373:512
ББК 22.14я721
С48

Серия основана в 2007 году

Слонимская, И.С.

С48 Математика. Экспресс-репетитор для подготовки к ЕГЭ: «Выражения и преобразования»/ И.С. Слонимская, Л.И. Слонимский. – М.: АСТ: Астрель; Владимир: ВКТ, 2010. – 60, [4] с. – (Единый государственный экзамен).

ISBN 978-5-17-063449-1 (ООО «Издательство АСТ»)

ISBN 978-5-271-25981-4 (ООО «Издательство Астрель»)

ISBN 978-5-226-01658-5 (ВКТ)

Пособие рассчитано на самостоятельную подготовку школьников и абитуриентов к ЕГЭ.

В него входят задания, включающие тему «Выражения и преобразования». Каждый раздел предваряется кратким теоретическим материалом и содержит большое количество примеров решения задач. Каждая тема включает в себя упражнения, количество которых варьируется в зависимости от ее сложности, а также от количества заданий ЕГЭ, посвященных данной теме.

Все упражнения снабжены ответами, что позволит учащимся проконтролировать свои знания и умения.

УДК 373:512

ББК 22.14я721

Подписано в печать 21.04.2010. Формат 84х108¹/₃₂.
Усл. печ. л. 3,36. Доп. тираж 5000 экз. Заказ № 1421и.

ISBN 978-5-17-063449-1 (ООО «Издательство АСТ»)

ISBN 978-5-271-25981-4 (ООО «Издательство Астрель»)

ISBN 978-5-226-01658-5 (ВКТ)

© Слонимская, И.С., Слонимский, Л.И.
© ООО «Издательство Астрель»

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
Корень степени n	6
Примеры	6
Упражнения	9
Свойства корня степени n	10
Примеры	10
Упражнения	15
Тест № 1	18
Степень с рациональным показателем	20
Примеры	20
Упражнения	22
Свойства степени с рациональным показателем	23
Примеры	23
Упражнения	26
Тест № 2	29
Логарифм	32
Примеры	32
Свойства логарифма	33
Примеры	33
Упражнения	35
Тест № 3	38
Синус, косинус, тангенс, котангенс	40
Примеры	40
Упражнения	40
Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента	41
Примеры	41
Упражнения	43

Формулы сложения	44
Примеры	44
Упражнения	44
Следствия из формулы сложения	46
Примеры	48
Упражнения	49
Тригонометрические задачи смешанного характера	50
Примеры	50
Упражнения	52
Тест № 4	53
Тест № 5	55
Ответы	59

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие рассчитано на самостоятельную подготовку школьников и абитуриентов к ЕГЭ.

Каждый раздел пособия посвящен отработке отдельных понятий и их свойств. Он предваряется основными формулами по данному разделу и содержит многочисленные примеры решения задач.

В книгу включены также тесты для самопроверки, завершающие каждую группу тесно связанных друг с другом разделов: «Корень степени n » и «Свойства корня степени n » — тест № 1, «Степень с рациональным показателем» и «Свойства степени с рациональным показателем» — тест № 2, «Логарифм. Свойства логарифма» — тест № 3, все темы по тригонометрии — тест № 4; тест № 5 является общим для всех рассмотренных тем и включает задачи всех типов.

Чтобы проверить, усвоен ли материал, в конце книги приводятся ответы ко всем упражнениям и тестам.

КОРЕНЬ СТЕПЕНИ n

Корень: $\sqrt[n]{a} = b$, где a – подкоренное выражение, n — показатель корня, b – корень; $a = b^n$ ($b \neq 1$, $b > 0$, $a > 0$).

Таблица значения степеней

Основание степени	Показатель степени								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729				
4	16	64	256	1024					
5	25	125	625	3125					
6	36	216							
7	49	343							
8	64	512							
9	81	729							
10	100	1000							

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Вычислите: $\sqrt{16}$.

Решение. $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$.

Пример 2. Вычислите: $\sqrt{49}$.

Решение. $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$.

Пример 3. Вычислите: $\sqrt[3]{27}$.

Решение. $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$.

Пример 4. Вычислите: $\sqrt[3]{512}$.

Решение. $\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{8^3} = 8$.

Пример 5. Вычислите: $\sqrt[4]{81}$.

Решение. $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$.

Пример 6. Вычислите: $\sqrt[4]{16}$.

Решение. $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$.

Пример 7. Вычислите: $\sqrt[4]{625}$.

Решение. $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$.

Пример 8. Вычислите: $\frac{2}{3} \sqrt[5]{243}$.

Решение. $\frac{2}{3} \sqrt[5]{243} = \frac{2}{3} \sqrt[5]{3^5} = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$.

Пример 9. Вычислите: $\sqrt{125}$.

Решение. $\sqrt{125} = \sqrt{5^3} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$.

Пример 10. Вычислите: $\sqrt[3]{27^2}$.

Решение. $\sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9$.

Пример 11. Вычислите: $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$.

Решение. $\sqrt[4]{\frac{16}{625}} = \sqrt[4]{\left(\frac{2}{5}\right)^4} = \frac{2}{5}$.

Пример 12. Вычислите: $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

Решение. $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^5} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Пример 13. Вычислите: $\sqrt[5]{1024}$.

Решение. $\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$.

Пример 14. Вычислите: $\sqrt{8}$.

Решение. $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2 \cdot 2^2} = 2\sqrt{2}$.

Пример 15. Вычислите: $\sqrt[8]{16}$.

Решение. $\sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt{2}$.

Пример 16. Вычислите: $\sqrt[10]{81}$.

Решение. $\sqrt[10]{81} = \sqrt[10]{3^4} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$.

Пример 17. Вычислите: $4\sqrt{64} + 5\sqrt[7]{128}$.

Решение. $4\sqrt{64} + 5\sqrt[7]{128} = 4\sqrt{8^2} + 5\sqrt[7]{2^7} = 4 \cdot 8 + 5 \cdot 2 = 32 + 10 = 42$.

Пример 18. Вычислите: $\sqrt{0,25}$.

Решение. $\sqrt{0,25} = \sqrt{0,5^2} = 0,5$.

Пример 19. Вычислите: $\frac{\sqrt[3]{0,216}}{\sqrt[4]{0,0016}}$.

Решение. $\frac{\sqrt[3]{0,216}}{\sqrt[4]{0,0016}} = \frac{\sqrt[3]{0,6^3}}{\sqrt[4]{0,2^4}} = \frac{0,6}{0,2} = 3$.

Пример 20. Вычислите: $\sqrt[6]{1}$.

Решение. $\sqrt[6]{1} = 1$.

Пример 21. Вычислите: $\sqrt[7]{0}$.

Решение. $\sqrt[7]{0} = 0$.

Пример 22. Вычислите: $\sqrt[5]{1}$.

Решение. $\sqrt[5]{1} = 1$.

Пример 23. Вычислите: $\sqrt[8]{0}$.

Решение. $\sqrt[8]{0} = 0$.

Пример 24. Вычислите: $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$.

Решение. $\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^5} = \frac{2}{3}$.

Пример 25. Вычислите: $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$.

Решение. $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{3}{4}$.

Пример 26. Вычислите: $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$.

Решение. $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^4} = \frac{3}{2} = 1,5$.

Пример 27. Вычислите: $\sqrt[10]{1024}$.

Решение. $\sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$.

Пример 28. Вычислите: $\sqrt[7]{-1}$.

Решение. $\sqrt[7]{-1} = -\sqrt[7]{1} = -1$.

Пример 29. Вычислите: $\sqrt[5]{-32}$.

Решение. $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -\sqrt[5]{2^5} = -2$.

Пример 30. Вычислите: $\sqrt[9]{-\frac{1}{512}}$.

Решение. $\sqrt[9]{-\frac{1}{512}} = -\sqrt[9]{\frac{1}{512}} = -\sqrt[9]{\left(\frac{1}{2}\right)^9} = -\frac{1}{2}$.

Пример 31. Вычислите: $(\sqrt[3]{1,17})^3$.

Решение. $(\sqrt[3]{1,17})^3 = 1,17$.

Пример 32. Вычислите: $(\sqrt[5]{283})^5$.

Решение. $(\sqrt[5]{283})^5 = 283$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислите: $\sqrt[4]{81}$.

2. Вычислите: $\sqrt[6]{27^2}$.

3. Вычислите: $\sqrt[5]{32^3}$.

4. Вычислите: $\sqrt[6]{\frac{64}{729}}$.

5. Вычислите: $\sqrt[3]{42\frac{7}{8}}$.

СВОЙСТВА КОРНЯ СТЕПЕНИ n

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, a \geq 0, b \geq 0;$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, a \geq 0, b > 0;$
- $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}, a \geq 0;$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, a \geq 0;$
- $\sqrt[n]{m\sqrt{a}} = \sqrt[nm]{a}, a \geq 0.$

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Вычислите: $\sqrt[3]{8 \cdot 125}.$

Решение. $\sqrt[3]{8 \cdot 125} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{125} = 2 \cdot 5 = 10.$

Пример 2. Вычислите: $\sqrt[5]{32 \cdot 243}.$

Решение. $\sqrt[5]{32 \cdot 243} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{243} = 2 \cdot 3 = 6.$

Пример 3. Вычислите: $\sqrt[4]{48 \cdot 27}.$

Решение. $\sqrt[4]{48 \cdot 27} = \sqrt[4]{16 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3} = \sqrt[4]{16 \cdot 3^4} = 2 \cdot 3 = 6.$

Пример 4. Вычислите: $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9}.$

Решение. $\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{24 \cdot 9} = \sqrt[3]{8 \cdot 3 \cdot 9} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3 = 6.$

Пример 5. Вычислите: $\sqrt[3]{45} \cdot \sqrt[3]{75}.$

Решение. $\sqrt[3]{45} \cdot \sqrt[3]{75} = \sqrt[3]{45 \cdot 75} = \sqrt[3]{5 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 25} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 3^3} = 5 \cdot 3 = 15.$

Пример 6. Вычислите: $\sqrt[3]{270} \cdot \sqrt[3]{0,1}.$

Решение. $\sqrt[3]{270} \cdot \sqrt[3]{0,1} = \sqrt[3]{270 \cdot 0,1} = \sqrt[3]{27} = 3.$

Пример 7. Вычислите: $\sqrt[4]{0,05} \cdot \sqrt[4]{1620}$.

Решение. $\sqrt[4]{0,05} \cdot \sqrt[4]{1620} = \sqrt[4]{0,05 \cdot 1620} = \sqrt[4]{81} = 3$.

Пример 8. Вычислите: $\sqrt[5]{1024 \cdot 243}$.

Решение. $\sqrt[5]{1024 \cdot 243} = \sqrt[5]{1024} \cdot \sqrt[5]{243} = 4 \cdot 3 = 12$.

Пример 9. Упростите выражение: $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

Решение. Внесем множитель 2 под знак квадратного корня и, применяя свойство корня, получим $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2} \cdot 2} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.

Пример 10. Вычислите: $\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$.

Решение. $\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\frac{128}{8}} = \sqrt[4]{16} = 2$.

Пример 11. Вычислите: $\frac{\sqrt[3]{875}}{\sqrt[3]{7}}$.

Решение. $\frac{\sqrt[3]{875}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\frac{875}{7}} = \sqrt[3]{125} = 5$.

Пример 12. Вычислите: $\frac{\sqrt{0,18}}{\sqrt{0,005}}$.

Решение. $\frac{\sqrt{0,18}}{\sqrt{0,005}} = \sqrt{\frac{0,18}{0,005}} = \sqrt{36} = 6$.

Пример 13. Вычислите: $\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$.

Решение. $\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}} = -\sqrt[3]{4\frac{17}{27}} = -\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = -\frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = -\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$.

Пример 14. Вычислите: $\sqrt[4]{39\frac{1}{16}}$.

Решение. $\sqrt[4]{39\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{5}{2} = 2,5$.

Пример 15. Вычислите: $\frac{\sqrt[4]{90}}{\sqrt[4]{10}}$.

Решение. $\frac{\sqrt[4]{90}}{\sqrt[4]{10}} = \sqrt[4]{\frac{90}{10}} = \sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}.$

Пример 16. Вычислите: $\frac{\sqrt[6]{80}}{\sqrt[6]{20}}$.

Решение. $\frac{\sqrt[6]{80}}{\sqrt[6]{20}} = \sqrt[6]{\frac{80}{20}} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2}.$

Пример 17. Вычислите: $\frac{\sqrt[4]{40} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[4]{10}}$.

Решение. $\frac{\sqrt[4]{40} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[4]{10}} = \sqrt[4]{\frac{40}{10}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[4]{2^2} \times$
 $\times \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2.$

Пример 18. Вычислите: $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{32}}$.

Решение. $\frac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{32}} = \sqrt[5]{\frac{64}{32}} = \sqrt[5]{2}.$

Пример 19. Вычислите: $\frac{\sqrt[4]{65}}{\sqrt[4]{13}}$.

Решение. $\frac{\sqrt[4]{65}}{\sqrt[4]{13}} = \sqrt[4]{\frac{65}{13}} = \sqrt[4]{5}.$

Пример 20. Вычислите: $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}}$.

Решение. $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{48}{6}} = \sqrt[3]{8} = 2.$

Пример 21. Вычислите: $\sqrt[3]{5^6}.$

Решение. $\sqrt[3]{5^6} = 5^2 = 25.$

Пример 22. Вычислите: $\sqrt[4]{36^6}.$

Решение. $\sqrt[4]{36^6} = \sqrt{36^3} = (\sqrt{36})^3 = 6^3 = 216.$

Пример 23. Вычислите: $\sqrt[8]{256}$.

Решение. $\sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{4^4} = \sqrt{4} = 2$.

Пример 24. Вычислите: $\sqrt[6]{5^3 \sqrt{5}}$.

Решение. $\sqrt[6]{5^3 \sqrt{5}} = \sqrt[6]{3 \sqrt{5^3 \cdot 5}} = \sqrt[18]{5^4} = \sqrt[9]{5^2} = \sqrt[9]{25}$.

Пример 25. Вычислите: $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$.

Решение. $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$.

Пример 26. Вычислите: $\sqrt{\sqrt{256}}$.

Решение. $\sqrt{\sqrt{256}} = \sqrt[4]{256} = 4$.

Пример 27. Вычислите: $\sqrt[3]{4 \sqrt{49}} \cdot \sqrt[6]{7^5}$.

Решение. $\sqrt[3]{4 \sqrt{49}} \cdot \sqrt[6]{7^5} = \sqrt[12]{49} \cdot \sqrt[12]{7^{10}} = \sqrt[12]{7^2 \cdot 7^{10}} =$
 $= \sqrt[12]{7^{12}} = 7$.

Пример 28. Вычислите: $\sqrt[9]{4^7} \cdot \sqrt[3]{3 \sqrt{16}}$.

Решение. $\sqrt[9]{4^7} \cdot \sqrt[3]{3 \sqrt{16}} = \sqrt[9]{4^7} \cdot \sqrt[9]{4^2} = \sqrt[9]{4^7 \cdot 4^2} = 4$.

Пример 29. Упростите выражение: $\sqrt{a^6}$ при $a < 0$.

Решение. $\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3)^2} = |a^3| = -a^3$.

Пример 30. Упростите выражение: $\sqrt{b^{10}}$ при $b > 0$.

Решение. $\sqrt{b^{10}} = \sqrt{(b^5)^2} = |b^5| = b^5$.

Пример 31. Упростите выражение: $\sqrt[5]{x^{10}}$.

Решение. $\sqrt[5]{x^{10}} = x^2$.

Пример 32. Упростите выражение: $\sqrt[3]{y^9}$.

Решение. $\sqrt[3]{y^9} = y^3$.

Пример 33. Упростите выражение: $\sqrt[6]{64a^8b^{11}}$.

Решение. $\sqrt[6]{64a^8b^{11}} = \sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{a^8} \cdot \sqrt[6]{b^{11}} =$
 $= 2 \sqrt[3]{a^4} \sqrt[6]{b^{11}} = 2 \sqrt[3]{a^3} \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{b^6} \sqrt[6]{b^5} = 2ab \sqrt[3]{a} \sqrt[6]{b^5} =$
 $= 2ab \sqrt[6]{a^2 b^5}$.

Пример 34. Вычислите: $\frac{\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}}$.

Решение.
$$\frac{\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}} = \sqrt[3]{\frac{49 \cdot 112}{250}} = \sqrt[3]{\frac{7^2 \cdot 56}{125}} = \sqrt[3]{\frac{7^2 \cdot 7 \cdot 8}{5^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{7^3 \cdot 2^3}{5^3}} = \frac{7 \cdot 2}{5} = \frac{14}{5} = 2,8.$$

Пример 35. Вычислите: $\frac{\sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{162}}$.

Решение.
$$\frac{\sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{162}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 81}{162}} = \sqrt[4]{\frac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2.$$

Пример 36. Упростите выражение: $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$.

Решение. Применим тождественные преобразования иррациональных выражений, а также формулу сокращенного умножения, а именно, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. С учетом этого преобразуем данное иррациональное выражение, получаем:

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} = \frac{(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} =$$

$$= \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{b}.$$

Пример 37. Упростите выражение $\sqrt[5]{32a^{10}}$.

Решение. Воспользуемся свойствами корня n -й степени:

$$\sqrt[5]{32a^{10}} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{a^{10}} = 2a^2.$$

Пример 38. Упростите выражение $\sqrt[4]{32} - \sqrt[4]{162} \cdot \sqrt{16}$.

Решение. Разложив на множители числа, стоящие под знаками радикалов, и складывая подобные слагаемые, получаем:

$$\sqrt[4]{32} - \sqrt[4]{162} \cdot \sqrt{16} = 2\sqrt[4]{2} - 3\sqrt[4]{2} \cdot 4 = -10\sqrt[4]{2}.$$

Пример 39. Упростите выражение: $\sqrt[3]{2ab} \cdot \sqrt[3]{4a^2b} \cdot \sqrt[3]{27b}$.

Решение. Применяя свойства корня, получаем:

$$\sqrt[3]{2ab} \cdot \sqrt[3]{4a^2b} \cdot \sqrt[3]{27b} = \sqrt[3]{2ab \cdot 4a^2b \cdot 27b} =$$

$$= \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot a^3 \cdot b^3} = 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 6ab.$$

УПРАЖНЕНИЯ

6. Вычислите: $\sqrt[3]{0,008 \cdot 27}$.
7. Вычислите: $\sqrt[4]{0,0625 \cdot 81}$.
8. Вычислите: $\frac{\sqrt{50} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{12}}$.
9. Вычислите: $\frac{\sqrt[3]{250} \cdot \sqrt{36}}{\sqrt[3]{128}}$.
10. Вычислите: $\sqrt[3]{27 \cdot 125 \cdot 8}$.
11. Вычислите: $\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{24}$.
12. Найдите значение выражения: $\sqrt[3]{\frac{343}{8} \cdot \frac{27}{125}}$.
13. Вычислите: $\frac{\sqrt[3]{243} \cdot \sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{9}}$.
14. Вычислите: $\sqrt[6]{4^5 \cdot 3^5} \cdot \sqrt[6]{4^7 \cdot 3}$.
15. Найдите значение выражения: $\frac{\sqrt[4]{48} \cdot \sqrt{245}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{3}}$.
16. Вычислите: $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \sqrt{6}$.
17. Упростите выражение: $\sqrt[4]{\frac{a^8(b-a)^{16}}{81}}$.
18. Упростите выражение: $\sqrt{a^6 \cdot b^4}$, если $a < 0$, $b > 0$.
19. Упростите выражение $\frac{\sqrt[3]{4\sqrt{n^5}} \cdot \sqrt[6]{n^4}}{\sqrt[4]{3\sqrt{n^7}}}$.
20. Найдите значение выражения: $\sqrt[5]{27} \sqrt[5]{9} + \frac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{5}}$.
21. Вычислите: $\frac{\sqrt{32} + \sqrt{98} - \sqrt{50}}{\sqrt{72}}$.
22. Упростите выражение: $\sqrt[5]{3\frac{3}{8}} \cdot \sqrt[5]{\frac{9}{4}} + \sqrt[4]{80} : \sqrt[4]{5}$.
23. Упростите выражение: $\sqrt[4]{(4 - \sqrt[4]{a})(4 + \sqrt[4]{a}) + \sqrt[8]{a^4}}$.

24. Найдите значение выражения:

$$\left(\frac{12}{\sqrt{3}-1} - 7 \right) \cdot (6\sqrt{3} + 1).$$

25. Найдите значения $x + y$, если равенство

$$\frac{\sqrt[8]{a^{-32}b^{-4}}}{\sqrt[5]{a^{-18}\sqrt{a^6b^{15}}}} = a^x b^y \text{ выполняется для всех положительных } a \text{ и } b.$$

26. Найдите значение выражения:

$$\left(\frac{2-x}{\sqrt{x+2}-2} + \sqrt{x+2} \right)^2, \text{ если } x = 8,24.$$

27. Найдите значение выражения:

$$\frac{8-x}{4 \cdot \sqrt{x+1}-12} + 0,25 \cdot \sqrt{x+1}, \text{ если } x = 1,25.$$

28. Найдите значение выражения $a + b$, если

$$\sqrt{34-24\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}.$$

29. Найдите $a + b$, если $\sqrt{9-4 \cdot \sqrt{5}} = a + b\sqrt{5}$.

30. Найдите значение выражения:

$$\frac{(a-4\sqrt{2a+8})(\sqrt{a}+\sqrt{8})}{a\sqrt{a}-16\sqrt{2}} : \frac{8}{a+2\sqrt{2a+8}}, \text{ если } a = 32.$$

31. Найдите значение числового выражения:

$$\sqrt{16-\sqrt{31}} \cdot \sqrt{\sqrt{31}+16}.$$

32. Представьте выражение в виде степени:

$$\frac{24\sqrt{2^{36} \cdot 81^6 \cdot 49^{12}}}{\sqrt{2}}.$$

33. Найдите значение выражения:

$$(\sqrt{12} + \sqrt{75} + \sqrt{27}) : \sqrt{3}.$$

34. Найдите значение выражения:

$$\left(\sqrt{7-\sqrt{13}} + \sqrt{7+\sqrt{13}} \right)^2.$$

35. Найдите значение выражения:

$$\sqrt[4]{(34-24\sqrt{2})^2} - 3\sqrt{2}.$$

36. Вычислите: $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{6}}.$

37. Вычислите: $\sqrt[3]{38} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{19}}.$

38. Вычислите: $\sqrt{(3\sqrt{2} - 5)^2} + \sqrt{43 + 30\sqrt{2}}$.

39. Вычислите:

$$\sqrt[4]{9\sqrt{11} - 27} \cdot \sqrt[4]{27 + 9\sqrt{11}} \cdot \sqrt[4]{8}.$$

40. Найдите значение выражения:

$$\sqrt[3]{9 + 2\sqrt{20}} \cdot \sqrt[3]{9 - 2\sqrt{20}}.$$

41. Вычислите: $2a^2 - 5ab + 2b^2$, если $a = \sqrt{7} + \sqrt{6}$ и $b = \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

42. Упростите выражение: $\frac{\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} \cdot (2 - \sqrt{3})}{7 - 4\sqrt{3}}$.

43. Вычислите: $\frac{\sqrt{5} - 4}{\sqrt{5} + 2} + 6\sqrt{5}$.

44. Вычислите:

$$\sqrt[3]{156\sqrt{2} - 104\sqrt{11}} \cdot \sqrt[6]{62 + 12\sqrt{22}} \cdot \sqrt[6]{169}.$$

45. Найдите значение выражения:

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{11 + 4\sqrt{6}} \right)^9.$$

46. Найдите значение выражения:

$$\frac{5 \cdot \sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{7 \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} + \frac{\sqrt{8 - 4x^2 + 4x}}{\sqrt{2 + x - x^2}}.$$

47. Вычислите: $\sqrt{(2\sqrt{2} - 5)^2} + \sqrt{33 + 20\sqrt{2}}$.

48. Найдите значение выражения:

$$(2\sqrt{2} + 5\sqrt{5} + 10 + \sqrt{10}) \cdot (2\sqrt{2} + 5\sqrt{5} - 10 - \sqrt{10}).$$

49. Вычислите:

$$\left(\frac{66}{\sqrt{3} + 5} + \frac{6}{\sqrt{3} - 1} - \frac{61}{8 - \sqrt{3}} \right) \cdot (2 - \sqrt{3}) - \frac{156}{\sqrt{3} - 4}.$$

50. Вычислите: $\left(\frac{9}{\sqrt{7} + 2} + \frac{12}{\sqrt{7} - 1} - \frac{12}{3 - \sqrt{7}} \right) \cdot (22 - \sqrt{7})$.

ТЕСТ № 1

ВАРИАНТ 1

1. Внесите множитель под знак корня: $m\sqrt[5]{4}$.
2. Упростите выражение: $\sqrt[5]{2^{20}x^{15}}$.
3. Упростите выражение: $\frac{\sqrt[5]{192t}}{\sqrt[5]{6t^{11}}}$.
4. Упростите выражение: $\sqrt[3]{9c^5} \cdot \sqrt[3]{3c^4}$.
5. Упростите выражение: $\frac{9 - \sqrt[3]{x^2}}{3 - \sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{x}$.
6. Вычислите: $\sqrt[3]{125 \cdot 0,027}$.
7. Вычислите: $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{6}}$.
8. Найдите значение выражения: $\sqrt[6]{(x+5)^6} + \sqrt[6]{(x+1)^6}$ при $x = -\sqrt{35}$.
9. Вычислите: $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$.
10. Найдите значение выражения: $\sqrt{x - 4\sqrt{x+1} + 5} + \sqrt{x + 4\sqrt{x+1} + 5}$ при $x = 2,007$.

ВАРИАНТ 2

1. Внесите множитель под знак корня: $x\sqrt[6]{5}$.
2. Упростите выражение: $\sqrt[3]{7^{12}c^{15}}$.
3. Упростите выражение: $\frac{\sqrt[3]{250m^5}}{4\sqrt[3]{2m^2}}$.

4. Упростите выражение: $\sqrt[4]{8a^3} \cdot \sqrt[4]{2a^5}$.
5. Упростите выражение: $\frac{\sqrt[3]{a^2 - 16}}{\sqrt[3]{a} - 4} - \sqrt[3]{a}$.
6. Вычислите: $\sqrt[4]{0,0016 \cdot 625}$.
7. Вычислите: $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{16}}$.
8. Найдите значение выражения:
 $\sqrt{(x - \sqrt{10})^2} - \sqrt{(x + \sqrt{10})^2}$ при $x = -3$.
9. Вычислите: $\sqrt{13 - 6\sqrt{4}} + \sqrt{4}$.
10. Найдите значение выражения: $\sqrt{x - 4\sqrt{x - 3} + 1} -$
 $-\sqrt{x + 4\sqrt{x - 3} + 1}$ при $x = 3,007$.

ВАРИАНТ 3

1. Внесите множитель под знак корня: $9\sqrt[7]{q^3}$.
2. Упростите выражение: $\sqrt[5]{11^{15}d^{10}}$.
3. Упростите выражение: $\frac{\sqrt[6]{5a^{17}}}{\sqrt[6]{320a^5}}$.
4. Упростите выражение: $\sqrt[4]{27a} \cdot \sqrt[4]{3a^3}$.
5. Упростите выражение: $\frac{\sqrt[5]{y^2 - 25}}{\sqrt[5]{y} - 5} - \sqrt[5]{y}$.
6. Вычислите: $\sqrt[4]{0,0625 \cdot 256}$.
7. Вычислите: $\sqrt[3]{\frac{54}{32}} \cdot \sqrt[3]{0,25}$.
8. Найдите значение выражения: $\sqrt[8]{(m + 6)^8} +$
 $+ \sqrt[8]{(m + 8)^8}$ при $m = -\sqrt{50}$.
9. Вычислите: $\sqrt{27 - 10\sqrt{2}} + \sqrt{2}$.
10. Найдите значение выражения: $\sqrt[4]{x - 2\sqrt{6x} + 6} \times$
 $\times \sqrt[4]{x + 2\sqrt{6x} + 6}$ при $x = 5$.

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, a \geq 0.$

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Вычислите: $27^{\frac{1}{3}}$.

Решение. $27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3.$

Пример 2. Вычислите: $0,16^{\frac{3}{2}}$.

Решение. $0,16^{\frac{3}{2}} = (0,4^2)^{\frac{3}{2}} = 0,4^3 = 0,064.$

Пример 3. Вычислите: $5 \cdot 32^{\frac{1}{5}}$.

Решение. $5 \cdot 32^{\frac{1}{5}} = 5 \cdot (2^5)^{\frac{1}{5}} = 5 \cdot 2 = 10.$

Пример 4. Вычислите: $25^{-\frac{1}{2}}$.

Решение. $25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{25^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(5^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{5}.$

Пример 5. Вычислите: $0,008^{1\frac{1}{3}}$.

Решение. $0,008^{1\frac{1}{3}} = (0,2^3)^{\frac{4}{3}} = 0,2^4 = 0,0016.$

Пример 6. Вычислите: $4^{1,5}$.

Решение. $4^{1,5} = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8.$

Пример 7. Вычислите: $8^{1\frac{1}{3}}$.

Решение. $8^{1\frac{1}{3}} = 8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16.$

Пример 8. Вычислите: $9^{2,5}$.

Решение. $9^{2,5} = 9^{\frac{5}{2}} = \sqrt{9^5} = (\sqrt{9})^5 = 3^5 = 243$.

Пример 9. Вычислите: $16^{\frac{3}{4}}$.

Решение. $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$.

Пример 10. Вычислите: $243^{\frac{2}{5}}$.

Решение. $243^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{243^2} = (\sqrt[5]{243})^2 = 3^2 = 9$.

Пример 11. Вычислите: $1024^{0,7}$.

Решение. $1024^{0,7} = 1024^{\frac{7}{10}} = \sqrt[10]{1024^7} = (\sqrt[10]{1024})^7 = 2^7 = 128$.

Пример 12. Вычислите: $216^{-\frac{2}{3}}$.

Решение. $216^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{216^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{216^2}} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$.

Пример 13. Вычислите: $64^{-1,5}$.

Решение. $64^{-1,5} = \frac{1}{64^{1,5}} = \frac{1}{64^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{64^3}} = \frac{1}{8^3} = \frac{1}{512}$.

Пример 14. Найдите наибольшее из чисел:

$(\sqrt{3})^{4,2}; \quad 9^{\frac{3}{4}}; \quad (\sqrt[3]{3})^{6,4}; \quad 3^{\frac{1}{2}}.$

Решение. Воспользуемся свойством монотонного возрастания показательной функции с основанием, большим 1. Представим каждое из этих выражений

как 3 в некоторой степени. $(\sqrt{3})^{4,2} = 3^{2,1}$, $9^{\frac{3}{4}} = 3^{1,5}$,

$(\sqrt[3]{3})^{6,4} = 3^{\frac{6,4}{3}}$. Соответственно, это будут числа: $3^{2,1}$, $3^{1,5}$,

$3^{\frac{6,4}{3}}$, $3^{\frac{1}{2}}$. Так как наибольшим является показатель $\frac{6,4}{3}$,

то наибольшее из чисел $3^{\frac{6,4}{3}}$.

УПРАЖНЕНИЯ

51. Вычислите: $81^{\frac{3}{4}}$.

52. Вычислите: $25^{1,5}$.

53. Среди данных чисел выберите наименьшее:

$$125^{\frac{2}{3}}; \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}; \quad \sqrt{111}; \quad \sqrt[4]{1651}.$$

54. Укажите наибольшее из чисел:

$$0,5^{2,8}; \quad 4^{0,1}; \quad 2^{-0,5}; \quad 0,25^{0,25}.$$

55. Найдите наибольшее из чисел:

$$(\sqrt{2})^{3,2}; \quad 4^{\frac{3}{5}}; \quad 2^{\frac{1}{3}}; \quad (\sqrt[3]{2})^{4,7}.$$

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n};$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$
- $(a^m)^n = a^{mn};$
- $a^m b^m = (ab)^m;$
- $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m;$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m};$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$
- $a^0 = 1;$
- $a^1 = a.$

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Упростите выражение: $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{5}}.$

Решение. $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{2}{5}} = x^{\frac{5+4}{10}} = x^{\frac{9}{10}}.$

Пример 2. Упростите выражение: $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}}.$

Решение. $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}} = a^{\frac{4+5}{6}} = a^{\frac{9}{6}} = a^{\frac{3}{2}}.$

Пример 3. Упростите выражение: $b : b^{\frac{5}{7}}.$

Решение. $b : b^{\frac{5}{7}} = b^{1 - \frac{5}{7}} = b^{\frac{2}{7}}.$

Пример 4. Вычислите: $16^{\frac{3}{4}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}.$

Решение. $16^{\frac{3}{4}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} \cdot (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{3}{4} \cdot 4} \cdot 2^{\frac{2}{3} \cdot 3} =$
 $= 2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32.$

Пример 5. Вычислите: $343^{\frac{2}{3}} \cdot 512^{\frac{3}{8}}$.

Решение. $343^{\frac{2}{3}} \cdot 512^{\frac{3}{8}} = (7^3)^{\frac{2}{3}} \cdot (2^8)^{\frac{3}{8}} = 7^3 \cdot 2^3 = 7^2 \cdot 2^3 = 49 \cdot 8 = 392.$

Пример 6. Представьте в виде степени: $x^{0,2}x^{-1}x^{0,6}$.

Решение. $x^{0,2}x^{-1}x^{0,6} = x^{0,2 - 1 + 0,6} = x^{-0,2}.$

Пример 7. Представьте в виде степени: $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{4}{5}} : x^{1,3}$.

Решение. $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{4}{5}} : x^{1,3} = x^{0,5 + 0,8 - 1,3} = x^0 = 1.$

Пример 8. Упростите выражение: $\left(m^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{8}}$.

Решение. $\left(m^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{8}} = m^{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}} = m^{\frac{1}{4}}.$

Пример 9. Представьте в виде степени: $\left(x^{\frac{7}{4}} \cdot x^{\frac{1}{4}}\right)^{16}$.

Решение. $\left(x^{\frac{7}{4}} \cdot x^{\frac{1}{4}}\right)^{16} = x^{\left(\frac{7}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot 16} = x^{2 \cdot 16} = x^{32}.$

Пример 10. Представьте в виде степени:

$(m^{0,3})^{1,2} \cdot (m^{-0,4})^{0,4}.$

Решение. $(m^{0,3})^{1,2} \cdot (m^{-0,4})^{0,4} = m^{0,36} \cdot m^{-0,16} = m^{0,36-0,16} = m^{0,2}.$

Пример 11. Вычислите: $(27 \cdot 64)^{\frac{1}{3}}$.

Решение. $(27 \cdot 64)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} \cdot 64^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} \cdot (4^3)^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 4 = 12.$

Пример 12. Упростите выражение: $a^{\frac{5}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{6}} \cdot \left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)^4$.

Решение. $a^{\frac{5}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{6}} \cdot \left(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right)^4 = a^{\frac{5}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{6}} \times$
 $\times \left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^4 \cdot \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^4 = a^{\frac{5}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{6}} \cdot a^{-\frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{5}{3}-\frac{4}{3}} \times$
 $\times b^{-\frac{1}{6}+\frac{4}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{7}{6}}.$

Пример 13. Разложите на множители: $k^{\frac{1}{2}} - k$.

Решение. $k^{\frac{1}{2}} - k = k^{\frac{1}{2}} - \left(k^{\frac{1}{2}}\right)^2 = k^{\frac{1}{2}}\left(1 - k^{\frac{1}{2}}\right)$.

Пример 14. Разложите на множители: $5 + 5^{\frac{1}{2}}$.

Решение. $5 + 5^{\frac{1}{2}} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}}\left(5^{\frac{1}{2}} + 1\right)$.

Пример 15. Разложите на множители: $m^{\frac{1}{4}} + m^{\frac{1}{2}}$.

Решение. $m^{\frac{1}{4}} + m^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{1}{4}} + \left(m^{\frac{1}{4}}\right)^2 = m^{\frac{1}{4}}\left(1 + m^{\frac{1}{4}}\right)$.

Пример 16. Сократите дробь: $\frac{p-q}{p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}}$.

Решение.
$$\frac{p-q}{p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(p^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(q^{\frac{1}{2}}\right)^2}{p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(p^{\frac{1}{2}}-q^{\frac{1}{2}}\right)\left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)}{p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}} =$$
$$= p^{\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}}.$$

Пример 17. Упростите выражение: $\frac{8-a}{4+2a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}$.

Решение.
$$\frac{8-a}{4+2a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(2-a^{\frac{1}{3}}\right)\left(4+2a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{4+2a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}} = 2 - a^{\frac{1}{3}}.$$

Пример 18. Найдите значение выражения: $\frac{b^{33}}{\left(a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{5}{4}}\right)^{20}}$

при $a = 8$, $b = 4$.

Решение.
$$\frac{b^{33}}{\left(a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{5}{4}}\right)^{20}} = \frac{b^{33}}{\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^{20} \cdot \left(b^{\frac{5}{4}}\right)^{20}} = \frac{b^{33}}{a^4 b^{25}} = \frac{b^8}{a^4}.$$

При $a = 8$, $b = 4$ имеем: $\frac{b^8}{a^4} = \frac{4^8}{8^4} = \frac{(2^2)^8}{(2^3)^4} = \frac{2^{16}}{2^{12}} = 2^4 = 16.$

Пример 19. Найдите значение выражения:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}} + \frac{19x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}, \text{ если } x = 256, y = 16.$$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}} + \frac{19x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}} &= \frac{(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})}{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}} + \\ + \frac{x^{\frac{1}{4}}(19x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}})}{x^{\frac{1}{4}}} &= x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} + 19x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}} = 20x^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

$$\text{Если } x = 256, \text{ то } 20x^{\frac{1}{4}} = 20 \cdot 256^{\frac{1}{4}} = 20 \cdot (4^4)^{\frac{1}{4}} = 20 \cdot 4 = 80.$$

Пример 20. Вычислите:

$$(1,5)^3 \cdot (2,25)^{-1,5} \cdot (0,75)^{-1} \cdot \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(2\frac{3}{7}\right)^0 \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } (1,5)^3 \cdot (2,25)^{-1,5} \cdot (0,75)^{-1} \cdot \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} - \right. \\ \left. - \left(2\frac{3}{7}\right)^0 \right) &= (1,5)^3 \cdot (1,5^2)^{-1,5} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot ((-3)^2 + (-2) - 1) = \\ &= (1,5)^3 \cdot (1,5)^{-3} \cdot \frac{4}{3} \cdot (9 - 2 - 1) = (1,5)^{3+(-3)} \cdot \frac{4}{3} \cdot 6 = \\ &= (1,5)^0 \cdot 8 = 1 \cdot 8 = 8. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЯ

56. Упростите выражение: $\frac{7^{1,5}}{7^{0,3}}.$

57. Упростите выражение: $\frac{13^{2,7}}{13^{0,9}}.$

58. Упростите выражение: $\frac{6^{1,4}}{6^{0,7}}.$

59. Упростите выражение: $k^{-5,2} \cdot 3k^{0,8}.$

60. Упростите выражение: $k^{-5,3} \cdot 4k^{0,1}.$

61. Упростите выражение: $b^{4,5} \cdot 15b^{-0,5}.$

62. Представьте выражение $\left(a^{\frac{2}{3}} : a^{-\frac{5}{3}}\right) \cdot a^{\frac{5}{3}}$ в виде степени с основанием a .

63. Упростите выражение: $a^{-2,5} : a^{-3\frac{1}{4}} \cdot a^{1,25}$.

64. Упростите выражение $(a^{1,3} \cdot a^{0,45})^{12}$.

65. Найдите значение выражения: $2^{-2} \cdot \frac{\left(3^{\frac{4}{3}}\right)^{-6}}{3^{-4}}$.

66. Найдите значение выражения: $4^{3a} \cdot 4^{-5a}$ при $a = -\frac{1}{2}$.

67. Найдите значение выражения: $2^{7a} \cdot 2^{-3a}$ при $a = \frac{1}{2}$.

68. Найдите значение выражения: $3^{4a} \cdot 3^{-2a}$ при $a = \frac{1}{2}$.

69. Найдите значение выражения: $\frac{3}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{x - y}$ при $x = 7, y = 4$.

70. Найдите значение выражения $(-8) \cdot (-4^{1,5})$.

71. Найдите значение выражения: $(-15) \cdot \left(\frac{11}{3} - 9^{1,5}\right)$.

72. Найдите значение выражения $\frac{a^{1,5} + 8b^{1,5}}{a - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + 4b} - 3b^{\frac{1}{2}}$,

если $a = 4, b = 25$.

73. Найдите значение выражения $(a^{-2,3} : a^{-3\frac{4}{5}})^2$ при $a = 3$.

74. Вычислите: $\left(\left(7\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(2\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}$.

75. Вычислите: $8^{4a} \cdot 8^{-2a}$, если $a = \frac{1}{6}$.

76. Найдите значение выражения: $\frac{a^{-0,75} - 1}{a^{-0,5} + a^{-0,25} + 1}$,
если $a = 16$.

77. Расположите числа в порядке возрастания:
 $a = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}$, $b = \sqrt[4]{3^6}$ и $c = (\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$.

78. Найдите значение выражения: $\frac{100 - t^{-1}}{10 + t^{-0,5}} - 6t^{0,5}$
при $t = 25$.

79. Найдите значение выражения $\frac{49 - d^{-1}}{7 - d^{-0,5}} + 6d^{0,5}$ при
 $d = 64$.

80. Найдите значение выражения: $\frac{16 - p^{-1}}{4 + p^{-0,5}} - 10p^{0,5}$
при $p = 4$.

81. Вычислите: $\left(6 - 4 \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^0\right)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \frac{3}{4}$.

82. Вычислите: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + 0,2^{-4} \cdot 25^{-2} + \left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$.

83. Упростите выражение:
$$\frac{27a + 1}{9a^{\frac{2}{3}} - 3\sqrt[3]{a} + 1} - \frac{27a - 1}{9\sqrt[3]{a^2} + 3a^{\frac{1}{3}} + 1}.$$

84. Найдите значение выражения:
$$\sqrt[4]{\left(4\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a} - 1}{(\sqrt[4]{a} + 1)^2}} + \frac{\sqrt[4]{a} - 1}{\sqrt[3]{(\sqrt{a} - 1)^2}}\right)^{0,5}} \cdot (\sqrt{a} - 1)^{\frac{5}{6}} \cdot (\sqrt{a} + 1),$$

если $a = 3,25$.

85. Найдите x , если $\frac{x}{(\sqrt[3]{2})^2} = \frac{2^{\frac{5}{3}} \cdot 4^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{64}}$.

ТЕСТ № 2

ВАРИАНТ 1

1. Упростите выражение: $\frac{5^{3,4}}{5^{1,7}}$.

2. Упростите выражение: $a^{-0,5} \cdot 14a^{4,5}$.

3. Упростите выражение: $5(m^4)^{\frac{1}{7}} + 2m^{\frac{4}{7}}$.

4. Упростите выражение: $17\left(c^{\frac{5}{4}}\right)^8 - 7(c^5)^2$.

5. Найдите значение выражения: $4^{-3a} \cdot 4^{5a}$ при $a = \frac{1}{2}$.

6. Найдите значение выражения: $\frac{a^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{-8}{5}}}$ при $a = 4$.

7. Найдите значение выражения: $\frac{m^{\frac{1}{2}} - m}{m^{\frac{1}{2}}} - \frac{m - a}{a^{\frac{1}{2}} + m^{\frac{1}{2}}}$,

если $a = 4$, $m = 16$.

8. Найдите значение выражения: $\frac{x^{-2} - 9}{3 + x^{-1}} - 6x^{-1}$ при $x = 5$.

9. Вычислите: $\left(0,027^{-\frac{1}{6}} \cdot 0,3^{4,5}\right)^{\frac{1}{4}}$.

10. Выполните действия: $\frac{a^{\frac{4}{7}} - 1}{a^{\frac{2}{7}} - 1} - a^{\frac{2}{7}}$.

ВАРИАНТ 2

1. Упростите выражение: $\frac{6^{5,2}}{6^{1,3}}$.

2. Упростите выражение: $b^{-5,6} \cdot 11b^{0,4}$.

3. Упростите выражение: $7a^{\frac{5}{6}} - 2(a^5)^{\frac{1}{6}}$.

4. Упростите выражение: $14(a^3)^4 + 5\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^9$.

5. Найдите значение выражения: $3^{-2a} \cdot 3^{4a}$ при $a = 0,5$.

6. Найдите значение выражения: $\frac{x^{\frac{8}{7}}}{x^{\frac{-6}{7}}}$ при $x = 5$.

7. Найдите значение выражения: $\frac{m^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{4}}} - \frac{m^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{4}}}$,

если $a = 256$, $m = 16$.

8. Найдите значение выражения: $\frac{x^{-1} - 100}{x^{-0,5} - 10} + 4x^{0,5}$ при $x = 4$.

9. Вычислите: $\left(0,064^{-\frac{1}{12}} \cdot 0,4^{2,25}\right)^{\frac{1}{2}}$.

10. Выполните действия: $\frac{x^{\frac{2}{3}} - 4}{x^{\frac{1}{3}} + 2} - x^{\frac{1}{3}}$.

ВАРИАНТ 3

1. Упростите выражение: $\frac{7^{2,7}}{7^{0,9}}$.

2. Упростите выражение: $18x^{-0,9} \cdot 2x^{2,3}$.

3. Упростите выражение: $4\left(c^{\frac{1}{7}}\right)^3 + 6c^{\frac{3}{7}}$.

4. Упростите выражение: $4(x^3)^5 - 11\left(x^{\frac{5}{3}}\right)^9$.

5. Найдите значение выражения: $2^{3c} \cdot 2^{-7c}$ при $c = -\frac{1}{2}$.

6. Найдите значение выражения: $\frac{(b^3)^{\frac{1}{5}}}{b^{-\frac{2}{5}}}$ при $b = 32$.

7. Найдите значение выражения: $\frac{y-x}{y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}} - \frac{y^{\frac{1}{2}}-y}{y^{\frac{1}{2}}}$, если $x = 9$, $y = 81$.

8. Найдите значение выражения: $\frac{49-c^{-1}}{7-c^{-0,5}} + 6c^{0,5}$ при $c = 64$.

9. Вычислите: $\left(0,064^{-\frac{1}{3}} \cdot 0,4^3\right)^{\frac{1}{2}}$.

10. Выполните действия: $\frac{a^{\frac{6}{5}}-25}{a^{\frac{3}{5}}-5} - a^{\frac{3}{5}}$.

ЛОГАРИФМ

Логарифм: $\log_a b = c$, где a – основание логарифма, b – выражение под знаком логарифма, c – логарифм;
 $b = a^c$ ($a \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$).

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Вычислите: $\log_2 8$.

Решение. $\log_2 8 = 3$.

Пример 2. Вычислите: $\log_3 81$.

Решение. $\log_3 81 = 4$.

Пример 3. Вычислите: $\log_6 216$.

Решение. $\log_6 216 = 3$.

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

- $a^{\log_a b}$, $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$; $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$;
- $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$;
- $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$;
- $p \log_a x = \log_a x^p$;
- $\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$;
- $\log_{a^n} x^n = \log_a x$;
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$;
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$;
- $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, $b \neq 1$.

ПРИМЕРЫ

Пример 4. Вычислите: $\log_5 5^4$.

Решение. $\log_5 5^4 = 4 \log_5 5 = 4$.

Пример 5. Вычислите: $\lg 10^3$.

Решение. $\lg 10^3 = 3$.

Пример 6. Вычислите: $\ln e^4$.

Решение. $\ln e^4 = 4$.

Пример 7. Вычислите: $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$.

Решение. $\log_{10} 5 + \log_{10} 2 = \log_{10} 5 \cdot 2 = \log_{10} 10 = 1$.

Пример 8. Вычислите: $\log_4 7 + \log_4 8$.

Решение. $\log_4 7 + \log_4 8 = \log_4 (7 \cdot 8) = \log_4 56$.

Пример 9. Вычислите: $\log_5 80 - \log_5 16$.

Решение. $\log_5 80 - \log_5 16 = \log_5 \frac{80}{16} = \log_5 5 = 1$.

Пример 10. Вычислите: $\lg 150 - \lg 15$.

Решение. $\lg 150 - \lg 15 = \lg \frac{150}{15} = \lg 10 = 1$.

Пример 11. Вычислите: $\log_{27} 243$.

Решение. $\log_{27} 243 = \log_{3^3} 3^5 = \frac{5}{3} \log_3 3 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

Пример 12. Вычислите: $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$.

Решение. $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16} = \log_2 \left(15 : \frac{15}{16} \right) = \log_2 2^4 = 4$.

Пример 13. Вычислите: $\log_{13} \sqrt[5]{169}$.

Решение. $\log_{13} \sqrt[5]{169} = \log_{13} 13^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \log_{13} 13 = \frac{2}{5}$.

Пример 14. Вычислите: $9^{2\log_3 5}$.

Решение. $9^{2\log_3 5} = (3^2)^{2\log_3 5} = (3^{\log_3 5})^4 = 5^4 = 625$.

Пример 15. Известно, что $\log_2 5 = a$ и $\log_2 3 = b$. Выразите $\log_2 300$ через a и b .

Решение. Пользуясь свойствами логарифмов, получаем:
 $\log_2 300 = \log_2 (3 \cdot 5^2 \cdot 2^2) = \log_2 3 + 2\log_2 5 + 2\log_2 2 = b + 2a + 2$.

Пример 16. Вычислите: $\log_3 36 - 2 \log_3 2$.

Решение. $\log_3 36 - 2 \log_3 2 = \log_3 (3^2 \cdot 2^2) = \log_3 3^2 + \log_3 2^2 - 2 \log_3 2 = 2 \log_3 3 + 2 \log_3 2 - 2 \log_3 2 = 2 \cdot 1 = 2$.

Пример 17. Упростите выражение: $\lg 25 + 0,5 \lg 16$.

Решение. Применяя свойства логарифма степени ко второму слагаемому, а затем свойство суммы логарифмов, получаем:

$\lg 25 + 0,5 \lg 16 = \lg 25 + \lg 16^{\frac{1}{2}} = \lg 25 + \lg 4 = \lg (25 \cdot 4) = \lg 100 = 2$.

Пример 18. Укажите значение выражения:

$10^2 - \lg 2 - 25^{\log_5 7}$.

Решение. $10^2 - \lg 2 - 25^{\log_5 7} = 10^2 \cdot 10^{-\lg 2} - (5^2)^{\log_5 7} = 100 \cdot 10^{\lg 2^{-1}} - (5^{\log_5 7})^2 = 100 \cdot 2^{-1} - 7^2 = 100 \cdot \frac{1}{2} - 49 = 50 - 49 = 1$.

Пример 19. Найдите значение выражения:

$$\log_3 8 + \log_3 \frac{9}{2} - 2\log_3 2.$$

Решение. $\log_3 8 + \log_3 \frac{9}{2} - 2\log_3 2 = \log_3 \left(8 \cdot \frac{9}{2} \right) - \log_3 2^2 = \log_3 (4 \cdot 9) - \log_3 4 = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2.$

Пример 20. Вычислите: $\log_2 \sqrt{3} + \frac{1}{2}\log_2 \frac{4}{3}.$

Решение. $\log_2 \sqrt{3} + \frac{1}{2}\log_2 \frac{4}{3} = \log_2 \sqrt{3} + \log_2 \frac{2}{\sqrt{3}} = \log_2 \left(\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \right) = \log_2 2 = 1.$

Пример 21. Вычислите: $\log_7 196 - 2\log_7 2.$

Решение. $\log_7 196 - 2\log_7 2 = \log_7 196 - \log_7 4 = \log_7 \frac{196}{4} = \log_7 49 = 2.$

Пример 22. Вычислите: $\log_3 ((\log_2 5)(\log_5 8)).$

Решение. $\log_3 ((\log_2 5)(\log_5 8)) = \log_3 \left(\log_2 5 \cdot \frac{1}{\log_8 5} \right) = \log_3 \frac{\log_2 5 \cdot \log_2 8}{\log_2 5} = \log_3 (\log_2 8) = \log_3 3 = 1.$

УПРАЖНЕНИЯ

86. Вычислите значение выражения $\log_5 10 + \log_5 \frac{1}{1250}.$

87. Вычислите значение выражения: $\log_3 0,09 + 2\log_3 10.$

88. Найдите значение $\log_3 3k$, если $\log_3 \frac{k}{9} = 13.$

89. Найдите значение выражения $\log_3 6 + \log_3 1,5.$

90. Найдите значение выражения $-4\log_{11} (11^3).$

91. Найдите значение выражения: $-7\log_{12}(12^2).$

92. Найдите значение выражения $5^{2\lg 11 \cdot \lg^{-1} 5}.$

93. Вычислите значение выражения: $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{225} + \log_{\frac{1}{5}} 9$.
94. Найдите значение выражения: $\frac{1}{3} \cdot 9^{\log_9 15}$.
95. Вычислите значение выражения: $\log_6 30 + \log_6 1,2$.
96. Найдите значение выражения: $\log_{\frac{1}{7}} 245 + \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{5}$.
97. Вычислите значение выражения $\log_5 75 + \log_5 (25)^{-1} - \log_3 3$.
98. Упростите выражение: $2^{\log_2 3} + \log_7 2 - \log_7 14$.
99. Вычислите значение выражения $\frac{\log_3 28 - \log_3 7}{\log_3 \frac{2}{5} + \log_3 5}$.
100. Вычислите значение выражения $\frac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}$.
101. Вычислите значение выражения $\log_8 a$, если $\log_2 a = 6$.
102. Выразите $\log_3 200$ через a и b , если $\log_3 2 = a$ и $\log_3 5 = b$.
103. Выразите величину $\log_{24} 6,75n^b$ через значения a и b , если $\log_n 2 = a$ и $\log_n 3 = b$.
104. Выразите число $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[5]{2,7}$ через a , если $\log_{0,01} 9 = a$.
105. Найдите значение выражения $3^{\log_3 8 \log_a 64}$, если $\log_a 64 = 3$.
106. Найдите значение $\log_4 (8a)$, если $\log_{2a} 0,25 = 2$.
107. Найдите значение выражения: $\sqrt{2}\log_2 4 \cdot \sqrt{\log_4 2}$.
108. Найдите значение выражения $\log_5 (25c)$, если $\log_5 c = 2$.
109. Упростите выражение: $\frac{1}{3}(1 + 9^{\log_3 7})^{\log_{50} 3}$.

110. Упростите выражение: $\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56$.

111. Упростите выражение: $\frac{1}{2}(\log_6 12 + \log_6 3)$.

112. Вычислите

$$(\log_3 27 - \log_3 9) \cdot (\log_3 48 + \log_3 \frac{1}{16}) + \log_3 81.$$

113. Вычислите: $\frac{\log_8 \log_4 \log_2 16}{\log_{16} \log_8 (\log_4 2)^{-2}}$.

114. Вычислите: $\frac{2 + 3 \log_{\sqrt{3}} 3}{\log_{\frac{1}{2}} 4 - 3^{\log_3 0,5}}$.

115. Найдите значение выражения:

$$2 \cdot (\log_{\sqrt{7}} 49 - \log_3 \sqrt{27}) \cdot (\log_6 216 - 3^{\log_9 4}).$$

116. Найдите значение выражения: $\frac{\log_2 25}{\log_{100} 2} - \frac{\log_2 400}{\log_{6,25} 2}$.

117. Найдите значение выражения:

$$(16^{0,25 - 0,5 \log_2 4} + 25^{\log_{125} 8}) \cdot 49^{\log_2^{-1} 7}.$$

118. Вычислите:

$$\log_{\sqrt{2}} (9 + \sqrt[3]{2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{47 + 12\sqrt{15}} \cdot \sqrt[3]{49}).$$

119. Найдите значение выражения:

$$\log_5 (15 + \sqrt[3]{24\sqrt{5} - 40\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{95 + 30\sqrt{10}} \cdot \sqrt[6]{625}).$$

120. Найдите значение выражения: $\log_6^2 27 + \frac{3 \cdot \log_6 12^3}{\log_{108} 6}$.

121. Вычислите: $13 \log_{9\sqrt[6]{3}} (27 \sqrt[6]{3})$.

122. Вычислите: $4 \log_{5\sqrt[7]{5}} (125 \sqrt[7]{5})$.

123. Найдите значение выражения:

$$\log_2 (56 \sqrt{2}) - (\log_2^2 7 + 1 - \log_2 49)^{0,5}.$$

124. Найдите значение выражения:

$$(\log_2^2 3 + 1 - \log_2 9)^{0,5} - \log_2 (12 \sqrt{2}).$$

ТЕСТ № 3

ВАРИАНТ 1

1. Вычислите: $\log_3 54 + \log_3 \frac{1}{2}$.
2. Найдите значение выражения: $-4\log_6 (6^3)$.
3. Найдите значение выражения: $\log_6 (36m)$, если $\log_6 m = -4,5$.
4. Вычислите: $\log_6 12 - \log_6 72$.
5. Найдите значение выражения: $\frac{1}{3} \cdot 9^{\log_9 18}$.
6. Найдите значение выражения: $\lg a + \lg b$, если $\lg (0,01ab) = 2,5$.
7. Вычислите: $\log_5 \log_2 \log_6 6^{32} + 10^{\lg 4}$.
8. Вычислите: $7^{\log_7 3} : \log_3 \frac{1}{3} + \log_3 36 - 2 \log_3 2$.
9. Вычислите: $\frac{\log_2 45}{\log_2 3} - \frac{\log_7 15}{\log_7 3}$.
10. Вычислите: $4 \log_4 \left(7^{\frac{\log_3 4}{\log_3 7}} \cdot 5^{\frac{\log_9 64}{\log_9 5}} \right)$.

ВАРИАНТ 2

1. Вычислите: $\log_4 \frac{1}{5} + \log_4 80$.
2. Найдите значение выражения: $-5\log_7 (7^4)$.
3. Найдите значение выражения: $\log_5 (25x)$, если $\log_5 x = -8,5$.
4. Вычислите: $\log_5 3 - \log_5 75$.
5. Найдите значение выражения: $\frac{1}{4} \cdot 8^{\log_8 24}$.
6. Найдите значение выражения: $\lg a + \lg b$, если $\lg (0,001ab) = 18$.

7. Вычислите: $\log_4 \log_3 \log_7 7^{81} - e^{\ln 4}$.
8. Вычислите: $8^{\log_8 4} : \log_4 \frac{1}{4} + \log_4 144 - 2 \log_4 3$.
9. Вычислите: $\frac{\log_5 48}{\log_5 4} - \frac{\log_{14} 6}{\log_{14} 4}$.
10. Вычислите: $3 \log_6 \left(2^{\frac{\log_6 3}{\log_6 2}} \cdot 6^{\frac{\log_2 12}{\log_2 6}} \right)$.

ВАРИАНТ 3

1. Вычислите: $\log_5 \frac{1}{3} + \log_5 75$.
2. Найдите значение выражения: $5 \log_8 (8^4)$.
3. Найдите значение выражения: $\log_7 (49y)$, если $\log_7 y = -3,5$.
4. Вычислите: $\log_4 20 - \log_4 80$.
5. Найдите значение выражения: $\frac{1}{5} \cdot 37^{\log_{37} 10}$.
6. Найдите значение выражения: $\lg a + \lg b$, если $\lg (0,1ab) = 3,5$.
7. Вычислите: $3 \log_6 \left(2^{\frac{\log_6 3}{\log_6 2}} \cdot 6^{\frac{\log_2 12}{\log_2 6}} \right)$.
8. Вычислите: $6^{\log_6 3} : \log_4 \frac{1}{4} + \log_2 12 - \log_2 3$.
9. Вычислите: $\frac{\log_6 32}{\log_6 2} - \frac{\log_8 16}{\log_8 2}$.
10. Вычислите: $\left(7^{\log_{\frac{1}{3}} 3 - \log_{\frac{1}{7}} 2} \right)^{-1}$.

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС

$\sin \alpha = y$, $\cos \alpha = x$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$, где $M(x, y)$ — точка на единичной окружности, соответствующая углу α .

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Вычислите: $\sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ$.

Решение. $\sin^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \operatorname{ctg}^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 3 = 3\frac{3}{4}$.

Пример 2. Найдите значение выражения:

$$2\sin \pi - 2\cos \frac{3\pi}{2} + 3\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}.$$

Решение. $2 \sin \pi - 2 \cos \frac{3\pi}{2} + 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 0 = 3$.

УПРАЖНЕНИЯ

125. Вычислите: $\operatorname{ctg}^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ + \frac{3}{4} \operatorname{ctg}^2 60^\circ$.

126. Вычислите: $2\sqrt{3} \sin \frac{19\pi}{3} \sin \frac{17\pi}{6}$.

127. Вычислите: $2\sqrt{3} \cos \frac{19\pi}{3} \cos \frac{13\pi}{6}$.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО АРГУМЕНТА

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}n$, $n \in \mathbb{Z}$;
- $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$;
- $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ПРИМЕРЫ

Пример 3. Упростите выражение: $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Решение.
$$\begin{aligned} \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} &= \frac{\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \\ &= \frac{\sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2 + 2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \\ &= \frac{2}{\sin\alpha}. \end{aligned}$$

Пример 4. Докажите тождество:

$$\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Решение. Преобразуем левую часть:
$$\begin{aligned} &\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \\ &= \frac{\sin^2\alpha - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \\ &= \frac{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1} : \frac{\cos\alpha - \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha(1 - \sin^2\alpha)} = \\ &= \frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пример 5. Упростите выражение: $\frac{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}$.

Решение.
$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha (1 - \sin^4 \alpha) + \cos^2 \alpha (1 - \cos^4 \alpha)}{\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)(1 + \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha)}{2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha + 1 + \cos^2 \alpha)}{2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} = \frac{3}{2} = 1,5. \end{aligned}$$

Пример 6. Дано: $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Найдите:

а) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$; б) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

Решение.

а) Возведем обе части исходного выражения в квадрат: $\sin \alpha + \cos \alpha = m$;

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = m^2;$$

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = m^2;$$

$$1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = m^2;$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = m^2 - 1;$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

б) В процессе решения согласно выводам пункта а) мы учтем, что $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}$.

$$\begin{aligned} \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha &= (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \\ &+ \cos^2 \alpha) = (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) = m \cdot \left(1 - \frac{m^2 - 1}{2}\right) = \\ &= m \cdot \left(\frac{2 - m^2 + 1}{2}\right) = \frac{m(3 - m^2)}{2}. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЯ

128. Упростите выражение: $\sin^2 8\alpha + \cos^2 8\alpha + 1$.

129. Упростите выражение: $\frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{2}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

130. Найдите значение выражения:
 $2\sin^2 \alpha + 4 - 3\cos^2 \alpha$, если $4\sin^2 \alpha = 1$.

131. Упростите выражение: $1 - \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \alpha$.

132. Упростите выражение: $\frac{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$.

133. Упростите выражение: $\frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}$.

134. Упростите выражение: $(1 - \cos^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha$.

135. Упростите выражение:
 $(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha)^2 - (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha)^2$.

136. Найдите $\sin x \cdot \cos x$, если $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$.

137. Найдите $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, если $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 7$,
а $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

138. Найдите $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -0,75$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

139. Найдите значение выражения: $3 \sin^2 \alpha - 7 \cos^2 \alpha$,
если $\cos \alpha = -0,1$.

140. Найдите значение выражения: $2 \sin^2 \alpha + 6 \cos^2 \alpha$,
если $\sin \alpha = -0,2$.

141. Найдите значение выражения: $5 - 2 \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x$,
если $\sin x = 0,4$.

142. Найдите значение выражения $\sqrt{15} \sin \alpha$, если
 $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{11}{15}}$, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.

143. Найдите значение $\sqrt{19} \sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{3}{19}}$,
 $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$.

ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$
- $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$
- $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$
- $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$
- $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

ПРИМЕРЫ

Пример 7. Упростите выражение
 $\sin(\alpha + 2\beta) - 2 \cos \alpha \sin 2\beta.$

Решение. $\sin(\alpha + 2\beta) - 2 \cos \alpha \sin 2\beta = \sin \alpha \cos 2\beta +$
 $+ \cos \alpha \sin 2\beta - 2 \cos \alpha \sin 2\beta = \sin \alpha \cos 2\beta - \cos \alpha \sin 2\beta =$
 $= \sin(\alpha - 2\beta).$

УПРАЖНЕНИЯ

144. Упростите выражение: $\cos(2\alpha - \beta) - 2 \sin 2\alpha \sin \beta.$

145. Упростите выражение: $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha}.$

146. Упростите выражение:

$$\frac{\cos^2\alpha \cos^2\beta + 2\sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta + \sin^2\alpha \sin^2\beta}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

147. Упростите выражение:

$$\cos 7,5\alpha \sin 4,5\alpha + \sin 7,5\alpha \cos 4,5\alpha - 2 \cos (6\pi - 12\alpha).$$

148. Вычислите: $\cos 45^\circ \cos 15^\circ + \sin 45^\circ \sin 15^\circ$.

149. Найдите значение выражения:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} + 2 \operatorname{tg} \alpha \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

150. Упростите выражение:

$$\cos 5\alpha \cos 4\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin 5\alpha \sin 4\alpha.$$

151. Найдите значение выражения:

$$\left(\frac{\operatorname{tg}^2 49^\circ - \operatorname{tg}^2 11^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 49^\circ \operatorname{tg}^2 11^\circ} \cdot \operatorname{tg} 52^\circ\right)^4.$$

152. Найдите значение выражения:

$$3 \operatorname{ctg} 60^\circ \cdot (\sin 310^\circ \cos 70^\circ - \sin 70^\circ \cos 310^\circ).$$

153. Вычислите: $\frac{\cos 70^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cos 20^\circ}{\cos 68^\circ \cos 8^\circ + \cos 82^\circ \cos 22^\circ}.$

154. Вычислите: $\frac{1}{4 \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}}.$

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ФОРМУЛ СЛОЖЕНИЯ

- $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$;
- $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$;
- $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,
 $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2}$, $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq \pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$;
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$;
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$;
- $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$;
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$;
- $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$;
- $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$;
- $\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$;
- $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$;
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$;
- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$;
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$;
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$;

- $\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = -\sin \alpha;$
- $\cos (2\pi + \alpha) = \cos \alpha;$
- $\cos (2\pi - \alpha) = \cos \alpha;$
- $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{ctg} \alpha;$
- $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{ctg} \alpha;$
- $\operatorname{tg} (\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha;$
- $\operatorname{tg} (\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha;$
- $\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{ctg} \alpha;$
- $\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{ctg} \alpha;$
- $\operatorname{tg} (2\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha;$
- $\operatorname{tg} (2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha;$
- $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{tg} \alpha;$
- $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{tg} \alpha;$
- $\operatorname{ctg} (\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha;$
- $\operatorname{ctg} (\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha;$
- $\operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{tg} \alpha;$
- $\operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{tg} \alpha;$
- $\operatorname{ctg} (2\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha;$
- $\operatorname{ctg} (2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$

Правило для записи формул приведения:

Знак в правой части формулы ставят тот же, который имеет левая часть с учетом

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Если в левой части формулы угол равен $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то в правой части пишут косинус, если слева был синус, и котангенс, если слева был тангенс, и наоборот; если же в левой части формулы угол равняется $\pi \pm \alpha$ и $2\pi \pm \alpha$, то замены функции не происходит.

ПРИМЕРЫ

Пример 8. Вычислите: $\operatorname{ctg} 135^\circ$.

Решение. $\operatorname{ctg} 135^\circ = \operatorname{ctg} (90^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$.

Пример 9. Вычислите: $\cos 405^\circ$.

Решение. $\cos 405^\circ = \cos (360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 10. Вычислите: $\sin 1020^\circ$.

Решение. $\sin 1020^\circ = \sin (360^\circ \cdot 3 - 60^\circ) = \sin (-60^\circ) =$
 $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 11. Вычислите $\operatorname{ctg} \frac{23\pi}{3}$.

Решение. $\operatorname{ctg} \frac{23\pi}{3} = \operatorname{ctg} \left(7\pi + \frac{2\pi}{3} \right) = \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) =$
 $= -\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 12. Упростите выражение:

$\operatorname{ctg}^2(180^\circ + \alpha) \cos^2(270^\circ - \alpha)$.

Решение. Так как $\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ и $\cos(270^\circ - \alpha) =$
 $= -\sin \alpha$, то получаем
 $\operatorname{ctg}^2(180^\circ + \alpha) \cos^2(270^\circ - \alpha) = (\operatorname{ctg} \alpha)^2 \cdot (-\sin \alpha)^2 =$
 $= \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$.

Пример 13. Упростите выражение: $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$.

Решение. Используем формулы двойного угла для синуса и косинуса: $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{1 + 1 - 2\cos^2 \alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{2 - 2\cos^2 \alpha} =$
 $= \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{2(1 - \cos^2 \alpha)} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{2\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$.

Пример 14. Вычислите:

$2\sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \left(\cos^2 \frac{\pi}{24} - \sin^2 \frac{\pi}{24} \right)$.

Решение. Применяя формулы двойного угла для синуса и косинуса, получим:

$2\sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \left(\cos^2 \frac{\pi}{24} - \sin^2 \frac{\pi}{24} \right) = \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} =$
 $= \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$.

УПРАЖНЕНИЯ

155. Найдите значение $\sin 120^\circ$.

156. Найдите значение $\operatorname{tg} 135^\circ$.

157. Вычислите значение выражения $\cos \frac{11\pi}{2}$.

158. Упростите выражение:

$$\sin^2 (360^\circ - \alpha) \operatorname{tg}^2 (270^\circ + \alpha) + \sin^2 \alpha.$$

159. Упростите выражение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) + \operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right).$$

160. Упростите выражение:

$$\sin (90^\circ - \alpha) + \cos (180^\circ + \alpha) + \operatorname{tg} (270^\circ + \alpha) + \operatorname{ctg} (360^\circ + \alpha).$$

161. Упростите выражение: $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{\cos \alpha - 1}$.

162. Упростите выражение: $\frac{2 \cos \alpha - \sin 2\alpha}{1 - \sin \alpha}$.

163. Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha - 3 = 0$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

164. Найдите значение выражения

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 4 \cos(\pi - \alpha), \text{ если } \cos \alpha = -0,4.$$

165. Вычислите: $\frac{32 \sin 21^\circ \cos 21^\circ \cos 42^\circ}{\sin 96^\circ}$.

166. Вычислите: $96 \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6}$.

167. Вычислите: $\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{16} \cos^3 \frac{\pi}{16} - \sqrt{2} \sin^3 \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16}$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ СМЕШАННОГО ХАРАКТЕРА

ПРИМЕРЫ

Пример 15. Вычислите: $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} - 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos 3\pi$.

Решение. Выделив целые части аргументов и учитывая нечетность функции синуса, получаем:

$$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} - 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos 3\pi = \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\frac{\pi}{6} - \cos(2\pi + \pi).$$

Исключив периоды функций тангенса и косинуса, а также используя нечетность тангенса, получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\frac{\pi}{6} - \cos(2\pi + \pi) &= -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{\pi}{6} - \cos\pi = \\ &= -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - (-1) = 1. \end{aligned}$$

Пример 16. Найдите значение дроби:

$$\frac{\sin 32^\circ \cos 28^\circ + \cos 32^\circ \sin 28^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}.$$

Решение. Числитель данной дроби – синус суммы, если же умножить на 2 числитель и знаменатель дроби, то в знаменателе получим синус двойного аргумента:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 32^\circ \cos 28^\circ + \cos 32^\circ \sin 28^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} &= \frac{\sin(32^\circ + 28^\circ)}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \\ &= \frac{2\sin 60^\circ}{2\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{2\sin 60^\circ}{2\sin(2 \cdot 15^\circ)} = \frac{2\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Пример 17. Вычислите: $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$.

Решение. Так как $\frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$, а $\frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8}$, преобразуем данную сумму, применив формулы приведения и перегруппировав слагаемые; получим:

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} &= \sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \\ + \sin^2 \left(\pi - \frac{3\pi}{8} \right) + \cos^2 \left(\pi - \frac{\pi}{8} \right) &= \sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \\ + \cos^2 \frac{\pi}{8} &= \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} \right) + \left(\cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} \right) = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Пример 18. Упростите выражение: $\frac{1 + \cos 2\alpha}{2\cos^2(3\pi + \alpha)} - \sin^2 \alpha$.

Решение. Используя формулу косинуса двойного аргумента и формулу приведения, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos 2\alpha}{2\cos^2(3\pi + \alpha)} - \sin^2 \alpha &= \frac{1 + 2\cos^2 \alpha - 1}{2\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \\ &= \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Пример 19. Докажите тождество:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha)} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{2\sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin 2\alpha}.$$

Решение. Данный пример — на тождественные преобразования тригонометрических выражений. Для доказательства тождества пользуемся свойствами тригонометрических функций, а также формулами сокращенного умножения.

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha)} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{2\sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin 2\alpha}.$$

Преобразуем левую часть:

$$\begin{aligned} &\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha)} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha)} = \\ &= \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)} - \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = \\ &= \frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Преобразуем правую часть: } \frac{2\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha} = \\ & = \frac{2\sqrt{2}\left(\sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right)}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}. \end{aligned}$$

Левая и правая часть совпадают, значит, тождество верно.

УПРАЖНЕНИЯ

168. Найдите значение выражения: $\sqrt{6}(\sin^2 x - \cos^2 x)$, если $\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $-\frac{3\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{2}$.

169. Найдите значение выражения: $\frac{\cos\alpha - 2\sin 3\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 5\alpha - 2\cos 3\alpha - \sin\alpha}$, если $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

170. Найдите значение выражения: $2,5(\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha)$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3$.

171. Найдите значение выражения: $\operatorname{tg}(\alpha + 135^\circ)$, если $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 0,5$.

172. Найдите значение выражения: $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 5^\circ + \sin 5^\circ)}{2\sin 25^\circ \cdot \cos 25^\circ}$.

173. Найдите значение выражения: $49\sqrt{6}\sin 2x$, если $\cos x = -\frac{5}{7}$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

174. Найдите значение выражения: $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, если $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

175. Найдите значение выражения: $\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}$, если $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

176. Найдите значение выражения $18\cos^2 2\alpha$, если $\cos(3\pi - 4\alpha) = \frac{2}{3}$.

177. Упростите выражение: $\left(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin 2\alpha}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$.

ТЕСТ № 4

ВАРИАНТ 1

1. Упростите выражение: $\frac{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$.
2. Упростите выражение: $1 - \sin \alpha \operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha$.
3. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{3}{2\sqrt{7}}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
4. Найдите значение выражения: $\sqrt{3} \sin 15^\circ \cos 15^\circ$.
5. Вычислите значение выражения: $\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta$, если $\alpha = 42^\circ$, $\beta = 18^\circ$.
6. Найдите значение выражения: $3 \sin^2 x - 1$, если $\cos^2 x = 0,5$.
7. Найдите значение выражения:
 $5 \sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\sin \alpha = 0,5$.
8. Найдите значение выражения: $\sqrt{15} \sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{11}{15}}$, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.
9. Найдите значение выражения: $10 \cos(\operatorname{arctg} \sqrt{3})$.
10. Найдите значение выражения:
 $\frac{\sin 50^\circ \sin 20^\circ + \sin 40^\circ \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ \cos 40^\circ + \sin 70^\circ \cos 50^\circ}$.

ВАРИАНТ 2

1. Упростите выражение: $\frac{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$.
2. Упростите выражение: $1 - \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha$.
3. Найдите $2 \operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
4. Найдите значение выражения: $7 \cos \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12}$.
5. Вычислите значение выражения: $\sin(\alpha + \beta) - 2 \cos \alpha \sin \beta$, если $\alpha = 23^\circ$, $\beta = 53^\circ$.

6. Найдите значение выражения: $5 - 2 \sin^2 x - 1$, если $\cos^2 x = 0,8$.

7. Найдите значение выражения:

$4 \cos(2\pi - \alpha) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\sin \alpha = -0,6$.

8. Найдите значение выражения: $\sqrt{21} \sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{5}{21}}$, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.

9. Найдите значение выражения: $\operatorname{tg}^2\left(\arccos -\frac{1}{4}\right)$.

10. Найдите значение выражения:

$2\sqrt{3} \frac{\sin 50^\circ \sin 100^\circ + \cos 50^\circ \sin 10^\circ}{\cos 40^\circ \cos 100^\circ + \sin 40^\circ \cos 10^\circ}$.

ВАРИАНТ 3

1. Упростите выражение:

$(\sin \alpha - 2 \cos \alpha)^2 + 4 \sin \alpha \cos \alpha$.

2. Упростите выражение: $2 - \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$.

3. Найдите $3 \operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

4. Найдите значение выражения:

$\sqrt{2} \sin 22,5^\circ \cos 22,5^\circ$.

5. Упростите выражение:

$\sin 3\alpha \sin 2\alpha - \cos 3\alpha \cos 2\alpha - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

6. Найдите значение выражения: $4 - 2 \cos^2 x$, если $\sin^2 x = 0,8$.

7. Найдите значение выражения:

$4 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha)$, если $\cos \alpha = -0,9$.

8. Найдите значение выражения: $\sqrt{19} \sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{3}{19}}$, $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$.

9. Найдите значение выражения: $\frac{4}{3} \operatorname{tg}\left(\pi - \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

10. Найдите значение выражения:

$\frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\sin 25^\circ \cos 85^\circ + \sin 245^\circ \sin 85^\circ}{\sin 20^\circ \sin 65^\circ + \sin 290^\circ \cos 65^\circ}$.

ТЕСТ № 5

ВАРИАНТ 1

1. Упростите выражение: $d^{-0,5} \cdot 23d^{4,5}$.
2. Упростите выражение: $\cos^2(\pi - \alpha) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.
3. Вычислите: $\sqrt[3]{0,064 \cdot 8}$.
4. Найдите значение выражения: $\log_7 a$, если $\log_7 a^5 = 15$.
5. Вычислите: $\sqrt[3]{\frac{16}{6}} \cdot \sqrt[3]{81}$.
6. Найдите значение выражения: $\frac{m^{\frac{1}{2}} - m}{m^{\frac{1}{2}}} + \frac{m - n}{n^{\frac{1}{2}} + m^{\frac{1}{2}}}$,
если $m = 9$, $n = 49$.
7. Найдите значение выражения: $\frac{\log_2 40}{\lg 2} - \frac{\log_2 5}{\log_{80} 2}$.
8. Найдите значение выражения: $\sqrt{19} \sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{3}{19}}$, $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$.
9. Упростите выражение: $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} - 8^{-1\frac{2}{3}} + (12^0)^2 \cdot 7 + 32 \cdot 2^{-4} \cdot 16^{-\frac{3}{2}}$.
10. Найдите значение выражения:
$$\frac{\sin 50^\circ \sin 20^\circ + \sin 40^\circ \cos 20^\circ}{\cos 70^\circ \cos 40^\circ + \sin 70^\circ \cos 50^\circ}$$

ВАРИАНТ 2

1. Упростите выражение: $\sqrt[5]{b^5 4^{10}}$.
2. Вычислите: $\frac{a^{\frac{3}{5}}}{a^{-\frac{7}{5}}}$ при $a = 8$.

3. Упростите выражение: $\log_5 \frac{75}{7} + \log_5 \frac{35}{3}$.

4. Найдите значение выражения: $2 + 4 \cos^2 \alpha$, если $\sin^2 \alpha = 0,6$.

5. Вычислите: $\sqrt[3]{\frac{25}{16}} \cdot \sqrt[3]{10}$.

6. Найдите значение выражения: $\frac{p^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}} q^{\frac{1}{4}}}{p^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{1}{4}}} - \frac{p^{\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{4}} - q^{\frac{1}{4}}}$,

если $q = 81$, $p = 16$.

7. Вычислите: $13 \log_{9\sqrt[3]{3}}(27^6 \sqrt{3})$.

8. Найдите значение выражения: $6 \cos^2 x + 2 \sin^2 x$, если $\cos x = -0,2$.

9. Найдите значение выражения: $6x^{0,5} + \frac{x^{-1} - 49}{x^{-0,5} - 7}$ при $x = 64$.

10. Найдите значение выражения: $\frac{4}{3} \operatorname{tg} \left(\pi - \arcsin \left(-\frac{3}{5} \right) \right)$.

ВАРИАНТ 3

1. Упростите выражение: $(\sqrt[4]{m^8 n^2} + 2n) - \sqrt[3]{8n^3}$, если $n \geq 0$.

2. Упростите выражение: $\operatorname{ctg} \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 1$.

3. Вычислите: $2,9^0 + 32^{\frac{1}{5}} \cdot 5$.

4. Вычислите значение выражения: $\lg 5x + \lg 2y$, если $\lg xy = 3$.

5. Найдите значение выражения: $2\sqrt[4]{p^3 q} + \frac{\sqrt[4]{16p^5 q^3}}{\sqrt{4pq}}$, если $q = 32$, $p = 2$.

6. Вычислите: $\frac{2^{-4} \cdot (3^6)^{\frac{2}{3}} \cdot 2^2}{9^2 \cdot 3^{-2}}$.

7. Вычислите: $5 \log_3 25 \cdot \log_5 81 + 15^{\log_{15} 7}$.
8. Найдите значение выражения: $(\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x)^2 - 3$ при $x = -\frac{\pi}{4}$.
9. Найдите значение выражения:
 $\left(7,3 \sqrt[3]{49 \sqrt{7}} - 0,3 \sqrt{7 \sqrt[3]{49}}\right)^{\frac{6}{11}}$.
10. Вычислите: $2 \sqrt{3} \cos \frac{13\pi}{6} \cos \frac{19\pi}{3}$.

ВАРИАНТ 4

1. Упростите выражение: $9a^{\frac{4}{9}} + 2\left(a^{\frac{2}{9}}\right)^2$.
2. Упростите выражение: $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha$.
3. Вычислите: $\log_2 5 \cdot \log_5 2 + \log_3 \sqrt[3]{3}$.
4. Вычислите: $27^{\frac{2}{3}} - 0,27$.
5. Вычислите: $\sqrt[3]{0,008 \cdot 64}$.
6. Упростите выражение: $3^{\log_{36} 16} \cdot 2^{\log_{36} 16}$.
7. Вычислите: $\frac{\sin 7^\circ \cos 7^\circ \cos 14^\circ}{\cos 62^\circ}$.
8. Найдите значение выражения: $\frac{25 - p^{-2}}{5 - p^{-1}} + 5p^{-1}$ при $p = 2$.
9. Найдите значение выражения: $\frac{\log_2 40}{\lg 2} - \frac{\log_2 5}{\log_{80} 2}$.
10. Вычислите: $\log_{\sqrt{2}} \left(4 \cos \frac{\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{\pi}{8}\right)$.

ВАРИАНТ 5

1. Упростите выражение: $17\left(a^{\frac{5}{4}}\right)^8 - 7(a^5)^2$.
2. Упростите выражение: $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

3. Вычислите: $\log_8 7 \cdot \log_{49} 8 + \log_3 \sqrt[7]{3}$.
4. Вычислите: $-17 \cdot 125^{\frac{1}{3}} + 18$.
5. Вычислите: $\sqrt[3]{125 \cdot 0,027}$.
6. Упростите выражение: $3^{2\log_3 4} : 2^{0,5\log_2 16}$.
7. Вычислите: $\frac{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ}{\cos 50^\circ}$.
8. Найдите значение выражения: $\frac{p^{-2} - 9}{3 + p^{-1}} - 6p$ при $p = 0,1$.
9. Найдите значение выражения: $\frac{\log_2 80}{\log_5 2} - \frac{\log_2 20}{\log_{20} 2}$.
10. Вычислите: $\log_2 \sin \frac{\pi}{8} + \log_2 \sin \frac{3\pi}{8} - \log_2 \cos \frac{\pi}{3}$.

ВАРИАНТ 6

1. Упростите выражение: $4b^{\frac{4}{5}} + 5\left(b^{\frac{1}{5}}\right)^4$.
2. Упростите выражение: $2 - \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$.
3. Вычислите: $\log_3 9 \cdot \log_{27} 3 + \log_2 \sqrt[5]{2}$.
4. Вычислите: $14 \cdot 64^{\frac{1}{3}} - 19$.
5. Вычислите: $\sqrt[3]{0,216 \cdot 64}$.
6. Упростите выражение: $2^{\log_2 7} \cdot (0,5)^{\log_2 0,5}$.
7. Вычислите: $\frac{\sin^2 39^\circ - \cos^2 39^\circ}{\sin 174^\circ \sin 84^\circ}$.
8. Найдите значение выражения: $\frac{49 - p^{-4}}{p^{-2} + 7} + 7p$ при $p = 0,5$.
9. Найдите значение выражения: $\frac{\log_4 1,6}{\lg 4} + \frac{\log_4 0,4}{\log_{0,4} 4}$.
10. Вычислите: $\log_2 \sin \frac{\pi}{4} + \log_2 \sin \frac{\pi}{4} - \log_2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

ОТВЕТЫ

1. 3. 2. 3. 3. 8. 4. $\frac{2}{3}$. 5. 3,5. 6. 0,6. 7. 1,5. 8. 5. 9. 7,5.
10. 30. 11. 6. 12. 2,1. 13. 12. 14. 48. 15. 14. 16. $5 + \sqrt{6}$.
17. $\frac{a^2(b-a)^4}{3}$. 18. $-a^3b^2$. 19. $\sqrt{n}$. 20. -2. 21. -1. 22. 3,5.
23. 2. 24. 107. 25. -3. 26. 4. 27. -0,75. 28. -1. Решение:
 $\sqrt{34 - 24\sqrt{2}} = \sqrt{34 - 2 \cdot 12\sqrt{2}} = \sqrt{16 - 2 \cdot 12\sqrt{2} + 18} =$
 $= \sqrt{4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{(4 - 3\sqrt{2})^2} = |4 - 3\sqrt{2}| =$
 $= 3\sqrt{2} - 4$, так как $4 - 3\sqrt{2} < 0$, значит, $a = -4$, $b = 3$,
 $a + b = -4 + 3 = -1$. 29. -1. 30. 3. 31. 15. 32. 42. 33. 10.
34. 26. 35. -4. 36. 6. 37. 2. 38. 10. 39. 6. 40. 1. 41. 47.
42. 1. 43. 13. 44. -26. 45. -125. 46. 14. 47. 10. 48. 23.
49. 71. 50. -477. 51. 27. 52. 125. 53. $\sqrt[4]{1651}$. 54. $4^{0,1}$.
55. $(\sqrt{2})^{3,2}$. 56. $7^{1,2}$. 57. $13^{1,8}$. 58. $6^{0,7}$. 59. $3k^{-4,4}$. 60. $4k^{-5,2}$.
61. $15b^4$. 62. a^4 . 63. a^2 . 64. a^{21} . 65. $\frac{1}{324}$. 66. 4. 67. 4.
68. 3. 69. $\frac{4}{9}$. 70. 64. 71. 350. 72. -3. 73. 27. 74. 1.
75. 2. 76. -0,5. 77. $a < c < b$. 78. -20,2. 79. 55,125.
80. -16,5. 81. 1. 82. 8. 83. 2. 84. 1,5. 85. 1. 86. -3.
87. 2. 88. 16. 89. 2. 90. -12. 91. -14. 92. 121. 93. 2.
94. 5. 95. 2. 96. -2. 97. 0. 98. 2. 99. 2. 100. 2. 101. 2.
102. $3a + 2b$. 103. $\frac{4b - 2a}{3a + b}$. 104. $0,4(3 + a^{-1})$. 105. 3. 106. 0,5.
107. 2. 108. 4. 109. 1. 110. 3. 111. 1. 112. 5. 113. 0.
114. -3,2. 115. 5. 116. 8. 117. 16,5. 118. 2. 119. 1. 120. 36.
121. 19. 122. 11. 123. 4,5. 124. -3,5. 125. 1. 126. 1,5.
127. 1,5. 128. 2. 129. 2. 130. 2,25. 131. $\sin^2\alpha$. 132. $\cos\alpha$.
133. $\operatorname{tg}^2\alpha$. 134. $\cos^2\alpha$. 135. 4. 136. -0,5. 137. -3.

138. $-0,8$. 139. $2,9$. 140. $5,84$. 141. $4,68$. 142. 2 .
 143. -4 . 144. $\cos(2\alpha + \beta)$. 145. $\cos\beta$. 146. $\cos(\alpha - \beta)$.
 147. $\sin 12\alpha - \cos 12\alpha$. 148. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 149. $1 + 2\sqrt{3}$. 150. 0 . 151. 9 .
 152. $-1,5$. 153. 1 . 154. 1 . 155. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 156. -1 . 157. 0 . 158. 1 .
 159. $2\cos\alpha$. 160. 0 . 161. 1 . 162. $-2\sin\alpha$. 163. $0,75$. 164. -2 .
 165. 8 . 166. 9 . 167. $0,25$. 168. 2 . 169. 1 . 170. $-0,7$. 171. 7 .
 172. 1 . 173. -120 . 174. $0,75$. 175. $1,5$. 176. 3 . 177. 3 .

ОТВЕТЫ К ТЕСТАМ

Тест № 1

Вариант 1: 1. $\sqrt[5]{4m^5}$. 2. 2^4x^3 . 3. $\frac{2}{t^2}$. 4. $3c^3$. 5. 3 . 6. 5 .

7. 6 . 8. 2 . 9. 1 . 10. 4 .

Вариант 2: 1. $\sqrt[6]{5x^6}$. 2. 7^4c^5 . 3. $1,25m$. 4. $2a^2$. 5. 4 .
 6. 1 . 7. $2,5$. 8. 6 . 9. 3 . 10. -4 .

Вариант 3: 1. $\sqrt[7]{9^7q^3}$. 2. 11^3d^2 . 3. $0,5a^3$. 4. $3a$. 5. 5 .
 6. 2 . 7. $0,75$. 8. 2 . 9. 5 . 10. 1 .

Тест № 2

Вариант 1: 1. $5^{1,7}$. 2. $14a^4$. 3. $70m^{\frac{4}{7}}$. 4. $10c^{10}$. 5. 4 .
 6. 16 . 7. -1 . 8. -4 . 9. $0,3$. 10. 1 .

Вариант 2: 1. $6^{3,9}$. 2. $11b^{-5,2}$. 3. $5a^{\frac{5}{6}}$. 4. $19a^7$. 5. 3 .
 6. 25 . 7. -2 . 8. $18,5$. 9. $0,4$. 10. -2 .

Вариант 3: 1. $7^{1,8}$. 2. $36x^{1,4}$. 3. $10c^{\frac{3}{7}}$. 4. $-7x^{15}$. 5. 3 .
 6. 32 . 7. 20 . 8. $55,125$. 9. $0,4$. 10. 5 .

Тест № 3

Вариант 1: 1. 3 . 2. -12 . 3. $-2,5$. 4. -1 . 5. 6 . 6. $4,5$.
 7. 5 . 8. -1 . 9. 1 . 10. 16 .

Вариант 2: 1. 2 . 2. -20 . 3. $-6,5$. 4. -2 . 5. 6 . 6. 21 .
 7. -3 . 8. -2 . 9. $1,5$. 10. 6 .

Вариант 3: 1. 2 . 2. 20 . 3. $-1,5$. 4. -1 . 5. 2 . 6. $4,5$. 7. -3 .
 8. -1 . 9. 1 . 10. $3,5$.

Тест № 4

Вариант 1: 1. $\operatorname{ctg}^2 \alpha$. 2. $\sin^2 \alpha$. 3. $-\frac{4}{\sqrt{19}}$. 4. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 5. 0,5.
6. 0,5. 7. 2. 8. 2. 9. $5 + \sqrt{3}$. 10. 1.

Вариант 2: 1. $\operatorname{tg}^2 \alpha$. 2. $\cos^2 \alpha$. 3. -1. 4. 1,75. 5. 0,5.
6. 3,8. 7. -4. 8. 4. 9. 15. 10. 6.

Вариант 3: 1. $1 + 3\cos^2 \alpha$. 2. $2\cos^2 \alpha$. 3. -2. 4. 0,5.
5. $\sin \alpha - \cos 5\alpha$. 6. 3,6. 7. -2,7. 8. -4. 9. 1. 10. -0,5.

Тест № 5

Вариант 1: 1. $23d^4$. 2. 1. 3. 0,08. 4. 3. 5. 6. 6. -6.
7. 3. 8. -4. 9. 10. 10. 1.

Вариант 2: 1. 4^2b . 2. 64. 3. 3. 4. 3,6. 5. 2,5. 6. -3. 7. 19.
8. 2,16. 9. 55,125. 10. 1.

Вариант 3: 1. $m^2\sqrt{n}$. 2. $-\sin^2 \alpha$. 3. 11. 4. 4. 5. 12.
6. 2,25. 7. 47. 8. 1. 9. 7. 10. 1,5.

Вариант 4: 1. $11a^{\frac{4}{9}}$. 2. $\operatorname{tg}^3 \alpha$. 3. $\frac{4}{3}$. 4. 8,73. 5. 1,6.
6. 4. 7. 0,25. 8. 8. 9. 3. 10. 1.

Вариант 5: 1. $10a^7$. 2. $-\frac{1}{\cos 2\alpha}$. 3. $\frac{13}{7}$. 4. -67. 5. 1,5.
6. 4. 7. 0,5. 8. 6,4. 9. -4. 10. 0,5.

Вариант 6: 1. $9b^{\frac{4}{5}}$. 2. $2\sin^2 \alpha$. 3. $\frac{13}{15}$. 4. 37. 5. 2,4.
6. 14. 7. -2. 8. 6,5. 9. 1. 10. -1.

Тесты

**Слонимская Ирина Семеновна
Слонимский Лев Иосифович**

МАТЕМАТИКА

**Экспресс-репетитор
для подготовки к ЕГЭ**

ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Редакция «Образовательные проекты»

**Редактор Г.Н. Хромова
Художественный редактор Т.Н. Войткевич
Технический редактор А.Л. Шелудченко
Корректор И.Н. Мокина**

**Оригинал-макет подготовлен ООО «БЕТА-Фрейм»
Обложка — дизайн-группа «Дикобраз»**

**Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — литература учебная**

**Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.001683.02.10 от 05.02.2010 г.**

**ООО «Издательство Астрель»
129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а**

**ООО «Издательство АСТ»
141100 Россия, г. Щелково, ул. Заречная, д. 96**

Наши электронные адреса: www.ast.ru

E-mail: astpub@ha.ru

**ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7
Качество печати соответствует качеству предоставленных диапозитивов**

**По вопросам приобретения книг обращаться по адресу:
129085, Москва, Звездный бульвар, д. 21, 7-й этаж
Отдел реализации учебной литературы издательской группы «АСТ»
Справки по тел.: (495)615-53-10, 232-17-04**

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА



ПРИБОРЕТАЙТЕ КНИГИ ПО ИЗДАТЕЛЬСКИМ ЦЕНАМ
В СЕТИ КНИЖНЫХ МАГАЗИНОВ **буква**

МОСКВА:

- м. «Алексеевская», Звездный б-р, д. 21, стр. 1, т. (495) 232-19-05
- м. «Алексеевская», пр-т Мира, д. 114, стр. 2 (Му-Му), т. (495) 687-45-86
- м. «Алтуфьево», Дмитровское ш., д. 163 А, ТРЦ «РИО»
- м. «Бауманская», ул. Спартаковская, д. 16, т. (495) 267-72-15
- м. «Бибирево», ул. Пришвина, д. 22, ТЦ «Александр Лэнд», этаж 0, т. (495) 406-92-65
- м. «ВДНХ», г. Мытиши, ул. Коммунистическая, д. 1. ТРК «XL - 2», т. (495) 641-22-89
- м. «Домодедовская», Ореховый б-р, вл. 14, стр. 3, ТЦ «Домодедовский», т. (495) 983-03-54
- м. «Каховская», Чонгарский б-р, д. 18, т. (499) 619-90-89
- м. «Коломенская», ул. Судостроительная, д. 1, стр. 1, т. (499) 616-20-48
- м. «Коньково», ул. Профсоюзная, д. 109, корп. 2, т. (495) 429-72-55
- м. «Крылатское», Осенний б-р, д. 18, корп. 1, т. (495) 413-24-34, доб. 31
- м. «Крылатское», Рублевское ш., д. 62, ТРК «Евро Парк», т. (495) 258-36-14
- м. «Марксистская»/«Таганская», Бол. Факельный пер., д. 3, стр. 2, т. (495) 911-21-07
- м. «Менделеевская»/«Новослободская», ул. Новослободская, д. 26, т. (495) 251-02-96
- м. «Новые Черемушки», ТЦ «Черемушки», ул. Профсоюзная, д. 56, 4-й этаж, пав. 4а-09, т. (495) 739-63-52
- м. «Парк культуры», Зубовский б-р, д. 17, стр. 1, т. (499) 246-99-76
- м. «Перово», ул. 2-я Владимирская, д. 52, т. (495) 306-18-97
- м. «Петровско-Разумовская», ТРК «XL», Дмитровское ш., д. 89, т. (495) 783-97-08
- м. «Пражская», ул. Красного Маяка, д. 26, ТЦ «Пражский Пассаж», т. (495) 721-82-34
- м. «Преображенская площадь», ул. Бол. Черкизовская, д. 2, корп. 1, т. (499) 161-43-11
- м. «Сокол», ТК «Метромаркет», Ленинградский пр-т, д. 76, корп. 1, 3-й этаж, т. (495) 781-40-76
- м. «Теплый стан», Новоясеневский пр-т., вл. 1, ТРЦ «Принц Плаза»
- м. «Тимирязевская», Дмитровское ш., д. 15, корп. 1, т. (495) 977-74-44
- м. «Тульская», ул. Большая Тульская, д. 13, ТЦ «Ереван Плаза», т. (495) 542-55-38
- м. «Царицыно», ул. Луганская, д. 7, корп. 1, т. (495) 322-28-22
- м. «Университет», Мичуринский пр-т, д. 8, стр. 29, т. (499) 783-40-00
- м. «Шелковская», ул. Уральская, д. 2
- м. «Шукинская», ул. Шукинская, вл. 42, ТРК «Шука», т. (495) 229-97-40
- м. «Юго-Западная», Солцевский пр-т., д. 21, ТЦ «Столица», т. (495) 787-04-25
- м. «Ясенево», ул. Паустовского, д. 5, корп. 1, т. (495) 423-27-00
- М.О., г. Железнодорожный, ул. Советская, ТЦ «Эдельвейс»
- М.О., г. Зеленоград, ТЦ «Иридиум», Крюковская площадь, д. 1
- М.О., г. Клин, ул. Карла Маркса, д. 4, ТЦ «Дарья», т. (496)(24) 6-55-57
- М.О., г. Коломна, Советская площадь, д. 3, Дом Торговли, т. (496)(61) 50-3-22
- М.О., г. Люберцы, Октябрьский пр-т, д. 151/9, т. (495) 554-61-10
- М.О., г. Сергиев Посад, ул. Вознесенская, д. 32А, ТЦ «Счастливая семья»
- М.О., г. Электросталь, ул. Ленина, д. 010, ТЦ «Эльград»

РЕГИОНЫ:

- Архангельск, 103-й квартал, ул. Садовая, д. 18, т. (8182) 65-00-95
- Белгород, Народный б-р, д. 82, т. (4722) 32-53-26
- Владимир, ул. Дворянская, д. 10, т. (4922) 42-06-59
- Волгоград, ул. Мира, д. 11, т. (8442) 33-13-19
- Екатеринбург, ул. Сулимова, д. 50, ТРК «Парк Хаус», т. (343) 216-55-02
- Ижевск, ул. Автозаводская, д. 3а, ТРЦ «Столица», т. (3412) 90-38-31
- Калининград, ул. Карла Маркса, д. 18, т. (4012) 71-85-64
- Краснодар, ул. Дзержинского, д. 100, ТЦ «Красная площадь», т. (861) 210-41-60
- Красноярск, пр-т Мира, д. 91, т. (3912) 23-17-65
- Курган, ул. Гоголя, д. 55, т. (3522) 43-39-29
- Курск, ул. Радишева, д. 86, т. (4712) 56-70-74
- Курск, ул. Ленина, д. 11, т. (4712) 70-18-42
- Липецк, пл. Коммунальная, д. 3, т. (4742) 22-27-16
- Мурманск, пр-т Ленина, д. 53, т. (8152) 47-20-43
- Новосибирск, ул. Ватутина, д. 107, ТЦ «Мега», т. (383) 230-12-91
- Пенза, ул. Московская, д. 83, ТЦ «Пассаж», т. (8412) 20-80-35
- Пермь, ул. Революции, д. 60/1, ТЦ «7 пятниц», т. (342) 233-40-49
- Ростов-на-Дону, Новочеркасское ш., д. 33, ТЦ «Мега», т. (863) 265-83-34
- Рязань, Первомайский пр-т, д. 70, корп. 1, ТЦ «Виктория Плаза», т. (4912) 95-72-11
- Самара, ул. Дыбенко, д. 30, ТЦ «Космопорт», т. 8-908-374-19-60
- Санкт-Петербург, Гражданский пр-т, д. 41, ТЦ «Академический», т. (812) 380-17-84
- Санкт-Петербург, ул. Чернышевская, д. 11/57, т. (812) 273-44-13
- Санкт-Петербург, Лиговский пр-т, д. 185, т. (812) 766-22-88
- Тверь, ул. Советская, д. 7, т. (4822) 34-53-11
- Тольятти, ул. Ленинградская, д. 55, т. (8482) 28-37-68
- Тула, ул. Первомайская, д. 12, т. (4872) 31-09-22
- Тула, пр-т Ленина, д. 18, т. (4872) 36-29-22
- Тюмень, ул. М.Горького, д. 44, стр. 4, ТРЦ «Гудвин», т. (3452) 79-05-13
- Уфа, пр. Октября, д.26-40, ТРЦ «Семья», т. (3472)293-62-88
- Чебоксары, ТЦ «Мега Молл», ул. Калинина, д. 105а, т. (8352) 28-12-59
- Череповец, Советский пр-т, д. 88а, т. (8202) 53-61-22
- Ярославль, ул. Свободы, д. 12, т. (4852) 72-86-61

Широкий ассортимент электронных и аудиокниг
ИГ АСТ Вы можете найти на сайте www.elkniga.ru

Заказывайте книги почтой в любом уголке России
123022, Москва, а/я 71 «Книги – почтой»
или на сайте: shop.avanta.ru

Курьерская доставка по Москве и ближайшему Подмосковию:
Тел/факс: +7(495)259-60-44, 259-41-71

Приобретайте в Интернете на сайте: www.ozon.ru

Издательская группа АСТ www.ast.ru
129085, Москва, Звездный бульвар, д. 21, 7-й этаж
Информация по оптовым закупкам: (495) 615-01-01, факс 615-51-10
E-mail: zakaz@ast.ru

Данное пособие рассчитано на самостоятельную подготовку школьников и абитуриентов к ЕГЭ.

В него входят задания, включающие темы «Выражения» и «Преобразования».

Каждый раздел предваряется кратким теоретическим материалом и содержит большое количество примеров решения задач.

Количество заданий в каждой теме варьируется в зависимости от ее сложности, а также от количества заданий в ЕГЭ, посвященных данной теме.

Каждая тема включает в себя упражнения, которые позволят учащимся самостоятельно повторить и закрепить изученное и успешно справиться с заданиями ЕГЭ.

Чтобы проверить, усвоен ли материал, в конце книги ко всем упражнениям приведены ответы.